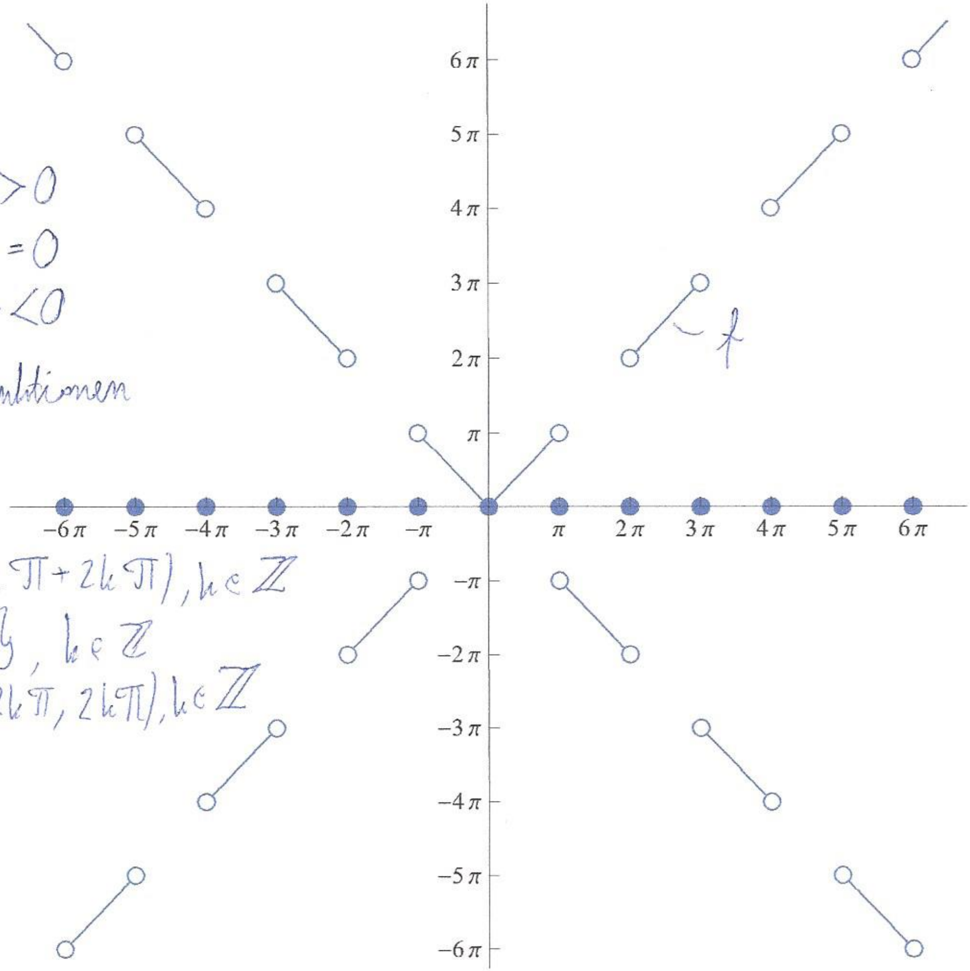
117.) $f(x) = x \operatorname{sgn}(\sin x)$



$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } \sin x > 0 \\ 0, & \text{falls } \sin x = 0 \\ -x, & \text{falls } \sin x < 0 \end{cases}$$

$x, 0, -x$ ... stetige Funktionen

$\sin x > 0 \Longleftrightarrow x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 0 \Longleftrightarrow x \in \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$

$\sin x < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\pi + 2k\pi, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

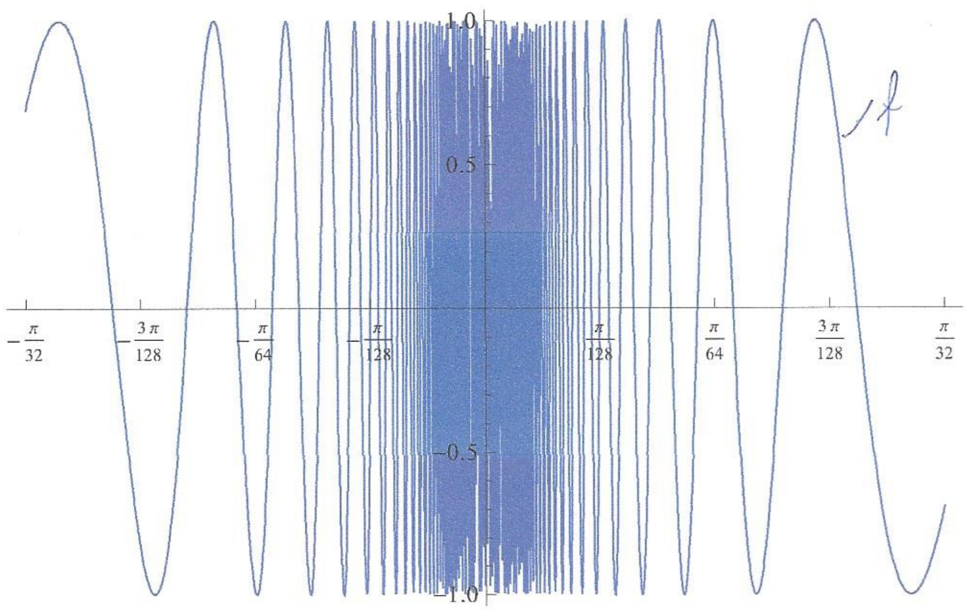
$f(x)$ stetig an folgenden Stellen:

$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

119.)

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



zu zeigen:

$\nexists \lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Beweis:

Betrachten: Folgen x_n

- $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n\pi} = 0$ ✓
- $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = 0$ ✓

Betrachten: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

- $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \sin(n\pi) = 0$

f stetig am $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

- $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

⚡

$\Longrightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ■

Für EVC:

$$\mathrm{si}(x) = \mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

120.) $f(x) = \frac{1-x^3}{x^3}$, $\mathcal{D}_f = (1, \infty)$

zu zeigen: $\exists f^{-1}(x) : f^{-1}(x)$ stetig

Beweis:

- x^3 ist stetig in $\mathcal{D}_f$
- aus Rechenregeln für stetige Funktionen folgt:

  $f(x) = \frac{1-x^3}{x^3}$ ist stetig in $\mathcal{D}_f$.
- falls $x_1 < x_2$, dann: $(x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1-x_2^3}{x_2^3} - \frac{1-x_1^3}{x_1^3} = \frac{x_1^3 - \cancel{(x_1 x_2)^3} - x_2^3 + \cancel{(x_1 x_2)^3}}{(x_1 x_2)^3} =$$

$$= \frac{\overbrace{x_1^3 - x_2^3}^{<0}}{\underbrace{(x_1 x_2)^3}_{>0}} < 0$$

$\Rightarrow f(x)$ streng monoton fallend

$f(x)$ streng monoton fallende, stetige Funktion

$\Rightarrow f(x)$ bijektiv $\wedge \exists f^{-1}(x) : f^{-1}(x)$ stetig (und auch streng monoton fallend) ∎

- $y = \frac{1-x^3}{x^3} \iff x^3 y = 1 - x^3 \iff x^3(1+y) = 1 \overset{y \neq -1}{\iff} x = \sqrt[3]{\frac{1}{1+y}}$

$f(1) = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x^3}{x^3} = -1$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x}}$, $\mathcal{D}_{f^{-1}} = (-1; 0)$

125.) zu zeigen: die Funktion $y = e^{\frac{x}{2}} - 4x + 1$ besitzt im Intervall $[0, 1]$ und $[6, 7]$ je eine Nullstelle.

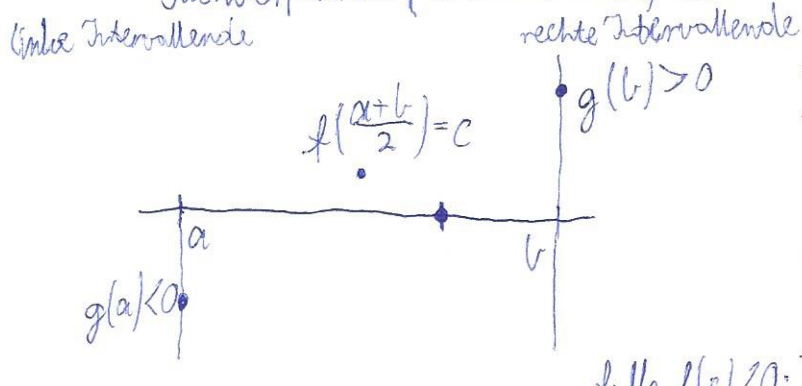
Beweis:

Sei $y = f(x)$. $f(x)$ ist <u>stetig</u> (Rechenregeln für stetige Funktionen)

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = e^0 - 0 + 1 = 2 > 0 \\ f(1) = \sqrt{e} - 4 + 1 \approx -1.35 < 0 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{NSvB}} \exists\, x \in [0, 1] \text{ mit } f(x) = 0 \ \checkmark$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(6) = e^3 - 24 + 1 \approx -2.91 < 0 \\ f(7) = \sqrt{e^7} - 28 + 1 \approx 6.12 > 0 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{NSvB}} \exists\, x \in [6; 7] \text{ mit } f(x) = 0 \ \checkmark$$

Suchverfahren (Suche (lineare) nach Nullstelle)



$I_0 = [a, b]$, $a \to x_0$, $b \to y_0$

$c = \frac{a+b}{2}$, $f(c) > 0$

falls $f(c) < 0$: $I_1 = [a, c]$, $a \to x_1$, $c \to y_1$

falls $f(c) > 0$: $I_1 = [c, b]$

iterieren

falls $f(c) = 0 \Rightarrow \checkmark$

127.)

$f: [0,a] \to \mathbb{R}$ stetig

$f(0) = 0$

$f(a) > a$

$f(x) \neq x$ für $0 < x < a$

zu zeigen: $f(x) > x$ für $0 < x < a$

Beweis:

Sei $g(x) = f(x) - x$.

Dann:

$$\left\{\begin{array}{l} g(x) \text{ stetig } \quad (g: [0,a] \to \mathbb{R}) \\ g(0) = 0 \\ g(a) > 0 \\ g(x) \neq 0 \text{ für } x \in (0,a) \end{array}\right. \left[\xRightarrow{\text{NSvB}} \neg\left(g(0) \lesseqgtr 0 \wedge g(a) \gtreqless 0\right) \right]$$

$$\Rightarrow g(x) > 0 \text{ für } x \in (0,a)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) - x > 0 \text{ für } x \in (0,a)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) > x \text{ für } x \in (0,a) \quad \blacksquare$$

$\rightarrow$ Beweis durch Widerspruch

angenommen: $\exists\, g(c) < 0$

$\xRightarrow{\text{NSvB}} \exists\, x \in (a,b) : g(x) = 0 \quad \lightning$

128.) $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig

zu zeigen: $\exists\, x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$

Beweis:

Sei $g(x) = f(x) - x$

$\Longrightarrow g : [a,b] \to [a-b, b-a]$ stetig

$$\left.\begin{array}{l} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{NSvB}} \exists\, x_0 \in [a,b] \text{ mit } g(x_0) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x_0) - x_0 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x_0) = x_0 \quad \blacksquare$$

177.)

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-2x^3-3+3x^2}{(1-x)^2(1+x)(1+x+x^2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2(1-x)-(1-x^2)}{(1-x)^2(1+x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(2x^2-x-1)}{(1-x)^2(1+x)(1+x+x^2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}-\frac{(1-x)^2(2x+1)}{(1-x)^2(1+x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}-\frac{2x+1}{(1+x)(1+x+x^2)}=-\frac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{17x^2+4x-1}{x^3-12x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\overset{\to 0}{\frac{17}{x}}+\overset{\to 0}{\frac{4}{x^2}}-\overset{\to 0}{\frac{1}{x^3}}\right)}{x^3\left(\underset{\downarrow 1}{1}-\underset{\downarrow 0}{\frac{12}{x}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{x^3}}\right)}=0$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=$

$=1\cdot 0=0$