Übungsblatt 8 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

50.) Unter Zuhilfenahme der Potenzreihenentwicklung des $\cosh z$:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

bestimme man den Wert der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n)!}.$$

Anmerkung: Man fasse die Reihe als Realteil von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt + i \sin 2nt}{(2n)!}$ auf.

51.) Man zeige die in der Vorlesung besprochene Orthogonalitätsrelation für die folgende Menge von T-periodischen Funktionen: $\{f_k(t) := e^{ik\omega t} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, wobei $\omega := \frac{2\pi}{T}$ sei. Es gilt nämlich für $k, \ell \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^T f_k(t)\overline{f_\ell(t)}dt = \begin{cases} 0, & \text{für } k \neq \ell, \\ T, & \text{für } k = \ell. \end{cases}$$

Anmerkung: $\overline{e^{ik\omega t}} = \overline{\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)} = \cos(k\omega t) - i\sin(k\omega t) = e^{-ik\omega t}$.

52.) Man bestimme die (reelle und komplexe) Fourier-Reihe folgender 2π-periodischer Funktion $f(t)$:

$$f(t) = t, \quad 0 \leq t < 2\pi, \quad 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

Anmerkung: Selbstverständlich ist wahlweise die reelle oder die komplexe Fourier-Reihe zu bestimmen, wodurch dann mit den Beziehungen $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ die andere ebenfalls erhalten wird.

53.) Man bestimme die Fourier-Reihe folgender 2π-periodischer Funktion $f(t)$:

$$f(t) = t^2, \quad 0 \leq t < 2\pi, \quad 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

54.) Man bestimme die Fourier-Reihe folgender 2π-periodischer Funktion $f(t)$:

$$f(t) = \cos t + |\cos t|.$$

55.) Zeige, daß eine gerade T-periodische Funktion ($f(t) = f(-t)$) in ihrer reellen Fourierentwicklung (= Sinus-Cosinus-Form) keine Sinus-Ausdrücke enthalten kann.

56.) Man entwickle die Funktion

$$g(t) = e^t, \quad 0 \leq t < T$$

in eine reine Cosinusreihe, das heißt man bestimme die (gewöhnliche) Fourier-Reihe der $2T$-periodischen Funktion $h(t)$, welche die gerade, $2T$-periodische Fortsetzung von $g(t)$ darstellt:

$$h(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < T, \\ g(-t), & -T < t < 0. \end{cases}, \quad h(t + 2T) = h(t).$$