Angabe_ersterTermin.txt

1. Aufgabe (für Punkt a und b jeweils eine Skizze zeichnen, aus der eindeutig die zulässige Menge und die optimale Lösung hervorgeht):
-x+3y -> max!
x-3y <= 1
y <= 1

a) LP mit Simplex-Algorithmus lösen (3 Punkte)
b) duales Problem dazu aufstellen und lösen (3 Punkte)
c) Für welche Werte c ist das LP unbeschränkt? (4 Punkte):
-x+3y -> max!
x-3y <= 1
-cx+y <= 1

2. Aufgabe (ist Aussage wahr/falsch? warum?, je 2 Punkte):
a) Es ist möglich, dass sowohl das Lineare Problem als auch das duale Lineare Problem unlösbar ist.
b) Es ist möglich, dass die zulässige Menge ein Quadrat ist und die einzige Lösung der Mittelpunkt der Quadrats ist.
c) Es gibt lineare Optimierungsprobleme mit genau 2 optimalen Lösungen.
d) Jedes lokale Optimum ist gleichzeitig auch ein globales Optimum.
e) Bei Simulated Annealing-Verfahren wird der Temperaturparameter sukzessive erhöht.

3. Aufgabe: f(x,y) = (x-1)^2 + y^2
a) Skizze anfertigen und Niveaulinien einzeichnen (3 Punkte)
b) für den Startpunkt (2,1) mit dem steepest descent-Verfahren den nächsten Punkt der Iteration bestimmen (4 Punkte)
c) Ist der neue Punkt auch schon das Optimum? (Begründen, warum ja bzw. nein; 3 Punkte)

1) a)

ZF/BV	x	y	u_1	u_2	r.S.
z	1	-3	0	0	0
u_1	1	-3	1	0	1
u_2	0	1	0	1	1
	x	u_2	u_1	u_2	r.S.
z	1	0	0	3	3
u_1	1	0	1	3	4
y	0	1	0	1	1

$y = 1 \quad z = 3 \quad x = 0$

b) $y_1 + y_2 = \min!$

$y_1 \geq -1$

$-3y_1 + y_2 \geq 3$

$y_1, y_2 \geq 0$

$x = 0 \quad y = 3 \quad z = 3$

$c^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c)

ZF/BV	x	y	u_1	u_2	r.S.
z	1	-3	0	0	0
u_1	1	-3	1	0	1
u_2	-c	1	0	1	1
	x	u_2	u_1	u_2	r.S.
z	1-3c	0	0	3	3
u_1	1-3c	0	1	3	4
y	-c	1	0	1	1

$1 - 3c < 0 \rightarrow c > \frac{1}{3}$

$-c < 0 \rightarrow c > 0$

Wenn alle Elemente i.d. Pivotspalte < 0 → unbeschränkt

2) a) Wahr, es könnte aber auch unbeschränkt sein

b) Falsch, die optimalen Lösungen befinden sich an den Ecken.

c) Wahr, das Optimum kann auch eine Kante sein

d) Falsch, es gibt Sattelpunkte, die zwar in einem bestimmten Intervall optimal sind, aber nicht das Optimum der gesamten Funktion sind.

e) Falsch, verringert sich, da es sich um einen simulierten Abkühlungsprozess handelt. Es soll so ermöglicht werden, dass der Algorithmus aus lokalen Optima wieder herauskommt.

3) b) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 \quad x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y \end{pmatrix}$

$d_1 = -\nabla f(x_1) = -\begin{pmatrix} 2\cdot 2-2 \\ 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\varphi(\lambda) = f(x_1 + \lambda d_1) = f\begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ 1-2\lambda \end{pmatrix}$

$= (2-2\lambda-1)^2 + (1-2\lambda)^2 = 2(1-2\lambda)^2 = 2(1-4\lambda+4\lambda^2)$

$\varphi'(\lambda) = -8 + 16\lambda = 0$

$16\lambda = 8$

$\lambda = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$\underline{x_2} = x_1 + \lambda d_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\underline{d_2} = -\nabla f(x_2) = -\begin{pmatrix} 2\cdot 1-2 \\ 2\cdot 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\rightarrow$ Ja ist optimal weil der nächste Vektor keinen Abstieg mehr anzeigt!

Prüfung zu
Optimierung und Simulation
2.4.2009

1. (a) Man löse:

ZF-Wert?

$$x + 2y + 3z \to \max$$
$$3x + 2y + z \leq 1$$
$$x, y, z \geq 0$$

Skizze?

4 Punkte

2 (b) Man schreibe das duale Problem zu obigem Beispiel an und bestimme dessen Lösung.

3 Punkte

2 (c) Fertigen Sie für das duale Problem eine Skizze an, aus der der zulässige Bereich und die optimale Lösung zu erkennen ist! (Achtung auf die Dimension der Probleme)

3 Punkte

2. Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? (Kurze Begründungen!)

   (a) Es ist möglich, dass sowohl ein gegebenes Lineares Programm (LP) als auch das zugehörige duale LP unlösbar sind. 2 Punkte

   (b) Es ist möglich, dass für ein Lineares Programm (LP), dessen zulässige Menge ein Dreieck ist, die Lösungen an den 3 Eckpunkten des Dreiecks liegen. 2 Punkte

   (c) Es gibt Optimierungsprobleme mit genau zwei optimalen Lösungen 2 Punkte

   (d) Bei jedem Linearen Optimierungsproblem gibt es nur einen einzigen Punkt, der das globale Optimum annimmt. 2 Punkte

   (e) Beim Simulated-Annealing-Verfahren wird der Temperturparameter c sukzessive reduziert. 2 Punkte

ZF/BV	x	y	z	u_1	r.S.
Z	-1	-2	-3	0	0
u_1	3	2	1	1	1
	x	y	u_1	u_1	r.S.
Z	8	4	0	3	3
z	3	2	1	1	1

b) $c^T = (1 \;\; 2 \;\; 3)$, $A = (3 \;\; 2 \;\; 1)$, $b = (1)$

$y = \min!$

$3y \geq 1$

$2y \geq 2$

$y \geq 3$

$y \geq 0$

aus obiger Tabelle → $\underline{y = 3, \; Z = 3}$

c)

2) a) Wahr, wenn sich ZF u. NB beim primalen P. widersprechen dann tun sie das auch im dualen, oder d. Lösung des dualen P. ist unbeschränkt.

b) Falsch, höchstens 2 bzw. die Kante dazwischen

c) Wahr, jedoch nicht bei linearen od. konvexen Problemen.

DOCH RICHTIG

d) Falsch, es kann sein, dass es kein oder unendl. viele globale Optima gibt od. eines.

e) Wahr. Die Reduktion von c formalisiert einen Abkühlungsprozess, der Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten nimmt ob ein nicht-besserer Nachbarpunkt als neuer Punkt verwendet wird. P(gehe von x zu Nachbar y) = $\exp\left(\frac{f(x)-f(y)}{c}\right)$

Je kleiner c desto geringer wird die Wahrscheinlichkeit

Prüfung zu
Optimierung und Simulation
14.5.2009

1. Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem:

$$2y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 2y_4 \rightarrow \text{ min}$$
$$y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 \geq 4$$
$$-2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 3$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

   (a) Erstellen Sie das dazu duale Problem — 2 Punkte

   (b) Lösen Sie das Problem graphisch — 2 Punkte

   (c) Verifizieren Sie die Lösung mittels Simplexalgorithmus — 3 Punkte

   (d) Ermitteln Sie (mittels des Komplementaritätsprinzips) die optimale Lösung des ursprünglichen Problems. — 3 Punkte

2. (a) Berechnen Sie nach der Methode des Goldenen Schnitts ($\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 2 Iterationsschritte genügen) ein Intervall, in dem die Lösung folgender Optimierungsaufgabe liegt:

$$x^3 + 10|x - 2| \rightarrow min!$$
$$1 \leq x \leq 3$$

   4 Punkte

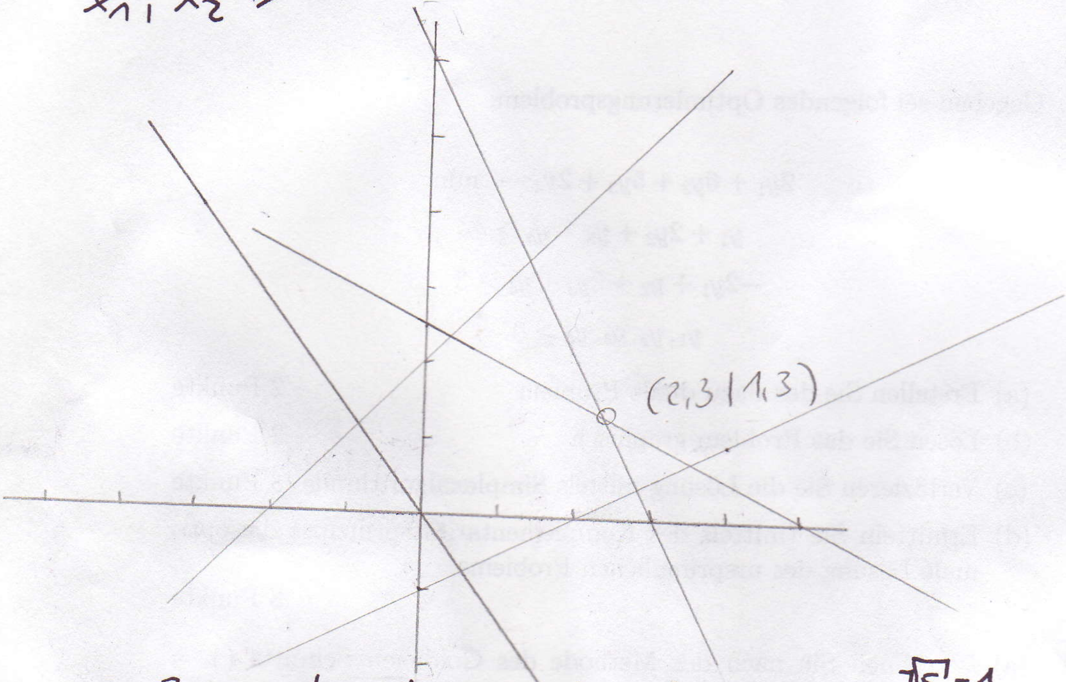
   (b) Beschreiben Sie den Unterschied zur Fibonacci-Methode — 3 Punkte

   (c) Können Sie für die Lösung obiger Optimierungsaufgabe das Newton-Verfahren verwenden? — 3 Punkte

1) a) $b^T = (2 \;\; 6 \;\; 5 \;\; 2)$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$4x_1 + 3x_2 = \max! \;\rightarrow\; x_2 = -\frac{4}{3}x_1$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 2 \;\rightarrow\; x_2 = \frac{x_1}{2} - 1$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6 \;\rightarrow\; x_2 = 6 - 2x_1$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5 \;\rightarrow\; x_2 = \frac{5 - x_1}{2}$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2 \;\rightarrow\; x_2 = 2 + x_1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

b)



2) a) $F(x) = x^3 + 10|x-2|$, $a = 1$, $b = 3$, $\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

1. Schritt

$\lambda = a + (1-\gamma)(b-a) = 1 + \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)2 = 1{,}76$ $\quad F(\lambda) = 7{,}85$

$\mu = a + \gamma(b-a) = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot 2 = 2{,}24$ $\quad F(\mu) = 13{,}54$

$F(\lambda) < F(\mu)$

$a = 1 \quad b = 2{,}24$

2. Schritt

$\lambda = 1 + \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)1{,}24 = 1{,}47$ $\quad F(\lambda) = 8{,}47$

$\mu = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,1{,}24 = 1{,}76$ $\quad F(\mu) = 7{,}85$

$F(\lambda) > F(\mu)$

$a = 1{,}47 \quad b = 2{,}24 \rightarrow \underline{[1{,}47; 2{,}24]}$

b) Unterschied liegt in der Veränderungssprungweite. Während die Intervalle beim goldenen Schnitt um (γ) bzw. $(\gamma-1)$ verschoben werden so basiert das bei der Fibonacci-Methode auf der Differenz der Fibonacci-Zahlen und deren Verhältnis zueinander (Verhältnis unterschied zu Vorgänger) → Konvergenzgeschwindigkeit wird so erhöht. c) Man läuft Gefahr in einem lokalen Optimum hängen zu bleiben

1) c) 14.05.08 OPTSIM

ZF/BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r. S.
z	-4	-3	0	0	0	0	0
u_1	1	-2	1	0	0	0	2
u_2	2	1	0	1	0	0	6
u_3	1	2	0	0	1	0	5
u_4	-1	1	0	0	0	1	2

	u_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r. S.
z	0	-11	4	0	0	0	8
x_1	1	-2	1	0	0	0	2
u_2	0	5	-2	1	0	0	2
u_3	0	4	-1	0	1	0	3
u_4	0	-1	1	0	0	1	4

	u_1	u_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r. S.
z	0	0	$-2/5$	$11/5$	0	0	$62/5$
x_1	1	0	$1/5$	$2/5$	0	0	$14/5$
x_2	0	1	$-2/5$	$1/5$	0	0	$2/5$
u_3	0	0	$5/5$	$-4/5$	1	0	$7/5$
u_4	0	0	$3/5$	$1/5$	0	1	$22/5$

	u_1	u_2	u_3	u_2	u_3	u_4	r. S.
z	0	0	0	$5/3$	$2/3$	0	$40/3$ d)
x_1	1	0	0	$1/3$	$-1/3$	0	$7/3$
x_2	0	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	$4/3$
u_1	0	0	1	$-4/3$	$5/3$	0	$7/3$
u_4	0	0	0	1	-1	1	~~28/15~~ 3

$x_1 = \frac{7}{3}$ $x_2 = \frac{4}{3}$ $z = \frac{40}{3}$ $\frac{62}{5} + \frac{7}{5} \cdot \frac{2}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$

$\frac{186}{15} + \frac{14}{15}$ $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}$

$\frac{22}{5} - \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3}$

$\frac{200}{15} = \frac{40}{3}$

$\frac{11}{5} - \frac{8}{\cancel{25}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$ $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$

5 $\frac{33-8}{15}$ $4 - \frac{22}{5}$ $\frac{3}{15} - \frac{8}{15}$

$\frac{2}{5} + \frac{4}{\cancel{25}} \cdot \frac{8}{3}$ $\frac{20-22}{5}$ $-\frac{5}{15}$

5 $8 + \frac{22}{5} =$ $\frac{40+22}{5} - \frac{1}{3}$

$\frac{1}{5} - \frac{8}{\cancel{25}} \cdot \frac{8}{3}$ $2 + \frac{4}{5} = \frac{10+4}{5}$

5 $3 - \frac{8}{5} = \frac{15-8}{5}$

$\frac{2}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$ $4 + \frac{2}{5} = \frac{20+2}{5}$

$\frac{1}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$ $\frac{14}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} = 14$

$\frac{2}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$ $\frac{7}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3} = \frac{7}{3}$

$\frac{22}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3} = \frac{22}{3}$

$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} \cdot \frac{2}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$ $- \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$ $\frac{7}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$

$\frac{6+14}{15}$ $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$

$\frac{14}{5} - \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$ $\frac{1}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} : \frac{3}{5}$

$\frac{7}{5} \cdot \frac{42-7}{15}$ $\frac{1}{5} +$ $\frac{12}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$

$\frac{35}{15} = \frac{7}{3}$ $\frac{1}{5} + 4 = \frac{20}{5} = \frac{21}{5}$

$\frac{1}{5} + \frac{60}{75}$ 15

$\frac{60}{75}$ $\frac{3}{15} = \frac{12}{15}$

$\frac{12}{15}$ $13 \cdot 5$

$\frac{22}{5} - \frac{21}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3}$

$\frac{66-105}{15} = \frac{39}{15}$

~~xy ≥ x−1~~

3. (a) Für folgendes Problem sind die Fritz-John- oder Kuhn-Tucker-Bedingungen aufzustellen:

$$\begin{aligned} x - 2y &\rightarrow \min \\ 0 \leq xy &\leq x - 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

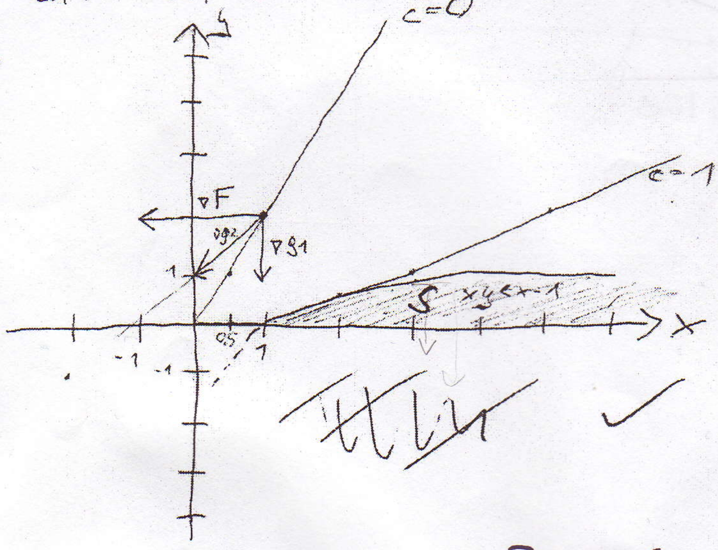
$g_1: x \cdot y \leq x - 1 \quad | -x$
$(x \cdot y) - x \leq -1$
$x \cdot y \geq 0$
$x \geq 0$

4 Punkte

(b) Zeichnen Sie eine Skizze für obiges Problem aus der **klar** der zulässige Bereich, Niveaulinien der Zielfunktion und das Optimum erkennbar sind ✓ 3 Punkte

✓ (c) Zeichnen Sie an einem von Ihnen gewählten Punkt im zulässigen Bereich (nicht der optimale Punkt) den Gradientenvektor der Zielfunktion und den Gradientenvektor der Nebenbedingungsfunktion ein. 3 Punkte

Ein Versuch, die c nochmal schön zu zeichnen:



$xy - x \leq -1$
$2y \leq 1$
$y \leq 0{,}5$
$3y - 3$

$3y \leq 2$
$4y \leq 3$
$y \leq$
$5y \leq 4$

$x - 2y = c \qquad c = 1$

$x - c = 2y$

$\frac{x - c}{2} = y$

3) a) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} \\ -1 \end{pmatrix}$

I: $1 + \frac{1}{x^2} u_1 = 0$ III: $u_1 \left(1 - \frac{1}{x} - y\right) = 0$

II: $-2 - u_1 = 0 \rightarrow u_1 = -2$

$1 - \frac{2}{x^2} = 0$

$1 = \frac{2}{x^2}$

$x^2 = 2 \nearrow \underline{1{,}414}$ $\underline{y = 0{,}707}$

$\underline{x} = \pm\sqrt{2} \rightarrow -1{,}414$ NB

b) c) $y = \frac{x}{2}$

$y = 1 - \frac{1}{x}$