Nach Satz von Schwarz: $f_{xy} = f_{yx}, \ldots$ (Ist f m-mal stetig partiell differenzierbar in D, so sind alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung m unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation)

Jacobi Matrix Darunter versteht man eine $m \times n$ Ableitungsmatrix bzw. Funktionalmatrix einer differenzierbaren Funktion, die alle ersten partitielle Ableitungen enthält

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Quadratische Form:

Die quadratische Form aus Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und einer symmetrischen Matrix $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, mit $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$ ist $q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$

Beispiele:

- n=2: $q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$
- n=3: $q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2$

Definitheit:

Eine (symmetrische) Matrix A heißt

- Positiv Definit bei $q(\vec{x}) > 0 \forall \vec{x} \neq 0$ (Positiv Semidefinit bei $q(\vec{x}) \geq 0$)
- Negativ Definit bei $q(\vec{x}) < 0 \forall \vec{x} \neq 0$ (Negativ Semidefinit bei $q(\vec{x}) \leq 0$)
- Indefinit sonst

Hauptminorenkriterium:

$q(\vec{x}) = \vec{x} \cdot A \cdot \vec{x}^T$ ist positiv definit $\Leftrightarrow$ Alle Hauptminoren sind positiv.
$q(\vec{x})$ ist negativ definit $\Leftrightarrow$ $-q(\vec{x})$ positiv definit ist.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Pos. def., wenn: } \Rightarrow A_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Laplace'scher Entwicklungssatz (Determinanten berechnen):
Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$:

- Entwicklung nach der i-ten Zeile: $\forall i \leq n : detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} detA_{ij}$
- Entwicklung nach der i-ten Spalte: $\forall i \leq n : detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} detA_{ij}$

$(-1)^{i+j}$ bildet ein Schachbrettmuster: $\begin{vmatrix} + & - & + & + & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & + & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$

Beispiel (Entwicklung nach erster Zeile(1. Zeile ausgeblendet)):

$$det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = +a_{11} * \underbrace{det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}_{\text{1. Spalte ausgeblendet}} - a_{12} * \underbrace{det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}_{\text{2. Spalte ausgeblendet}} +$$

$$a_{13} * \underbrace{det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}}_{\text{3. Spalte ausgeblendet}} - a_{14} * \underbrace{det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}}_{\text{4. Spalte ausgeblendet}} \Rightarrow \text{Bis Matrizen} \leq 3 \times 3\text{, dann trivial}$$

Relative Extrema

1. Stationäre Punkte $\vec{x_0}$ suchen: $grad\ f(\vec{x_0}) = \vec{0}$
2. Hesse Matrix $H = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x_0}))$ bei stationären Punkten untersuchen. Ist
   - H pos definit $\Rightarrow \vec{x_0}$ relatives Minimum
   - H neg definit $\Rightarrow \vec{x_0}$ relatives Maximum
   - H indefinit $\Rightarrow \vec{x_0}$ Sattelpunkt

Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

1. Nebenbedingung(en) auf die Form $g_i(\vec{x}) = 0$ bringen:
2. Lagrange Funktion $F(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) - \lambda_1 \cdot g_1(\vec{x}) - \ldots - \lambda_m \cdot g_m(\vec{x})$ bilden
3. Den Grad von F nullsetzten: $grad\ F = \vec{0}$ ($m + n$ Gleichungen in $m + n$ Variablen)

Reduktionsmethode
Rückführung von Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen auf Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen durch Ausdrücken der Variablen in den Nebenbedingungen und anschließendem Einsetzten dieser in die Zielfunktion: z.B.: wird aus $f(x, y, z) \Rightarrow \widetilde{f}(x, y)$

Skalarfeld
Das ist eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes einen Skalar(reelle Zahl) zuordnet ($f : D_{\subseteq \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ mit $y = f(\vec{x})$)

Vektorfeld
Das ist eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes einen Vektor zuordnet ($\vec{f} : D_{\subseteq \mathbb{R}^m} \to \mathbb{R}^n$ mit $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.) Der Gradient ist die Verallgemeinerung der Ableitung für Funktionen mit mehreren Variablen. Die Ableitung eines Skalarfeldes ist ein Vektorfeld. (Ist F ein Skalarfeld, dann ist $\vec{f} = grad\ F$ das daraus abgeleitete Vektorfeld)

Gradientenfeld
Bedeutet quasi, dass ein Vektorfeld integrierbar ist, also besagt ob es zu einem Vektorfeld $\vec{f}$ ein Skalarfeld F gibt, sodaß $grad\ F = \vec{f}$

Sei $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} : D_{\subseteq \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^n$ eine Vektorfeld, welches die

Integrabilitätsbedingung $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i, j \leq n$ erfüllt,
dann gilt unter der Vorraussetztung, dass

- $\vec{f}$ stetig differenzierbar und
- D einfach zusammenhängend ist (dh. wenn sich jede Kurve stetig auf ihre Punkte zusammenziehen lässt)

$\Rightarrow \vec{f}$ ist Gradientenfeld

Satz von Fubini
Sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, dann gilt:

$$\iint\limits_B f(x, y)\ dxdy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\ dydx$$

Analog:
Sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$, dann gilt:

$$\iint\limits_B f(x, y)\ dxdy = \int_a^b \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\ dxdy$$

Substitutionsregel für Bereichsintegrale:
Seien $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ zwei stetig diffbare Fkt, die den Bereich B bijektiv auf

$$B' = \{(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \mid (x, y) \in B\}$$

abbilden, dann gilt:

$$\iint\limits_{B'} f(u, v)\ du\ dv = \iint\limits_B f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \cdot \left| det \begin{pmatrix} \varphi_x(x, y) & \varphi_y(x, y) \\ \psi_x(x, y) & \psi_y(x, y) \end{pmatrix} \right|\ dx\ dy$$

Bei einer Variable sieht man, dass die gewöhnlich Substitutionsregel herauskommt:

$$\int\limits_{B'} f(u)\ du = \int\limits_B f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)| \text{ mit } B' = \{\varphi(x) \mid x \in B\}$$

Bei drei Variablen sähe die Substitutionsregel folgendermaßen aus:

$$\iiint\limits_{B'} f(u, v, w)\ du\ dv\ dw = \iiint\limits_B f(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \theta(x, y, z)) \cdot \left| det \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \end{pmatrix} \right|\ dx\ dy\ dz$$

$$\text{,mit } B' = \{(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \theta(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in B\}$$

Volumen und Mantelfläche von Drehkörpern
Rotation um die x-Achse:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \; dx$$

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \; dx$$

Rotation um die y-Achse:

$$V = \pi \int_{min(f(a),f(b))}^{max((f(a),f(b)))} (f^{-1}(y))^2 \; dy = \pi \int_{min(f(a),f(b))}^{max((f(a),f(b)))} x^2 \; dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| \; dx$$

$$M = 2\pi \int_{min(f(a),f(b))}^{max((f(a),f(b)))} f^{-1}(y) \cdot \sqrt{1 + [(f^{-1}(y))']^2} \; dy$$

Bogenlänge L
Sei $\vec{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig diffbare Kurve, dann ist die Bogenlänge L:

$$L = \int_a^b ||\vec{c}(t)|| \; dt = L = \int_a^b \sqrt{c_1'(t) + \ldots + c_n'(t)} \; dt$$

$\Rightarrow$ Jede stetig diffbare Kurve ist rektifizierbar (hat eine endliche Länge)