Runde 1, Beispiel 6

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 20.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 12.02.2007

1 Angabe

Die Differentialgleichung

$$ydx + x(1 - 3x^2y^2)dy = 0$$

ist nicht exakt, aber mittels integrierendem Faktor $M(x, y) = \frac{1}{(xy)^3}$ geht sie in eine exakte Dgl. über. Man verifiziere dies und gebe dann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

2 Theoretische Grundlagen: Integrierender Faktor

Eine nicht exakte Differentialgleichung in der Form

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

geht durch die Multiplikation mit einer Funktion $M(x, y)$ in die exakte Differntialgleichung

$$M(x, y) \cdot A(x, y) + M(x, y) \cdot B(x, y)y' = 0$$

über. $M(x, y)$ ist der **integrierende Faktor** oder **Euler-Multiplikator**.
Allgemein lautet der Lösungsweg für $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$ mit integrierendem Faktor vom Typ $M(x, y) = m(u(x, y))$:

1. Berechnung von $A_y - B_x$. Wenn 0 herauskommt, dann liegt eine exakte Differentialgleichung vor, die wie gehabt gelöst werden kann. (siehe 2.2.)

2. Wenn $u(x, y)$ nicht explizit vorgegeben so versuchen wir ausgehend von folgender Konstellation:

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

   - Wir prüfen, ob

$$\frac{A_y - B_x}{B}$$

     nur von x abhängt. Sollte das der Fall sein, setzen wir

$$\mu_x = \frac{A_y - B_x}{B}\mu$$

     und erhalten als Lösung dieser Differentialgleichung einen nur von x abhängigen integrierenden Faktor μ.

- Wir prüfen, ob
$$\frac{A_y - B_x}{A}$$
nur von y abhängt. Sollte das der Fall sein, setzen wir
$$\mu_y = \frac{A_y - B_x}{A}\mu$$
und erhalten als Lösung dieser Differentialgleichung einen nur von y abhängigen integrierenden Faktor μ.
- Sollte keiner der beiden o.g. Punkte zutreffen, so bleibt nur die Auswahl verschiedener Funktionen $u(x,y)$ und dazu Berechnung von
$$H(x,y) := \frac{Ay - Bx}{BU_x - Au_y}$$
Wenn $H(x,y) = h(u(x,y))$ weiter mit nächstem Schritt, ansonsten anderes $u(x,y)$ wählen.
Standard-Ansätze für $u(x,y)$:

$\mathbf{u(x,y)}$	$\mathbf{H(x,y)}$
x	$\frac{A_y - B_x}{B}$
y	$\frac{A_y - B_x}{-A}$
$x+y$	$\frac{A_y - B_x}{B-A}$
$x-y$	$\frac{A_y - B_x}{B+A}$
xy	$\frac{A_y - B_x}{yB-yA}$
y^2+y^2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_y - B_x}{xB-yA}$
x^2-y^2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_y - B_x}{xB+yA}$

3. Berechne $m(u) = e^{\int h(u)\,du}$. $M(x,y) = m(u(x,y))$ ist der Euler-Multiplikator
4. Lösung der exakten Differentialgleichung $M(x,y) \cdot A(x,y) + M(x,y) \cdot B(x,y)y' = 0$

3 Lösung des Beispiels

3.1 Exaktheitstest ('original'-Funktion)

$$A = y, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = 1$$
$$B = x \cdot (1 - 3x^2y^2) \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = 1 - 6xy^2$$
$$\frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x}$$

3.2 Exaktheitstest (Funktion mit integrierendem Faktor $M(x,y) = \frac{1}{(xy)^3}$ multipliziert)

$$A = \frac{1}{x^3y^2} \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{2}{x^3y^3}$$
$$B = \frac{1-3x^2y^2}{x^2y^3} \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{2}{x^3y^3}$$
$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \checkmark$$

3.3 Lösung der nun exakten Differentialgleichung

$$U_x = A, U_y = B$$
$$U(x,y) = \int A(x,y)\,dx + c(y) = \int \frac{1}{x^3y^2}\,dx = -\frac{1}{2x^2y^2} + c(y)$$
$$U_y(x,y) = \left(-\frac{1}{2x^2y^2}\right)_y + c'(y) = \frac{1}{x^2y^3} - \frac{3}{y}$$
$$\frac{1}{x^2y^3} + c'(y) = \frac{1}{x^2y^3} - \frac{3}{y}$$
$$c'(y) = -\frac{3}{y} \qquad \Big| \int \qquad \Rightarrow \qquad c(y) = -3\ln(y)$$
$$U(x,y) = -\frac{1}{2x^2y^2} + c(y) = -\mathbf{\frac{1}{2x^2y^2} - 3\ln(y)}$$