

## 2 STOCHASTISCHE GRUNDBEGRIFFE

6. (a) Unendliche geometrische Reihe:

$$W(M) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/2} = 1$$

- (b) Endliche geometrische Reihen:

$$W(A_1) = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(1/2)^5}{1-1/2} = \frac{31}{32}, \quad W(A_2) = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{3}{64}$$

$$W(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{32}, \quad W(A_1 \cup A_2) = \frac{31}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

- (c) Unendliche geometrische Reihe:

$$W\{\text{erster } K \text{ bei ungeradem Wurf}\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{2}{3}$$

- (d) Man muß öfter als  $x$  Mal werfen, wenn die ersten  $x$  Würfe alle  $Z$  sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist  $(1/2)^x$ ,  $x = 1, 2, \dots$ ; dieser Ausdruck gilt auch für  $x = 0$ .

9. Die Vereinigung von beliebigen Ereignissen  $A_1, \dots, A_n$  läßt sich als Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen (Ereignissen) darstellen:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup (A_2 \cap A_1^c) \cup (A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c) \cup \dots \cup (A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c)$$

Bezeichnet man die einzelnen Terme der disjunkten Vereinigung mit  $B_i$ , so gilt:

$$B_i \subseteq A_i \quad \longrightarrow \quad W(B_i) \leq W(A_i)$$

Aus der  $\sigma$ -Additivität von  $W$  folgt daher:

$$W\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = W\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \sum_{i=1}^n W(B_i) \leq \sum_{i=1}^n W(A_i)$$

12. Wir betrachten zunächst das komplementäre Ereignis, d.h. das Ereignis  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10}$ , daß zumindest ein Titel an der richtigen Stelle wiedergegeben wird. Zunächst gilt:

$$W(A_i) = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$$

$$W(A_i \cap A_j) = \frac{8!}{10!} = \frac{1}{9 \cdot 10}$$

$$W(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{7!}{10!} = \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10}$$

usw.

Anwendung des Additionstheorems:

$$W\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right) = \binom{10}{1} \frac{1}{10} - \binom{10}{2} \frac{1}{9 \cdot 10} + \dots - \binom{10}{10} \frac{1}{10!} = 1 - \frac{1}{2!} + \dots - \frac{1}{10!}$$

Daraus folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$W\left(\bigcap_{i=1}^{10} A_i^c\right) = 1 - W\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{10!} \doteq 0.3679$$

Bem.: Der gefundene Ausdruck ist eine Partialsumme der  $e^x$ -Reihe für  $x = -1$ :

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

Diese Reihe konvergiert sehr schnell; daraus folgt, daß die „Unordnungswahrscheinlichkeit“ nahezu *unabhängig* von der Zahl der betrachteten Objekte gleich  $e^{-1} \doteq 0.3679$  ist!

13. (a) Kodiert man mit 0/1 eine defekte/intakte Verbindung, so ist ein geeigneter Merkmalraum gegeben durch:

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i = 0, 1; i = 1, \dots, 5\}$$

Für das Ereignis  $V_i$  gilt dann:

$$V_i = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i = 1, x_j = 0, 1, j \neq i\} \subseteq M$$

- (b) Das (zusammengesetzte) Ereignis  $E$  läßt sich auf Basis der Ereignisse  $V_i$  wie folgt ausdrücken:

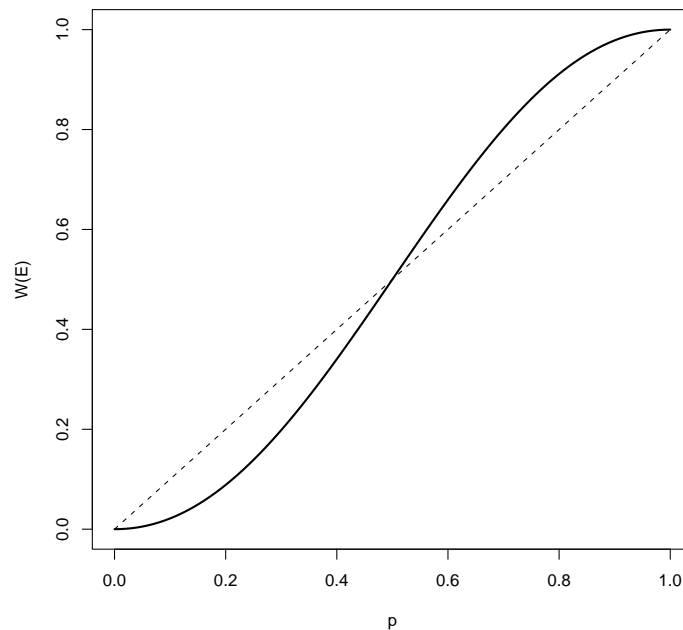
$$E = (V_1 \cap V_4) \cup (V_2 \cap V_5) \cup (V_1 \cap V_3 \cap V_5) \cup (V_2 \cap V_3 \cap V_4)$$

- (c) Mit dem Additionstheorem folgt (die Ereignisse  $V_i$  sind nach Voraussetzung unabhängig):

$$W(E) = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 - p^5 + 4p^5 - p^5 = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$

- (d) Bedingen durch den Status von Verbindung 3 (Satz v. d. vollständigen Wahrscheinlichkeit):

$$\begin{aligned} W(E) &= W(E|V_3)W(V_3) + W(E|V_3^c)W(V_3^c) \\ &= W((V_1 \cup V_2) \cap (V_4 \cup V_5))W(V_3) + W((V_1 \cap V_4) \cup (V_2 \cap V_5))W(V_3^c) \\ &= (2p - p^2)^2 p + (2p^2 - p^4)(1 - p) \\ &= 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5 \end{aligned}$$



17. Sei  $S$  das Ereignis, daß das System funktioniert und  $K_i$  das Ereignis, daß Komponente  $i$  funktioniert; dann gilt:

$$W(K_1|S) = \frac{W(K_1 \cap S)}{W(S)} = \frac{W(K_1)}{W(S)} = \frac{p}{1 - (1-p)^n}$$

Der Nenner im obigen Ausdruck kommt wie folgt zustande: Die System funktioniert genau dann nicht, wenn alle Komponenten nicht funktionieren, d.h.  $W(S^c) = (1-p)^n$ ; daraus folgt  $W(S) = 1 - (1-p)^n$ .

Bem.: Klarerweise gilt  $W(K_1|S) = W(K_2|S) = \dots = W(K_n|S)$ .

21. Das Ereignis  $A$ , daß sich in jeder Gruppe ein Student befindet, ist ein Durchschnitt aus 5 Ereignissen:

$$A = \bigcap_{i=1}^5 A_i \quad \text{mit} \quad A_i = i\text{-te Gruppe enthält (genau) einen Studenten}$$

Anwendung des Multiplikationstheorems:

$$\begin{aligned} W(A) &= W(A_1)W(A_2|A_1)W(A_3|A_1 \cap A_2)W(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)W(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{4}{1} \binom{8}{2}}{\binom{12}{3}} \cdot \frac{\binom{3}{1} \binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} \cdot 1 \\ &= \frac{5! 10! (3!)^4 3!}{15! (2!)^4 2!} = \frac{3^5 5! 10!}{15!} = 0.0809 \end{aligned}$$

24. Nach dem Satz v. d. vollst. Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} W(A_k) &= \sum_{j=1}^6 W(A_k | \text{Augenzahl} = j) W(\text{Augenzahl} = j) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \binom{j}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^j, \quad k = 0, 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$W(A_k)$	0.1641	0.3125	0.2578	0.1667	0.0755	0.0208	0.0026

```
W <- numeric(7)
j <- 1:6
for (k in 1:7) {
  W[k] <- sum(dbinom(k-1,size=j,prob=1/2))/6 }
round(W,4)
```

28. Nach der Bayes'schen Formel ergibt sich:

$$W(K|T_+) = \frac{W(T_+|K) W(K)}{W(T_+|K) W(K) + W(T_+|K^c) W(K^c)} = \frac{0.98 \cdot 0.001}{0.98 \cdot 0.001 + 0.005 \cdot 0.999} = 0.164$$

$$W(K^c|T_-) = \frac{W(T_-|K^c) W(K^c)}{W(T_-|K^c) W(K^c) + W(T_-|K) W(K)} = \frac{0.995 \cdot 0.999}{0.995 \cdot 0.999 + 0.02 \cdot 0.001} = 0.99997$$

Erklärung: Bei einem negativen Testergebnis kann man also eine Erkrankung praktisch ausschließen; ein positives Testergebnis zeigt aber nur mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa  $1/6$  eine tatsächliche Erkrankung an. Warum die „Vorhersagekraft“ des Tests in diesem Fall so gering ist, kann man sich wie folgt klarmachen: Nur bei rund  $1/6$  der Fälle ist ein positives Testergebnis auf die Erkrankung zurückzuführen, beim überwiegenden Teil aber auf andere Effekte. Ganz anders bei den negativen Testergebnissen; hier wird nur ein ganz kleiner Teil falsch-negativ klassifiziert.

30. Auf Grund der Annahme gilt:

$$W(B_{ij}) = \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365}, \quad i < j$$

Die Wahrscheinlichkeiten für die paarweisen Durchschnitte lassen sich faktorisieren:

$$W(B_{12} \cap B_{13}) = \frac{365}{365^3} = \frac{1}{365^2} = W(B_{12})W(B_{13})$$

$$W(B_{12} \cap B_{23}) = \frac{365}{365^3} = \frac{1}{365^2} = W(B_{12})W(B_{23})$$

$$W(B_{13} \cap B_{23}) = \frac{365}{365^3} = \frac{1}{365^2} = W(B_{13})W(B_{23})$$

Nicht jedoch der 3-fache Durchschnitt:

$$W(B_{12} \cap B_{13} \cap B_{23}) = \frac{365}{365^3} = \frac{1}{365^2} \neq W(B_{12})W(B_{23})W(B_{13})$$

Die Ereignisse  $B_{ij}$  sind also nicht unabhängig; sie haben allerdings eine schwächere Eigenschaft, sie sind *paarweise* unabhängig.

34. Dazu ist zu überprüfen, ob die Funktionen  $X$  „meßbar“ sind, d.h. es ist zu prüfen, ob das Urbild jedes halboffenen Intervalls  $(a, b] \subseteq \mathbb{R}$  zu  $\mathcal{E}$  gehört. Wenn man – wie bei höchstens abzählbar unendlichen Merkmalsräumen üblich – davon ausgeht, daß  $\mathcal{E}$  die Potenzmenge von  $M$  ist, ist dies allerdings trivialerweise erfüllt.

37. Dazu ist zu zeigen, daß die Funktion  $X$  „meßbar“ ist, d.h. es ist zu zeigen, daß das Urbild jedes halboffenen Intervalls  $(a, b] \subseteq \mathbb{R}$  zu  $\mathcal{E}$  gehört. Bei einer stetigen Funktion ( $X(c) = c^2$ ) ist das Urbild eines Intervalls wieder ein Intervall; da  $\mathcal{E}$  aber alle Arten von Intervallen umfaßt, ist damit nachgewiesen, daß  $X$  eine stochastische Größe ist.

Bestimmung von  $W\{X \leq x\}$ : Für  $x \leq 0$  ist  $W\{X \leq x\} = 0$ , für  $x \geq 100$  ist  $W\{X \leq x\} = 1$ ; für Werte dazwischen gilt:

$$0 < x < 100 : \quad W\{X \leq x\} = W\{c : 0 < c < \sqrt{x}\} = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{10} du = \frac{\sqrt{x}}{10}$$