4. Übung - Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

Felix Knorr (1325541) - e1325541@student.tuwien.ac.at

15. November 2014

1. Bestimmen Sie die Varianz der Poissonverteilung.

   Poissonverteilung: $P_\lambda(X) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$
   Varianz: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ (über Verschiebesatz)

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}}_{k=0\to 0} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}}_{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}(k-1+1)}\Big)$$

$$= e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}}_{k=1\to 0} (k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!} + e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} + e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}_{e^{\lambda}} + e^{-\lambda}\lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\lambda}} = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathbb{V}(x) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

2. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der stetigen Gleichverteilung $U(a,b)$ mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\ dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\ dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-1)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\ dx - \left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{3}\frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{b-a} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$= \frac{1}{12}4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

3. Bestimmen Sie zu Beispiel 1 - Übung 3 die Varianzen und die Kovarianz von X und Y

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(Y)^2 = 1$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{20}{84} + 1^2 \cdot \frac{45}{84} + 2^2 \cdot \frac{18}{84} + 3^2 \cdot \frac{1}{84} = 1.5$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1.5 - 1 = 0.5$$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{X})\cdot(Y-\mathbb{Y})] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{3} x\cdot y\cdot \mathbb{P}(X=x,Y=y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$= 0\cdot 0\cdot\frac{1}{84} + 0\cdot 1\cdot\frac{9}{84} + 0\cdot 2\cdot\frac{9}{84} + 0\cdot 3\cdot\frac{1}{84} + 1\cdot 0\cdot\frac{9}{84} + 1\cdot 1\cdot\frac{27}{84} + 1\cdot 2\cdot\frac{9}{84} + 1\cdot 3\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot\frac{9}{84} + 2\cdot 1\cdot\frac{9}{84} +$$

$$2\cdot 2\cdot 0 + 2\cdot 3\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot\frac{1}{84} + 3\cdot 1\cdot 0 + 3\cdot 2\cdot 0 + 3\cdot 3\cdot 0 - 1\cdot 1 = -0.25$$

4. Bestimmen Sie zu Beispiel 2 - Übung 3 die Varianzen und die Kovarianz von X und Y

$$\mathbb{E}(X) = \frac{4}{9} \quad\Rightarrow\quad \mathbb{E}(X)^2 = \frac{16}{81}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f_X(x)\ dx = \int_0^1 x^2(-4x\ln|x|)\ dx = -4\int_0^1 x^3\ln|x|\ dx = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{4} - \frac{16}{81} = \frac{81-64}{324} = \frac{17}{324}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad \mathbb{E}(X)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\cdot f_Y(x)\ dy = \int_0^1 y^2(2y)\ dy = 2\int_0^1 y^3\ dy = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \int_0^1\int_0^y x\cdot y\cdot f(x,y)\ dx\ dy - \frac{4}{9}\frac{2}{3} = \int_0^1\int_0^y x\cdot y\cdot\frac{4x}{y}\ dx\ dy - \frac{8}{27}$$

$$= \int_0^1\int_0^y 4x^2\ dx\ dy - \frac{8}{27} = \int_0^1 \frac{4y^3}{3}\ dy - \frac{8}{27} = \frac{1}{3} - \frac{8}{27} = \frac{9-8}{27} = \frac{1}{27}$$

5. X und Y seien unabhängig poissonverteilt mit Parameter λ und μ. Bestimmen Sie die Verteilung $X+Y$.

   Poissonverteilung: $P_\lambda(X) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x \geq 0$

$$F_\lambda(z) = \mathbb{P}(Z=z) = \sum_{x=0}^{z}\mathbb{P}(X=x, X+Y=z) = \sum_{x=0}^{z}\mathbb{P}(X=x, Y=z-x) = \sum_{x=0}^{z}\mathbb{P}(X=x)\ \underbrace{\mathbb{P}(Y=z-x|X=x)}_{\text{Da unabhängig:}\mathbb{P}(Y=z-x)}$$

$$= \sum_{x=0}^{z}\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=z-x) = \sum_{x=0}^{z}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\frac{e^{-\mu}\mu^{z-x}}{(z-x)!} = e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{x=0}^{z}\ \underbrace{\frac{\lambda^x\mu^{z-x}}{(z-x)!\ x!}}_{\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!}\quad \underbrace{\sum_{x=0}^{z}\binom{z}{x}\lambda^x\mu^{z-x}}_{(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k} \quad = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}$$

6. X und Y seien unabhängig gleichverteilt auf $[0,1]$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X+Y$

   Gleichverteilung: $U_X(a,b) = f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$
   In diesem Fall $a=0,\ b=1 \quad\Rightarrow\quad U_X(a,b) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$
   $X+Y = Z\ (z \in [0,2]) \Rightarrow Y = Z - X$

$$f_{X+Y} = \underbrace{f_X * f_Y}_{\text{Faltung}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\ dx = \int_0^1 \underbrace{f_X(x)}_{=1} f_Y(z-x)\ dx = \int_0^1 f_Y(\underbrace{z-x}_{\in[0,2]})\ dx$$

   Fall 1: $z \in [0,1] \qquad z-x \geq 0 \quad\Rightarrow\quad 0 \leq x \leq z$

$$\int_0^z 1\ dx = z$$

Fall 2: $z \in [1,2]$ $\qquad z - x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad z - 1 \leq x \leq 1$

$$\int_{z-1}^{1} 1\ dx = 1 - z + 1 = 2 - z$$

Insgesamt:

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} z & 0 \leq z \leq 1 \\ 2 - z & 1 \leq z \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

7. X hat die Dichte $f_X(x) = 2e^{-2x}[x \geq 0]$. Bestimmen Sie die Quantille $x_{0.25}, x_{0.5}, x_{0.75}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\ dx = \int_{0}^{x} 2e^{-2x}\ dx = \left(-e^{-2x}\right)\Big|_0^x = 1 - e^{-2x}$$

$$F_X(x_p) = p \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-2x} = p \quad \Rightarrow \quad 1 - p = e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad \ln(1-p) = -2x \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\ln(1-p)}{2}$$

$$x_{0.25} = 0.14, \quad x_{0.5} = 0.35, \quad x_{0.75} = 0.69$$