400.) $B \subseteq \mathbb{R}^2 : B = [-1,5] \times [1,5]$

$$\iint_B (xy + x^2 - y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_1^5 \left(\int_{-1}^5 (xy + x^2 - y^2)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_1^5 \left(\frac{x^2}{2}y + \frac{x^3}{3} - xy^2 \right) \Bigg|_{-1}^{5} dy =$$

$$= \int_1^5 (12y + 42 - 6y^2)\,dy =$$

$$= (6y^2 + 42y - 2y^3) \Big|_1^5 =$$

$$= 6 \cdot 24 + 42 \cdot 4 - 2 \cdot 124 = 64$$

423.) a) $y'' - 6y' - 27y = 0$

Exponentialansatz $y_h(x) = e^{\lambda x}$ mit dem Parameter λ

Charakteristische Gleichung:

$\lambda^2 - 6\lambda - 27 = 0$

$\Updownarrow$

$(\lambda+3)(\lambda-9) = 0$

$\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 9$ (2 reelle Lösungen) $[\lambda \in \{-3, 9\}]$

$\Rightarrow y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{9x}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) $y'' + 6y' + 9y = 0$

Charakteristische Gleichung:

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

$\Updownarrow$

$(\lambda+3)^2 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ (1 reelle Doppellösung) $[\lambda \in \{-3\}]$

$\Rightarrow y_h(x) = c_1 \cdot e^{-3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-3x} = (c_1 + c_2 x) e^{-3x}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

c) $y'' - 6y' + 25y = 0$

Charakteristische Gleichung:

$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$

$\lambda_{1/2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-100}}{2} = 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-64} = 3 \pm 4i$ (2 konjugiert komplexe Lösungen) $[\lambda \in \{3-4i, 3+4i\}]$

$\Rightarrow y_h(x) = c_1 e^{(3-4i)x} + c_2 e^{(3+4i)x} =$

$= e^{3x}\left(c_1 e^{-4ix} + c_2 e^{4ix}\right) =$

$= e^{3x}\left[c_1(\cos(-4x) + i\sin(-4x)) + c_2(\cos(4x) + i\sin(4x))\right] =$

$= e^{3x}\left(c_1(\cos 4x - i\sin 4x) + c_2(\cos 4x + i \sin 4x)\right) =$

$= e^{3x}\left(\tilde{c}_1 \cos 4x + \tilde{c}_2 \sin 4x\right)$; $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ so wählen, dass $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$

$\tilde{c}_1 = c_1 + c_2 \in \mathbb{R}$

$\tilde{c}_2 = i(c_1 - c_2) \in \mathbb{R}$

429.) $y' + \frac{y}{x} - e^x = 0$

Allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung:

$y' + a(x)\,y = s(x)$ ← Störfunktion

$\Rightarrow y' + \frac{1}{x} \cdot y = e^x$

· Allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung: „Trennung der Variablen":

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \tilde{c} \quad , \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| + \ln e^{\tilde{c}}$$

$$y = \frac{e^{\tilde{c}}}{x} = \frac{c}{x} \quad , c = e^{\tilde{c}} \in \mathbb{R}$$

$$y_h(x) = \frac{c}{x}$$

· Partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung: „Variation der Konstanten":

$$y_p(x) = \frac{c(x)}{x}$$

Einsetzen zur Ausgangsgleichung:

$$\left(\frac{c(x)}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot \frac{c(x)}{x} = e^x$$

$$\frac{c'(x) \cdot x - \cancel{c(x) \cdot 1}}{x^2} + \frac{\cancel{c(x)}}{x^2} = e^x$$

$$c'(x) = x e^x$$

$$c(x) = \int x e^x \, dx = \int e^x \cdot x \, dx =$$

$$= e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \, dx =$$

$$= x e^x - e^x + k = e^x(x-1) + k \, , k \in \mathbb{R}$$

$$y_p(x) = \frac{c(x)}{x} = \frac{e^x(x-1)}{x}$$ (Partikulärlösung: z.B.: $k = 0$)

· Allgemeine Lösung der (inhomogenen und ganzen) Differentialgleichung:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{c}{x} + \frac{e^x(x-1)}{x} = \frac{1}{x}\left(e^x(x-1) + c\right), c \in \mathbb{R}.$$