Algebra und Diskrete Mathematik für Informatik und WI (Dorfer)

Online-Prüfung am 12. März 2021

Name: Matrikelnummer:

Auf diesem und den folgenden vier Blättern finden Sie die Angaben für je ein Beispiel.

Punkteverteilung: Jedes Beispiel zählt 8 Punkte. Arbeitszeit: 100 Minuten

---

1. Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus' bestimme man $\mathrm{ggT}(59, 23)$, den größten gemeinsamen Teiler von 59 und 23, und stelle $\mathrm{ggT}(59, 23)$ als Linearkombination $59 \cdot a + 23 \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ dar. Auf Basis dieser Ergebnisse ermittle man das multiplikative Inverse $23^{-1} \bmod 59$ in $(\mathbb{Z}_{59}^*, \cdot)$.

   Was bedeutet allgemein für eine ganze Zahl $n \geq 2$ die Bezeichnung $\mathbb{Z}_n^*$, welche Elemente enthält $\mathbb{Z}_n^*$?

2. Man bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   Des weiteren gebe man eine Transformationsmatrix T und eine Diagonalmatrix D an, sodass $T^{-1} \cdot A \cdot T = D$ gilt. – Diese Gleichung rechne man nach.

3. Gegeben sei ein ungerichteter schlichter Graph G_n mit n Knoten, $n \geq 2$, durch seine Adjazenzmatrix A_n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. in der Hauptdiagonalen sind alle Einträge 0, außerhalb der Hauptdiagonale alle 1.

(a) Um welchen Graphen handelt es sich bei G_n? Man bestimme die Anzahl der Kanten von G_n. Man zeichne G_2, G_3 und G_4.

(b) Für welche n ist G_n ein Euler'scher Graph? Begründung angeben!

(c) Für welche n ist G_n ein Hamilton'scher Graph? Begründung angeben!

4. Man beschreibe einen Verband

   (a) als algebraische Struktur (Operationen und Rechengesetze).

   (b) als ordnungstheoretische Struktur (Halbordnung mit gewissen Eigenschaften),

   und führe aus, wie man von der algebraischen Beschreibung zur ordnungstheoretischen und vice versa gelangt.

5. Sei A eine nicht-leere Menge und bezeichne F_A die Menge aller Funktionen $f : A \to A$.

   (a) Für $f_1, f_2 \in F_A$ erkläre man, wie die Komposition (Hintereinanderausführung, Zusammensetzung) $f_1 \circ f_2$ definiert ist und warum $f_1 \circ f_2 \in F_A$ ist.

   (b) Man weise nach, dass die Komposition $\circ$ auf F_A assoziativ ist.

   (c) Man zeige für $|A| \geq 2$ an Hand eines Beispiels, dass die Komposition $\circ$ auf F_A nicht kommutativ ist.

   (d) Warum ist $(F_A, \circ)$ für $|A| \geq 2$ keine Gruppe?