Runde 3, Beispiel 16

LVA 118.181, Übungsrunde 3, 03.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 30.01.2007

1 Angabe

Ein elektrischer Schwingkreis enthält einen Widerstand R mit 8 Ohm, der mit einer Induktion L von 0.5 Henry und einer Batterie von $E = E(t)$ Volt in Reihe geschaltet ist. Bei $t = 0$ ist der Strom gleich Null. Berechne den Strom $I = I(t)$ zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ und den maximalen Strom, wenn
(a) $E = E(t) = 64$,
(b) $E = E(t) = 32e^{-8t}$.
Hinweis: Es muss gelten, dass die Summe der Spannungsabfälle im Schwingkreis = 0 ist (Batterie: negativer Abfall). Der Spannungsabfall beim Widerstand ist RI und bei der Induktion $L\frac{dI}{dt}$.

2 Lösung des Beispiels

2.1 a

2.1.1 Mein Lösungsvorschlag

Wenn die Summe der Spannungsabfälle im gesamten Schwingkreis 0 ist, so kann dies durch die folgende Differentialgleichung modelliert werden:

$$R \cdot I(t) + L\frac{\partial I}{\partial t} = E(t)$$

Zunächst pringen wir die Differentialgleichung auf eine günstigere Form:

$$I' + I \cdot \frac{R}{L} = \frac{E(t)}{L}$$

Eine Möglichkeit zur Lösung besteht in der **Verwendung einer Formel**: Lineare inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Form $y' + p(x)y = r$ (r ist Störfunktion, singulär oder nur von x abhängig) können mit folgender Formel aufgelöst werden:

$$h = \int p(x)\,dx$$

$$y(x) = e^{-h}\left(\int e^h r\,dx + c\right)$$

(Quelle: Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9.Aufl., S.26ff.)

Es gilt daher:

$$p = \frac{R}{L}, \qquad r = \frac{E(t)}{L}, h = \int p(t)\ dt = \frac{R}{L} \cdot t$$
$$I(t) = e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot (\int e^{\frac{R}{L} \cdot t}\ dt \cdot \frac{E(t)}{L} + c)$$
$$I(t) = \frac{E(t)}{R} + \frac{c}{e^{\frac{R}{L} \cdot t}}$$

Die spezielle Lösung ergibt sich aus dem AWP $I(0) = 0$:

$$0 = \frac{E(t)}{R} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{1}{\frac{R}{L}}$$
$$I(t) = \frac{E(t)}{R} - \frac{L}{R \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot \frac{R}{L} \cdot t}}$$

Berechnng von $I(t)$ wenn $E = E(t) = 64$:

$$I(t))\frac{64}{8} - \frac{0.5}{8 \cdot e^{16 \cdot 64}} \approx 8$$

8 Ampere Maximum.

2.1.2 Lösung aus der Übung

$$U = IR + L\frac{\mathrm{d}\, I}{\mathrm{d}\, t}$$
$$I - \frac{U}{R} = -\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}\, I}{\mathrm{d}\, t}$$

(Trennbare DGL)

$$\int \frac{\mathrm{d}\, I}{I - \frac{U}{R}} = -\int \frac{R}{L} \mathrm{d}\, t$$
$$c_1 + \ln(I - \frac{U}{R}) = c_2 - \frac{R}{L}t$$
$$\ln(I - \frac{U}{R}) = lne^{-\frac{R}{C}t}$$

Es gilt: $I(0) = 0$:

$$0 = \frac{U}{R} = Ce^{-\frac{R}{L}0} \qquad \Rightarrow \qquad C = -\frac{U}{R}$$
$$I(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}$$
$$I(t)_{max} = 8A$$

2.2 b

$$E(t) = 32e^{-8t}$$
$$IL + IR = E(t) = 32e^{-8t}I(t) = 8(e^-8t - e^{-16t}) \cdot c$$

Ergibt schließlich $t = \frac{\ln 2}{8}$