Runde 8, Beispiel 56

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 19.12.2006

Vielen Dank an Michael BIRSAK für seine Aufzeichnungen!

1 Angabe

Man entwickle die Funktion

$$g(t) = e^t, \qquad 0 \le t < T$$

in eine reine Cosinusreihe, das heisst man bestimme die (gewöhnliche) Fourier-Reihe der $2T$- periodischen Funktion $h(t)$, welche die gerade, $2T$-periodische Fortsetzung von $g(t)$ darstellt:

$$h(t) = \begin{cases} g(t) & 0 \le t < T \\ g(-t) & -T < t < 0 \end{cases}, \qquad h(t+2T) = h(t)$$

2 Theoretische Grundlagen: Fourier-Reihen (T- bzw. L-Periode)

$f(x)$ sei eine Funktion mit der Periode $2L$ und durch eine Reihe darstellbar, dann kann man transformieren zu der Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)x + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x))$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man wie folgt berechnen:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}\,x,$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}\,x,$$

Die komplexe Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}$$

für die Koeffizienten $\in \mathbb{C}$, (erhält man mit der Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}$$
$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$$

3 Lösung des Beispiels

$$\omega = \frac{2\pi}{T^*} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{1}{T}(\int_{-T}^{0} e^{-t}\cos(n\omega t)\,(\,d)t + \int_{0}^{T} e^{t}\cos(n\omega t)\,(\,d)t)$$

$$= \frac{1}{T}(-\frac{1}{\omega^2 n^2+1} - \frac{\omega n}{\omega^2 n^2+1}\sin(-n\pi)e^T +$$

$$\frac{1}{\omega^2 n^2+1}\cos(-n\pi)e^T + \frac{\omega n}{\omega^2 n^2+1}\sin(n\pi)e^T +$$

$$\frac{1}{\omega^2 n^2+1}\cos(n\pi)e^T - \frac{\omega n}{\omega^2 n^2+1}\sin(0) - \frac{1}{\omega^2 n^2+1})$$

$$= \frac{1}{T}(-\frac{2}{\omega^2 n^2+1} + \frac{2}{\omega^2 n^2+1}\cos(n\pi)e^T$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{T}(-\frac{2}{\omega^2 n^2+1} - \frac{2}{\omega^2 n^2+1}e^t), & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{T}(-\frac{2}{\omega^2 n^2+1} + \frac{2}{\omega^2 n^2+1}e^t), & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Gerade fortgesetzt, daher $b_n = 0$.

$$\mathbf{S_f(t) = \frac{1}{T}(e^T - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega T)}$$