Analysis I Übung - Blatt 2, für den 19. 10. 2010

9. Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Finden Sie alle Wertetabellen für

   (a) symmetrische und reflexive

   (b) antisymmetrische und reflexive

   (c) antisymmetrische und symmetrische

   (d) transitive, symmetrische und reflexive

   (e) reflexive, antisymmetrische, transitive, und totale

   Relationen auf M. Wie viele verschiedene Tabellen gibt es jeweils ?

10. Sei K Körper, und $<$ eine Relation of K. Laut Lehrbuch Heuser ist K ein durch $<$ angeordneter Körper gdw folgendes gilt:

    (a) Trichotomiegesetz: Für je 2 Elemente $a, b \in K$ gilt genau eine der 3 Aussagen:

    $$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a$$

    (b) Transitivitätsgesetz: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

    (c) Monotoniegesetz: Aus $a < b$ folgt

    $$\forall c \in K : a + c < b + c \qquad \text{und} \qquad \forall c \in K : c > 0 \Rightarrow ac < bc$$

    Man definiert $a \leq b :\Leftrightarrow a < b \vee a = b$. Man zeige: $(K, <)$ nach Heuser ist ein angeordneter Körper genau dann wenn $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper nach Skriptum ist.

11. Sei K ein Körper. Laut Lernbuch Behrends ist K ein durch die Menge $P \subset K$ angeordneter Körper gdw gilt:

    (a) $0 \notin P$ und für alle $x \neq 0$ gilt

    $$x \in P \Leftrightarrow -x \notin P$$

    (b)

    $$x, y \in P \;\Rightarrow\; (x + y \in P) \wedge (xy \in P)$$

    P heißt Menge der positiven Elemente (positiven Zahlen). Wir definieren $x < y :\Leftrightarrow y - x \in P$ und $x \leq y :\Leftrightarrow x = y \vee x < y$. Man zeige: (K, P) nach Definition Behrends ist ein angeordneter Körper genau dann wenn $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper nach Skriptum ist. Wie wird nach Skriptum die Menge P definiert ?

12. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie dass für alle $a, b, c \in K$ mit $c > 0$ gilt (Youngsche Ungleichung):

$$ab \leq \frac{1}{2c}a^2 + \frac{c}{2}b^2$$

13. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Definiere $A + B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$. Man zeige dass

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

14. Eine rationale Funktion auf $\mathbb{R}$ hat die Form

$$x \mapsto c\frac{x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

wobei $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $c, a_0, \ldots a_{m-1}, b_0, \ldots b_{n-1} \in \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ ist dabei jeweils so gewählt dass Pole ausgenommen werden. Man zeige folgendes:

(a) Die Menge RF der rationalen Funktionen r bildet einen Körper (mit Rechenoperationen $(r_1 + r_2) : x \mapsto r_1(x) + r_2(x)$, eins-Element $e := x \mapsto 1$ usw).

(b) Mit der Definition $P = \{r \in RF : c > 0\}$ bildet RF einen (nach Bsp 11) angeordneten Körper.

(c) Es gilt: $x \mapsto x \in RF$, und für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto k \in RF$. Es gilt

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : x \mapsto k < x \mapsto x$$

15. Seien X, Y Mengen, und $f : X \to Y$ eine Funktion. Wir definieren die mengenwertige Funktion $F : P(X) \to P(Y)$ als

$$F(A) := \{f(a) : a \in A\} \qquad \text{für } A \subset X,$$

und die mengenwertige Umkehrfunktion $F^{-1} : P(Y) \to P(X)$ wie folgt:

$$F^{-1}(B) := \{a \in X : f(a) \in B\} \qquad \text{für } B \subset Y.$$

(a) Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

$$F(\{2\}) \qquad \text{und} \qquad F^{-1}(\{4\}).$$

(b) Man beweise dass für $A \subset X$ gilt:

$$A \subset F^{-1}(F(A))$$

16. Man zeige dass für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x$ gilt:

$$f([2, 3]) \subset [0, 6].$$

Das abgeschlossene Intervall ist definiert als $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \wedge x \leq b\}$.