Kapitel 2

Grundbegriffe der Logik

2.1 Aussagen und deren Verknüpfungen

Eine Aussage wie „4711 ist durch 3 teilbar“ oder „2 ist eine Primzahl“, die nur wahr oder falsch sein kann, heißt logische Aussage.
Ein Satz wie z.B. „*Guten Morgen*“ oder „*Das Auto fährt schnell*“ ist keine Aussage im Sinne der Aussagenlogik.

Begriffserläuterung

Ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist (*Zweiwertigkeitsprinzip*), heißt *Aussage*.
Ist A eine Aussage, so bezeichnet W(A) (oder |A|) den Wahrheitswert der Aussage, d.h. es ist

$$W(A) := \begin{cases} \text{wahr}, & \text{falls A zutrifft} \\ \text{falsch}, & \text{falls A nicht zutrifft.} \end{cases}$$

Logische Aussagen können durch Junktoren (das sind logische Verknüpfungen, genauer logische Funktionen) zu neuen zusammengesetzten Aussagen verknüpft werden. Die bekanntesten Junktoren sind $\neg$ (not), $\wedge$ (und), $\vee$ (oder). Die Aussagen “2 ist eine Primzahl *und* 2 ist eine gerade Zahl”; “*Wenn* die Quersumme von 4711 durch 3 teilbar ist, *dann* ist 4711 durch 3 teilbar” sind zusammengesetzte Aussagen.
Der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage ergibt sich aus den Wahrheitswerten der Einzelaussagen. Dies führt zur Definition von Verknüpfungen für die Wahrheitswerte. Diese Verknüpfungen werden so definiert, dass die Verknüpfung der Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage ergibt.
Beispiel: $\mathrm{W(A)} \wedge \mathrm{W(B)} := \mathrm{W(A\ und\ B)}$
Das Zeichen $\wedge$ ist ein Verknüpfungssymbol für die Wahrheitswerte.
Die Verknüpfung (bzw. zweistellige Funktion) $\wedge$ wird durch die folgende Wertetabelle (*Wahrheitstafel*) beschrieben:

W(A)	W(B)	W(A) ∧ W(B)
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

Die UND-Verknüpfung (*Konjunktion*) von A und B ist genau dann wahr, wenn A wahr und B wahr ist.

Sie lässt sich auch durch die Wertetabelle

x	y	x ∧ y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

darstellen, wenn man *falsch* durch *0* und *wahr* durch *1* ausdrückt. Dabei sind x und y *logische Variablen* , die nur die Werte 0 und 1 annehmen können.
Die Konjunktion ist ein Beispiel einer *zweistelligen* logischen Funktion.

2.2 Weitere wichtige zweistellige log. Funktionen

Disjunktion (*ODER*):
x oder y (oder beides). x ∨ y ist genau dann *falsch*, wenn x und y beide *falsch* sind.

x	y	x ∨ y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Äquivalenz:
x ⇔ ist genau dann wahr, wenn x und y den gleichen Wahrheitswert haben.

x	y	x ⇔ y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Antivalenz (*Exklusives ODER*):
x ⇎y ist genau dann wahr, wenn entweder x gilt oder y gilt.

x	y	x ⇎ y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Implikation:
x ⇒ y ist genau dann *falsch*, wenn aus *Wahrem Falsches* folgt.

x	y	x ⇒ y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Bemerkung: Gilt $A \Rightarrow B$ bzw. $W(A) \Rightarrow W(B)$, so sagt man,
A sei *hinreichend* für B oder
B sei *notwendig* für A.

2.3 Übersicht über die Grundfunktionen

Von den vier möglichen *einstelligen* logischen Funktionen ist nur eine von Interesse, die

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Negation (*Verneinung*):
$\overline{x}$ ist genau dann *wahr*, wenn x *falsch* ist.

Bemerkung: Anstelle von $\bar{x}$ findet man auch die Schreibweisen $\neg\, x$ und $\sim x$.

Neben den bisher aufgeführten Funktionen gibt es noch weitere. Man überlegt sich leicht, dass 2^4 zweistellige logische Funktionen möglich sind:

x	0	0	1	1	Symbole	Bezeichnungen
y	0	1	0	1		
0	0	0	0	0		Nullfunktion
1	0	0	0	1	$\wedge$, $\bullet$, AND	Konjunktion, log. Prod.
2	0	0	1	0		Inhibition
3	0	0	1	1		
4	0	1	0	0		
5	0	1	0	1		
6	0	1	1	0	XOR, $\not\Leftrightarrow$	Antivalenz
7	0	1	1	1	$\vee$, $+$, OR	Disjunktion, log. Sum.
8	1	0	0	0	$\bar{\vee}$, NOR, $\downarrow$	PEIRCEfunktion
9	1	0	0	1	$\Leftrightarrow, \leftrightarrow$	Äquivalenz
10	1	0	1	0		
11	1	0	1	1		
12	1	1	0	0		
13	1	1	0	1	$\Rightarrow, \rightarrow, \supset$	Implikation
14	1	1	1	0	$\bar{\wedge}$, NAND, $\vert$	SHEFFERfunktion
15	1	1	1	1		Einsfunktion

Bemerkung: Die Symbole und Bezeichnungen für die Grundfunktionen sind in der Literatur nicht einheitlich. Die Reihenfolge der Funktionen entspricht der *lexikografischen Anordnung* (bzw. dem *Dualcode* der laufenden Funktionsnummer).

2.4 Logische und BOOLEsche Ausdrücke

Definition: Eine Verknüpfung von (endlich vielen) Konstanten und logischen Variablen durch Grundfunktionen heißt *(logischer) Ausdruck*, insbesondere *BOOLEscher Ausdruck,* wenn höchstens die Grundfunktionen NOT, AND und OR darin vorkommen.

Beispiele:	Gegenbeispiele:
$a \wedge b$	$a \Rightarrow b \wedge \vee c$ (sinnlos)
$(a \vee b) \wedge (\overline{a \vee b})$	$a \Rightarrow b \wedge c$ (Auswertungsreihenfolge unklar, da Klammern fehlen)
$(\overline{a} \vee b) \wedge \overline{1}$	
$(a \Rightarrow b) \wedge (\overline{b} \Rightarrow \overline{a})$	

Beispiele:

$a \wedge b$
$(a \vee b) \wedge (\overline{a \vee b})$
$(\overline{a} \vee b) \wedge \overline{1}$
$(a \Rightarrow b) \wedge (\overline{b} \Rightarrow \overline{a})$

Gegenbeispiele:

$a \Rightarrow b \wedge \vee c$ (sinnlos)
$a \Rightarrow b \wedge c$ (Auswertungsreihenfolge unklar, da Klammern fehlen)

Die *Auswertung* logischer Ausdrücke bei gegebenen Werten der Variablen erfolgt schrittweise unter Beachtung der *Reihenfolge* , die durch *Klammern* vorgeschrieben wird.

Beispiel:

$a = 0,\ b = 1$	Werte der Variablen
$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\overline{b} \Rightarrow \overline{a})$	Logischer Ausdruck
$= 1 \Leftrightarrow 1$	Auswertung
$= 1$	

Wertetabelle des Ausdrucks:

a	b	$a \Rightarrow b$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$	$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\bar{b} \Rightarrow \bar{a})$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1

2.5 Vorrangregeln

Zur Einsparung von Klammern bei längeren Ausdrücken werden für die wichtigsten Verknüpfungen Prioritäten der Auswertung vereinbart (Vgl. *Punktrechnung geht vor Strichrechnung*).
Höchste Priorität haben geklammerte Verknüpfungen, es folgen

NOT (Negation)	$\bar{}$	$(\neg)$
AND (Konjunktion)	$\wedge$	$(\cdot)$
OR (Disjunktion)	$\vee$	$(+)$
Implikation (Subjunktion)	$\Rightarrow$	$(\rightarrow)$
Äquivalenz (Bijunktion)	$\Leftrightarrow$	$(\leftrightarrow)$

Beim Hintereinanderausführen mehrerer gleichrangiger Verknüpfungen (z.B. a $\Rightarrow$ b $\Rightarrow$ c) wird von links nach rechts ausgewertet.

2.6 Äquivalente Ausdrücke

Aus der Elementarmathematik sind äquivalente Ausdrücke bekannt: z.B.

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
\sqrt{ab} &= \sqrt{a}\sqrt{b} \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha
\end{aligned}$$

Entsprechend gibt es äquivalente *logische* Ausdrücke.

Definition: Zwei logische Ausdrücke A_1 und A_2 heißen *äquivalent* genau dann, wenn sie bei gleichen Werten der gemeinsamen Variablen stets gleiche Wahrheitswerte besitzen: $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2$.

2.7 Tautologie, Kontradiktion

Definition: Ein Ausdruck, der für jede Belegung der Variablen wahr ist, heißt *Tautologie* (*immer wahr*), z.B. $a \vee \bar{a} = 1$. Ein Ausdruck, der für jede Belegung falsch ist, heißt *Kontradiktion* (*nie wahr*), z.B. $a \wedge \bar{a} = 0$.

Aufgabe: Ist der Ausdruck $\bar{a} \vee b \vee a\bar{b}$ eine Tautologie?

Lösung:

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a\bar{b}$	$\bar{a} \vee b$	$\bar{a} \vee b \vee a\bar{b}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1

(Es handelt sich um eine Tautologie)

2.8 Darstellung logischer Funktionen durch BOOLEsche Ausdrücke

Für die folgenden tabellarisch gegebenen Funktionen (Verknüpfungen) soll jeweils ein logischer BOOLEscher Ausdruck gefunden werden.

a)

x	y	$f_4(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

b)

x	y	$f_5(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Vorgehensweise:
Für jede Zeile, in der der Funktionswert 1 (0) auftritt, schreibe man ein *logisches Produkt* x ∧ y (eine *logische Summe* x ∨ y), wobei x bzw. y zu negieren sind, falls für die betreffende Variable eine Null (Eins) in der Zeile steht. Diese so erhaltenen logischen Produkte (logischen Summen) sind durch Disjunktionen (Konjunktionen) zu verbinden, um den gewünschten logischen Ausdruck zu erhalten. (*Disjunktive* bzw. *konjunktive Normalform* der betreffenden logischen Funktion)
Man erhält im Beispiel a) die disjunktive Normalform $\bar{x} \wedge y$; im Beispiel b) die disjunktive Normalform $(\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y)$.

Für

x	y	$f_5(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

erhält man als konjunktive Normalform $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y)$. Auf diese Weise kann jede der 16 Grundfunktionen in konjunktiver bzw. disjunktiver Normalform dargestellt werden. Eine Begründung des hier beschriebenen Verfahrens liefert der BOOLEsche Normalformensatz.

2.8.1 BOOLEscher Normalformensatz

Durch Fallunterscheidung zeigt man leicht:
Für alle $x, y \in \{0,1\}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \cdot f(1,\ y) \vee \bar{x} \cdot f(0,\ y) \\ &= y \cdot f(x,\ 1) \vee \bar{y} \cdot f(x,\ 0) \end{aligned}$$

Also ist:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xf(1,\ y) \vee \bar{x}f(0,\ y) \\ &= x(yf(1,\ 1) \vee \bar{y}f(1,\ 0)) \vee \bar{x}(yf(0,\ 1) \vee \bar{y}f(0,\ 0)) \\ &= xyf(1,\ 1) \vee x\bar{y}f(1,\ 0) \vee \bar{x}yf(0,\ 1) \vee \bar{x}\bar{y}f(0,\ 0) \\ &= \bar{x}\bar{y}f(0,\ 0) \vee \bar{x}yf(0,\ 1) \vee x\bar{y}f(1,\ 0) \vee xyf(1,\ 1). \end{aligned}$$

x	0011		
y	0101	*disjunktiv*	*konjunktiv*
0	0000	0	$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$
1	0001	$x \wedge y$	$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$
2	0010	$x \wedge \bar{y}$	$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$
3	0011	$(x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$	$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$
4	0100	$\bar{x} \wedge y$	$(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$
5	0101	$(\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y)$	$(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y)$
6	0110	$(\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$	$(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$
7	0111	$(\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$	$x \vee y$
8	1000	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$
9	1001	$(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$	$(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$
10	1010	$(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{y})$	$(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$
11	1011	$(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$	$x \vee \bar{y}$
12	1100	$(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$	$(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$
13	1101	$(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y)$	$\bar{x} \vee y$
14	1110	$(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
15	1111	$(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$	1

2.9 Umformung logischer Ausdrücke

Im Folgenden werden Regeln zum Vereinfachen bzw. Umformen logischer Ausdrücke angegeben. Da sich alle Ausdrücke so schreiben lassen, dass sie nur noch die Operationen NOT, AND, OR ($^-$, $\wedge$, $\vee$) enthalten (siehe 2.8), brauchen nur die Umformungen derartiger Ausdrücke (*BOOLEsche Ausdrücke*) betrachtet zu werden. (Siehe Tabelle *Logische Gesetze*)!
Die Beweise der logischen Gesetze erfolgen durch Wertetabellen, z.B.
$a \wedge (a \vee b) = a$ (eines der Absorptionsgesetze).

a	b	$a \vee b$	$a \wedge (a \vee b)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Aufgabe: Beweis der DE MORGANschen Gesetze.
Lösung:
Zu zeigen ist: $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \wedge b$	$\overline{a \wedge b}$	$\bar{a} \vee \bar{b}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Der Fall $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$ wird analog bewiesen.

2.10 Logische Gesetze

(Umformungsregeln für BOOLEsche Ausdrücke)

Für alle $x, y, z \in \{0, 1\}$ gelten:

1. $\bar{\bar{x}} = x$ — Negation der Negation

2. $\left.\begin{array}{l} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{array}\right\}$ Kommutativgesetze

3. $\left.\begin{array}{l} x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \end{array}\right\}$ Assoziativgesetze

4. $\left.\begin{array}{l} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{array}\right\}$ Distributivges.

5. $\left.\begin{array}{l} \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \\ \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \end{array}\right\}$ Gesetze von DE MORGAN

6. $\left.\begin{array}{ll} x \wedge 1 = x & x \vee 1 = 1 \\ x \wedge 0 = 0 & x \vee 0 = x \end{array}\right\}$ 0 - 1 Gesetze

7. $\left.\begin{array}{l} x \wedge x = x \\ x \vee x = x \end{array}\right\}$ Idempotenzgesetze

8. $\left.\begin{array}{l} x \wedge \bar{x} = 0 \\ x \vee \bar{x} = 1 \end{array}\right\}$ Komplementgesetze

9. $\left.\begin{array}{l} x \wedge (x \vee y) = x \\ x \vee (x \wedge y) = x \\ (x \vee \bar{y}) \wedge y = x \wedge y \\ (x \wedge \bar{y}) \vee y = x \vee y \\ (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x \\ (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x \end{array}\right\}$ Absorptionsgesetze

2.11 Darstellung der Grundfunktionen durch NAND und NOR

Zurückführung von NOT, AND und OR

a) auf NOR:

NOT:

$$\bar{x} = \bar{x} \wedge \bar{x} = \overline{x \vee x} = x \bar{\vee} x = NOR(x, x)$$

AND:

$$\begin{aligned} x \wedge y = \overline{\overline{x \wedge y}} &= \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \bar{x} \bar{\vee} \bar{y} = (x \bar{\vee} x) \bar{\vee} (y \bar{\vee} y) \\ &= NOR(NOR(x, x), NOR(y, y)) \end{aligned}$$

OR:

$$\begin{aligned} x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} &= \overline{x \bar{\vee} y} = (x \bar{\vee} y) \bar{\vee} (x \bar{\vee} y) \\ &= NOR(NOR(x, y), NOR(x, y)) \end{aligned}$$

b) auf NAND:

NOT:

$$\bar{x} = \bar{x} \vee \bar{x} = \overline{x \wedge x} = x \bar{\wedge} x = NAND(x, x)$$

AND:

$$\begin{aligned} x \wedge y = \overline{\overline{x \wedge y}} &= \overline{x \bar{\wedge} y} = (x \bar{\wedge} y) \bar{\wedge} (x \bar{\wedge} y) \\ &= NAND(NAND(x, y), NAND(x, y)) \end{aligned}$$

OR:

$$\begin{aligned} x \vee y &= \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = \bar{x} \bar{\wedge} \bar{y} = (x \bar{\wedge} x) \bar{\wedge} (y \bar{\wedge} y) \\ &= NAND(NAND(x, x), NAND(y, y)) \end{aligned}$$

2.12 Aussageformen

In der Mathematik begegnen uns Gleichungen, wie z.B.

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ x^2 + y^2 &= z^2 \\ x^3 + y^3 &= z^3 \end{aligned}$$

Dies sind keine Aussagen, sondern *Aussageformen*; sie gehen jedoch in Aussagen über, wenn für die Variablen x, y, z z.B. natürliche Zahlen eingesetzt werden.
Aussageformen können auch sprachliche Gebilde sein: z.B. *n ist eine Primzahl*, *x ist ein Planet*.

Aussageformen können (bezüglich gewisser Variablenbereiche)
erfüllbar (*allgemeingültig* oder *teilgültig*) oder *nicht erfüllbar* sein.

Für natürliche Zahlen x, y, z ist z.B.

$x + y = y + x$	allgemeingültig	
$x^2 + y^2 = z^2$	teilgültig	(z.B. $3^2 + 4^2 = 5^2$)
$x^3 + y^3 = z^3$	nicht erfüllbar	

Dass $x^n + y^n = z^n$ für alle $n \geq 3$ unerfüllbar ist, wurde schon von Pierre de FERMAT (1601-1655) behauptet, jedoch erst 1995 durch den englischen Mathematiker Andrew WILES bewiesen.

2.13 Prädikatenlogik und Quantoren

In der Aussagenlogik werden die Aussagen durch Junktoren (z.B. $\neg$, $\wedge$, $\vee$) verknüpft. Die Prädikatenlogik ist eine Erweiterung der Aussagenlogik und erlaubt Aussagen wir „durch 2 teilbar“ , „gerade Zahl sein“ , „für alle“ , „es existieren“ .

Ein Quantor ist ein beschreibendes Element, das eine Quantitätsaussage macht. Die wichtigste Quantoren sind Allquantor ($\underset{x}{\forall}$ oder $\underset{x}{\bigwedge}$) und der Existenzquantor ($\underset{x}{\exists}$ oder $\underset{x}{\bigvee}$).

Eine Aussageform P(x) steht für ein ganzes System von Aussagen. Ist P(x) *für alle x* (eines gewissen Bereiches) wahr (*allgemeingültig*), so schreibt man:
$\underset{x}{\forall} P(x)$ oder $(\forall$ x)P(x) oder $\underset{x}{\bigwedge} P(x)$.
Die letzte Schreibweise kann so motiviert werden:
Für alle x gilt P(x) bedeutet:

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge ...$$

Kurz: $\underset{x}{\bigwedge}$ P(x).
Das Symbol $\forall$ (*bzw.* $\bigwedge$) heißt *Allquantor*.
Ist eine Aussageform P(x) *teilgültig*, dann gibt es also (mindestens ein) x, so dass P(x) gilt.
Man schreibt $\underset{x}{\exists} P(x)$ oder $(\exists x)P(x)$ oder $\underset{x}{\bigvee} P(x)$
d.h. *Es gibt (mindestens) ein x, so dass P(x) gilt*,
d.h. $P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee ...$.
Das Symbol $\exists$ (*bzw.* $\bigvee$) heißt *Existenzquantor* .

Ist P(x) *niemals wahr* (nicht erfüllbar), so kann man schreiben

$$\neg \underset{x}{\exists} P(x) \text{ oder } \neg \bigvee_x P(x)$$

Beispiele:
Man schreibe mit Quantoren folgende Aussagen und negiere sie:

1.) *Zu jedem Haus gibt es einen Baum, der größer ist als dieses Haus.* (H = Menge der Häuser, B = Menge der Bäume. − $|b|$ bzw. $|h|$ Höhe des Baumes bzw. Hauses)

Aussage: $\underset{h\in H}{\forall}\ \underset{b\in B}{\exists}\ |b| > |h|$ oder $\bigwedge_{h\in H} \bigvee_{b\in B} |b| > |h|$

Negation: $\underset{h\in H}{\exists}\ \underset{b\in B}{\forall}\ |b| < |h|$ oder $\bigvee_{h\in H} \bigwedge_{b\in B} |b| \leq |h|$

2.) *Alle Physiker sind Sänger und besitzen ein Auto.* Sei P die Menge aller Physiker

A(x): x besitzt ein Auto

S(x): x ist Sänger

Aussage: $\underset{x\in P}{\forall} A(x) \wedge S(x)$ oder $\bigwedge_{x\in P} A(x) \wedge S(x)$

Negation: $\underset{x\in P}{\exists} \overline{A(x)} \vee \overline{S(x)}$ oder $\bigvee_{x\in P} \overline{A(x)} \vee \overline{S(x)}$ (DE MORGAN)

3.) *x und y seien Personen. Die Eigenschaft $T(x,y)$ soll heißen : x tröstet y.*
Dann kann man die folgende Aussagen mit Quantoren ausdrücken.

a)	Jeder	tröstet	jeden	$\forall x\ \forall y\ :\ T(x,y)$
b)	Jemand	tröstet	jemanden	$\exists x\ \exists y\ :\ T(x,y)$
c)	Jeder	tröstet	jemanden	$\forall x\ \exists y\ :\ T(x,y)$
d)	Niemand	tröstet	jeden	$\neg\exists x\ \forall y\ :\ T(x,y)$
e)	Jemand	tröstet	jeden	$\exists x\ \forall y\ :\ T(x,y)$
f)	Jemand	tröstet	niemanden	$\exists x\ \neg\exists y\ :\ T(x,y)$
g)	Niemand	tröstet	jemanden	$\neg\exists x\ \exists y\ :\ T(x,y)$
h)	Niemand	tröstet	niemanden	$\neg\exists x\ \neg\exists y\ :\ T(x,y)$

2.14 Anwendungsbeispiel

Der Begriff der Stetigkeit einer Funktion:
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert

a) Verbal: Zu jedem $\varepsilon > 0$ es existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, so dass für alle $|x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ folgt.

b) mit Quantoren : $\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0}{\exists} \quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0| < \varepsilon)$

2.15 Verknüpfungen von Aussageformen

Logische Verknüpfungen von Aussageformen ergeben wieder Aussageformen:

$$z.B.\ \overline{A(x)},\ A(x) \wedge B(x),\ A(x) \vee B(x),\ A(x) \Rightarrow B(x),\ A(x) \Leftrightarrow B(x)$$

Erst durch Einsetzen von Werten aus einer bestimmten Grundmenge G in die Variablen (hier: x) werden die Verknüpfungen der Aussageformen zu Aussagen mit einem Wahrheitswert.
Die Aussageformen können bezüglich G unerfüllbar, teilgültig oder allgemeingültig sein. Im Falle der Teilgültigkeit wird man sich für die *Erfüllungsmenge* interessieren. Bedeuten die Aussageformen A(x) und B(x) z. B. Gleichungen bzw. Ungleichungen, so versteht man unter

$A(x) \wedge B(x)$ (ohne einen weiteren Zusatz)

meist die Erfüllungsmenge

$$\{x \in G \mid A(x) \wedge B(x)\}.$$

Schreibt man dagegen

$A(x) \Rightarrow B(x)$ (ohne einen weiteren Zusatz),

so ist damit

$$\forall x \in G \quad (A(x) \Rightarrow B(x)) \quad , d.h.$$

Allgemeingültigkeit der Aussageform $A(x) \Rightarrow B(x)$ bezüglich G gemeint. Entsprechendes gilt für die Äquivalenz $\Leftrightarrow$.

2.16 Anwendung der Logik

Z.B.

- Mathematische Beweise
- Programmierung, Programmiersprachen
- Künstliche Intelligenz (KI)
- Theorie der Datenbanken
- Schaltalgebra (Logische Schaltungen , Computer-Entwurf , Prozesssteuerung)

2.17 Beweismethoden

Beweise beruhen auf Implikationen: Aus einer Aussage A wird in einem Beweis eine Aussage B abgeleitet (gefolgert).
Man unterscheidet folgende Beweismethoden:

1. **Direkter Beweis** ($A \Rightarrow B$)
   Beispiel:
   Behauptung : $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq a \cdot b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
   Beweis : $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2a \cdot b + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2a \cdot b \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{2} \geq a \cdot b$

2. **Indirekter Beweis**

   a) **Widerspruchsbeweis**
   ($A \wedge \overline{B} \Rightarrow$ falsch , z.B. $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$, A ist aber wahr!)

   Beispiel:
   n sei eine gerade natürliche Quadratzahl (Aussage A)
   Behauptung : $k := \sqrt{n}$ ist gerade
   Beweis : k sei nicht gerade, also ungerade ($\bar{B}$). Dann, ist $n = k^2$ auch ungerade, also nicht gerade. d.h. $\bar{A}$ gilt. Das ist aber ein Widerspruch zu A, denn A und $\bar{A}$ können nicht gleichzeitig wahr sein.

   b) **Beweis durch Kontraposition**
   ($A \Rightarrow B$ ist gleichwertig mit $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$)

   Beispiel:
   n sei ein gerade natürliche Quadratzahl (Aussage A)
   Behauptung : $k = \sqrt{n}$ ist gerade
   Beweis : k sei nicht gerade, also ungerade. Dann ist $n = k^2$ auch ungerade, also nicht gerade, d.h. dann gilt $\bar{A}$, d.h. $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ und diese Aussage ist gleichwertig mit $A \Rightarrow B$

3. **Vollständige Induktion**
   Aussageformen über natürliche Zahlen: A(n)
   $$\left.\begin{array}{ll} & \mathrm{A}(1) \\ \wedge & \forall k \in \mathbb{N}: \ (\mathrm{A(k)} \Rightarrow \mathrm{A(k+1)}) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \mathrm{A(n)}$$

Kapitel 2 - Logik - Zusammenfassung

— Eine Aussage, wie 4711 ist durch 3 teilbar oder 2 ist eine Primzahl, die nur wahr oder falsch sein kann, heißt logische Aussage

— Logische Aussagen werden miteinander durch logische Funktionen verknüpft

— Es gibt 4 mögliche einstellige logische Funktionen. Die einzige sinvolle ist die Funktion $NOT(x)$ (andere Schreibweise : $\bar{x}, \neg x, \tilde{x}$)

— Es gibt 16 mögliche zweistellige logische Funktionen.

Die wichtigsten sind:

Die *UND* Funktion	: $x \wedge y$ oder $x\ AND\ y$
Die *ODER* Funktion	: $x \vee y$ oder $x\ OR\ y$
Die Äquivalenz	: $x \Leftrightarrow y$
Die Antivalenz	: $x \not\Leftrightarrow y$ oder $x\ XOR\ y$
Die Implikation	: $x \Rightarrow y$
Die *NOR* Funktion	: $x\ NOR\ y$ oder $x \bar{\vee} y$
Die *NAND* Funktion	: $x\ NAND\ y$ oder $x \bar{\wedge} y$

Dabei heißen x und y logische Variablen und nehmen die Werte wahr$\equiv$ 1 oder falsch $\equiv 0$

— Ausdrücke die aus logischen Funktionen und logischen Konstanten bestehen, nennt man logische Ausdrücke.

— Alle einstellige und zweistellige logische Funktionen und damit Ausdrücke, lassen sich durch die Grundfunktionen NOT, *AND* und *OR* darstellen. Ausdrücke die nur die Grundfunktionen NOT, *AND* und *OR* enthalten heißen BOOLE'sche Ausdrücke

— NOT, *AND* und *OR* lassen sich aus *NOR* bzw. *NAND* Funktionen darstellen. Das ermöglicht die Herstellung von logischen Schaltungen mit Chips, die nur *NOR* Zellen (Gatter) bzw. nur *NAND* Zellen (Gatter) haben.

— Ein Ausdrück der für jede Belegung (0 oder 1) der Variablen wahr ist (d.h. den Wert 1 hat) heißt Tautologie

— Ein Ausdrück der für jede Belegung (0 oder 1) der Variablen falsch ist (d.h. den Wert 0 hat) heißt Kontradiktion

— Die Auswertung von logischen Ausdrucken, erfolgt durch die Vorangsregel und die logischen Gesetzen

Vorangsregeln: (), NOT, *AND*, *OR*, Implikation, Aquivalenz

Logische Gesetze : (Siehe 2.10)

1. $\bar{\bar{x}} = x$ Negation der Negation

2. $\left.\begin{array}{l} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{array}\right\}$ Kommutativgesetze

3. $\left.\begin{array}{l} x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \end{array}\right\}$ Assoziativgesetze

4. $\left.\begin{array}{l} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{array}\right\}$ Distributivges.

5. $\left.\begin{array}{l} \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \\ \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \end{array}\right\}$ Gesetze von DE MORGAN

6. $\left.\begin{array}{ll} x \wedge 1 = x & x \vee 1 = 1 \\ x \wedge 0 = 0 & x \vee 0 = x \end{array}\right\}$ 0 - 1 Gesetze

7. $\left.\begin{array}{l} x \wedge x = x \\ x \vee x = x \end{array}\right\}$ Idempotenzgesetze

8. $\left.\begin{array}{l} x \wedge \bar{x} = 0 \\ x \vee \bar{x} = 1 \end{array}\right\}$ Komplementgesetze

9. $\left.\begin{array}{l} x \wedge (x \vee y) = x \\ x \vee (x \wedge y) = x \\ (x \vee \bar{y}) \wedge y = x \wedge y \\ (x \wedge \bar{y}) \vee y = x \vee y \\ (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x \\ (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x \end{array}\right\}$ Absorptionsgesetze

— Logische Ausdrücke, die logische Variablen enthalten sind keine Aussagen, sondern Aussageformen.
Eine Aussageform wird zu einer Aussage, wenn für die Variablen Werte (0,1) eingesetzt werden.

— Quantoren :

a) Allquantor : $\underset{x}{\forall}$ (sprich: für alle x)

b) Existenzquantor : $\underset{x}{\exists}$ (sprich : es existiert ein x)