03 – Boolesche Algebra

Technische Grundlagen der Informatik

Automation Systems Group E183-1

Institute of Computer Aided Automation

Vienna University of Technology

email: tgi@auto.tuwien.ac.at

Inhalt

- Operationen der Booleschen Algebra
- Gesetze der Booleschen Algebra
- Funktionen über der Booleschen Algebra
- Normalformen
- Vereinfachen von Funktionen

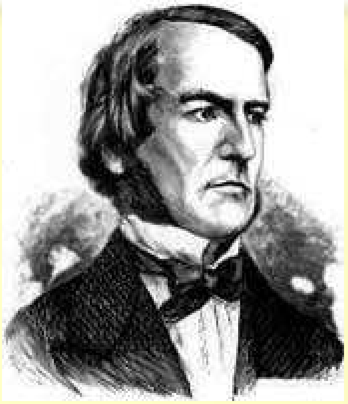
Boolesche Algebra

- Der englische Mathematiker George Boole (1815–1864) versuchte, Logik formal auszudrücken
  - Entwickelte dazu 1847 die Algebra der Logik: „Boolesche Algebra“

- Diese arbeitet mit den Werten
  - falsche Aussage und
  - wahre Aussage

- Abbildung auf 0 und 1

The class X	x	
The class not-X	$1 - x$	
All Xs are Ys, All Ys are Xs	$x = y$	
All Xs are Ys	$x(1-y) = 0$	
No Xs are Ys	$xy = 0$	
All Ys are Xs, Some Xs are Ys	$y = vx$	vx = some Xs, $v(1-x) = 0$.
No Ys are Xs, Some not-Xs are Ys	$y = v(1-x)$	$v(1-x)$ = some not-Xs, $vx = 0$.
Some Xs are Ys	$v = xy$	v = some Xs or some Ys
	or $vx = vy$	vx = some Xs, vy = some Ys
	or $vx(1-y) = 0$	$v(1-x) = 0$, $v(1-y) = 0$.
Some Xs are not Ys	$v = x(1-y)$	v = some Xs, or some not-Ys
	or $vx = v(1-y)$	vx = some Xs, $v(1-y)$ = some not-Ys
	or $vxy = 0$	$v(1-x) = 0$, $vy = 0$.



1. Operationen der Booleschen Algebra

Notation	andere Schreibweisen	Bezeichnung
$\wedge$	$\cdot, \&$	AND, UND
$\vee$	$+$	OR, ODER
$\neg$	Überstreichung ($\overline{e}$)	NOT, NICHT

Binäre Operationen (2 Operanden)

Unäre Operation (1 Operand)

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\neg$	
0	1
1	0

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$\neg a$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Rangfolge der Operatoren: $\neg$ vor $\wedge$ vor $\vee$

2. Gesetze der Booleschen Algebra

- Kommutativgesetz
  - $x \lor y = y \lor x$
  - $x \land y = y \land x$
- Assoziativgesetz
  - $(x \lor y) \lor z = x \lor (y \lor z)$
  - $(x \land y) \land z = x \land (y \land z)$
- Distributivgesetz
  - $x \land (y \lor z) = (x \land y) \lor (x \land z)$
  - $x \lor (y \land z) = (x \lor y) \land (x \lor z)$
- Absorptionsgesetz
  - $x \lor (x \land y) = x$
  - $x \land (x \lor y) = x$
- Weitere Gesetze
  - $0 \lor x = x$ bzw. $1 \land x = x$
  - $x \lor \neg x = 1$ (*Tautologie*) bzw. $x \land \neg x = 0$ (*Kontradiktion*)
  - $\neg(\neg x) = x$

2. Gesetze der Booleschen Algebra

Anwendung, Beispiel 1

- Aus $x \wedge y = 0$ und $x \vee y = 1$ folgt $y = \neg x$
- Beweis durch Umformen (Anwendung der Gesetze):

Linke Seite

$$\begin{aligned} y &= y \vee 0 = \\ &= y \vee (x \wedge \neg x) = \\ &= (y \vee x) \wedge (y \vee \neg x) \end{aligned}$$

- $(y \vee x) = 1$ setzen:

$$\begin{aligned} y &= 1 \wedge (y \vee \neg x) = \\ &= y \vee \neg x \end{aligned}$$

- sowie

Rechte Seite

$$\begin{aligned} \neg x &= \neg x \vee 0 = \\ &= \neg x \vee (x \wedge y) = \\ &= (\neg x \vee x) \wedge (\neg x \vee y) = \\ &= 1 \wedge (\neg x \vee y) = \\ &= \neg x \vee y = \\ &= y \vee \neg x \end{aligned}$$

- woraus die Gleichheit $(y = \neg x)$ folgt

2. Gesetze der Booleschen Algebra

Anwendung, Beispiel 2

- Beweise $(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = 1$ durch Umformen

$$
\begin{aligned}
(x \vee y) \vee (\neg x \wedge \neg y) &= [(x \vee y) \vee \neg x] \wedge [(x \vee y) \vee \neg y] = \\
&= [(x \vee \neg x) \vee y] \wedge [x \vee (y \vee \neg y)] = \\
&= (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = \\
&= 1 \wedge 1 = 1
\end{aligned}
$$

- Beweise $(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) = 0$ durch Umformen

$$
\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (\neg x \wedge \neg y) &= [x \wedge (\neg x \wedge \neg y)] \vee [y \wedge (\neg x \wedge \neg y)] = \\
&= [(x \wedge \neg x) \wedge \neg y] \vee [(y \wedge \neg y) \wedge \neg x] = \\
&= (0 \wedge \neg y) \vee (0 \wedge \neg x) = \\
&= 0 \vee 0 = 0
\end{aligned}
$$

2. Gesetze der Booleschen Algebra

De Morgan

- Das de Morgansche Gesetz:
  - $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
  - $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

- Beweis durch Wahrheitstabelle

a	b	a ∧ b	¬(a ∧ b)	¬a	¬b	¬a ∨ ¬b
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

2. Gesetze der Booleschen Algebra

De Morgan

- Erweiterung des Gesetzes von de Morgan:

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \cdots \vee x_n = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$$

bzw.

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \cdots \wedge x_n = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$$

- Durch vollständige Induktion nach n erhalten wir dann:

$$\neg \bigvee_{i=1}^{n} x_i = \bigwedge_{i=1}^{n} \neg x_i$$

bzw.

$$\neg \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = \bigvee_{i=1}^{n} \neg x_i$$

3. Funktionen über der Booleschen Algebra

- $e_i \in \{0,1\}$ für $i = 1,2,\ldots,n$ und $a \in \{0,1\}$

$$f: (e_1, e_2, \ldots, e_n) \rightarrow a$$

- $n = 1$; eine Eingangsvariable wird auf die Ausgangsvariable abgebildet

f_1	$e = 0$	$e = 1$	a	Funktionstyp
$f_{1.0}$	0	0	$a_{1.0} = 0$	Nullfunktion
$f_{1.1}$	0	1	$a_{1.1} = e$	Identität
$f_{1.2}$	1	0	$a_{1.2} = \neg e$	Negation
$f_{1.3}$	1	1	$a_{1.3} = 1$	Einsfunktion

- $f_1 \ldots$ Logische Funktionen mit einer Eingangsvariablen und einer Ausgangsvariablen

3. Funktionen über der Booleschen Algebra

Funktionen mit zwei Eingangsvariablen

	e_1:	0	1	0	1		
	e_2:	0	0	1	1		
j						$a_{2.j} = f_{2.j(e_1,e_2)}$	*Funktionstyp*
0	$f_{2.0}$	0	0	0	0	$a_{2.0} = 0$	Nullfunktion
1	$f_{2.1}$	0	0	0	1	$a_{2.1} = e_1 \wedge e_2$	Konjunktion, AND, ∧
2	$f_{2.2}$	0	0	1	0	$a_{2.2} = \neg e_1 \wedge e_2$	Konjunktion
3	$f_{2.3}$	0	0	1	1	$a_{2.3} = e_2$	Identität
4	$f_{2.4}$	0	1	0	0	$a_{2.4} = e_1 \wedge \neg e_2$	Konjunktion
5	$f_{2.5}$	0	1	0	1	$a_{2.5} = e_1$	Identität
6	$f_{2.6}$	0	1	1	0	$a_{2.6} = (e_1 \vee e_2) \wedge \neg(e_1 \wedge e_2)$	Antivalenz, XOR
7	$f_{2.7}$	0	1	1	1	$a_{2.7} = e_1 \vee e_2$	Disjunktion, OR,∨
8	$f_{2.8}$	1	0	0	0	$a_{2.8} = \neg e_1 \wedge \neg e_2 = \neg(e_1 \vee e_2)$	Konjunktion, NOR
9	$f_{2.9}$	1	0	0	1	$a_{2.9} = (e_1 \wedge e_2) \vee \neg(e_1 \vee e_2)$	Äquivalenz
10	$f_{2.10}$	1	0	1	0	$a_{2.10} = \neg e_1$	Negation
11	$f_{2.11}$	1	0	1	1	$a_{2.11} = \neg e_1 \vee e_2$	Disjunktion
12	$f_{2.12}$	1	1	0	0	$a_{2.12} = \neg e_2$	Negation
13	$f_{2.13}$	1	1	0	1	$a_{2.13} = e_1 \vee \neg e_2$	Disjunktion
14	$f_{2.14}$	1	1	1	0	$a_{2.14} = \neg e_1 \vee \neg e_2 = \neg(e_1 \wedge e_2)$	Disjunktion, NAND
15	$f_{2.15}$	1	1	1	1	$a_{2.15} = 1$	Einsfunktion

3. Funktionen über der Booleschen Algebra

Implikation (oder Subjunktion)

- Symbol: „⇒“
- $(e_1 \Rightarrow e_2)$ entspricht dem Ausdruck $(\neg e_1 \vee e_2)$

e_1	e_2	$e_1 \Rightarrow e_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

3. Funktionen über der Booleschen Algebra

Äquivalenz (oder Bijunktion)

- Symbol: „⇔“ bzw. „≡“
- $(e_1 \Leftrightarrow e_2)$ entspricht dem Ausdruck $(e_1 \Rightarrow e_2) \wedge (e_2 \Rightarrow e_1)$

		$\neg e_1 \vee e_2$	$\neg e_2 \vee e_1$	
e_1	e_2	$e_1 \Rightarrow e_2$	$e_2 \Rightarrow e_1$	$e_1 \Leftrightarrow e_2$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

3. Funktionen über der Booleschen Algebra

NAND und NOR

- NAND (NOT AND, Verneintes UND)
  - $(e_1\ NAND\ e_2)$ entspricht dem Ausdruck: $\neg(e_1 \wedge e_2)$
- NOR (NOT OR, Verneintes ODER)
  - $(e_1\ NOR\ e_2)$ entspricht dem Ausdruck: $\neg(e_1 \vee e_2)$

e_1	e_2	$e_1\ NAND\ e_2$	$e_1\ NOR\ e_2$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

- Tautologie … Verknüpfung von Wahrheitswerten, die immer den Wert 1 (wahre Aussage) liefert

- Beispiele: $(e \vee \neg e)$, $(e \Rightarrow e)$, $(e_1 \wedge e_2) \Rightarrow e_1$

Aufstellen der *Wahrheitstabellen*:

e	$e \vee \neg e$	$e \Rightarrow e$
0	1	1
1	1	1

e_1	e_2	$e_1 \wedge e_2$	$(e_1 \wedge e_2) \Rightarrow e_1$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

3. Funktionen über der Booleschen Algebra

Kontradiktion

- Kontradiktion … Verknüpfung von Wahrheitswerten, die immer den Wert 0 (falsche Aussage) liefert

- Beispiele: $(e \wedge \neg e)$, $(e \Leftrightarrow \neg e)$

e	$\neg e$	$e \wedge \neg e$	$e \Leftrightarrow \neg e$
0	1	0	0
1	0	0	0

AUTOMATION SYSTEMS GROUP

3. Funktionen über der Booleschen Algebra

Funktionale Vollständigkeit

- Unter funktionaler Vollständigkeit versteht man die Eigenschaft einer Menge Boolescher Funktionen, alle möglichen Logikoperationen darstellen zu können.

- So ist beispielsweise die Menge $\{\wedge, \neg\}$ funktional vollständig, weil sich durch die Funktionen selbst oder durch Kombination der Funktionen alle denkbaren Logikoperationen darstellen lassen.
  - $a \vee b = \neg(\neg a \wedge \neg b)$

- Weitere Beispiele?
  - $\{NAND\}$ … universelle Operation/Funktion
  - $\{NOR\}$ … universelle Operation/Funktion
  - $\{\vee, \neg\}$

4. Normalformen

- *Vollform* = Ausdruck, in dem jede Variable genau einmal vorkommt

- *Vollkonjunktion* (*Minterm*) = Ausdruck, in dem sämtliche vereinbarten Variablen (bzw. deren Negate) konjunktiv verbunden sind
  - z.B.: Vereinbarte Variablen: a, b, c
    $\Rightarrow (a \land \neg b \land c)$
- *Volldisjunktion* (*Maxterm*) = Ausdruck, in dem sämtliche vereinbarten Variablen (bzw. deren Negate) disjunktiv verbunden sind
  - z.B.: $(a \lor \neg b \lor \neg c\ )$

- Negationen nur in *atomarer Form*
  - $\neg(a \land b)$ nicht atomar
  - $(\neg a \lor \neg b)$ atomar

4. Normalformen

- Die *disjunktive Normalform (DNF)* ist jene Darstellungsart, bei der eine Reihe von Vollkonjunktionen disjunktiv verknüpft wird. Negationen treten nur in atomarer Form auf.
  - z.B.: $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)$

- Die *konjunktive Normalform (KNF)* ist jene Darstellungsart, bei der eine Reihe von Volldisjunktionen konjunktiv verknüpft wird. Negationen treten nur in atomarer Form auf.
  - z.B.: $(\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$

- Andere Bezeichnungen:
  - kanonische disjunktive/konjunktive Normalform (KDNF/KKNF)
  - vollständige disjunktive/konjunktive Normalform

4. Normalformen

Disjunktive Normalform (DNF)

- Beispiel: $f(e_1, e_2, e_3) = (e_1 \Rightarrow e_2) \wedge (\neg e_1 \equiv e_3)$

Zeile	e_1	e_2	e_3	$e_1 \Longrightarrow e_2$	$\neg e_1 \equiv e_3$	$(e_1 \Rightarrow e_2) \wedge (\neg e_1 \equiv e_3)$
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	0
4	0	1	1	1	1	1
5	1	0	0	0	1	0
6	1	0	1	0	0	0
7	1	1	0	1	1	1
8	1	1	1	1	0	0

- Alle Zeilen, in denen die Ergebnisspalte den Wert 1 aufweist:

Zeile	Vollkonjunktion
2	$(\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3)$
4	$(\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$
7	$(e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3)$

$$(\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3) \vee (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3)$$

- Beispiel: $(e_1 \wedge e_2) \vee e_3$

Zeile	e_1	e_2	e_3	$e_1 \wedge e_2$	$(e_1 \wedge e_2) \vee e_3$
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1
7	1	1	0	1	1
8	1	1	1	1	1

- Alle Zeilen, in denen die Ergebnisspalte den Wert 0 aufweist

Zeile	Vollkonjunktion	Volldisjunktion
1	$\neg(\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge \neg e_3)$	$(e_1 \vee e_2 \vee e_3)$
3	$\neg(\neg e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3)$	$(e_1 \vee \neg e_2 \vee e_3)$
5	$\neg(e_1 \wedge \neg e_2 \wedge \neg e_3)$	$(\neg e_1 \vee e_2 \vee e_3)$

$$(\neg e_1 \vee e_2 \vee e_3) \wedge (e_1 \vee \neg e_2 \vee e_3) \\ \wedge (e_1 \vee e_2 \vee e_3)$$

5. Vereinfachen von Funktionen

- Irrelevante Variablen werden eliminiert
- Anwendung z.B. bei Minimierung von Schaltungen
- Grundsätzlich durch Umformungen (anhand der Gesetze) möglich
  - Ergebnisse sind aber nicht immer minimal!

- → Systematisches Vorgehen sinnvoll/erforderlich
- Minimierungsverfahren:
  - Karnaugh & Veitch (K&V)

5. Vereinfachen von Funktionen – K&V

- Besonders bei Funktionen mit 4 oder weniger Variablen sinnvoll
  - Bei mehr Variablen geht Vorteil der graphischen Veranschaulichung zunehmend verloren!
- Das KV-Diagramm wird aus Vierecken zusammengebaut
- Jedes der Felder entspricht einer Vollkonjunktion
- KV-Diagramm...

...für 2 Variablen:

	e_2	$\neg e_2$
e_1		
$\neg e_1$		

$(\neg e_1 \land \neg e_2)$

...für 3 Variablen:

	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$			$\neg e_2$
e_1			$\neg e_2$
e_1			e_2
$\neg e_1$			e_2

$(e_1 \land e_2 \land \neg e_3)$

...für 4 Variablen:

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$					$\neg e_2$
e_1					$\neg e_2$
e_1					e_2
$\neg e_1$					e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

$(e_1 \land e_2 \land e_3 \land \neg e_4)$

5. Vereinfachen von Funktionen – K&V

Ablauf

- Schritt 1: Zeichnen und Befüllen des KV-Diagramms
  - „1“ in Feld eintragen, wenn entsprechende Vollkonjunktion vorkommt
  - sonst: „0“ eintragen

- Schritt 2: möglichst viele 1er, die in benachbarten Feldern stehen, zu Blöcken zusammenfassen
  - 2, 4, 8 (oder 16) Felder können zusammengefasst werden
  - Nicht zusammenfassbare 1er müssen auch übernommen werden
  - „Überlappungen“ von zusammengefassten Blöcken möglich
  - Felder, die sich am Rand befinden, grenzen an gegenüberliegende Randfelder (!)

  →

  - Wenn zwei Felder zusammengefasst werden, werden in der DNF zwei Vollkonjunktionen zu einem Ausdruck zusammengefasst.
  - Die Variable, die einen Einser im negierten und im nicht negierten Bereich hat, wird gestrichen.

5. Vereinfachen von Funktionen – K&V

Vereinfachen - Beispiel

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	1	1	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	0	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

$$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = (\, e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \vee (\, e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4)$$

- Wenn zwei Felder zusammengefasst werden, werden in der DNF zwei Vollkonjunktionen zu einem Ausdruck zusammengefasst.
- Die Variable, die einen Einser im negierten und im nicht negierten Bereich hat, wird gestrichen:

$$\left.\begin{array}{l} (\, e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge \boxed{e_4}) \\ (\, e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge \boxed{\neg e_4}) \end{array}\right\} (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3) \wedge (e_4 \vee \neg e_4) = (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3)$$

5. Vereinfachen von Funktionen – K&V

Einige mögliche Zweierblöcke

	$\neg e_3$	e_3		$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	1	1	0	
e_1	0	0	0	0	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	
	e_4		$\neg e_4$		

$$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = e_1 \land \neg e_2 \land e_3$$

	$\neg e_3$	e_3		$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	1	
e_1	0	0	0	1	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	
	e_4		$\neg e_4$		

$$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = e_1 \land \neg e_3 \land \neg e_4$$

	$\neg e_3$	e_3		$\neg e_3$	
$\neg e_1$	1	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	0	
e_1	0	0	0	0	e_2
$\neg e_1$	1	0	0	0	
	e_4		$\neg e_4$		

$$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = \neg e_1 \land \neg e_3 \land e_4$$

	$\neg e_3$	e_3		$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	1	0	0	1	
e_1	0	0	0	0	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	
	e_4		$\neg e_4$		

$$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = e_1 \land \neg e_2 \land \neg e_3$$

5. Vereinfachen von Funktionen – K&V

Viererblöcke und ein Achterblock

	$\neg e_3$	e_3		$\neg e_3$	
$\neg e_1$	1	1	0	0	$\neg e_2$
e_1	1	1	0	0	
	0	0	0	0	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	
	e_4		$\neg e_4$		

$$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = \neg e_2 \wedge e_4$$

	$\neg e_3$	e_3		$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	0	
	1	0	0	1	e_2
$\neg e_1$	1	0	0	1	
	e_4		$\neg e_4$		

$$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = e_2 \wedge \neg e_3$$

	$\neg e_3$	e_3		$\neg e_3$	
$\neg e_1$	1	0	0	1	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	0	
	0	0	0	0	e_2
$\neg e_1$	1	0	0	1	
	e_4		$\neg e_4$		

$$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = \neg e_1 \wedge \neg e_3$$

	$\neg e_3$	e_3		$\neg e_3$	
$\neg e_1$	1	1	1	1	$\neg e_2$
e_1	0	0	0	0	
	0	0	0	0	e_2
$\neg e_1$	1	1	1	1	
	e_4		$\neg e_4$		

$$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = \neg e_1$$

5. Vereinfachen von Funktionen – K&V

Einser mehrfach verwenden (Folie 1 von 2)

- Bsp:

$$
\begin{aligned}
f(e_1, e_2, e_3, e_4) = \; & (e_1 \land \neg e_2 \land \neg e_3 \land e_4) \lor \\
& (e_1 \land \neg e_2 \land e_3 \land e_4) \lor \\
& (e_1 \land e_2 \land \neg e_3 \land e_4) \lor \\
& (e_1 \land e_2 \land e_3 \land e_4) \lor \\
& (e_1 \land e_2 \land \neg e_3 \land \neg e_4)
\end{aligned}
$$

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	1	1	0	0	$\neg e_2$
e_1	1	1	0	1	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

5. Vereinfachen von Funktionen – K&V

Einser mehrfach verwenden (Folie 2 von 2)

- Mögliche Einteilung:

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	1	1	0	0	$\neg e_2$
e_1	1	1	0	1	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

$$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_1 \wedge e_4) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4)$$

FALSCH

…weil nicht minimal

- Ein Einser kann auch für mehrere Blöcke verwendet werden, z.B.:

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	0	0	0	$\neg e_2$
e_1	1	1	0	0	$\neg e_2$
e_1	1	1	0	1	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

$$f(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_1 \wedge e_4) \vee (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3)$$

RICHTIG

5. Vereinfachen von Funktionen – K&V

Beispiel (Folie 1 von 4)

- Bsp.: Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck mit dem Verfahren nach Karnaugh & Veitch:

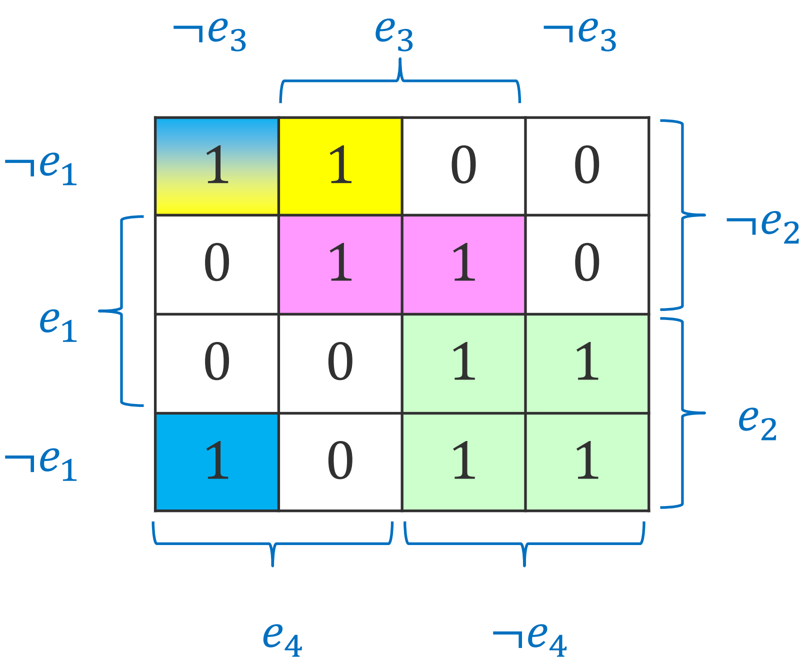
$$
\begin{aligned}
f(e_1, e_2, e_3, e_4) = {} & (\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge \neg e_3 \wedge e_4) \vee \\
& (\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \vee \\
& (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \vee \\
& (e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4) \vee \\
& (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4) \vee \\
& (e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4) \vee \\
& (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge e_4) \vee \\
& (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4) \vee \\
& (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4)
\end{aligned}
$$

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	1	1	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	1	1	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	1	1	e_2
$\neg e_1$	1	0	1	1	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

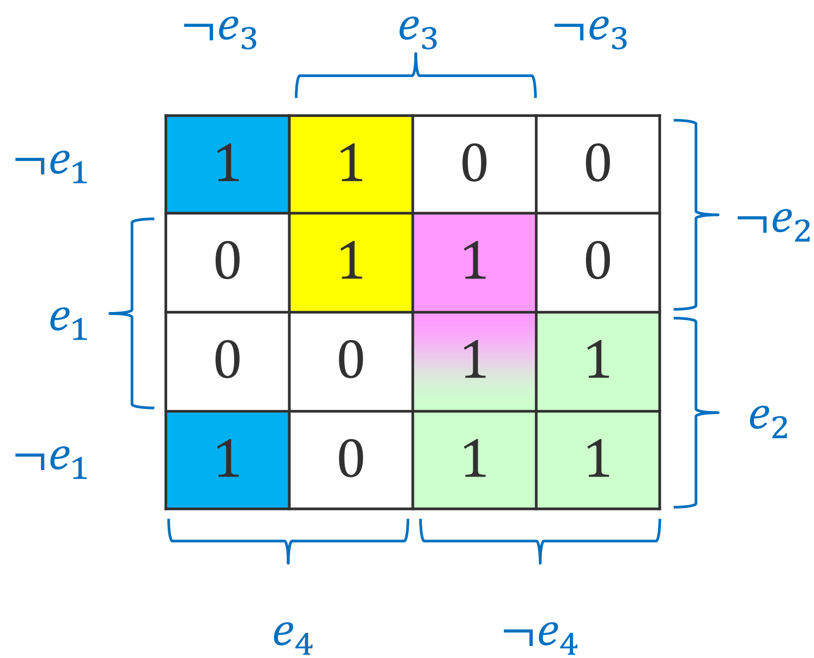
5. Vereinfachen von Funktionen – K&V

Beispiel (Folie 2 von 4)

- zwei mögliche Blockeinteilungen:



(1)



(2)

- Gibt es noch weitere mögliche Blockeinteilungen?

5. Vereinfachen von Funktionen – K&V

Beispiel (Folie 3 von 4)

(1)

$$\left.\begin{array}{l}(\neg e_1 \land \neg e_2 \land \neg e_3 \land e_4)\\(\neg e_1 \land \neg e_2 \land e_3 \land e_4)\end{array}\right\} (\neg e_1 \land \neg e_2 \land e_4)$$

$$\left.\begin{array}{l}(\neg e_1 \land \neg e_2 \land \neg e_3 \land e_4)\\(\neg e_1 \land e_2 \land \neg e_3 \land e_4)\end{array}\right\} (\neg e_1 \land \neg e_3 \land e_4)$$

$$\left.\begin{array}{l}(e_1 \land \neg e_2 \land e_3 \land e_4)\\(e_1 \land \neg e_2 \land e_3 \land \neg e_4)\end{array}\right\} (e_1 \land \neg e_2 \land e_3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(e_1 \land e_2 \land e_3 \land \neg e_4)\\(e_1 \land e_2 \land \neg e_3 \land \neg e_4)\\(\neg e_1 \land e_2 \land e_3 \land \neg e_4)\\(\neg e_1 \land e_2 \land \neg e_3 \land \neg e_4)\end{array}\right\} (e_2 \land \neg e_4)$$

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	1	1	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	1	1	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	1	1	e_2
$\neg e_1$	1	0	1	1	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

$$\Rightarrow f(e_1, e_2, e_3, e_4) =$$

$$\begin{array}{l}(\neg e_1 \land \neg e_2 \land e_4) \lor\\(\neg e_1 \land \neg e_3 \land e_4) \lor\\(e_1 \land \neg e_2 \land e_3) \lor\\(e_2 \land \neg e_4)\end{array}$$

5. Vereinfachen von Funktionen – K&V

Beispiel (Folie 4 von 4)

..oder (2)

$$\left.\begin{array}{l}(\;e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \\ (\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)\end{array}\right\} (\neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$$

$$\left.\begin{array}{l}(\neg e_1 \wedge \neg e_2 \wedge \neg e_3 \wedge e_4) \\ (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge e_4)\end{array}\right\} (\neg e_1 \wedge \neg e_3 \wedge e_4)$$

$$\left.\begin{array}{l}(\;e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4) \\ (\;e_1 \wedge \neg e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4)\end{array}\right\} (e_1 \wedge e_3 \wedge \neg e_4)$$

$$\left.\begin{array}{l}(\;e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4) \\ (\;e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4) \\ (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge \neg e_4) \\ (\neg e_1 \wedge e_2 \wedge \neg e_3 \wedge \neg e_4)\end{array}\right\} (e_2 \wedge \neg e_4)$$

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	1	1	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	1	1	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	1	1	e_2
$\neg e_1$	1	0	1	1	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

$$\Rightarrow f(e_1, e_2, e_3, e_4) =$$
$$\begin{array}{l}(\neg e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \vee \\ (\neg e_1 \wedge \neg e_3 \wedge e_4) \vee \\ (e_1 \wedge e_3 \wedge \neg e_4) \vee \\ (e_2 \wedge \neg e_4)\end{array}$$

5. Vereinfachen von Funktionen – K&V

Vereinfachen – Don‘t Care

Minimale disjunktive Form

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	X	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	1	1	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	1	0	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

$$\Rightarrow f(e_1, e_2, e_3, e_4) =$$

$$(\neg e_2 \land e_3 \land e_4) \lor$$

$$(e_1 \land e_3 \land \neg e_4)$$

Minimale konjunktive Form

	$\neg e_3$	e_3	e_3	$\neg e_3$	
$\neg e_1$	0	X	0	0	$\neg e_2$
e_1	0	1	1	0	$\neg e_2$
e_1	0	0	1	0	e_2
$\neg e_1$	0	0	0	0	e_2
	e_4	e_4	$\neg e_4$	$\neg e_4$	

$$\Rightarrow f(e_1, e_2, e_3, e_4) =$$

$$(e_1) \land$$

$$(e_3) \land$$

$$(\neg e_2 \lor \neg e_4)$$