

Mathematik 2 Semi-Kommentierte Formelsammlung

Wolfgang Miedl
gk@xover.htu.tuwien.ac.at

17. Dezember 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkung	2
2	Funktionen in mehreren Variablen	3
2.1	Kettenregel	3
2.2	Hauptsatz impliziter Funktionen	3
3	Differentialrechnung und Anwendungen	3
3.1	Lineare Apporximation und Richtungsableitung	3
3.1.1	Gradient einer Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	3
3.1.2	Richtungsänderung einer Funktion f	3
3.2	Taylorentwicklung einer Funktion mit zwei Variablen in der Umgebung (a,b)	4
3.3	Extremwerte ohne Nebenbedingung	4
3.4	Extremwerte mit Nebenbedingungen	4
4	Integration von Funktionen in mehreren Variablen	5
4.1	Stammfunktion von Vektorfeldern	5
4.2	Bereichsintegrale	5
4.2.1	Rechtecksintegral	5
4.2.2	allgemeines Bereichsintegral	6
5	Differenzengleichungen	6
5.1	Homogene vs. inhomogene Differenzengleichungen	6
5.2	Differenzengleichung 1. Ordnung	6
5.2.1	Homogener Teil $x_n^{(h)}$	6
5.2.2	Ersetzungstabelle fuer die Variation der Konstanten	6
5.2.3	Partikulaerer Teil $x_n^{(p)}$	7
5.3	Graphische Darstellung und qualitative Methoden	7
5.3.1	Stabilitaetslage von x^*	7
5.4	Differenzengleichung 2. Ordnung	7
5.4.1	Homogener Teil	7
5.4.2	Partikulaerer Teil	8
5.4.3	Superpositionssatz	8
5.5	Simple Partialbruchzerlegung an Hand eines Beispiels	8
6	Differentialgleichungen	8
6.1	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	8
6.1.1	Loesung des homogenen Teils	8
6.1.2	Loesung des partikulaeren Teils	9
6.2	Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung	9
6.2.1	Homogener Teil	9
6.2.2	Partikulaerer Teil (Methode des unbestimmten Ansatzes)	9

7	Numerische Mathematik	10
7.1	Konvergenz eines Iterationsverfahrens	10
7.2	Fixpunktsatz	10
7.3	Newtonsches Naehungsverfahren	10
7.4	Gauss-Verfahren mit Pivotisierung	10
7.5	Iterative Loesungsverfahren	10
7.5.1	Summenkriterien	11
7.5.2	Gesamtschrittverfahren von Jacobi	11
7.5.3	Einzel-schrittverfahren von Gauss-Seidel	11
8	Numerische Analysis	11
8.1	Lagrange Interpolation	11
8.2	Newton-Interpolation	12

1 Vorbemerkung

Diese “semi-kommentierte” Formelsammlung entstand im Rahmen meiner Prüfungsvorbereitung für meine Mathematik2-Prüfung; genauer gesagt am Vorvorabend der Pruefung. Diese Sammlung war hauptsächlich als Gedaechnisstuetze fuer mich und meinen Lerngruppenpartner gedacht, dementsprechend sind die Formeln vl. nicht immer mathematisch korrekt formuliert, bzw. kann es durchaus sein, das sich bei manchen Formeln Fehler eingeschlichen haben. Fuer autoritative Auskuenfte lest bitte das Skriptum oder ein Buch zu dem Thema. :-)

2 Funktionen in mehreren Variablen

2.1 Kettenregel

$$F(x) = f(u(x), v(x))$$
$$\frac{dF}{dx} = \frac{\delta f}{\delta u} * \frac{du}{dx} + \frac{\delta f}{\delta v} * \frac{dv}{dx}$$

2.2 Hauptsatz impliziter Funktionen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Beweis des Hauptsatzes impliziter Funktionen via der Kettenregel

Sei $f(x) := x^2 + y^2 - 1 = 0$, dann kann y auch explizit als eine Funktion von x ausgedrueckt werden: $y(x) = \pm \sqrt{1 - x^2}$. Durch Einsetzen in die verallgemeinerte Kettenregel erhalte ich $\frac{f_x}{\delta x} * \frac{dx}{dx} + \frac{f_y}{\delta y} * \frac{dy}{dx}$, was auf $F_x + F_y * y'$ hinauslaeuft, oder auch $y'(x) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$. Wir ersetzen y durch die implizite Funktion und erhalten:

$$(1) y' = \frac{-x}{\pm \sqrt{1-x^2}}$$

Leiten wir nun die implizite Funktion $y(x)$ direkt nach $y'(x)$ ab, erhalten wir ebenfalls (1), womit wir den Hauptsatz impliziter Funktionen bewiesen haetten.

3 Differentialrechnung und Anwendungen

3.1 Lineare Apporximation und Richtungsableitung

3.1.1 Gradient einer Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ \vdots \\ F_{x_n} \end{pmatrix}$$

F_{x_i} ist die partielle Ableitung $\frac{\delta}{\delta x_i} f$

3.1.2 Richtungsänderung einer Funktion f

Gegeben sei ein Gradient $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \end{pmatrix}$ und ein Punkt $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Änderung in Richtung x_n : In f'_{x_n} x_0 einsetzen.

Aenderung in Richtung Einheitsvektor: f mit den Werten aus $\vec{x}_0$ mal $\frac{1}{|\vec{x}_0|} * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

maximale Aenderung des Gradienten : $|\text{grad}(\vec{x}_0)| * \frac{1}{|\vec{x}_0|}$

3.2 Taylorentwicklung einer Funktion mit zwei Variablen in der Umgebung (a,b)

$F(a, b)$ = lineare Approximation (1) + quadratische Approximation (2)

$$(1) f(a, b) + f_x(a, b) * (x - a) + f_y(a, b) * (y - b)$$

$$(2) \frac{1}{2!} * (f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2 * f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2)$$

3.3 Extremwerte ohne Nebenbedingung

Gegeben sei eine Funktion f in zwei Variablen.

1. Schritt: Partielle Ableitungen F_x und F_y berechnen, in einer der beiden x oder y explizit darstellen und in der anderen einsetzen. Die resultierende Gleichung loesen, im Regelfall gibt es ≥ 2 Loesungen. Ebenfalls die korrespondierenden y -Werte fuer diese Stellen berechnen.
2. Schritt: Bilden der Ableitungen F_{xx} , F_{xy} , F_{yy} sowie F_{yx} und daraus die Determinante der Hesse-Matrix bilden:

$$D = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

3. In D die Loesungen aus dem 1. Schritt einsetzen, wobei es 3 Moeglichkeiten gibt:

$D(P) < 0$: P ist ein Sattelpunkt

$D(P) > 0 \wedge f_{xx}(P) > 0$: P ist ein Minimum

$D(P) > 0 \wedge f_{xx}(P) < 0$: P ist ein Maximum

3.4 Extremwerte mit Nebenbedingungen

auch als Loesung via der "Lagrange'schen Multiplikatoren" bezeichnet

Gegeben seien zwei Funktionen in zwei Variablen (Die Loesung fuer Funktionen mit mehr Variablen funktioniert genauso)

Hauptbedingung: $f(x, y)$, fortan als HB bezeichnet.

Nebenbedingung: $n(x, y)$, fortan als NB bezeichnet. Oft muss die NB erst aus dem Text der Angabe konstruiert werden.

1. Schritt: Bilden der *Lagrange-Funktion* Φ : $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(n(x, y))$
2. Schritt: Bilden der partiellen Ableitungen Φ_x , Φ_y sowie Φ_λ . Das daraus folgende Gleichungssystem (Ableitungen 0 gesetzt) auflösen, fertig.

4 Integration von Funktionen in mehreren Variablen

4.1 Stammfunktion von Vektorfeldern

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$.

1. Schritt: Prüfen der *Integrabilitätsbedingung*: Ein Vektorfeld besitzt genau dann eine Stammfunktion, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist:

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1 = \frac{\partial}{\partial x} f_2 \wedge \frac{\partial}{\partial z} f_1 = \frac{\partial}{\partial x} f_3 \wedge \frac{\partial}{\partial z} f_2 = \frac{\partial}{\partial y} f_3$$

2. Schritt: Integration nach x : $F_x = f_1 \Rightarrow F = \int f_1 dx = F_{temp} + c(y, z)$, wobei F_{temp} das Integral von f_1 exkl. den Konstanten Teil, der hier noch von y und z abhängig ist, angibt.

3. Schritt: Integration nach y :

$$\frac{\partial}{\partial y} (F_{temp} + c(y, z)) = f_2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (c(y, z)) = f_2 - \frac{\partial}{\partial y} (F_{temp}) \text{ nach } dy \text{ integrieren.}$$

$$c(y, z) = \int \left(f_2 + \frac{\partial}{\partial y} (F_{temp}) \right) dy, \text{ wobei wir } F_{temp} \text{ als das Integral von } f_2 + \frac{\partial}{\partial y} (F_{temp}) \text{ exkl. dem konstanten}$$

Teil $c(z)$ neu definieren.

$$c(y, z) = F_{temp} + c(z)$$

4. Schritt: Integration nach z :

$$\frac{\partial}{\partial z} (F_{temp} + c(z)) = f_3$$

$$c(z) = \int \left(f_3 - \frac{\partial}{\partial z} (F_{temp}) \right) dz$$

Beim Auflösen des letzten Integrals nicht vergessen, c dazu zu addieren!.

4.2 Bereichsintegrale

Bei Bereichsintegralen ist zwischen *Rechtecksintegralen* und *allgemeinen Bereichsintegralen* zu unterscheiden.

4.2.1 Rechtecksintegral

$$\iint_B f(x, y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Wobei a, b hier fuer die Beschränkungen auf der x -Achse, bzw. c, d fuer die Beschränkung auf der y -Achse stehen.

4.2.2 allgemeines Bereichsintegral

$$\iint_B f(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Hierbei tritt $\varphi_2(x)$ an die Stelle von d , $\varphi_1(x)$ an die Stelle von y . Bei einem "Vertauschen" der beiden Integrale muss auch die jeweils andere Variable in den Funktionen $\varphi_i(x)$ explizit ausgedrückt werden.

5 Differenzengleichungen

Differenzengleichungen sind, intuitiv beschrieben, das *diskrete* Gegenstück zur Differentialgleichung. Ein Beispiel wäre eine Funktion, die nur über $\mathbb{N}$ definiert wäre.

5.1 Homogene vs. inhomogene Differenzengleichungen

Bei den Differenzengleichungen, und auch im nächsten Abschnitt bei den Differentialgleichungen, unterteilen wir die Gleichungen in *homogene* und *inhomogene* Gleichungen:

$$x_{n+1} := ax_n + b = \begin{cases} 0 & \text{homogen} \\ s(x) & \text{inhomogen} \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$s(x)$ wird hierbei die Störfunktion genannt, und kann ein beliebiges Polynom über x sein. In einer homogenen Gleichung ist unsere Lösung einfach die Lösung des homogenen Teils. Die Lösung einer *inhomogenen* Gleichung besteht aus dem homogenen Teil $x_n^{(h)}$ plus dem *partikulären* Teil $x_n^{(p)}$.

5.2 Differenzengleichung 1. Ordnung

5.2.1 Homogener Teil $x_n^{(h)}$

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b * \frac{a^n - 1}{a - 1} & \text{für } a \neq 1 \\ x_0 + b * n & \text{für } a = 1 \end{cases}$$

5.2.2 Ersetzungstabelle für die Variation der Konstanten

$x_n^{(p)}$ werden wir mit einer Methode, die sich *Variation der Konstanten* nennt, berechnen. Bevor wir uns an diese Methode wagen, wollen wir hier noch kurz eine Tabelle festhalten, durch was ein Störterm in der Variation der Konstanten ersetzt wird. Diese Tabelle ist immer gültig, unabhängig ob wir jetzt eine Differential- oder Differenzengleichung haben und welcher Ordnung sie ist.

Stoerfunktion $s(x)$	Ansatzfunktion
Konstante (z.B. 36)	Konstante (A)
r^n	$A * r^n$
$\sin(rn)$ od. $\cos(rn)$	$A * \sin(rn) + B * \cos(rn)$
Polynom	Polynom gleichen Grades

5.2.3 Partikulaerer Teil $x_n^{(p)}$

Vermutung gemaess der Tabelle im vorigen Abschnitt waehlen. Vermutung anstelle von x einsetzen, ausrechnen, fertig.

5.3 Graphische Darstellung und qualitative Methoden

Frage: Gibt es fuer hinreichend grosse Werte von n einen Punkt, gegen den die Differenzengleichung konvergiert?

x^* heisst Gleichgewichtspunkt der Differenzengleichung, die Suche danach ist Teil der qualitativen Theorie. Gleichgewichtspunkte koennen gefunden werden, in dem die Kurve der Differenzengleichung mit der durch die Funktion $f(x) = x$ definierte Gerade g geschnitten wird.

5.3.1 Stabilitaetslage von x^*

Stabil: Ein Stabilitaetspunkt x^* heisst *stabil*, wenn es eine Epsilenumgebung ε mit $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, fuer das unter der Annahme $|x_0 - x^*| < \delta$ folgendes gilt: $|x_n - x^*| < \varepsilon$

Asymptotisch Stabil: Wenn es zusaetzlich ein $\delta > 0$ gibt, sodass fuer alle x_n mit $|x_0 - x^*| < \delta$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

Instabil: Fuer alle anderen Faelle

5.4 Differenzengleichung 2. Ordnung

gegeben: $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = s(x)$.

Wobei auch hier wieder die Gleichung homogen ist, wenn $s(x) = 0$ ist.

5.4.1 Homogener Teil

Ersetzen von n durch λ :

$$\begin{aligned}\lambda^{n+2} + a\lambda^{n+1} + b\lambda^n &= 0 \\ \lambda^2 + a\lambda + b &= 0\end{aligned}$$

λ berechnen und entscheiden:

$$x_n = \begin{cases} c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n & \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ r^n * (c_1 * \cos(n * \varphi) + c_2 n * \sin(\varphi)) & \lambda_1, \lambda_2 = r * (\cos \varphi \pm i * \sin \varphi) \\ (c_1 + c_2 * n) \lambda_1^n & \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

5.4.2 Partikulaerer Teil

Wieder wie vorher mit *Variation der Konstanten*.

5.4.3 Superpositionssatz

Mittels des Superpositionssatzes koennen wir die Stoerfunktion in zwei Teile zerlegen: $s(x) = s_1(x) + s_2(x)$, wobei hier dann auch der *partikulaere Teil* die Summe der beiden Loesungen ist.

Achtung:

Bei der Wahl der Konstanten ist unbedingt zu beachten, dass dieser Term im homogenen Teil *nicht* vorkommen darf. Wenn er bereits vorkommt, muss der Term erst noch einmal mit x multipliziert werden. Das wird dann solange gemacht, bis ein nicht besetzter Term gefunden wurde.

5.5 Simple Partialbruchzerlegung an Hand eines Beispiels

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{(x^2-1)} \\ \frac{x}{(x^2-1)} &= \frac{x}{(x-1)(x+1)} \\ \frac{x}{(x^2-1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \\ x &= Ax - A + Bx + B \Rightarrow x = (A+B)x + B - A \end{aligned}$$

Ab jetzt einfach trivial fertig auflösen. ($A = B \Rightarrow 2B = 1$)

6 Differentialgleichungen

Wie auch bei den *Differenzengleichungen* unterscheiden wir hier im allgemeinen zwischen homogenen und inhomogenen *Differentialgleichungen*. Auch hier ist eine Gleichung genau dann homogen, wenn die Stoerfunktion $s(x) = 0$ ist.

6.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

6.1.1 Loesung des homogenen Teils

$$\frac{y'}{y} = -a(x) / \int \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = - \int a(x) dx$$

Da auf der linken Seite $\ln y$ herauskommen wird, empfiehlt es sich, $\ln c$ anstatt von c bei der Integration der rechten Seite zu verwenden.

Auch ist es hilfreich, folgende Formel im Kopf zu behalten:

$$\ln a - \ln b \Leftrightarrow \ln \frac{a}{b}$$

6.1.2 Lösung des partikularen Teils

Siehe *Variation der Konstanten*

6.2 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

. Allgemein: $y'' + ay' + by = s(x)$

6.2.1 Homogener Teil

Ähnlich wie bei den *Differenzengleichungen 2. Ordnung* Einsetzen: $y = e^{\lambda x}$:

$$\begin{aligned}\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 + a\lambda + b &= 0\end{aligned}$$

Nach λ_1, λ_2 auflösen. Die Entscheidungstabelle ist ähnlich wie bei der *Differenzengleichung 2. Ordnung*:

$$x_n = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ e^{x\alpha} * (c_1 * \cos(x\beta) + c_2 * \sin(x\beta)) & \lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta \wedge \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \\ (c_1 + c_2 * n) e^{\lambda_1 x} & \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

6.2.2 Partikularer Teil (Methode des unbestimmten Ansatzes)

Allgemein:

$$s(x) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k) e^{x\mu}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}s(x) &= 2x - 3 \Rightarrow a_0 = -3, a_1 = 2, \mu = 0 \\ y_p(x) &= A_0 + A_1 x \\ y_p'(x) &= A_1 \quad \text{Anmk: } \frac{\partial}{\partial x} y_p''(x) = 0 \quad \text{Anmk: } \frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

Jetzt einfach in die Originalgleichung einsetzen und fuer $x^1 = 1$ und $x^0 = 0$ lösen.

7 Numerische Mathematik

7.1 Konvergenz eines Iterationsverfahrens

(1) $\varphi(x) \in I$ fuer alle $x \in I$, wobei I ein abgeschl. Intervall ist.

(2) $|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \lambda |x - x'| \forall x, x' \in I$, wobei $\lambda \in]0, 1[$

Aus (1) folgt, dass ein Fixpunkt x^* fuer φ existiert. Aus (2) folgt, dass x^* eindeutig ist. (2) ist auch als die *Lipschitzbedingung* fuer φ mit der *Lipsschitzkonstanten* λ

7.2 Fixpunktsatz

Jede kotrahierende Abbildung $\varphi : I \rightarrow I, I \in \mathbb{R}$ besitzt genau einen Fixpunkt $x^* \in I$. Dieser fuehrt den Limes der Iterationsfolge.

Anmerkung bezueglich der Lipsschitzbedingung: φ erfuellt die Bedingung genau dann, wenn φ differenzierbar ist und $|\varphi'(x)| \leq \lambda \leq 1 \forall x \in I$ gilt.

7.3 Newtonsches Naecherungsverfahren

Sei $f(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, dann gilt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

7.4 Gauss-Verfahren mit Pivotisierung

Pivotisierung: Elemente in der Hauptdiagonale sind das jeweils absolut groesste unter den verbleibenden Elementen in der Zeile

Effekt der Pivotisierung : Hoehere Praezision bei gleicher Zahl von signifikanten Stellen

7.5 Iterative Loesungsverfahren

- Gesamtschrittverfahren von Jacobi
- Einzelschrittverfahren von Gauss-Seidel

Das *Gauss-Seidel* Verfahren kommt schneller zur Loesung, da die Ergebnisse der aktuellen Iteration bereits teilweise fuer die naechsten Elemente der aktuellen Iteration verwendet werden koennen. Jedoch ist es in weniger Faellen anwendbar als das Verfahren von *Jacobi*, da das *Quadratsummenkriterium* hier nicht verwendet werden darf.

7.5.1 Summenkriterien

Das *Jacobi* bzw. *Gauss-Seidel*-Verfahren funktioniert nur dann, wenn mindestens eines der folgenden Kriterien zutrifft, wobei das Quadratsummenkriterium nur fuer das Verfahren von *Jacobi*, aber nicht fuer *Gauss-Seidel* hinreichend ist.

Quadratsumme: $\sqrt{\sum_{i,j,i \neq j} \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)^2} \leq \lambda \leq 1$

Zeilensumme: $\sum_{i \neq j} |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \forall i$

Spaltensumme: $\sum_{i \neq j} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leq 1$

Die Konsequenz der Kriterien sind, das grosse Elemente in der Hauptdiagonale von Vorteil sind.

7.5.2 Gesamtschrittverfahren von Jacobi

i gibt die Zeile an, $x_0^{[i]} = 0$

$$x_{k+1}^{[i]} = \frac{1}{a_{ii}} * \left(- \sum_{i \neq j} a_{ij} x_k^{[j]} + b_i \right)$$

7.5.3 Einzelschrittverfahren von Gauss-Seidel

$$x_{k+1}^{[i]} = \frac{1}{a_{ii}} * \left(- \sum_{j \leq i} a_{ij} x_k^{[j]} - \sum_{j \geq i} a_{ij} x_k^{[j]} + b_i \right)$$

8 Numerische Analysis

Zweck: Manchmal koennen Funktionen nicht in geschlossene Form gebracht werden; oder sie sind einfach nicht integrierbar. IN diesem Fall koennen die Methoden der numerischen Analysis benutzt werden, um eine hinreichend genaue, differenzierbare *Ersatzfunktion* zu finden.

Approximation: Bei der Approximation muss eine Formel gefunden werden, die die bereits berechneten Funktionswerte hinreichend genau annaehert. Was hinreichend ist muss vorher definiert werden.

Interpolation: Aus einer Menge von diskreten Punktwerten soll eine stetige Polynomfunktion x ten Grades gefunden werden. Ein hoeherer Grad muss nicht immer eine hoehere Genauigkeit ergeben.

8.1 Lagrange Interpolation

Lagrange-Polynom : $L_i(x) = \prod_{k/n \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$ fuer $i = 0, 1, \dots, n$ wobei n den Grad angibt.

Lagrange Interpolationspolynom: $p(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \dots \Rightarrow \sum_{i=0}^n L_i(x)y_i$

8.2 Newton-Interpolation

Ist effizienter beim Hinzufuegen von zusaetzlichen Punkten, da nicht das komplette Polynom neu berechnet werden muss.

$$\text{Allgemein: } p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_k(x - x_0) * \dots * (x - x_k + 1)$$

In der Praxis wird das Polynom mit dem “Rekursiven Dreiecksschema” berechnet (Graphik siehe Skriptum)

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$$

Schluss, Aus, Ende

“Mein ganzer Koerper ist erfuehlt von linearer Algebra” – “Gut, er ist muerbe. Haut ihn auf den Gril-
ler”.

Danke Gerd :-)

Your L^AT_EX-foo advanced by one level.