Name:

Matrikelnummer:

1.
2.
3.
4.
5.

Analysis für Inf. und Winf. (Prof. Karigl)

Schriftliche Prüfung am 29. 06. 2021

---

1. (a) Man untersuche die nachstehende Folge auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$a_n = \frac{12n^3 - 8n^2 + 5}{3n^3 - 4n + 5} \quad (n \geq 0)\,.$$

(b) Mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums untersuche man die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{5n^2 - n + 1}{5^n}\,.$$

2. Man berechne alle Stammfunktionen zur Funktion $f(x) = \frac{4\ln x - 3}{x^2}$. Ferner untersuche man damit die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_1^\infty f(x)\,dx$ und bestimme gegebenenfalls dessen Wert. (Hinweis: Zum Integrieren erweist sich die Substitution $u = \ln x$ als zweckmäßig.)

3. Man bestimme alle relativen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^4 + 3y^4 - 2x^2 + 4y^2 + 1.$$

4. Stetigkeit und Differenzierbarkeit reellwertiger Funktionen:
   - Wann heißt eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}$) stetig auf D, wann heißt sie differenzierbar auf D?
   - Geben Sie je ein Beispiel für eine (i) nicht stetige, (ii) stetige aber nicht differenzierbare sowie (iii) differenzierbare Funktion an.
   - Nennen Sie zwei Eigenschaften (Sätze) für stetige Funktionen.

Fortsetzung auf der Rückseite!

5. Gegeben sei eine (differenzierbare) Funktion f: $D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ durch $z = f(x,y)$. Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

Der Graph der Funktion f ist	○ ein Intervall in $\mathbb{R}$, ○ eine Kurve im $\mathbb{R}^2$, ○ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.
Wie viele partielle Ableitungen zweiter Ordnung besitzt die Funktion f im Allgemeinen?	○ 1 ○ 2 ○ 4 ○ 8 ○ ∞
Die totale Differenzierbarkeit von f ist für die Existenz ihrer partiellen Ableitungen	○ notwendig, ○ hinreichend.
Die Richtungsableitung von f	○ beschreibt, in welcher Richtung sich f am stärksten ändert, ○ gibt den größten Funktionswert von f an, ○ ist ein Sonderfall der partiellen Ableitung.
Der Gradient grad f gibt die Richtung des größten Anstiegs von f an.	○ ja ○ nein
Der Betrag $\lVert \operatorname{grad} f \rVert$ gibt den Wert des größten Anstiegs von f an.	○ ja ○ nein
Der Gradient grad f ist in jedem Punkt von D in Bezug auf die Niveaulinie ein	○ Richtungsvektor, ○ Normalvektor.
Der Gradient grad f verschwindet im Allgemeinen	○ genau ○ zumindest ○ höchstens an jenen Stellen, an denen die Funktion f ein relatives Extremum besitzt.

Zeit: 100 Minuten

Prüfungsergebnisse bis Freitag, 16. 07. 2021, siehe TISS