Beispiel 104 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 10, 08.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Sei $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$. Man drücke mit Hilfe von $A(x)$ und $A(-x)$ die erzeugende Funktion $A_g(x) \sum_{k \geq 0} a_{2k} x^{2k}$ aus.

2 Theoretische Grundlagen: Erzeugende Funktionen

Wenn $< a_n >_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge (Elemente $\in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$) ist, dann kann man dieser die formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ zuordnen.
Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ den Konvergenzradius $R > 0$ besitzt, dann ist $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ $(|x| < R)$ auch eine Funktion dar, welche die Folge $< a_n >$ eindeutig bestimmt. $A(x)$ ist dann die **(gewöhnliche) erzeugende Funktion** der Folge $< a_n >$.
Es gilt also:

$$\underbrace{< a_n >_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{Folge}} \quad \underbrace{\longleftrightarrow}_{1-1} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n}_{\text{Formale Potenzreihe}} \quad \underbrace{\longleftrightarrow}_{1-1 \text{ wenn } R>0} \quad \underbrace{A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n}_{\text{Erzeugende Funktion}}$$

Mit erzeugenden Funktionen kann man **wichtige Operationen mit Folgen** vornehmen:

- **Linearkombinationen**

  Die Folgen $< a_n >$ und $< b_n >$ haben die erzeugenden Funktionen $A(x)$ bzw. $B(x)$. Wenn $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $< \lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n >$ ist, dann ist die erzeugende Funktion $\lambda \cdot A(x) + \mu \cdot B(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n) \cdot x^n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n + \mu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$$

- **Cauchy-Produkt**

  Die Folgen $< a_n >$ und $< b_n >$ haben die erzeugenden Funktionen $A(x)$ bzw. $B(x)$. $A(x) \cdot B(x)$ ist die erzeugende Funktion zur Folge $< \sum_{k=0}^{n} a_n \cdot b_{n-k} >$:

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) x^n$$

- Wenn $< a_n >$ die erzeugende Funktion $A(x)$ hat, dann hat $< n \cdot a_n >$ die erzeugende Funktion $x \cdot A'(x)$:

$$x \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

- Wenn $< a_n >$ die erzeugende Funktion $A(x)$ hat, so gilt:

$$\begin{aligned}
< a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \cdots > \qquad \text{EF} &= \frac{A(x) + A(-x)}{2} \\
\frac{A(x) + A(-x)}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1 + (-1)^n}{2} \cdot x_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} \\
< 0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, \cdots > \qquad \text{EF} &= \frac{A(x) - A(-x)}{2} \\
\frac{A(x) - A(-x)}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1 - (-1)^n}{2} \cdot x_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}
\end{aligned}$$

Wichtige Identitäten sind:

- $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = \frac{1}{1-az}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{c}{n} z^n = (1+z)^c$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{c+n-1}{n} a^n z^n = \frac{1}{(1-az)^c}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = \ln \frac{1}{1-z}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z$

3 Lösung des Beispiels

Wir betrachten zunächst die aus $A_g(x) \sum_{k \geq 0} a_{2k} x^{2k}$ dargestellte Folge für $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$:

$$a_0, a_2, a_4, \ldots$$

Wir sehen, dass wir a_n mit ungeradem n überspringen und formen als Bildungsgesetz für diesen n (ergibt für ungerade n 0:

$$a_n \cdot \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

Dieses Bildungsgesetz können wir vereinfachen zu

$$A_g(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \cdot x^{2k}$$

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit:

$$A_g = \frac{A(x) + A(-x)}{2}$$

Idee: Die ungeraden n sollen aus $A(x)$ eliminiert werden - betrachte $A(-x)$:

$$A(-x) = a_0 x^0 - a_1 x^1 + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots$$

Nun zählen wir $A(x)$ dazu (Linearkombination!):

$$A(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Durch $A(x) + A(-x)$ werden die ungeraden n eliminiert, aber jedes gerade n wird verdoppelt - daher ist die Halbierung notwendig.