Grundlagen

Freitag, 30. Jänner 2015 17:24

Cheatsheet Algebra und Diskrete Mathematik - Grundlagen
by Daniel Lehner...like for more!

Peano-Axiome

- 0 ist eine natürliche Zahl
- Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger
- 0 ist kein Nachfolger
- verschiedene nat. Zahlen haben verschiedene Nachfolger
- vollst. Induktion…zu zeigen:

(P(0)*[Induktionsanfang]* ^ P(n)*[Induktionsvoraussetzung]*) => P(n+1)*[Induktionsschritt]*

formal: zuerst beweisen, dass P(0) gilt, dann P(n+1) irgendwie (im "irgendwie" liegt eigentlich die einzige Schwierigkeit…) als P(n)+1 darstellen (also zeigen, dass die Gleichung P(n+1)=P(n)+1 gilt)

komplexe Zahlen

kartesische Darstellung:
z = a*[Realteil]* + ib*[Imaginärteil]*
(ergibt Zeiger in Korrdinatensystem)
Polarkoordinaten (va für Potenzieren und Wurzelziehen):
r*[Länge des Zeigers]* = $\sqrt{(a^2 + b^2)}$
φ, arg(z)*[Winkel zw. Realteil und Zeiger]* = arctan(b/a)
rechnen (z1=a1+ib1, z2=a2+ib2):
z1+-z2=a1+-a2+i(b1+-b2)
z2*z1=a1*a2-b1*b2+i(a1*b2+a2*b2)
z1/z2=(z1*<u>z2</u>)//(z2*<u>z2</u>)=(a1*a2+b1*b2+i(a2*b1-a1*b2))/(a1²+b1²)

Elementare Zahlentheorie

Definition ggT: ∀ a,b ε Z: d:=ggT(a,b), wenn d|b und d|a und ∀t ε R: (t|a ^ t|b) => t|d
euklidischer Algorithmus: ggT(a,b)

- a=b*q0 + r0
- b=r0*q1+r1
- r# solange nach links verschieben, bis neues r 0 ist.
- das Ergebnis (ggT(a,b)) ist dann das letzte r ungleich 0 (das links vom "neuen" r)

umgekehrter euklidischer Algorithmus
Primfaktorzerlegung

Relationen

Äquivalenzrelationen

Teilt Elemente einer Menge in Kathegorien ein…Kriterium für Kathegorie wird durch Relation bestimmt (zB aRb <=> ggT(a,b)=1 gi bt alle teilferfremden Elemente in eine Kathegorie

Bedingungen:

Reflexivität: jedes Element einer Kathegorie ist mit sich selbst in Relation (aRa)
Symmetrie: da die Kathegorie eine Teilmenge und somit wieder eine Menge ist (bei der die Reihenfolge der Elemente egal ist), sind alle Elemente der Kathegorie miteinander in Beziehung. Daraus folgt, dass wenn ein Element a mit einem Element b in Relation steht, muss dies a uch umgekehrt gelten: aRb => bRa
Transitivität: aRb ^ bRc => aRc (da a, b und c in der selben Kathegorie sind)

Halbordnungen

geben eine Hierarchie innerhalb einer Ordnung wieder (deshalb kann sie auch als Hassediagramm dargestellt werden)

Bedingungen:

Reflexivität: aRa
Antisymmetrie: da nun die Reihenfolge der Elemente maßgeblich ist, gilt: aRb ^ bRa => a=b (also zwischen 2 Elementen kann keine Symmetrie (wie bei Äquivalenzrel.) herrschen)
Transitivität: aRb ^ bRc => aRc (da b über a und c über b steht)

Funktionen

f: A -> B ist eine Funktion (wobei A und B nichtleere Mengen sind), die jedes Element aus A auf genau ein Element auf B abbildet (l t Definition einer Funktion)

funktionen sind…

…injektiv:

- wenn es für jedes b ε B max 1 Möglichkeit gibt, b durch f(a) darzustellen (a…beliebiges Element aus A)
- nicht injektiv, wenn 2 ungleiche a durch f(a) das selbe b ergeben
- injektiv machen: Wertebereich von A ändern

…surjektiv:

- es gibt für jedes b mind. 1 Möglichkeit, b durch f(a) auszudrücken
- nicht surjektiv, wenn es mind ein b gibt, das nicht durch f(a) ausgedrückt werden kann
- surjektiv machen: Wertebereich von B ändern

…bijektiv:

- es gibt für jedes b genau 1 Möglichkeit, b durch f(a) auszudrücken (die Funktion ist injektiv und surjektiv
- bijektiv machen: Wertebereich von A so wählen, dass die Funktion injektiv ist und Wertebereich von B so ändern, dass die Funktion surjektiv ist