Andreas H. 29.09.2016

Differenzengleichungen:

Mit Differenzengleichungen können wir die Regelmäßigkeit von rekursiven Berechnungen ausdrücken und genau aufschreiben. Das hat zB den Vorteil, dass wir eine komplexe Rekursion nicht ausrechnen müssen, sondern "bequem" einfach nur einen Startwert und die Tiefe (also der wievielte Rekursionsaufruf nun stattfindet) parat haben müssen. Anders gesagt, wenn uns jemand fragt, "was ist die 1 000. Fibonacci-Zahl?", wäre es gut, wenn wir eine Lösung haben, da wir ansonsten viel rechnen müssten (wir wissen ja die 999., 998. usw. oft auch nicht auswendig).

Wir reden von einer homogenen DGL, wenn sie nur einen Term beinhaltet, in dem a*Xn+1 (a ist eine Zahl) vorkommt, und von einer inhomogenen DGL, wenn sie einen weiteren beliebigen Term b beinhält, der selbst nicht rekursiv vor- oder zurückgreift. Letzteres nennen wir auch Störfunktion, ich glaube, weil sie uns eine regelmäßige Multiplikationsreihe zerstört.

DGL 1. Ordnung:
Differenzengleichungen 1. Ordnung errechnen sich auf Basis des vorherigen Aufrufs (Beispiele: Hanoi, Babylonisches Wurzelziehen).
Hier haben wir zwei Möglichkeiten:

1. Die DGL hat eine konstante Störfunktion (also eine (ganze) Zahl). Hier haben wir es leicht, und können eine von zwei Formeln anwenden, die auf BS289 und im VoWi zu finden sind.
2. Die DGL hat eine variierende Störfunktion, dh. sie beinhaltet in irgendeiner Form n, unsere Eingabegröße.

Für 2. teilen wir die DGL in einen homogenen Teil und einen inhomogenen Teil, und berechnen die Lösungen getrennt voneinander. Für die homogene Gleichung brauchen wir eine allgemeine Lösung (dh. eine Lösung, die mit allen möglichen Anfangswerten arbeiten kann, und die Variable C beinhaltet), für die inhomogene Lösung brauchen wir eine partikuläre Lösung (eine Lösung, die mit einem ganz bestimmten Startwert x_0, der gegeben ist, arbeitet und nur mit diesem funktioniert). Ein Beispiel ist auf BS290ff zu finden.
Haben wir diese ausgerechnet, addieren wir allgemeine Lösung der homogenen GL. und partikuläre Lösung der inhomogenen Gl. und erhalten so eine *allgemeine Lösung der gesamten Differenzengleichung* (Wieso allgemein? Es ist ja ein C enthalten). Haben wir nun ein x_0 gegeben, setzen wir dieses statt C ein, und formen gegebenenfalls um. Ergebnis: Partikuläre Lösung der gesamten DGL.

DGL 2. Ordnung

Hier geht es nicht nur eine, sondern zwei Stufen zurück (bzw. vor), wie zB bei der Berechnung der Fibonacci-Zahlen ($x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$).

Ähnlich wie bei den kniffligen DGL 1. Ordnung müssen wir hier auch so vorgehen, und die Gleichung in einen homogenen Teil und einen inhomogenen Teil trennen. Die homogene DGL sollte die Form $a*n_{x+2} + b*n_{x+1} + c = 0$ haben. Das können wir in eine *charakteristische Gleichung* umwandeln, indem wir schreiben: $a*\lambda^2 + b*\lambda + c = 0$, und das als quadratische Gleichung ausrechnen. Je nachdem, was für Ergebnisse $\lambda_{1, 2}$ annehmen, schreiben wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung auf verschiedene Arten an (BS299ff).

Nun zur inhomogenen Gleichung: diese kann wieder konstant sein, r^n (Erinnerung: n ist die Eingabegröße, r ist eine Zahl) oder anderes sein, weshalb wir verschiedene Ansätze für die Versuchslösung brauchen (BS301). Wir schreiben jedenfalls auf der linken Seite einen Term an, der die gesuchte Variable A enthält, und auf der rechten Seite die Störfunktion (Tipp: Ist die SF konstant, haben wir leichtes Spiel, und müssen statt allen x_n-Ausdrücken nur das konstante A einsetzen). Einige Hilfsmittel/Notwendigkeiten zum Ausrechnen:

Resonanzfall: Wenn wir in der Versuchslösung (zB $A*7^n$) wählen, und in der allg. Lösung der homogenen Gleichung bereits $C1*7^n$ vorkommt, so müssen wir unsere Versuchslösung sooft mit n multiplizieren, bis es keine Ähnlichkeiten zwischen Versuchslösung und allg. Lösung der hom. Gl. mehr gibt.
Tipp 1: Schaut genau, was für ein Term vorkommt. Sind die Terme nicht genau gleich, spart man sich das Ganze.
Tipp 2: Über den Resonanzfall muss man sich in erster Linie Gedanken machen, wenn in der charakteristischen Gleichung der dritte Fall eintritt, und die beiden λ gleich sind.

Superpositionsprinzip: Ist unsere Störfunktion zu groß, dürfen wir sie in zwei Hälften teilen, getrennt berechnen, und die Ergebnisse addieren. Das ist dann immer noch eine gültige partikuläre Lösung.

Beispiele sind im Buch oder im Vowi zu finden.