Bsp. 442: Man zeige, dass die folgenden zwei algebraischen Strukturen Verbände sind. Welche sind außerdem distributiv, und welche sind Boolsche Algebren?

(a) $(\mathbf{P}(A), \cap, \cup)$

(b) $(M = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ ist endlich oder } \mathbb{N} \setminus X \text{ ist endlich}\}, \cap, \cup)$

Zur Erinnerung:

Definition 1. *Eine algebraische Struktur* $(M, \wedge, \vee)$ *heißt Verband, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) $(M, \wedge)$ *ist eine kommutative Halbgruppe,*

(ii) $(M, \vee)$ *ist eine kommutative Halbgruppe, und*

(iii) es gelten die Verschmelzungsgesetze

$$a = a \wedge (a \vee b) \qquad \textit{und} \qquad a = a \vee (a \wedge b)$$

für alle $a, b \in M$.

Definition 2. *Ein Verband* $(M, \wedge, \vee)$ *heißt distributiver Verband wenn die Distributivgesetze*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad \textit{und} \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

für alle $a, b, c \in M$ *gelten.*

Definition 3. *Ein distributiver Verband* $(M, \wedge, \vee)$ *heißt Boolsche Algebra, wenn er die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:*

(i) Es gilt ein neutrales Element $1 \in M$ *bezüglich* $\wedge$*, und es gibt ein neutrales Element* $0 \in M$ *bezüglich* $\vee$.

(ii) Zu jedem $a \in M$ *gibt es ein Komplement* $a' \in M$ *mit*

$$a \vee a' = 1 \qquad \textit{und} \qquad a \wedge a' = 0.$$

Lösung: Zuerst ein kurzer Gedanke zur Abgeschlossenheit der beiden Strukturen unter den Operationen Vereinigung und Durchschnitt. Bei der Potenzmenge ist das klar. Zu (b): Sind $A, B \in M$ und eine von beiden endlich, dann ist auch $A \cap B$ endlich; sind beide unendlich, so ist $\mathbb{N} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{N} \setminus A) \cup (\mathbb{N} \setminus B)$ und das ist endlich. Sind A und B endlich, dann ist die Vereinigung auch endlich. Ist mindestens eine von beiden unendlich, dann ist $\mathbb{N} \setminus (A \cup B) = (\mathbb{N} \setminus A) \cap (\mathbb{N} \setminus B)$, und auch das ist endlich.

Die Mengenoperationen Durchschnitt und Vereinigung sind kommutativ und assoziativ, und es gelten die Verschmelzungs- und Distributivgesetze (siehe Satz 1.46 im Buch). Daher sind beide Strukturen distributive Verbände.

Das neutrale Element bezüglich dem Durchschnitt ist jeweils die ganze Menge (also A bzw. $\mathbb{N}$), das neutrale Element bezüglich der Vereinigung ist die leere Menge. Das Komplement einer Menge B ist das mengentheoretische Komplement (in A bzw. in $\mathbb{N}$). Daher sind beide Strukturen Boolsche Algebren.