Beispiel 58 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 8, 18.05.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Welches der folgenden Vektorfelder $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ist ein Gradientenfeld und wie lautet ggf. eine zu $\vec{f}$ gehörende Stammfunktion?

(a) $(1, 1, 1)$, (b) $(-x, -y, -z)$, (c) $(2x, 2y, 0)$, (d) (yz, xz, x^2)

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Vektorfeld

Ein Vektorfeld ordnet den Punkten eines ebenen oder räumlichen Bereiches in eindeutiger Weise einen Vektor zu.
Für ebenes Vektorfeld ($\vec{e}$ ist Einheitsvektor)

$$\vec{F}(x, y) = f_x(x, y) \cdot \vec{e}_x + f_x(x, y) \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Für räumliches Vektorfeld ($\vec{e}$ ist Einheitsvektor)

$$\vec{F}(x, y, z) = f_x(x, y, z) \cdot \vec{e}_x + f_x(x, y, z) \cdot \vec{e}_y + f_z(x, y, z) \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

2.2 Gradientenfeld

Unter einem Gradientenfeld versteht man ein Vektorfeld, das der Gradient eine Stammunktion (Potential) sein kann. (**Integrabilitätsbedingung**)
Es seien nun $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und die Funktion $F : U \to \mathbb{R}^n$. F ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn gilt:

$$\frac{\partial F_i}{\partial F_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial F_i}(x), \qquad \forall x \in U_i,\ \forall i, j \in 1, \ldots, n$$

Für ein ebenes Vektorfeld muss also gelten:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Für ein räumliches Vektorfeld gilt dann:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \wedge \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \wedge \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

3 Lösung des Beispiels

3.1 Beispiel a

Zu untersuchen, ist, ob $\vec{f} = (1, 1, 1)$ ein Gradientenfeld ist. Zunächst prüfen wie, ob die Integrabilitätsbedingung zutrifft:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y} = 0$$

Nun gehen wir nun die Stammfunktion erstellen und prüfen F_x:

$$F_x = \int 1 \, dx = x + c(y, z)$$

Wir setzen weiter in F_y ein:

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(x + c(y, z)) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 + \frac{\partial}{\partial y}(c(y, z)) = 1$$

Wir wollen $\frac{\partial c}{\partial y} = 1$ haben - dazu muss gelten: $c(x, y) = y + d(z)$, so dass wir nun folgende Stammfunktion haben: $F = x + y + d(z)$. Diese setzen wir nun in F_z ein:

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(x + y + d(z)) = 1 \qquad \rightarrow \qquad 0 + 0 + \frac{\partial c}{\partial z} = 1$$

Wir wollen $\frac{\partial d}{\partial z} = 1$ haben - dazu muss gelten: $d(z) = z + c$, so dass wir nun folgende Stammfunktion haben: $F = x + y + z + c$, $c \in \mathbb{R}$.

3.2 Beispiel b

Zu untersuchen, ist, ob $\vec{f} = (-x, -y, -z)$ ein Gradientenfeld ist. Zunächst prüfen wie, ob die Integrabilitätsbedingung zutrifft:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y} = 0$$

Nun gehen wir nun die Stammfunktion erstellen und prüfen F_x:

$$F_x = \int -x \, dx = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + c(y, z)$$

Wir setzen weiter in F_y ein:

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{1}{2} \cdot x^2 + c(y, z)) = -y \qquad \Rightarrow \qquad 0 + \frac{\partial}{\partial y}(c(y, z)) = -y$$

Wir wollen $\frac{\partial c}{\partial y} = -y$ haben - dazu muss gelten: $c(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot y^2 + d(z)$, so dass wir nun folgende Stammfunktion haben: $F = -\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot y^2 + d(z)$. Diese setzen wir nun in F_z ein:

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(-\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot y^2 + d(z)) = -z \qquad \rightarrow \qquad 0 + 0 + \frac{\partial c}{\partial z} = -z$$

Wir wollen $\frac{\partial d}{\partial z} = -z$ haben - dazu muss gelten: $d(z) = -\frac{1}{2} \cdot z^2 + c$, so dass wir nun folgende Stammfunktion haben: $F = -\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot y^2 - \frac{1}{2} \cdot z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

3.3 Beispiel c

Zu untersuchen, ist, ob $\vec{f} = (2x, 2y, 0)$ ein Gradientenfeld ist. Zunächst prüfen wie, ob die Integrabilitätsbedingung zutrifft:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y} = 0$$

Nun gehen wir nun die Stammfunktion erstellen und prüfen F_x:

$$F_x = \int 2x\,dx = x^2 + c(y, z)$$

Wir setzen weiter in F_y ein:

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(\cdot x^2 + c(y, z)) = 2y \qquad \Rightarrow \qquad 0 + \frac{\partial}{\partial y}(c(y, z)) = 2y$$

Wir wollen $\frac{\partial c}{\partial y} = 2y$ haben - dazu muss gelten: $c(x, y) = y^2 + d(z)$, so dass wir nun folgende Stammfunktion haben: $F = x^2 + y^2 + d(z)$. Diese setzen wir nun in F_z ein:

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + d(z)) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 0 + 0 + \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

Wir wollen $\frac{\partial d}{\partial z} = 0$ haben - dazu muss gelten: $d(z) = 0 + c$, so dass wir nun folgende Stammfunktion haben: $F = x^2 + y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

3.4 Beispiel d

Zu untersuchen, ist, ob $\vec{f} = (yz, xz, x^2)$ ein Gradientenfeld ist. Zunächst prüfen wie, ob die Integrabilitätsbedingung zutrifft:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0 = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial f_x}{\partial z} \neq \frac{\partial f_z}{\partial x} \neq y \neq 2x \qquad \wedge \qquad \frac{\partial f_y}{\partial z} \neq \frac{\partial f_z}{\partial y} \neq x \neq 0$$

Da die Integrabilitätsbedingung verletzt ist, gibt es kein Gradientenfeld und auch keine Stammfunktion.