Runde 8, Beispiel 52

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.12.2006

1 Angabe

Man bestimme die (reelle und komplexe) Fourier-Reihe folgender 2π-periodischer Funktion "f(t)":

$$f(t) = t, \qquad 0 \leq t < 2\pi, \qquad 2\pi - \text{periodisch fortgesetzt}$$

Anmerkung: Selbstverständlich ist wahlweise die reelle oder die komplexe Fourier-Reihe zu bestimmen, wodurch dann mit den Beziehungen $a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$ die andere ebenfalls erhalten wird.

2 Theoretische Grundlagen: Fourier-Reihen (2π-Periode)

$f(x)$ sei eine Funktion mit der Periode 2π und durch eine Reihe darstellbar, dann kann man transformieren zu der Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man wie folgt berechnen:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x,$$

Die komplexe Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}$$

für die Koeffizienten $\in \mathbb{C}$, (erhält man mit der Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}$$
$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$$

3 Lösung des Beispiels

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t \,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\pi}[\frac{t^2}{2}]|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}(\frac{4\pi^2}{2}) = 2\pi$$

$$\text{Anmerkung zu } \ a_n : \text{ ungerade Funktion, daher } 0 \text{ (testweise berechnet) } \triangledown$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$u = t, u' = 1; \ r' = \cos(nt), r = \frac{\sin(nt)}{n}$$

$$= \frac{1}{\pi}((\frac{t\sin(nt)}{n})|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}\,t) =$$

$$= \frac{1}{\pi}((\frac{t\sin(nt)}{n})|_0^{2\pi} + (\frac{\cos(nt)}{n^2})|_0^{2\pi}) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$u = t, u' = 1; \ r' = \sin(nt), r = -\frac{\cos(nt)}{n}$$

$$= \frac{1}{\pi}((-\frac{t\cos(nt)}{n})|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}\,t) =$$

$$\frac{1}{\pi}(\frac{-2\pi\overbrace{\cos(2\pi n)}^{=1}}{n} + \underbrace{(\frac{\sin(nt)}{n^2})|_0^{2\pi})}_{=0} = -\frac{2\pi}{n}$$

$$\mathbf{f(x)} = \pi + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{0}\cos(\mathbf{nt}) - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{n}}\sin(\mathbf{nt})$$

$$c_n = i\cdot\frac{1}{n} \ \Rightarrow \ \mathbf{S_F(t)} = \pi - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nt)}{n}$$

$\triangledown$ Funktion nicht direkt ungerade (wird erst durch Verschiebung ersichtlich).