11. UE Analysis für INF und WINF

346 Nach Satz 6.25 im Buch ist die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}$ in Richtung $\vec{v}$ (mit $\|\vec{v}\|=1$) gegeben durch:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{v}.$$

Für $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ ist $\operatorname{grad} f = (f_x, f_y) = (2x, 8y)$, also für $\vec{x} = (3,2)$: $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \operatorname{grad} f(3,2) = (6,16)$.

(a) Für die x-Achse ist $\vec{v} = (1,0)$, also $\operatorname{grad} f(3,2) \cdot \vec{v} = 6$.
Für die y-Achse ist $\vec{v} = (0,1)$, also $\operatorname{grad} f(3,2) \cdot \vec{v} = 16$.

(b) Für die Richtung $(-1,-1)$ ist $\vec{v} = \frac{(-1,-1)}{\|(-1,-1)\|}$, also $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1,-1)$ und somit:

$$\operatorname{grad} f(3,2) \cdot \vec{v} = (6,16) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1) = \frac{-22}{\sqrt{2}} = -11\sqrt{2}.$$

(c) Allgemein gilt für die Richtung $\operatorname{grad} f$:
$\vec{v} = \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}$, also $\operatorname{grad} f \cdot \vec{v} = \frac{\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|} =$

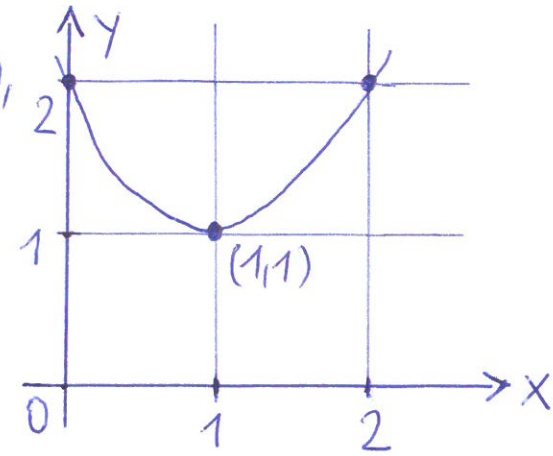
$= \frac{\|\operatorname{grad} f\|^2}{\|\operatorname{grad} f\|} = \|\operatorname{grad} f\|$, also in unserem Fall:

$$\operatorname{grad} f(3,2) \cdot \vec{v} = \|\operatorname{grad} f(3,2)\| = \|(6,16)\| =$$

$$= \sqrt{6^2 + 16^2} = \sqrt{36 + 256} = \sqrt{292} = \sqrt{4 \cdot 73} = 2 \cdot \sqrt{73}.$$

Anmerkung zu (a): Die Ableitungen in Richtung der Koordinatenachsen sind immer die partiellen Ableitungen, also in unserem Fall f_x und f_y.

$\boxed{348}$ $f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ falls } y-1=(x-1)^2>0, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$



Vorbemerkung: $y-1=(x-1)^2>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 1+(x-1)^2$ und $x \neq 1 \Leftrightarrow$
(x,y) liegt auf der Parabel
$y = 1+(x-1)^2$ ohne den Punkt $(1,1)$.

(i) f ist an der Stelle $(1,1)$ unstetig. Beweis:

Wegen $1-1=(1-1)^2=0$ gilt $f(1,1)=0$. Wir betrachten nun die Folge $(x_n, y_n) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}, 1+\frac{1}{n}\right)$. Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(1,1)$ und $y_n-1=(x_n-1)^2=\frac{1}{n}>0$, also $f(x_n,y_n)=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=1\neq 0=f(1,1)$.

(ii) Für alle Vektoren $\vec{v}=(v_1,v_2)$ mit $\|\vec{v}\|=1$ (also $v_1^2+v_2^2=1$) gilt: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f((1,1)+t\vec{v})-f(1,1)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f((1,1)+t\vec{v})}{t}=0$.

Beweis: $f((1,1)+t\vec{v})=1 \Rightarrow 1+tv_2-1=(1+tv_1-1)^2 \Rightarrow v_2=tv_1^2, \forall t\neq 0$.

Fall 1: $v_1=0$ oder $v_2=0$. $\Rightarrow \vec{v}=(0,\pm 1)$ oder $\vec{v}=(\pm 1,0)$.
$\Rightarrow v_2 \neq tv_1^2, \forall t\neq 0 \Rightarrow f((1,1)+t\vec{v})=0=0, \forall t\neq 0 \Rightarrow$
$\lim\limits_{t\to 0}\frac{f((1,1)+t\vec{v})}{t}=0$.

Fall 2: $v_1\neq 0$ und $v_2\neq 0$. Sei $\left|\frac{v_2}{v_1^2}\right| =: \varepsilon > 0$ und (t_n) eine Folge mit $t_n\neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$. Dann gilt $|t_n|<\varepsilon$, also $|t_n|\cdot|v_1^2|<|v_2|$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$.
$\Rightarrow v_2 \neq t_n v_1^2 \Rightarrow f((1,1)+t_n\vec{v})=0$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$.
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f((1,1)+t_n\vec{v})}{t_n}=0$. Da (t_n) eine beliebige Folge war, gilt somit: $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f((1,1)+t\vec{v})}{t}=0$.

$\boxed{351}$ Sei $f(x,y) = x \cdot \ln(1+xy)$, $(x_0, y_0) = (1,0)$.

Nach Beispiel 6.30 im Buch ist das Taylorsche Näherungspolynom 2. Ordnung an der Stelle $(1,0)$ gegeben durch: $p(x,y) = f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)\cdot y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(1,0)\cdot(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,0)(x-1)y + f_{yy}(1,0)\cdot y^2\right)$.

Wir haben: $f(1,0) = 1\cdot\ln(1+0) = 0$.

$$f_x = \ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \Longrightarrow f_x(1,0) = \ln(1+0) + 0 = 0.$$

$$f_y = \frac{x^2}{1+xy} \Longrightarrow f_y(1,0) = \frac{1}{1+0} = 1.$$

$$f_{xx} = \frac{y}{1+xy} + \frac{y\cdot(1+xy) - xy^2}{(1+xy)^2} = \ldots = \frac{2y + xy^2}{(1+xy)^2},$$

$$f_{xy} = \frac{x}{1+xy} + \frac{x\cdot(1+xy) - x^2y}{(1+xy)^2} = \ldots = \frac{2x + x^2y}{(1+xy)^2}$$

(Probe: $f_{yx} = \frac{2x(1+xy) - x^2y}{(1+xy)^2} = \frac{2x + x^2y}{(1+xy)^2}$),

$$f_{yy} = \frac{0 - x^3}{(1+xy)^2} = -\frac{x^3}{(1+xy)^2} \Longrightarrow$$

$$f_{xx}(1,0) = \frac{0+0}{(1+0)^2} = 0, \quad f_{xy}(1,0) = \frac{2+0}{(1+0)^2} = 2,$$

$$f_{yy}(1,0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1 \Longrightarrow$$

$$\underline{\underline{p(x,y)}} = 0 + 0\cdot(x-1) + 1\cdot y + \frac{1}{2}\left(0\cdot(x-1)^2 + 4(x-1)y - y^2\right) =$$

$$= y + 2(x-1)y - \frac{y^2}{2} = \underline{\underline{2xy - y - \frac{y^2}{2}}}.$$

(Probe: $p(1,0) = 0$, $p_x = 2y \Rightarrow p_x(1,0) = 0$, $p_y = 2x - 1 - y \Rightarrow$
$\Rightarrow p_y(1,0) = 1$, $p_{xx} = 0$, $p_{xy} = p_{yx} = 2$, $p_{yy} = -1$.)

$\boxed{364}$ Sei $q(\vec{x}) = q(x,y) = 4x^2 + 2bxy + 25y^2$, $b \in \mathbb{R}$.

Mit $A = \begin{pmatrix} 4 & b \\ b & 25 \end{pmatrix}$ gilt dann: $\vec{x} A \vec{x}^T = (x,y)\begin{pmatrix} 4 & b \\ b & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$= (4x+by,\ bx+25y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (4x+by)\cdot x + (bx+25y)\cdot y =$

$= 4x^2 + 2bxy + 25y^2 = q(\vec{x})$.

Die Matrix A (und damit auch die quadratische Form q) ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind (Buch, Satz 3.85).

Setzen wir $A = \begin{pmatrix} 4 & b \\ b & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, dann gibt es zwei Hauptminoren: $a_{11} = 4 > 0$, und $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 =$ $= 100 - b^2$. Es gilt: $\det A = 100 - b^2 > 0 \Leftrightarrow b^2 < 100$ $\Leftrightarrow |b| < 10 \Leftrightarrow b \in (-10, 10)$.

Also gilt: q positiv definit $\Leftrightarrow b \in (-10, 10)$.

$\boxed{384}$ Gesucht sind die relativen Extrema von

$$f(x,y) = \cos(x+y) + \sin x + \sin y,\ 0 \le x, y \le \frac{\pi}{2}.$$

Weiters sind die Sattelpunkte und absoluten Extrema gesucht.

(i) Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left.\begin{aligned} f_x &= -\sin(x+y) + \cos x = 0 \\ f_y &= -\sin(x+y) + \cos y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos x = \cos y,\ 0 \le x, y \le \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow x = y$$

$\Rightarrow \cos x = \sin(2x) = 2\sin x \cos x \Rightarrow \cos x = 0$ oder $\sin x = \frac{1}{2}$.

Dies liefert 2 mögliche stationäre Punkte: $P_1 = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $P_2 = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$.

Zur Probe setzen wir nochmals ein: $f_x(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = -\sin\pi + \cos\frac{\pi}{2} = 0$, analog $f_y(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 0$; weiters $f_x(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} =$ $= -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$, analog $f_y(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) = 0$. Also sind P_1, P_2 stationäre Punkte, wobei P_1 am Rand liegt.

(ii) Betrachtung der Hesse-Matrix $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$:

$f_{xx} = -\cos(x+y) - \sin x$,

$f_{yy} = -\cos(x+y) - \sin y$, $f_{xy} = f_{yx} = -\cos(x+y)$.

$$\Longrightarrow H_f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\cos\pi - \sin\frac{\pi}{2}, & -\cos\pi \\ -\cos\pi, & -\cos\pi - \sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

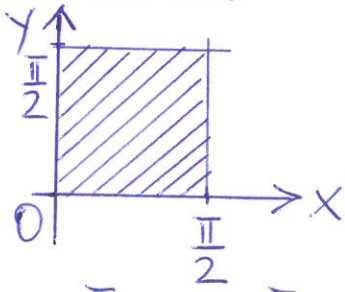
Diese Matrix ist (nach Satz 3.85 im Buch) indefinit, also liegt – bei globaler Betrachtung von $f(x,y)$ auf $\mathbb{R}^2$ – bei P_1 ein Sattelpunkt vor. Beim vorgegebenen Definitionsbereich $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ ist allerdings P_1 ein Randpunkt und muss daher nicht unbedingt ein Sattelpunkt sein. Wie sich später herausstellt, ist P_1 ein absolutes Minimum.

$$H_f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}, & -\cos\frac{\pi}{3} \\ -\cos\frac{\pi}{3}, & -\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1, & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, & -1 \end{pmatrix}, \text{ also } \det H_f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0.$$

Wegen $-1 < 0$ ist H_f negativ definit und somit P_2 ein relatives Maximum mit dem Funktionswert

$$f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}.$$



(iii) Betrachtung des Randes: Dieser besteht aus den Seiten des Quadrats, welches von den 4 Geraden $y=0$, $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ gebildet wird. Auf diesen Seiten betrachten wir die 4 einstelligen Funktionen:

$f(x,0) = \cos x + \sin x$, $f(0,y) = \cos y + \sin y$, $f(x, \frac{\pi}{2}) =$

$= \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \sin x + \sin\frac{\pi}{2} = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{2} +$

$+ \sin x + 1 = 0 - \sin x + \sin x + 1 = 1$, analog $f(\frac{\pi}{2}, y) = 1$.

Auf den Geraden $y = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{\pi}{2}$ ist die Funktion f also konstant 1. Für die Geraden $y=0$ und $x=0$ berechnen wir die relativen Extrema der einstelligen Funktionen $f(x,0)$ und $f(0,y)$.

$f'(x,0) = -\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

$f''(x,0) = -\cos x - \sin x \Rightarrow f''(\frac{\pi}{4}, 0) = -\sqrt{2} < 0$.

Also liegt bei $(\frac{\pi}{4}, 0)$ ein relatives Maximum von $f(x,0)$ vor.

Analog ist bei $(0, \frac{\pi}{4})$ ein relatives Maximum von $f(0,y)$, und es gilt $f(\frac{\pi}{4}, 0) = f(0, \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

Wegen $\sqrt{2} < \frac{3}{2} = f(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ gibt es genau ein absolutes Maximum, nämlich das relative Maximum im Punkt $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$.

Weiters gibt es unendlich viele absolute Minima mit dem Funktionswert 1, nämlich die Punkte $(x, \frac{\pi}{2})$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, und $(\frac{\pi}{2}, y)$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$. $f(0,0) = 1 \Rightarrow$ auch $(0,0)$ ist ein absolutes Minimum.

$\boxed{386}$ $f(x,y) = 4(x-2)(y^2+10y) + 3x^3 \Longrightarrow$

$f_x = 4\cdot(y^2+10y) + 9x^2$, $f_y = 4(x-2)(2y+10)$.

$f_y = 0 \Rightarrow x = 2$ oder $y = -5$.

Fall 1: $x = 2$. $f_x = 0 \Rightarrow 4\cdot(y^2+10y) + 9\cdot 4 = 0 \Longrightarrow$

$y^2 + 10y + 9 = 0 \Longrightarrow y_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25-9} = -5 \pm 4 = \begin{cases} -1, \\ -9. \end{cases}$

$\Longrightarrow$ Stationäre Punkte: $P_1 = (2, -1)$, $P_2 = (2, -9)$.

Fall 2: $y = -5$. $f_x = 0 \Rightarrow 4\cdot(25-50) + 9x^2 = 0 \Longrightarrow$

$-100 + 9x^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{100}{9} \Longrightarrow x_{1,2} = \pm\frac{10}{3}$

$\Longrightarrow$ Stationäre Punkte: $P_3 = (\frac{10}{3}, -5)$, $P_4 = (-\frac{10}{3}, -5)$.

Wir bestimmen nun die Hesse-Matrix:

$f_{xx} = 18x$, $f_{yy} = 8\cdot(x-2)$, $f_{xy} = f_{yx} = 4\cdot(2y+10)$

$$\Rightarrow H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x, & 8(y+5) \\ 8(y+5), & 8(x-2) \end{pmatrix},$$

$\det H_f = 144x(x-2) - 64(y+5)^2.$

Für P_1, P_2 und P_3 ist $18x > 0$, für P_4 ist $18x < 0$.

Für P_1 und P_2 ist $\det H_f = -64(y+5)^2 < 0$, also ist H_f indefinit, und es liegt kein relatives Extremum vor.

Für P_3 ist $\det H_f = 144 \cdot \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{10}{3} - 2\right) > 0$, und für P_4 ist $\det H_f = 144 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) \cdot \left(-\frac{10}{3} - 2\right) =$
$= 144 \cdot \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{10}{3} + 2\right) > 0$, also liegt in beiden Fällen ein relatives Extremum vor.

Für P_3 ist – wegen $18x > 0$ – die Matrix H_f positiv definit, also liegt ein relatives Minimum vor.

Für P_4 ist – wegen $18x < 0$ – die Matrix H_f negativ definit, also liegt ein relatives Maximum vor.

Wie man durch Einsetzen leicht sieht, gilt für die Funktionswerte: $f(P_3) < 0$ und $f(P_4) > 0$.