

Hinweis: Verwenden Sie für Ihre Lösungen keinen Taschenrechner und geben Sie die einzelnen Lösungsschritte an, sodass ersichtlich ist, wie Sie zu Ihren Lösungen gekommen sind! Sollte die Verwendung eines Taschenrechners zur Lösung einzelner Beispiele erforderlich sein, wird speziell darauf hingewiesen. Auch bei den Tests sind keine elektronischen Hilfsmittel (Taschenrechner, Handy etc.) erlaubt.

Aufgabe 1: Numerik - Fehlerberechnung

Gegeben sei das folgende Gleitpunktformat

$$\begin{aligned} b &= 10 \\ p &= 5 \\ e_{min} &= -48 \\ e_{max} &= +49 \\ Exzess &= 49 \\ denorm &= false \end{aligned}$$

Berechnen Sie folgende eigentlich identen Ausdrücke unter Verwendung des angegebenen Gleitpunktformats. Verwenden Sie als Rundungsregel *round to nearest* in Kombination mit *round towards minus infinity*! Summieren Sie in angegebener Reihenfolge! Welches Ergebnis wird der exakten Lösung am nächsten kommen? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\sum_{i=0}^9 (2)^{2i-3} = \sum_{i=0}^9 2^{-2i+15}$$

Aufgabe 2: Numerik - Rechnen mit Gleitpunktzahlen

Gegeben sei folgender Ausdruck

$$s = [8x^3 - (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) - y^3] (x + y)^2$$

$$x = (66000, 0)_{10}$$

$$y = (11, 0)_{10}$$

- Berechnen Sie s unter Verwendung des Gleitpunktformats aus Beispiel 1. Ermitteln Sie analytisch die exakte Lösung und vergleichen Sie diese mit Ihrem numerisch berechnetem Ergebnis. Führen Sie die Berechnungen von Summen und Produkten in der im Ausdruck stehenden Reihenfolge aus.
- Was fällt Ihnen beim Vergleich der beiden Ergebnisse auf?

Hinweis: Bei diesem Beispiel ist der Einsatz eines Taschenrechners zur Lösung von Grundoperationen erlaubt.

Aufgabe 3: Numerik - Fehlerberechnung

Berechnen Sie die Summe der angegebenen Zahlen in gegebener Reihenfolge unter Verwendung des Gleitpunktformats aus Beispiel 1.

$$(0 \ 51 \ 28000, 0 \ 46 \ 48000, 0 \ 46 \ 37000, 1 \ 51 \ 25000, 0 \ 45 \ 47000, 0 \ 45 \ 39000, 0 \ 50 \ 60000, 0 \ 45 \ 49000)$$

- Berechnen Sie die Summe mittels naiver Summation.

- b) Berechnen Sie die Summe mittels Kahan Summation.
- c) Vergleichen Sie die Ergebnisse beider Methoden. In welchem Fall können Rundungsfehler durch die Kahan-Summation kompensiert werden?

Aufgabe 4: Multiplikation und Division von Gleitpunktzahlen

Gegeben sind die folgenden Dezimalzahlen:

$$A = (E.5B5B8)_{16}$$

$$B = (1B7.D8D)_{16}$$

- a) Stellen Sie A und B in folgendem, im IEEE 754 Gleitpunkt-Zahlensystem dar und geben sie die Ergebnisse der unten stehenden Berechnungen ebenfalls in diesem Format an.
- b) Führen Sie eine Multiplikation ($A * B$) der beiden Gleitpunkt-Zahlen durch.
- c) Führen Sie eine Division ($\frac{A}{B}$) der beiden Gleitpunkt-Zahlen durch.

Aufgabe 5: Umformen von Gleichungen

Bringen Sie die folgende Funktion durch Umformen in die Konjunktive Normalform (KNF):

$$f(a, b, c, d, e) = \overline{[(a \vee b) \wedge \bar{c} \wedge d]} \wedge \overline{[(a \vee c \vee \bar{d}) \wedge e]} \wedge [\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c} \vee \overline{(d \wedge e)}]$$

Hinweis: Benutzen Sie die Regel $x = (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$, um unvollständige Terme zu erweitern.

Aufgabe 6: Minimierung mittels Quine-McCluskey 1

Der folgende boolesche Ausdruck ist so weit wie möglich zu vereinfachen. Dazu ist das Verfahren von Quine-McCluskey zu verwenden. Bitte geben Sie die reduzierten Terme an und kennzeichnen Sie jene Terme, die in das Endresultat übernommen werden. Die endgültige Lösung ergibt sich also aus den markierten Zeilen.

$$f := \begin{aligned} & (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c \wedge \bar{d} \wedge e) \vee \\ & (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \wedge \bar{d} \wedge \bar{e}) \vee \\ & (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c} \wedge d \wedge \bar{e}) \vee \\ & (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c \wedge d \wedge e) \vee \\ & (\bar{a} \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e) \vee \\ & (\bar{a} \wedge b \wedge c \wedge d \wedge \bar{e}) \vee \\ & (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \wedge \bar{d} \wedge e) \vee \\ & (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \wedge d \wedge e) \vee \\ & (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \wedge d \wedge \bar{e}) \vee \\ & (a \wedge b \wedge \bar{c} \wedge d \wedge \bar{e}) \vee \\ & (a \wedge b \wedge \bar{c} \wedge d \wedge e) \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Minimierung mittels Quine-McCluskey 2

Der folgende boolesche Ausdruck ist so weit wie möglich zu vereinfachen. Dazu ist das Verfahren von Quine-McCluskey zu verwenden. Bitte geben Sie die reduzierten Terme an und kennzeichnen Sie jene Terme, die in das Endresultat übernommen werden. Die endgültige Lösung ergibt sich also aus den markierten Zeilen.

$$\begin{aligned}
f := & (a \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e) \vee \\
& (a \wedge \bar{b} \wedge c \wedge d \wedge \bar{e}) \vee \\
& (\bar{a} \wedge b \wedge c \wedge d \wedge e) \vee \\
& (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c \wedge d \wedge \bar{e}) \vee \\
& (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c \wedge \bar{d} \wedge \bar{e}) \vee \\
& (a \wedge \bar{b} \wedge c \wedge \bar{d} \wedge \bar{e}) \vee \\
& (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \wedge d \wedge e) \vee \\
& (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c} \wedge d \wedge \bar{e}) \vee \\
& (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \wedge \bar{d} \wedge e) \vee \\
& (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \wedge d \wedge e) \vee \\
& (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c \wedge \bar{d} \wedge e)
\end{aligned}$$

Aufgabe 8: Rechenwerk

Gegeben sind die 3-Bit bzw. 2-Bit langen Zahlen X (x_0, x_1, x_2) und Y (y_0, y_1) . Geben Sie minimale Funktionen für die Ausgangsvariablen $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ an, sodass folgende arithmetische Funktion erfüllt ist:

$$a = (x * y) \text{ mod } 3$$

Bestimmen Sie die maximalen Stellen (n), die das Ergebnis der arithmetischen Funktion haben kann. Benennen Sie die Ausgangsvariablen aufsteigend nach ihrer Wertigkeit wie folgt $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.

Hinweis: Der Operator *mod* steht für die Modulo-Operation.