

1. (a) Man untersuche die nachstehende Folge auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$a_n = \frac{9n^3 - 8n^2 + 5}{3n^3 - 4n + 5} \quad (n \geq 0).$$

- (b) Mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums untersuche man die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{5^n}.$$

(Geben Sie explizit ihre Antwort an, also entweder „JA, die Reihe konvergiert“ oder „NEIN, die Reihe konvergiert nicht“.)

2. Für die Funktion $f(x) = 9x \cdot e^{-3x}$ berechne man den Inhalt des vom Funktionsgraphen und der x-Achse im ersten Quadranten eingeschlossenen Flächenstücks.

3. Man bestimme die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' - y \cdot \tan(x) = 1.$$

4. Stetigkeit und Differenzierbarkeit reellwertiger Funktionen:

- Wann heißt eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}$) stetig auf D , wann heißt sie differenzierbar auf D ?
- Geben Sie je ein Beispiel für eine (i) nicht stetige, (ii) stetige aber nicht differenzierbare sowie (iii) differenzierbare Funktion an.
- Nennen Sie zwei Eigenschaften (Sätze) für stetige Funktionen.

5. Beantworten Sie die nachstehenden Fragen zu den Extrema der Funktion

$$f(x,y) = e^x (x^3 - 5x^2 + 7x + y^2 - 7)$$

(bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

Für das Aufsuchen von lokalen Extrema von f ist die Bedingung $\text{grad } f = \mathbf{0}$	<input type="radio"/> notwendig <input type="radio"/> hinreichend <input type="radio"/> notwendig und hinreichend
In stationären Punkten von f gilt	<input type="radio"/> $f = 0$ <input type="radio"/> $f_x = f_y = 0$ <input type="radio"/> $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0$
Im Punkt $(0,0)$ liegt ein *)	<input type="radio"/> lokales Minimum <input type="radio"/> lokales Maximum <input type="radio"/> Sattelpunkt der Funktion f .
Im Punkt $(3,0)$ liegt ein *)	<input type="radio"/> lokales Minimum <input type="radio"/> lokales Maximum <input type="radio"/> Sattelpunkt der Funktion f .
Im Punkt $(-1,0)$ liegt ein *)	<input type="radio"/> lokales Minimum <input type="radio"/> lokales Maximum <input type="radio"/> Sattelpunkt der Funktion f .
In einem lokalen Minimum von f ist die Hesse-Matrix	<input type="radio"/> positiv definit <input type="radio"/> negativ definit <input type="radio"/> indefinit
Ein lokales Extremum ist immer auch ein globales Extremum:	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein
Ein globales Extremum liegt stets am Rand des vorgegebenen Definitionsbereichs von f :	<input type="radio"/> ja <input type="radio"/> nein

*) Hinweis: Die Funktion besitzt drei stationäre Punkte $(0,0)$, $(3,0)$, $(-1,0)$, ferner ist $f_{yy} = 2e^x$ und die Determinante D der Hesse-Matrix beträgt $D = 2e^{2x} (x^3 + x^2 - 7x - y^2 - 3)$.