1. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung

Gernot Salzer

11. März 2016

Aufgabe 1 (0.3 Punkte)

Gegeben sei folgender Sachverhalt:

(A) Kein Murks ist ein Klax.
(B) Mindestens ein Troll ist ein Klax.

Nur eine der folgenden Aussagen ist eine zulässige Konklusion. Welche?

(C1) Kein Troll ist ein Murks.
(C2) Mindestens ein Troll ist ein Murks.
(C3) Mindestens ein Troll ist kein Murks.
(C4) Jeder Troll ist ein Murks.
(C5) Jeder Troll ist kein Murks.

Ersetzen Sie in der entsprechenden zulässigen Inferenz die Begriffe Murks, Klax und Troll durch alltägliche Begriffe, sodass

(a) … sowohl die Prämissen als auch die Konklusion wahr werden;

(b) … mindestens eine der Prämissen falsch und die Konklusion wahr wird;

(c) … alle Prämissen wahr werden und die Konklusion falsch wird;

(d) … sowohl mindestens eine der Prämissen als auch die Konklusion falsch wird.

Eine dieser vier Teilaufgaben wird Ihnen schwer fallen zu lösen. Welche? Und warum?

Lösung

A besagt, dass die Schnittmenge von Murksen und Klaxen leer ist.
B besagt, dass die Mengen der Trolle und Klaxe mindestens ein gemeinsames Element e besitzen.

Ob die Mengen der Trolle und Murkse überlappen (C2) oder nicht (C1, C5), wird durch A und B nicht eindeutig festgelegt, keine der drei Aussagen C1, C2 und C5 ist daher eine zulässige (zwingende) Konklusion.
C4 steht im Widerspruch zu den Annahmen A und B: e ist ein Troll und ein Klax (B), aber kein Murks (A). Daher widerlegt die Existenz von e die Behauptung, jeder Troll sei auch ein Murks.
C3 hingegen ist eine zulässige Konklusion: e ist ein Beispiel für einen Troll, der kein Murks ist. Die Inferenz besitzt somit folgenden Aufbau:

Kein x ist ein y.
Mindestens ein z ist ein y.

Mindestens ein z ist kein x.

(a) x = Kreis, y = Quadrat, z = Rechteck:

Kein Kreis ist ein Quadrat.	wahr
Mindestens ein Rechteck ist ein Quadrat.	wahr
Mindestens ein Rechteck ist kein Kreis.	wahr

(b) x = Quadrat, y = Kreis, z = Rechteck:

Kein Quadrat ist ein Kreis.	wahr
Mindestens ein Rechteck ist ein Kreis.	falsch
Mindestens ein Rechteck ist kein Quadrat.	wahr

(c) Diese Teilaufgabe ist nicht lösbar. Könnte man durch geeignete Wahl von Begriffen für x, y und z die Prämissen wahr und die Konklusion falsch machen, wäre es keine zulässige Schlussfolgerung.

(d) x = Rechteck, y = Kreis, z = Quadrat:

Kein Rechteck ist ein Kreis.	wahr
Mindestens ein Quadrat ist ein Kreis.	falsch
Mindestens ein Quadrat ist kein Rechteck.	falsch

Aufgabe 2 (0.4 Punkte)

Analysieren Sie die folgenden Sätze und identifizieren Sie ihre logische Struktur sowie die Elementaraussagen.

(a) Mir ist sehr kalt.

(b) Ich werde den Zug verpassen, wenn ich mich nicht beeile.

(c) Der Zirkusartist ist Hochseil- oder Trapezkünstler.

(d) Es regnet und schneit nie gleichzeitig.

(e) Eine Teilnahme an der Lehrveranstaltung ist nur möglich, wenn man in TISS angemeldet ist und das Studieneingangsgespräch absolviert hat.

(f) Mir ist schlecht, der Kopf tut mir weh, aber ich bin nicht unglücklich.

(g) Ich darf nur dann fernsehen, wenn ich meine Hausübungen gemacht habe.

(h) Florian trinkt zum Essen entweder Bier oder Wein, aber nie beides gleichzeitig.

Lösung

(a) *Mir ist sehr kalt.*
A ... Mir ist sehr kalt.
Struktur: A
Formel: A

(b) *Ich werde den Zug verpassen, wenn ich mich nicht beeile.*
A ... Ich verpasse den Zug.
B ... Ich beeile mich.
Struktur: A, wenn nicht B.
Formel: $A \subset \neg B$

(c) *Der Zirkusartist ist Hochseil- oder Trapezkünstler.*
A ... Der Zirkusartist ist Hochseilkünstler.
B ... Der Zirkusartist ist Trapezkünstler.
Struktur: A oder B
Formel: $A \vee B$
Eher nicht $A \not\equiv B$, da das den Fall ausschließt, dass jemand beides ist.

(d) *Es regnet und schneit nie gleichzeitig.*
A ... Es regnet.
B ... Es schneit.
Struktur: A nicht gleichzeitig mit B. Oder: Entweder nicht A oder nicht B.
Formel: $\neg(A \wedge B)$ oder $\neg A \vee \neg B$ oder $A \uparrow B$

(e) *Eine Teilnahme an der Lehrveranstaltung ist nur möglich, wenn man in TISS angemeldet ist und das Studieneingangsgespräch absolviert hat.*
A ... Eine Teilnahme an der Lehrveranstaltung ist möglich.
B ... Man ist in TISS angemeldet.
C ... Man hat das Studieneingangsgespräch absolviert.
Struktur: A nur dann, wenn B und C.
Formel: $A \supset (B \wedge C)$

(f) *Mir ist schlecht, der Kopf tut mir weh, aber ich bin nicht unglücklich.*
A ... Mir ist schlecht.

B … Mir tut der Kopf weh.
C … Ich bin unglücklich.
Struktur: A und B und nicht C.
Formel: $A \wedge B \wedge \neg C$

Anmerkung: „aber" drückt nicht nur eine Konjunktion wie „und" aus, sondern hebt außerdem einen Gegensatz zwischen den beiden Aussagen hervor. Dieser Aspekt ist in der Aussagenlogik nicht direkt ausdrückbar. Vergleichen Sie etwa die beiden Aussagen „Ich bin Bundespräsident, verdiene aber gut" (klingt falsch) und „Ich bin Kindergärtnerin, verdiene aber gut"; eine Formalisierung mittels Konjunktion ist für einfache Analysen ausreichend, wenn nur der Beruf und das Einkommen von Personen eine Rolle spielt, offenbar geht bei dieser Übersetzung aber Information über den Gegensatz der Aussagen verloren.

(g) *Ich darf nur dann fernsehen, wenn ich meine Hausübungen gemacht habe.*
A … Ich darf fernsehen.
B … Ich habe meine Hausübungen gemacht.
Struktur: A nur dann, wenn B.
Formel: $A \supset B$

(h) *Florian trinkt zum Essen entweder Bier oder Wein, aber nie beides.*
A … Florian trinkt zum Essen Bier.
B … Florian trinkt zum Essen Wein.
Struktur: Entweder A oder B (ausschließendes „oder")
Formel: $A \not\equiv B$

Diese Formalisierung bedeutet, dass Florian immer eines der beiden Getränke zum Essen trinkt. Soll die Aussage nur ausdrücken, dass er Bier und Wein nicht gleichzeitig trinkt, sonst aber die Möglichkeit offen lassen, dass Florian gar nichts oder andere Getränke konsumiert, ist folgende Formalisierung die richtige:
Struktur: A nicht gleichzeitig mit B.
Formel: $\neg(A \wedge B)$ oder $A \uparrow B$ oder $\neg A \vee \neg B$

Aufgabe 3 (0.4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{not}, \mathsf{or}\}$ vollständig ist für die Klasse der aussagenlogischen Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathsf{and}, \mathsf{or}\}$ nicht vollständig ist.

Lösung

(a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Menge $\{\mathsf{nand}\}$ funktional vollständig ist. Für die funktionale Vollständigkeit von $\{\mathsf{not}, \mathsf{or}\}$ genügt es daher zu zeigen, dass nand durch die beiden Funktionen not und or dargestellt werden kann. In der Vorlesung wurde die Äquivalenz $A \uparrow B = \neg A \vee \neg B$ behauptet. Wir zeigen daher mittels

Auswertung in allen Wahrheitsbelegungen, dass x nand y und $(\mathsf{not}\,x)$ or $(\mathsf{not}\,y)$ identisch sind.

x	y	x nand y	$=$	$(\mathsf{not}\,x)$	or	$(\mathsf{not}\,y)$
0	0	**1**	✓	1	**1**	1
0	1	**1**	✓	1	**1**	0
1	0	**1**	✓	0	**1**	1
1	1	**0**	✓	0	**0**	0

Anstelle von $\{\mathsf{nand}\}$ kann für den Beweis auch jede andere als funktional vollständig bekannte Menge herangezogen werden.

(b) Es genügt von einer einzigen Funktion zu zeigen, dass sie nicht durch and und or darstellbar ist. Wir untersuchen, welche einstelligen Funktionen darstellbar sind, indem wir vom einzigen Argument x ausgehend die beiden Funktionen in beliebiger Reihenfolge anwenden. Wir stellen fest, dass $\mathsf{and}(x, x) = x$ und $\mathsf{or}(x, x) = x$ gilt (Idempotenz). Wir stellen daher folgende Behauptung auf.

Behauptung: Jeder Ausdruck bestehend aus and, or und x ist äquivalent zu x.

Der Beweis erfolgt induktiv nach der Anzahl n der Anwendungen der Funktionen and bzw. or.

Induktionsanfang $n = 0$: Der einzige Ausdruck ohne Anwendung von and und or ist x selber. Dafür gilt unsere Behauptung.

Induktionshypothese: Unsere Behauptung gelte für alle Ausdrücke mit n oder weniger Anwendungen von and bzw. or.

Induktionsschritt: Wir zeigen, dass unter der Annahme, dass die Induktionshypothese zutrifft, unsere Behauptung auch für Ausdrücke mit $n + 1$ Anwendungen von and bzw. or gilt. Wir haben also einen Ausdruck $\mathsf{and}(f(x), g(x))$ bzw. $\mathsf{or}(f(x), g(x))$ vor uns, bei dem sowohl f als auch g mit n oder weniger Anwendungen von and bzw. or definiert sind. Laut Hypothese ist jeder der beiden Ausdrücke äquivalent zu x. Wie wir oben aber festgestellt haben, liefert $\mathsf{and}(x, x)$ bzw. $\mathsf{or}(x, x)$ mit dem Argument x wieder nur x.

Da somit die einzigen darstellbaren einstelligen Funktionen äquivalent zu x (identische Abbildung) sind, ist z.B. die einstellige Funktion not nicht darstellbar. Die Menge $\{\mathsf{and}, \mathsf{or}\}$ ist daher nicht funktional vollständig.

Aufgabe 4 (0.3 Punkte)

Sei $\mathcal{M}$ die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

(m1) $\{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\} \subseteq \mathcal{M}$

(m2) Wenn $x \in \mathcal{M}$, dann auch $x\,\texttt{[}x\texttt{]} \in \mathcal{M}$.

(m3) Wenn $x, y \in \mathcal{M}$, dann auch $x\,\texttt{!}\,y \in \mathcal{M}$.

(a) Geben Sie die Mengen $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ der stufenweise Konstruktion von $\mathcal{M}$ an. Die Menge $\mathcal{M}_2$ enthält bereits mehr als 180 Elemente; es genügt, 10 typische Elemente anzugeben.

(b) Zeigen Sie, dass die Zeichenkette `b!c[b!c]!a[a][a[a]]` in der Menge $\mathcal{M}$ liegt.

(c) Erklären Sie, warum die Zeichenkette `a[a][a[a]]!b![b]` nicht in der Menge $\mathcal{M}$ liegen kann.

Lösung

(a) $\mathcal{M}_0 = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}$
$\mathcal{M}_1 = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{a[a]}, \texttt{b[b]}, \texttt{c[c]}, \texttt{a!a}, \texttt{a!b}, \texttt{a!c}, \texttt{b!a}, \texttt{b!b}, \texttt{b!c}, \texttt{c!a}, \texttt{c!b}, \texttt{c!c}\}$
$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \cup \{\texttt{a[a][a[a]]}, \texttt{b[b][b[b]]}, \ldots, \texttt{a!a[a!a]}, \texttt{a!b[a!b]}, \ldots,$
$\texttt{a!a[a]}, \texttt{a!b[b]}, \ldots, \texttt{a[a]!a}, \texttt{a[a]!b}, \ldots,$
$\texttt{a[a]!a[a]}, \texttt{a[a]!b[b]}, \ldots, \texttt{a!a!a[a]}, \ldots, \texttt{a!a!a!a}, \ldots\}$

(b) Um zu zeigen, dass ein Wort in einer induktiv definierten Menge liegt, muss man das Wort schrittweise mit Hilfe der Eigenschaften (Konstruktionsregeln) erzeugen. Wir verwenden die Notation $A \overset{r}{\Longrightarrow} B$ um auszudrücken, dass Aussage B aus Aussage A mit Hilfe der Regel r folgt, wobei r entweder m2 oder m3 sein kann.

1. Wegen Regel m1 gilt $\texttt{a} \in \mathcal{M}$, $\texttt{b} \in \mathcal{M}$ und $\texttt{c} \in \mathcal{M}$.
2. $\texttt{b}, \texttt{c} \in \mathcal{M} \overset{\text{m3}}{\Longrightarrow} \texttt{b!c} \in \mathcal{M} \overset{\text{m2}}{\Longrightarrow} \texttt{b!c[b!c]} \in \mathcal{M}$
3. $\texttt{a} \in \mathcal{M} \overset{\text{m2}}{\Longrightarrow} \texttt{a[a]} \in \mathcal{M} \overset{\text{m2}}{\Longrightarrow} \texttt{a[a][a[a]]} \in \mathcal{M}$
4. $\texttt{b!c[b!c]} \in \mathcal{M}$ (siehe 2.), $\texttt{a[a][a[a]]} \in \mathcal{M}$ (siehe 3.)
   $\overset{\text{m3}}{\Longrightarrow} \texttt{b!c[b!c]!a[a][a[a]]} \in \mathcal{M}$

Diese wenn-dann Schlüsse lassen sich etwas übersichtlicher zweidimensional mit Trennlinien anordnen. Oberhalb der Linie stehen die Voraussetzungen, unterhalb das Ergebnis der Regelanwendung, und daneben steht die Bezeichnung der verwendeten Eigenschaft.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\texttt{b} \in \mathcal{M}}\,\text{m1} \quad \dfrac{}{\texttt{c} \in \mathcal{M}}\,\text{m1}}{\texttt{b!c} \in \mathcal{M}}\,\text{m3}}{\texttt{b!c[b!c]} \in \mathcal{M}}\,\text{m2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\texttt{a} \in \mathcal{M}}\,\text{m1}}{\texttt{a[a]} \in \mathcal{M}}\,\text{m2}}{\texttt{a[a][a[a]]} \in \mathcal{M}}\,\text{m2}}{\texttt{b!c[b!c]!a[a][a[a]]} \in \mathcal{M}}\,\text{m3}$$

(c) Um zu zeigen, dass ein bestimmtes Wort nicht in der definierten Menge liegt, muss man eine Eigenschaft finden, die alle Wörter in der Menge besitzen, nicht aber das bestimmte Wort. Für die Wahl dieser Eigenschaft gibt es verschiedene Möglichkeiten; hier zwei davon.

Argumentation über die Länge der Wörter. Bei der stufenweisen Konstruktion der gegebenen Menge $\mathcal{M}$ besitzen jene Wörter in $\mathcal{M}_i$, die neu hinzukommen (die also noch nicht in $\mathcal{M}_{i-1}$ vorhanden sind), mindestens die Länge $2i + 1$; das lässt sich mit einem kurzen Induktionsbeweis zeigen. Da das Wort `a[a][a[a]]!b![b]` die Länge 16 besitzt, müsste es spätestens ab $i = 7$ in den stufenweise konstruierten Mengen $\mathcal{M}_i$ liegen. Wenn man also $\mathcal{M}_7$ konstruiert und feststellt, dass das gesuchte Wort nicht vorkommt, liegt es nicht in $\mathcal{M}$.

Diese Argumentation lässt sich theoretisch immer dann verwenden, wenn alle Abschlusseigenschaften der induktiven Definition zu längeren Wörtern führen. Allerdings kann es aufwändig sein, alle Wörter bis zur benötigten Länge tatsächlich zu generieren. Etwa besitzt $\mathcal{M}_3$ in diesem Beispiel bereits 38 397 Elemente.

Argumentation über die verbotene Symbolfolge `![`. Wir zeigen, dass die Zeichenfolge `![` in einem Wort aus $\mathcal{M}$ nicht vorkommen kann. Dazu verwenden wir folgende Eigenschaft von $\mathcal{M}$: Jedes Wort in $\mathcal{M}$ beginnt mit einem der Zeichen `a`, `b` oder `c`. Diese Eigenschaft lässt sich leicht induktiv zeigen:

m1: Die Wörter `a`, `b` und `c` beginnen mit einem dieser Zeichen.

m2: Wenn x mit einem dieser Zeichen beginnt, dann auch x`[`x`]`.

m3: Wenn x mit einem dieser Zeichen beginnt, dann auch x`!`y.

Das Zeichen `!` kann nur durch die Eigenschaft m3 in ein Wort gelangen. Laut dieser Regel muss aber ein Wort $y \in \mathcal{M}$ folgen, das unserer Feststellung zufolge aber mit `a`, `b` oder `c` beginnen muss. Daher enthalten Wörter aus $\mathcal{M}$ nie die Zeichenfolge `![`, somit kann `a[a][a[a]]!b![b]` nicht in $\mathcal{M}$ vorkommen.

Alternativ lässt sich auch die Eigenschaft nutzen, dass Wörter in $\mathcal{M}$ nie mit `!` enden (ebenfalls leicht induktiv zu zeigen). Da `[` nur durch die Eigenschaft m2 in ein Wort gelangen kann, dann aber ein Wort $x \in \mathcal{M}$ vorangehen muss, enthalten Wörter aus $\mathcal{M}$ nie die Zeichenfolge `![`.

Aufgabe 5 (0.3 Punkte)

Sei F die Formel $((A \wedge \neg(B \supset C)) \equiv (A \uparrow C))$.

(a) Zeigen Sie, dass F syntaktisch korrekt ist.

(b) Berechnen Sie schrittweise $\mathsf{val}_I(F)$ für $I(A) = 0$, $I(B) = 1$ und $I(C) = 1$.

(c) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel um festzustellen, ob die Formel F gültig, erfüllbar, widerlegbar und/oder unerfüllbar ist.

Lösung

(a) Laut Vorlesung ist die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln die kleinste Menge, für die gilt:

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\land, \uparrow, \lor, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

wobei $\mathcal{V} = \{A, B, C, \dots\}$ die Menge der aussagenlogischen Variablen ist.

Wir zeigen, dass $((A \land \neg(B \supset C)) \equiv (A \uparrow C))$ eine aussagenlogische Formel gemäß dieser Definition ist.

(1) Die Variablen A, B und C sind Formeln (a1).

(2) Da B und C Formeln sind (Punkt 1), ist auch $(B \supset C)$ eine Formel (a4).

(3) Da $(B \supset C)$ eine Formel ist (Punkt 2), ist auch $\neg(B \supset C)$ eine solche (a3).

(4) Da A und $\neg(B \supset C)$ Formeln sind (Punkt 1 bzw. 3), ist auch $(A \land \neg(B \supset C))$ eine Formel (a4).

(5) Da A und C Formeln sind (Punkt 1), ist auch $(A \uparrow C)$ eine Formel (a4).

(6) Da $(A \land \neg(B \supset C))$ und $(A \uparrow C)$ Formeln sind (Punkt 4 bzw. 5), ist auch $((A \land \neg(B \supset C)) \equiv (A \uparrow C))$ eine Formel (a4).

Dieselbe Argumentation in Form eines Baumes:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,\text{a1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}}\,\text{a1} \quad \dfrac{C \in \mathcal{V}}{C \in \mathcal{A}}\,\text{a1}}{(B \supset C)}\,\text{a4}}{\neg(B \supset C)}\,\text{a3}}{(A \land \neg(B \supset C))}\,\text{a4} \qquad \dfrac{\dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,\text{a1} \quad \dfrac{C \in \mathcal{V}}{C \in \mathcal{A}}\,\text{a1}}{(A \uparrow C)}\,\text{a4}}{((A \land \neg(B \supset C)) \equiv (A \uparrow C)) \in \mathcal{A}}\,\text{a4}$$

(b) $\mathsf{val}_I(((A \land \neg(B \supset C)) \equiv (A \uparrow C)))$
$= \mathsf{val}_I((A \land \neg(B \supset C)))$ iff $\mathsf{val}_I((A \uparrow C))$
$= (\mathsf{val}_I(A)$ and $\mathsf{val}_I(\neg(B \supset C)))$ iff $(\mathsf{val}_I(A)$ nand $\mathsf{val}_I(C))$
$= (0$ and $\mathsf{val}_I(\neg(B \supset C)))$ iff $(0$ nand $1)$
$= 0$ iff 1
$= 0$

Wir konnten die Berechnung ein wenig abgekürzen, da das erste Argument von and den Wert 0 besitzt und damit das Ergebnis bereits eindeutig bestimmt; der Wert von $\mathsf{val}_I(\neg(B \supset C))$ ist irrelevant.

(c) Wir berechnen den Wert der Formel für alle Interpretationen mittels einer Wahrheitstafel. An dieser lassen sich dann die Eigenschaften der Formel ablesen.

A	B	C	$((A \land \neg(B \supset C)) \equiv (A \uparrow C))$
1	1	1	1 0 0 1 1 1 **1** 1 0 1
1	1	0	1 1 1 1 0 0 **1** 1 1 0
1	0	1	1 0 0 0 1 1 **1** 1 0 1
1	0	0	1 0 0 0 1 0 **0** 1 1 0
0	1	1	0 0 0 1 1 1 **0** 0 1 1
0	1	0	0 0 1 1 0 0 **0** 0 1 0
0	0	1	0 0 0 0 1 1 **0** 0 1 1
0	0	0	0 0 0 0 1 0 **0** 0 1 0

Die Formel ist somit erfüll- und widerlegbar, aber weder gültig noch unerfüllbar.

Aufgabe 6 (0.3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Formeln $C \vee \neg(C \supset (A \not\equiv B))$ und $((\neg A \vee (B \supset \bot)) \wedge (A \wedge B)) \not\equiv C$ äquivalent sind.

(a) mithilfe einer Wahrheitstafel;

(b) durch algebraische Umformungen.

Lösung

(a) Die vollständige Wahrheitstafel zur Auswertung der beiden Formel sieht folgendermaßen aus:

A	B	C	$C \vee \neg(C \supset (A \not\equiv B))$	$=$	$((\neg A \vee (B \supset \bot)) \wedge (A \wedge B)) \not\equiv C$
0	0	0	0 **0** 0 0 1 0 0 0	✓	1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 **0** 0
0	0	1	1 **1** 1 1 0 0 0 0	✓	1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 **1** 1
0	1	0	0 **0** 0 0 1 0 1 1	✓	1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 **0** 0
0	1	1	1 **1** 0 1 1 0 1 1	✓	1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 **1** 1
1	0	0	0 **0** 0 0 1 1 1 0	✓	0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 **0** 0
1	0	1	1 **1** 0 1 1 1 1 0	✓	0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 **1** 1
1	1	0	0 **0** 0 0 1 1 0 1	✓	0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 **0** 0
1	1	1	1 **1** 1 1 0 1 0 1	✓	0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 **1** 1

Da beide Formeln in sämtlichen Wahrheitsbelegungen denselben Wert liefern, sind sie äquivalent.

Tatsächlich ist es gar nicht notwendig, die Wahrheitstabelle vollständig zu befüllen. Wir wissen zum Beispiel, dass $\vee$ den Wert 1 liefert, wenn das erste Argument den Wert 1 besitzt. Damit ist das Ergebnis der ersten Formel für jene Interpretationen, in denen C den Wert 1 besitzt, bereits mit 1 festgelegt. In jenen Interpretationen, in denen C den Wert 0 besitzt, liefert aber die Implikation immer den Wert 1, wodurch sich nach Negation auch die übrigen Werte der ersten Formel ergeben. In der zweiten Formel hilft es, mit der Teilformel $A \wedge B$ zu beginnen: In jenen sechs Interpretationen, in denen diese den Wert 0 liefert, ergibt sich der Wert der Formel unmittelbar durch xor-Verknüpfung mit dem Wert von C. Die übrige Formel muss nur für zwei Interpretationen ausgewertet werden.

A	B	C	$C \vee \neg(C \supset (A \not\equiv B))$	$=$	$((\neg A \vee (B \supset \bot)) \wedge (A \wedge B)) \not\equiv C$
0	0	0	0 **0** 0 0 1	✓	0 0 0 0 **0** 0
0	0	1	1 **1**	✓	0 0 0 0 **1** 1
0	1	0	0 **0** 0 0 1	✓	0 0 0 1 **0** 0
0	1	1	1 **1**	✓	0 0 0 1 **1** 1
1	0	0	0 **0** 0 0 1	✓	0 1 0 0 **0** 0
1	0	1	1 **1**	✓	0 1 0 0 **1** 1
1	1	0	0 **0** 0 0 1	✓	0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 **0** 0
1	1	1	1 **1**	✓	0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 **1** 1

(b) Wir vereinfachen beide Formeln. Da wir dabei identische Formeln erhalten (nämlich C), sind die ursprünglichen Formeln äquivalent.

$C \vee \neg(C \supset (A \not\equiv B))$	$F \supset G = \neg F \vee G$
$= C \vee \neg(\neg C \vee (A \not\equiv B))$	De Morgan
$= C \vee (\neg\neg C \wedge \neg(A \not\equiv B))$	$\neg\neg F = F$
$= C \vee (C \wedge \neg(A \not\equiv B))$	Absorption
$= C$	

$((\neg A \vee (B \supset \bot)) \wedge (A \wedge B)) \not\equiv C$	$F \supset G = \neg F \vee G$
$= ((\neg A \vee (\neg B \vee \bot)) \wedge (A \wedge B)) \not\equiv C$	$F \vee \bot = F$
$= ((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \wedge B)) \not\equiv C$	De Morgan
$= (\neg(A \wedge B) \wedge (A \wedge B)) \not\equiv C$	$\neg F \wedge F = \bot$
$= \bot \not\equiv C$	$F \not\equiv \bot = F$
$= C$	

Die Äquivalenz $(F \not\equiv \bot) = F$ wurde in der Vorlesung nicht erwähnt, lässt sich aber leicht mit Hilfe einer Wahrheitstafel überprüfen. Wenn Sie keine zusätzliche Äquivalenz verwenden wollen, können Sie auch so fortsetzen:

$\bot \not\equiv C$	$F \not\equiv G = (\neg F \wedge G) \vee (F \wedge \neg G)$
$= (\neg\bot \wedge C) \vee (\bot \wedge \neg C)$	$F \wedge \bot = \bot$
$= (\neg\bot \wedge C) \vee \bot$	$F \vee \bot = F$
$= \neg\bot \wedge C$	$\neg\bot = \top$
$= \top \wedge C$	$F \wedge \top = F$
$= C$	

Aufgabe 7 (0.3 Punkte)

Ist die Formel $A \wedge \neg B$ eine logische Konsequenz der beiden Formeln $B \vee (A \not\equiv \neg C)$ und $A \wedge C$? Wie sieht die Formel aus, deren Gültigkeit/Nichtgültigkeit zeigen würde, dass die Konsequenzbeziehung gilt/nicht gilt?

Lösung

$I(A)$	$I(B)$	$I(C)$	$B \vee (A \not\equiv \neg C)$,	$A \wedge C$	$\models_I$	$A \wedge \neg B$
0	0	0	1	0	✓	0
0	0	1	0	0	✓	0
0	1	0	1	0	✓	0
0	1	1	1	0	✓	0
1	0	0	0	0	✓	1
1	0	1	1	1	✓	1
1	1	0	1	0	✓	0
1	1	1	1	1	$\lightning$	0

Die Formel $A \wedge \neg B$ ist keine logische Konsequenz der beiden Prämissen. Ein Gegenbeispiel ist die Interpretation I mit $I(A) = I(B) = I(C) = 1$, in der die beiden Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch.
Arbeitsvereinfachung: Ist in einer Interpretation eine der Prämissen falsch oder die Konklusion wahr, müssen die übrigen Formeln nicht mehr ausgewertet werden, da die Beziehung $\models_I$ dann bereits erfüllt ist. Umgekehrt kann man die Erstellung der Tabelle abbrechen, sobald man eine Interpretation I findet, für die $\models_I$ nicht gilt.
Beginnt man in dieser Aufgabe die Auswertung mit der zweiten Prämisse, reduziert sich die weitere Analyse auf jene zwei Interpretationen, in denen $A \wedge C$ wahr ist. Die Konklusion $A \wedge \neg B$ ist nur in der zweiten davon falsch. Nur für diese Interpretation müssen wir den Wert der ersten Prämisse bestimmen.

$I(A)$	$I(B)$	$I(C)$	$B \vee (A \not\equiv \neg C)$,	$A \wedge C$	$\models_I$	$A \wedge \neg B$
0	0	0		0	✓	
0	0	1		0	✓	
0	1	0		0	✓	
0	1	1		0	✓	
1	0	0		0	✓	
1	0	1		1	✓	1
1	1	0		0	✓	
1	1	1	1	1	$\lightning$	0

Formel zur Konsequenzbeziehung: $A \wedge \neg B$ ist genau dann eine logische Konsequenz der beiden Formeln $B \vee (A \not\equiv \neg C)$ und $A \wedge C$, wenn die Formel

$$((B \vee (A \not\equiv \neg C)) \wedge (A \wedge C)) \supset (A \wedge \neg B)$$

gültig ist.

Aufgabe 8 **(0.2 Punkte)**

Sei f folgende dreistellige Funktion.

x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Stellen Sie f durch eine Formel in

(a) disjunktiver

(b) konjunktiver

Normalform dar.

Lösung

(a) $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$

(b) $(\neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3)$

Aufgabe 9 **(0.2 Punkte)**

Sei F die Formel $(A \wedge (B \supset C)) \vee (C \not\equiv (B \uparrow A))$.

(a) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.

(b) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

Lösung

(a) KNF mittels semantischer Methode:

A	B	C	$(A \wedge$	$(B \supset C))$	$\vee$	$(C \not\equiv$	$(B \uparrow A))$
0	0	0	0	1	**1**	1	1
0	0	1	0	1	**0**	0	1
0	1	0	0	0	**1**	1	1
0	1	1	0	1	**0**	0	1
1	0	0	1	1	**1**	1	1
1	0	1	1	1	**1**	0	1
1	1	0	0	0	**0**	0	0
1	1	1	1	1	**1**	1	0

Aus dieser Tafel lässt sich folgende KNF ablesen:

$$(A \lor B \lor \neg C) \land (A \lor \neg B \lor \neg C) \land (\neg A \lor \neg B \lor C)$$

(b) DNF mittels algebraischer Methode:

$$\begin{array}{ll}
(A \land (B \supset C)) \lor (C \not\equiv (B \uparrow A)) & F \not\equiv G = (\neg F \land G) \lor (F \land \neg G)) \\
= (A \land (B \supset C)) \lor (\neg C \land (B \uparrow A)) \lor (C \land \neg(B \uparrow A)) & F \supset G = \neg F \lor G \\
= (A \land (\neg B \lor C)) \lor (\neg C \land (B \uparrow A)) \lor (C \land \neg(B \uparrow A)) & F \uparrow G = \neg F \lor \neg G \\
= (A \land (\neg B \lor C)) \lor (\neg C \land (\neg B \lor \neg A)) \lor (C \land \neg(\neg B \lor \neg A)) & \neg(F \lor G) = \neg F \land \neg G \\
= (A \land (\neg B \lor C)) \lor (\neg C \land (\neg B \lor \neg A)) \lor (C \land \neg\neg B \land \neg\neg A) & \neg\neg F = F \\
= (A \land (\neg B \lor C)) \lor (\neg C \land (\neg B \lor \neg A)) \lor (C \land B \land A) & F \land (G \lor H) = (F \land G) \lor (F \land H) \\
= (A \land \neg B) \lor (A \land C) \lor (\neg C \land \neg B) \lor (\neg C \land \neg A) \lor (C \land B \land A) & \text{Kommutativität von } \land \text{ und } \lor \\
= (A \land \neg B) \lor (\neg B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg C) \lor (A \land C) \lor (A \land C \land B) & \text{Absorption} \\
= (A \land \neg B) \lor (\neg B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg C) \lor (A \land C) &
\end{array}$$

Aufgabe 10 **(0.4 Punkte)**

Schneewittchen möchte in die Stadt einkaufen gehen, benötigt dafür aber mindestens zwei Zwerge als Geleitschutz. Sneezy, Bashful und Dopey müssen Holz hacken und scheiden als Begleitung aus. Die anderen vier diskutieren, wer mit in die Stadt geht.

Grumpy: „Wir können Doc und Sleepy nicht gemeinsam gehen lassen.“
Doc: „Wenn ich gehe, dann muss Happy mitkommen!“
Happy: „Ich gehe nur, wenn ich nicht gemeinsam mit Grumpy gehen muss.“
Sleepy: „Ich komme dann und nur dann mit, wenn mich Happy oder Doc begleiten.“

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der Aussagenvariablen an.

(b) Können sich die Zwerge entscheiden, wer Schneewittchen begleitet? Wer kommt als Begleitung in Frage? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

D ... Doc geht mit in die Stadt.
G ... Grumpy geht mit in die Stadt.
H ... Happy geht mit in die Stadt.
S ... Sleepy geht mit in die Stadt.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := (D \wedge G) \vee (D \wedge H) \vee (D \wedge S)$	
$\quad \vee (G \wedge H) \vee (G \wedge S) \vee (H \wedge S)$	mindestens zwei Zwerge
$F_1 := \neg(D \wedge S)$	Doc und Sleepy nicht gemeinsam
$F_2 := D \supset H$	wenn Doc, dann Happy
$F_3 := H \supset \neg G$	wenn Happy, dann nicht Grumpy
$F_4 := S \equiv (H \vee D)$	Sleepy genau dann, wenn Happy oder Doc

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen D, G, H und S, sodass die Formeln $F_0, \ldots, F_4$ wahr werden. Wegen Formel F_0 genügt es, jene Belegungen zu betrachten, in denen mindestens zwei Variablen wahr sind.

D	G	H	S	$\neg(D \wedge S)$	$D \supset H$	$H \supset \neg G$	$S \equiv (H \vee D)$	
1	1	1	1	0				
1	1	1	0	1	1	0		
1	1	0	1	0				
1	1	0	0	1	0			
1	0	1	1	0				
1	0	1	0	1	1	1	0	
1	0	0	1	0				
0	1	1	1	1	1	0		
0	1	1	0	1	1	0		
0	1	0	1	1	1	1	0	
0	0	1	1	1	1	1	1	✓

Happy und Sleepy begleiten Schneewittchen in die Stadt.

Aufgabe 11 **(0.4 Punkte)**

Anna hat für den Geburtstag ihrer Freundin Hatice Muffins gebacken und überlegt nun, wie sie diese verzieren soll. Im Kasten findet sie Haselnüsse, Krokant, Schokostreusel und Marzipanherzen. Sie überlegt: „Damit die Muffins hübsch aussehen, benötige ich mindestens zwei Zutaten. Ich werde entweder Haselnüsse oder Krokant wählen, aber sicher nicht beide zusammen, da sie zu ähnlich sind. Ich möchte Krokant oder Schokostreusel verwenden, vielleicht auch beide. Wenn ich Schokostreusel verwende, dann kann ich keine Marzipanherzen auf die Muffins geben. Ich glaube, Hatice möchte entweder Schokostreusel und Krokant oder sie möchte Marzipanherzen mit Haselnüssen.“

(a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung jeder Aussagenvariablen an.

(b) Mit welchen Zutaten dekoriert Anna die Muffins? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:

H ... Sie dekoriert die Muffins mit Haselnüssen.
K ... Sie dekoriert die Muffins mit Krokant.
S ... Sie dekoriert die Muffins mit Schokostreusel.
M ... Sie dekoriert die Muffins mit Marzipanherzen.

Aussagenlogische Formeln:

$F_0 := (H \wedge K) \vee (H \wedge S) \vee (H \wedge M)$	
$\vee (K \wedge S) \vee (K \wedge M) \vee (S \wedge M)$	mindestens zwei Zutaten
$F_1 := H \not\equiv K$	entweder Haselnüsse oder Krokant
$F_2 := K \vee S$	Krokant oder Schokostreusel oder beide
$F_3 := S \supset \neg M$	wenn Schokostreusel dann keine Marzipanherzen
$F_4 := (S \wedge K) \not\equiv (M \wedge H)$	Schokostreusel und Krokant oder Marzipanherzen und H

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen M, H, S und K, sodass die Formeln $F_0, \ldots, F_4$ wahr werden. Wegen F_0 wählen wir nur Belegungen, die mindestens zwei Variablen wahr machen.

H	K	S	M	F_0	$H \not\equiv K$	$K \vee S$	$S \supset \neg M$	$(S \wedge K) \not\equiv (M \wedge H)$	
0	0	1	1	1	0				
0	1	0	1	1	1	1	1	0	
0	1	1	0	1	1	1	1	1	✓
0	1	1	1	1	1	1	0		
1	0	0	1	1	1	0			
1	0	1	0	1	1	1	1	0	
1	0	1	1	1	1	1	0		
1	1	0	0	1	0				
1	1	0	1	1	0				
1	1	1	0	1	0				
1	1	1	1	1	0				

Anna dekoriert die Muffins mit Schokostreuseln und Krokant.

Aufgabe 12 (0.3 Punkte)

Angenommen Sie modellieren eine Situation wie in der letzten Aufgabe mit Hilfe mehrerer aussagenlogischer Formeln $F_1, \ldots, F_m$ und ihre Kollegin beschreibt dieselbe Situation mit den aussagenlogischen Formeln $G_1, \ldots, G_n$. (Die Anzahl der Formeln muss nicht gleich sein.) Wie können Sie mit Hilfe eines SAT-Solvers überprüfen, ob die beiden Beschreibungen gleichwertig (semantisch äquivalent) sind und dieselben Lösungen liefern? Beschreiben Sie alle erforderlichen Schritte und geben Sie ein Beispiel an, das diese Schritte illustriert. Was bedeutet es, wenn der SAT-Solver eine erfüllende Variablenbelegung findet?

Lösung

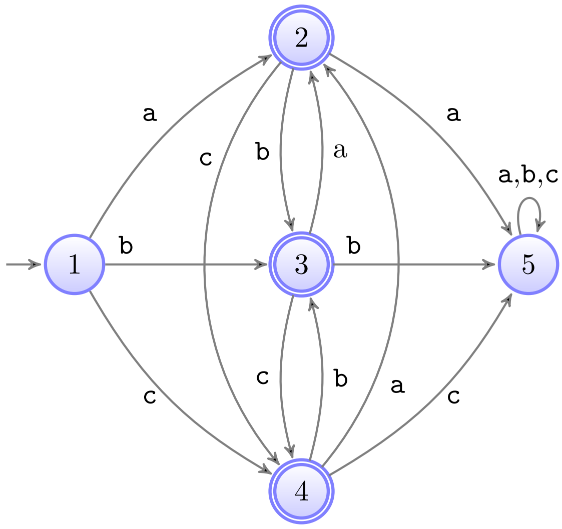
Die Formeln $F_1, \ldots, F_m$ einerseits und die Formeln $G_1, \ldots, G_n$ andererseits sind gleichwertige Beschreibungen, wenn sie von denselben Interpretationen erfüllt bzw. nicht erfüllt werden, d.h., wenn $F = F_1 \wedge \cdots \wedge F_m$ und $G = G_1 \wedge \cdots \wedge G_n$ semantisch äquivalent sind. Das ist genau dann der Fall, wenn die Formel $F \equiv G$ gültig bzw. die Formel $F \not\equiv G$ unerfüllbar ist. Da SAT-Solver als Eingabe Formeln in KNF erwarten, muss $F \not\equiv G$ in KNF umgewandelt werden; sei H diese Normalform. Stellt der SAT-Solver die Unerfüllbarkeit von H fest, waren die beiden ursprünglichen Beschreibungen gleichwertig. Ist H erfüllbar, gibt die vom SAT-Solver berechnete erfüllende Interpretation eine Variablenbelegung an, für die die beiden Beschreibungen unterschiedliche Werte liefern. Als Beispiel betrachten wir die Formel $F_1 = A \vee B$ einerseits und die Formeln $G_1 = B \vee C$ und $G_2 = C \supset A$ andererseits. Wir wandeln $F_1 \not\equiv (G_1 \wedge G_2)$ in konjunktive Normalform um.

$$
\begin{aligned}
&F_1 \not\equiv (G_1 \wedge G_2) \\
&= (A \vee B) \not\equiv ((B \vee C) \wedge (C \supset A)) \\
&= ((A \vee B) \vee ((B \vee C) \wedge (\neg C \vee A))) \wedge (\neg(A \vee B) \vee \neg((B \vee C) \wedge (\neg C \vee A))) \\
&= (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge ((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg(B \vee C) \vee \neg(\neg C \vee A))) \\
&= (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge ((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg A)) \\
&= (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee C)
\end{aligned}
$$

Ein SAT-Solver liefert für diese Formel die Antwort „erfüllbar“ zusammen mit beispielsweise der Wahrheitsbelegung $I(A) = 1$ und $I(B) = I(C) = 0$. Das bedeutet, dass F_1 einerseits und G_1, G_2 andererseits keine gleichwertigen Beschreibungen sind und sich z.B. bei der angegebenen Wertebelegung unterscheiden. Tatsächlich ist die Formel F_1 in I wahr, G_1 hingegen falsch.

Aufgabe 13 (0.4 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ der folgende endliche Automat.



(a) Geben Sie 5 Wörter an, die von $\mathcal{A}$ akzeptiert werden.

(b) Geben Sie an, welche der folgenden Wörter der Automat akzeptiert: ε, `c`, `caac`, `baba`, `cbacc`.

(c) Berechnen Sie schrittweise $\delta^*(1, \texttt{cbaba})$.

(d) Beschreiben Sie $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, die von $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprache.

(e) Spezifizieren Sie $\mathcal{A}$ in tabellarischer Form. Handelt es sich bei $\mathcal{A}$ um einen determinstischen oder indeterministischen Automaten?

Lösung

(a) $\mathcal{A}$ akzeptiert zum Beispiel `a`, `ab`, `bab`, `abc` und `ababc`.

(b) $\mathcal{A}$ akzeptiert `c` und `baba`, nicht aber ε, `caac` und `cbacc`.

(c)
$$\begin{aligned}
\delta^*(1, \texttt{cbaba}) &= \delta^*(\delta(1, \texttt{c}), \texttt{baba}) \\
&= \delta^*(4, \texttt{baba}) \\
&= \delta^*(\delta(4, \texttt{b}), \texttt{aba}) \\
&= \delta^*(3, \texttt{aba}) \\
&= \delta^*(\delta(3, \texttt{a}), \texttt{ba}) \\
&= \delta^*(2, \texttt{ba}) \\
&= \delta^*(\delta(2, \texttt{b}), \texttt{a}) \\
&= \delta^*(3, \texttt{a}) \\
&= \delta^*(\delta(3, \texttt{a}), \varepsilon) \\
&= \delta^*(2, \varepsilon) \\
&= 2
\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathcal{A}) &= \{\, w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}^+ \mid \text{kein Symbol kommt zwei Mal hintereinander vor} \,\} \\
&= \{\, w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}\}^+ \mid w \text{ enthält weder } \texttt{aa} \text{ noch } \texttt{bb} \text{ noch } \texttt{cc} \,\}
\end{aligned}$$

(e) $\mathcal{A} = \langle\{1,2,3,4,5\}, \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}, \delta, 1, \{2,3,4\}\rangle$, wobei die Übergangsfunktion δ durch folgende Tabelle definiert ist:

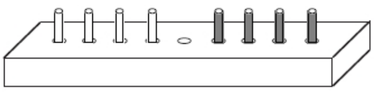
δ	a	b	c
1	2	3	4
2	5	3	4
3	2	5	4
4	2	3	5
5	5	5	5

$\mathcal{A}$ ist ein deterministischer Automat, da der momentane Zustand und die nächste Eingabe immer eindeutig den Folgezustand bestimmen. Das äußert sich in der Tabelle dadurch, dass jeder Eintrag genau einen Zustand enthält.

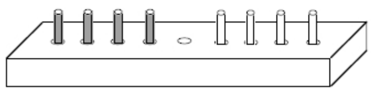
Aufgabe 14 **(0.4 Punkte)**

Linienhalma ist ein Knobelspiel, das aus m weißen und n schwarzen Stäben sowie einem Spielbrett mit $m+n+1$ Löchern besteht, die in einer Linie angeordnet sind. Zu Beginn befinden sich die weißen Stäbe ganz links und die schwarzen Stäbe ganz rechts in den Löchern, sodass das mittlere Loch frei ist (siehe Abb. (a) für $m = n = 4$). Ziel des Spiels ist es, diese Anordnung zu tauschen, sodass sich alle weißen Stäbe rechts und alle schwarzen Stäbe links befinden (Abb. (b)). Es gelten folgende Regeln:

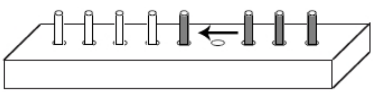
- Schwarze und weiße Stäbe werden abwechselnd gezogen, wobei mit einem schwarzen begonnen wird.
- Ein Zug besteht darin, einen Stab entweder auf ein freies Nachbarfeld (links oder rechts) zu stellen oder über einen linken oder rechten Nachbarstab beliebiger Farbe zu springen, wenn das Feld dahinter frei ist. Die Abbildungen (c) and (d) zeigen die möglichen Anfangszüge für $m = n = 4$.



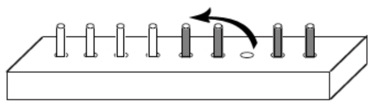
(a) Anfangsstellung



(b) Endstellung



(c) Zug auf ein freies Nachbarfeld



(d) Sprung auf das übernächste Feld

(a) Was macht einen Zustand in diesem Spiel aus? Welche Informationen sind notwendig, um einen Zustand eindeutig zu beschreiben? Wie kann man die Zustände kompakt bezeichnen? Wieviele Zustände sind abhängig von der Zahl der schwarzen und weißen Stäbe, m und n, höchstens notwendig?

(b) Welche Aktionen führen zu Übergängen in diesem System? Wie kann man sie kompakt bezeichnen?

(c) Geben Sie einen endlichen Automaten an, der dieses Spiel für $m = 1$ und $n = 2$, d.h. für einen weißen und zwei schwarze Stäbe, vollständig beschreibt.

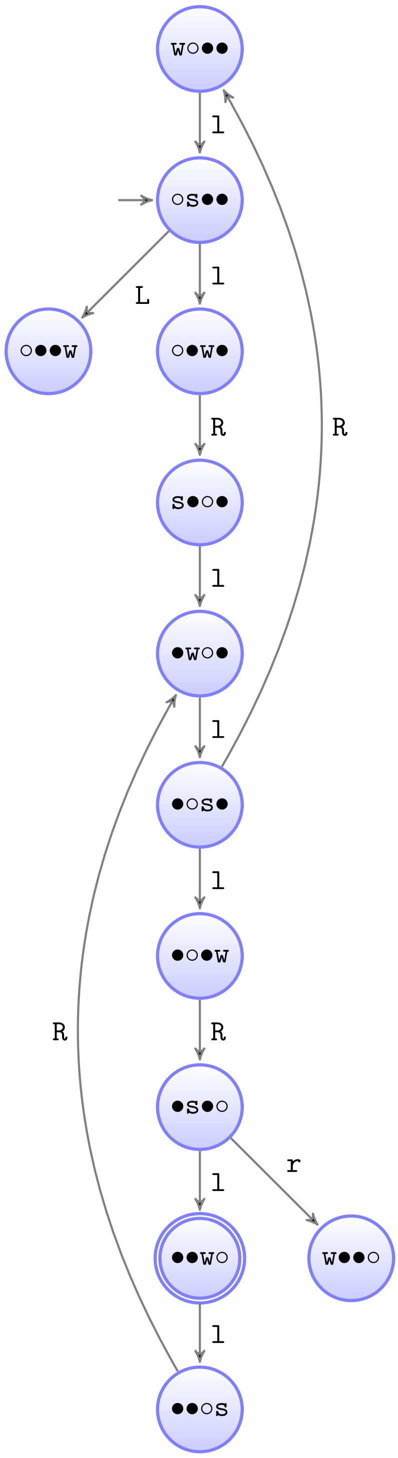
Lösung

(a) Der Zustand des Spiels wird durch die Position der weißen bzw. schwarzen Stäbe und des freien Lochs auf dem Spielbrett festgelegt sowie durch die Information, wer am Zug ist. Verwendet man ∘ bzw. •, um einen weißen bzw. scharzen Stab zu symbolisieren und `-` für die Leerstelle, dann kann man das Spielbrett durch ein Wort mit $m+n+1$ Zeichen beschreiben, in dem m Mal das Zeichen ∘, n Mal das Zeichen • und einmal das Zeichen `-` vorkommt. An das Wort kann man noch `s` oder `w` anhängen, je nachdem, ob schwarz oder weiß am Zug ist; verwendet man dieses Symbol an Stelle von `-` zur Markierung des freien Lochs, wird die Beschreibung noch kürzer. Für $m = n = 4$ lässt sich die Anfangsstellung also durch ∘∘∘∘-••••s oder ∘∘∘∘s•••• beschreiben (Abb. (a)), die Stellungen nach dem ersten Zug entsprechen den Wörtern ∘∘∘∘•-•••w oder ∘∘∘∘•w••• (Abb. (c)) bzw. ∘∘∘∘••-••w oder ∘∘∘∘••w•• (Abb. (d)).

Die Zahl der Zustände ist durch die Anzahl der möglichen Wörter dieser Bauart beschränkt. Da $m+n+1$ Dinge ohne Zurücklegen anzuordnen sind, wobei die m weißen und die n schwarzen Stäbe ununterscheidbar sind, kann es maximal $2 \cdot \frac{(m+n+1)!}{m!n!1!}$ Zustände geben; der Faktor 2 spiegelt die beiden Farben wieder, die am Zug sein können. Für $m = n = 4$ erhalten wir so 1260 als obere Schranke für die Zustandszahl, für $m = 1$ und $n = 2$ erhalten wir 24.

(b) Es gibt vier Zugmöglichkeiten: ein Stein kann nach links oder rechts ziehen oder nach links oder rechts springen. Wir wählen dafür die Bezeichnungen `l`, `r`, `L` und `R`.

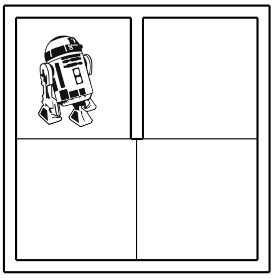
(c)



Aufgabe 15 **(0.4 Punkte)**

Der Roboter R2-D2 wird in eine Höhle abgeseilt, um sie zu erkunden. Sein Kollege C-3PO gibt ihm von oben Anweisungen, was er tun soll, und zwar entweder auf der Stelle eine Vierteldrehung nach links durchführen, oder eine Vierteldrehung nach rechts, oder aber einen Schritt nach vorn machen. Nachdem R2-D2 die Aktion ausgeführt hat, meldet er, was er vor sich sieht: Wand oder Gang. Falls er bei einem Schritt mit der Wand kollidiert, meldet er eine Kollision.

Nehmen Sie an, dass die Höhle so aussieht wie rechts skizziert, dass sich R2-D2 zu Beginn im linken oberen Feld befindet und dass er in Richtung freies Feld (Gang) blickt. Die doppelten Linien markieren Wände. In jedem kollisionsfreien Schritt bewegt sich R2-D2 um ein Feld vorwärts.
Erhält R2-D2 beispielsweise die Anweisungen „Schritt vor“, „Schritt vor“, „Drehung links“ und „Schritt vor“, meldet er „Wand“, „Kollision“, „Gang“ und „Wand“ und befindet sich zuletzt im Feld rechts unten.



(a) Überlegen Sie, welche Informationen notwendig sind, um die momentane Situation von R2-D2 in der Höhle zu beschreiben. Wieviele Zustände kann das Roboter-Höhle-System annehmen? Wieviele Zustände sind es im Allgemeinen, wenn die Höhle b Felder breit und l Felder lang ist? Wie lassen sich die Zustände kompakt bezeichnen?

(b) Legen Sie die Aktionen fest, die zu einem Zustandswechsel führen, sowie die möglichen Reaktionen von R2-D2. Definieren Sie ein entsprechendes Ein- und Ausgabealphabet.

(c) Geben Sie einen Mealy-Automaten an, der das Roboter-Höhle-System vollständig beschreibt. Sie können den Automaten graphisch oder tabellarisch spezifizieren.

Lösung

(a) Man benötigt die Position und die Blickrichtung des Roboters. Es gibt vier Blickrichtungen sowie vier Felder in der skizzierten Höhle, das System kann daher $4 \cdot 4 = 16$ Zustände annehmen. Im Allgemeinen sind es $4 \cdot b \cdot l$ Zustände. Als Bezeichnung wählen wir ijk, wobei (i, j) die Koordinaten des Aufenthaltsortes von R2-D2 (Zeile $i = 1, 2$, Spalte $j = 1, 2$) und k die Blickrichtung (n, o, s, w für die vier Himmelsrichtungen) angibt. Für die angegebene Höhle erhalten wir $Q = \{11n, 11o, 11s, 11w, 12n, 12o, \ldots, 22s, 22w\}$.

(b) Die Zustandsänderungen werden durch die Anweisungen von C-3PO ausgelöst, das sind „Drehung links“ (`l`), „Drehung rechts“ (`r`) und „Schritt vor“ (`v`). Die Reaktionen von R2-D2 bestehen aus den Antworten „Gang“ (`G`), „Kollision“ (`K`) und „Wand“ (`W`). Wir wählen das Eingabealphabet $\Sigma = \{\mathtt{l}, \mathtt{r}, \mathtt{v}\}$ und das Ausgabealphabet $\Gamma = \{\mathtt{G}, \mathtt{K}, \mathtt{W}\}$.

(c) Tabellarische Darstellung: $\langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, \gamma, 11s\rangle$, wobei die Übergangs- bzw. Ausgabefunktion wie folgt definiert ist.

δ	`l`	`r`	`v`
$11n$	$11w$	$11o$	$11n$
$11o$	$11n$	$11s$	$11o$
$11s$	$11o$	$11w$	$21s$
$11w$	$11s$	$11n$	$11w$
$12n$	$12w$	$12o$	$12n$
$12o$	$12n$	$12s$	$12o$
$12s$	$12o$	$12w$	$22s$
$12w$	$12s$	$12n$	$12w$
$21n$	$21w$	$21o$	$11n$
$21o$	$21n$	$21s$	$22o$
$21s$	$21o$	$21w$	$21s$
$21w$	$21s$	$21n$	$21w$
$22n$	$22w$	$22o$	$12n$
$22o$	$22n$	$22s$	$22o$
$22s$	$22o$	$22w$	$22s$
$22w$	$22s$	$22n$	$21w$

γ	`l`	`r`	`v`
$11n$	`W`	`W`	`K`
$11o$	`W`	`G`	`K`
$11s$	`W`	`W`	`W`
$11w$	`G`	`W`	`K`
$12n$	`W`	`W`	`K`
$12o$	`W`	`G`	`K`
$12s$	`W`	`W`	`W`
$12w$	`G`	`W`	`K`
$21n$	`W`	`G`	`W`
$21o$	`G`	`W`	`W`
$21s$	`G`	`W`	`K`
$21w$	`W`	`G`	`K`
$22n$	`G`	`W`	`W`
$22o$	`G`	`W`	`K`
$22s$	`W`	`G`	`K`
$22w$	`W`	`G`	`W`

Graphische Darstellung: