25. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung $x_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right) x_n + 1 \; (n \geq 0)$ und die partikuläre Lösung, die der Anfangsbedingung $x_0 = 6$ genügt.

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\dfrac{a^n - 1}{a-1} & \text{für } a \neq 1 \\ x_0 + b & \text{für } a = 1 \end{cases}$$

$$x_{n+1} = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{a} \cdot x_n + \underbrace{1}_{b}$$

wir nehmen die 1. Formel, da a ≠ 1:

$$x_n = a^n x_0 + b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot x_0 + 1 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot x_0 + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot x_0 + \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) \cdot (-3) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot x_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot (-3) + 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \underbrace{(x_0 - 3)}_{c} + 3$$

$$\Rightarrow x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \underbrace{(x_0 - 3)}_{c} + 3$$

Das ist die allgemeine Lösung (Lösungsgesamtheit, enthält c)

Lösung zum Startwert $x_0 = 6 :\; n = 0 :$

$$x_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot c + 3 = 6 \;\rightarrow\; c = 3$$

partikuläre Lösung: $\Rightarrow x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 3 + 3 = \dfrac{2^n}{3^{n-1}} + 3$