1) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (mit Hilfe vollständiger Induktion) auf Monotonie und Beschränktheit und bestimme gegebenenfalls mit Hilfe der bekannten Rechenregeln für Grenzwerte den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$.
Überlegen Sie auch, warum die Folge wohldefiniert ist.
$a_0 := 4, \quad a_{n+1} := \sqrt{6a_n - 9}, \ \forall n\in\mathbb{N}.$ (8 Punkte)

Lösung: Wir zeigen durch Induktion, dass die Folge monoton fallend ist, d.h. $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

$n=0$: $a_1 = \sqrt{6.4-9} = \sqrt{15} \leq 4 = a_0$.

$n \to n+1$: $a_{n+1} \leq a_n \Longrightarrow 6a_{n+1} \leq 6a_n \Longrightarrow$
$6a_{n+1} - 9 \leq 6a_n - 9 \Longrightarrow \sqrt{6a_{n+1}-9} \leq \sqrt{6a_n - 9} \Rightarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}$.

Es ist noch zu zeigen, dass $\sqrt{6a_n - 9}$ stets wohldefiniert, d.h. $6a_n - 9 \geq 0$ ist. Dazu zeigen wir – ebenfalls durch Induktion – dass $a_n \geq 3, \ \forall n\in\mathbb{N}$.

$n=0$: $a_0 = 4 \geq 3$.

$n\to n+1$: $a_n \geq 3 \Longrightarrow a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 9} \geq \sqrt{6.3-9} = \sqrt{9} = 3$.

Also gilt: $3 \leq a_n \leq 4, \ \forall n\in\mathbb{N}$, d.h. die Folge ist beschränkt. Daher existiert $\lim_{n\to\infty} a_n =: a$, und es gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6a_n - 9} = \sqrt{6\cdot \lim_{n\to\infty} a_n - 9} = \sqrt{6a-9},$$

somit $a^2 = 6a - 9$, also $a^2 - 6a + 9 = 0$.

$$\Longrightarrow a = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3 \Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3.$$

2) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Wohldefiniertheit und Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \frac{n^3+5n-6}{3n^3+2n^2+1} \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N} \qquad (5 \text{ Punkte})$$

Lösung: Wir verwenden den bekannten Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und berechnen daraus unter Verwendung der Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+5n-6}{3n^3+2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n^2}-\frac{6}{n^3}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}} =$$

$$= \frac{1+5\cdot\left(\lim \frac{1}{n}\right)^2 - 6\cdot\left(\lim \frac{1}{n}\right)^3}{3+2\cdot \lim \frac{1}{n} + \left(\lim \frac{1}{n}\right)^3} = \frac{1+5\cdot 0^2-6\cdot 0^3}{3+2\cdot 0+0^3} =$$

$$= \frac{1+0+0}{3+0+0} = \frac{1}{3},$$

also ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent (und wohldefiniert, da $3n^3+2n^2+1 \geq 1, \ \forall n\in\mathbb{N}$), und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}.$$

3) Man untersuche die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}} \quad . \qquad (7 \text{ Punkte})$$

Lösung: Die Reihe hat die Bauart $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ist also eine alternierende Reihe. Wir können daher das Kriterium von Leibniz anwenden:

Es ist $0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2+3}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, also gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Weiters ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, denn: $n \leq m \Rightarrow n^2+3 \leq m^2+3 \Rightarrow$ $\sqrt{n^2+3} \leq \sqrt{m^2+3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \geq \frac{1}{\sqrt{m^2+3}} \Rightarrow a_n \geq a_m$.

Somit ist die Reihe konvergent.

Sie ist aber nicht absolut konvergent, denn:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} =$$

$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Da aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bekanntlich divergent ist, gilt dies auch für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, womit wir eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gefunden haben.