1.
2.
3.

Name:

Matrikelnummer:

Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

1. Übungstest am 15.05.2024 - Gruppe B (Eigenthaler)

1. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{4n^2+1}{n^2-3}$ für $n \geq 2$.

   (a) Man bestimme den Grenzwert der Folge. (1 Punkt)

   (b) Man beweise, dass die Folge monoton ist. (1 Punkt)

   (c) Man beweise, dass die Folge beschränkt ist, und bestimme das Infimum und Supremum der Folgenglieder. (1 Punkt)

Lösung: (a) Nach Satz 4.14 und dem bekannten Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n^2}} =$

$$= \frac{4+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}{1-3\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{4+0^2}{1-3\cdot 0^2} = \underline{\underline{4.}}$$

(b) $a_2 = \frac{4\cdot 4+1}{4-3} = 17$, $a_3 = \frac{4\cdot 9+1}{9-3} = \frac{37}{6} \leq 17 = a_2$, also behaupten wir: $(a_n)_{n\geq 2}$ ist monoton fallend.

Beweis: $a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{4(n+1)^2+1}{(n+1)^2-3} \leq \frac{4n^2+1}{n^2-3} \iff$

$(4n^2+8n+5)(n^2-3) \leq (4n^2+1)(n^2+2n-2) \iff$

$4n^4+8n^3+5n^2-12n^2-24n-15 \leq 4n^4+8n^3-8n^2+n^2+2n-2$

$\iff -24n-15 \leq 2n-2 \iff 0 \leq 26n+13.$ $\square$

Schneller geht es so: $a_n = \frac{4(n^2-3)+13}{n^2-3} = 4 + \frac{13}{n^2-3}$, und das ist offensichtlich monoton fallend (Polynom-Division).

(c) Nach Satz 4.11 ist $(a_n)_{n\geq 2}$ als konvergente Folge beschränkt. Da $(a_n)_{n\geq 2}$ monoton fällt, ist $a_2 = 17$ das Supremum der Folgenglieder. Nach dem Beweis von Satz 4.12 ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$ das Infimum der Folgenglieder.

2. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(x-3)^n}{n(n+1)}$$

konvergiert. Untersuchen Sie insbesondere auch die Konvergenz an den beiden Randpunkten des Konvergenzintervalls. (3 Punkte)

Lösung: Wir wenden das Quotientenkriterium in Limesform (Satz 4,53) auf die Folge $a_n = \frac{(n+2)(x-3)^n}{n(n+1)}$ an:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+3)(x-3)^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \Big/ \frac{(n+2)(x-3)^n}{n(n+1)}\right| =$$

$$= |x-3| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} \cdot |x-3| =$$

$$= |x-3| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}} = |x-3| \cdot \frac{1+0}{1+0+0} = |x-3|,$$

also ist die Reihe für $|x-3| < 1$ (also $x \in (2,4)$) konvergent und für $|x-3| > 1$ divergent.

Untersuchung der Randpunkte: (i) $x=2$ führt auf die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(-1)^n}{n(n+1)}$. Es ist $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1\cdot(1+\frac{1}{n})} = \frac{0+0}{1\cdot(1+0)} = 0,$$

und $\frac{n+2}{n(n+1)}$ ist monoton fallend:

$$\frac{n+3}{(n+1)(n+2)} \le \frac{n+2}{n(n+1)} \iff \frac{n+3}{n+2} \le \frac{n+2}{n} \iff n^2+3n \le$$

$$\le n^2+4n+4 \iff 0 \le n+4.$$

Nach dem Kriterium von Leibniz (Satz 4,41) ist daher die Reihe für $x=2$ konvergent.

(ii) $x=4$ führt auf die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{n+1} \geq$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist (Beispiel 4,36), ist nach Satz 4,48 auch die Reihe für $x=4$ divergent. Somit ist $[2,4)$ der Konvergenzbereich.

3. Gegeben sei die elementare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4\,(e^{2x} - 1)$. Man berechne die Umkehrfunktion f^{-1} und gebe für beide Funktionen Definitionsbereich und Wertebereich an. (2 Punkte)

Lösung: $f(x)$ ist stetig, streng monoton wachsend, und es gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4\cdot(\infty - 1) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4\cdot(0-1) = -4$. Also ist f eine bijektive Funktion von $\mathbb{R}$ auf $f(\mathbb{R}) = (-4,\infty)$.

Daher existiert die Umkehrfunktion f^{-1}, ist nach Satz 4.66 ebenfalls streng monoton wachsend und nach Satz 4.81 stetig. f^{-1} ist eine bijektive Funktion von $(-4,\infty)$ auf $f^{-1}(-4,\infty) = \mathbb{R}$.

Berechnung von f^{-1}: Wir haben $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Es gilt: $y = 4\cdot(e^{2x}-1) \Leftrightarrow \frac{y}{4} + 1 = e^{2x} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y}{4}+1\right) = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{y}{4}+1\right) = x$. Tauschen wir die Rollen von x und y (graphisch: Spiegelung an der Geraden $y=x$), so haben wir als Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x}{4}+1\right) = \ln\sqrt{\frac{x}{4}+1}$, $x > -4$.

Probe: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(4\cdot(e^{2x}-1)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4(e^{2x}-1)}{4}+1\right) =$
$= \frac{1}{2}\cdot\ln(e^{2x}-1+1) = \frac{1}{2}\cdot\ln(e^{2x}) = \frac{1}{2}\cdot 2x = x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)\right) = 4\cdot\left(e^{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)} - 1\right) =$
$= 4\cdot\left(e^{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)} - 1\right) = 4\cdot\left(\frac{x}{4}+1-1\right) = 4\cdot\frac{x}{4} = x$,
$\forall x > -4$. □