Analysis I Übung - Blatt 1, für den 12. 10. 2010

1. Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathbb{B} = \{f, w\}$. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen
   (a) Elemente von M und $\mathbb{B}$
   (b) Elemente von $M \times M$
   (c) Teilmengen von M und $\mathbb{B}$
   (d) Abbildungen von M nach $\mathbb{B}$
   (e) Abbildungen von M nach M
   (f) Abbildungen von $M \times M$ nach M
   (g) bijektive Abbildungen von M nach M
   (h) injektiven Abbildungen von $\mathbb{B}$ nach M

2. Sei K ein Körper mit den Körperoperationen $+, \times, -, (\ )^{-1}$ und neutralen Elementen 0 und 1. Sei $\widetilde{K}$ eine Menge, und $f : K \to \widetilde{K}$ eine bijektive Abbildung mit Umkehrfunktion f^{-1}. Man zeige, dass $\widetilde{K}$ mit den neutralen Elementen $\widetilde{0} := f(0)$ und $\widetilde{1} := f(1)$, und den für $a, b \in \widetilde{K}$ wie folgt definierten Operationen
   (a) $a \widetilde{+} b := f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b))$
   (b) $a \widetilde{\times} b := f(f^{-1}(a) \times f^{-1}(b))$
   (c) $\widetilde{-} a := f(-f^{-1}(a))$
   (d) $a^{-1} := f((f^{-1}(a))^{-1}) \quad$ für $a \neq \widetilde{0}$

   ein Körper ist.

3. Geben Sie 6 verschiedene Wertetabellen für Körper über der Menge $\{0, 1, 2\}$ an. Benennen Sie die neutralen Element bezüglich $+$ und $\times$ mit n und e, das verbleibende dritte Element mit z. Zeigen Sie zuerst dass $e + e = z$ sein muss.

4. Versuchen Sie Wertetabellen für einen Köper mit 4 Elementen aufzustellen. Alle Hilfsmittel sind erlaubt.

5. Zeigen Sie dass $A := \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit den aus der Schule bekannten Rechenregeln ein Körper ist.

6. Betrachte die Menge $M = \mathbb{R}^2$ mit den Operationen
   (a) $(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
   (b) $(a_1, a_2) \odot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$

   Man verwende die Information $\mathbb{R}$ ist ein Körper. Bestimmen Sie die neutralen Elemente bezüglich $\oplus$ und $\odot$. Kann M mit diesen Operationen zu einem Körper gemacht werden ?

7. (a) Seien X und Y Mengen, $A : X \times Y \to \{f, w\}$ eine Aussageform. Man zeige

$$\exists\, y \in Y : \forall\, x \in X : A(x,y) \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in X : \exists\, y \in Y : A(x,y)$$

   (b) Sei X eine Menge, und für $i, j \in \{1,2\}$ seien $A_{i,j} \subset X$. Man zeige

$$\bigcup_{i\in\{1,2\}} \bigcap_{j\in\{1,2\}} A_{i,j} \subset \bigcap_{j\in\{1,2\}} \bigcup_{i\in\{1,2\}} A_{i,j}$$

8. Sei $m \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass die Relation

$$a \equiv b :\Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z} : a - b = jm$$

für $a, b \in \mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation ist. Schulwissen über $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ darf vorausgesetzt werden.

Man zeige, dass für $a \equiv b$ und $c \equiv d$ auch $a + c \equiv b + d$ und $ac \equiv bd$ ist.