# Komplexe Analysis

# Komplexe Zahlen, Kartesisch

- Formal: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind Paare $(a, b)$ reeller Zahlen, zusammen mit den folgenden Rechenregeln:
  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$,
  $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$.
  Das Paar $(0, 1)$ bezeichnen wir als $i$;
  die reelle Zahl $a$ identifizieren wir mit $(a, 0)$.
- Schlampiger und besser: Eine komplexe Zahl hat die Form $z = a + ib$, wobei $i$ eine "imaginäre" Zahl ist mit $i^2 = -1$.
- Notation: $\mathrm{Re}(a + ib) := a$, $\mathrm{Im}(a + ib) := b$ (Real- und Imaginärteil).
- Wenn $z = a + ib$, dann ist $z^* := a - ib = \mathrm{Re}\, z - \mathrm{Im}\, z$ (Konjugierte).
  Oft auch $\bar{z}$ geschrieben.
  Es gilt $z_1^* + z_2^* = (z_1 + z_2)^*$ und $z_1^* \cdot z_2^* = (z_1 \cdot z_2)^*$.
- $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.
  Es gilt: $z \cdot z^* = |z|^2$; $|z| = 0$ gdw $z = 0$; $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- D.h. Re, Im und $z \mapsto |z|$ sind Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$; $z \mapsto z^*$ ist $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

# Ein paar Beweise

Wir beweisen beispielhaft:

- $z_1^* \cdot z_2^* = (z_1 \cdot z_2)^*$:
  $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
  $z_1^* \cdot z_2^* = a_1 a_2 - (-b_1)(-b_2) + i\big(a_1(-b_2) + a_2(-b_1)\big) =$
  $a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$.
- $z \cdot z^* = |z|^2$:
  $(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$.
- $|z| = 0$ gdw $z = 0$:
  $a + ib \neq 0$ gdw $(a \neq 0$ oder $b \neq 0)$ gdw $a^2 + b^2 \neq 0$.
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$:
  $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (z_1 \cdot z_2)^* = z_1 \cdot z_2 \cdot z_1^* \cdot z_2^* = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$.

Division:

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$.
- Bsp: $\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i))}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5} i$

# Python

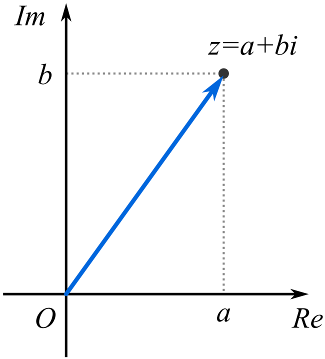
- In python sind komplexe Zahlen (type `complex`) als paar von floats (Kartesisch) implementiert.
- $i$ kann im Code durch `1j` eingegeben werden: `2+3j` ergibt $2+3i$, etc. ($j$ alleine ist nicht definiert bzw steht als (Variablen)-Name zur Verfügung.)
- Natürlich haben `numpy` und `sympy` ausführliche Unterstützung von Komplexen Berechnungen.
- Wenn nicht als reell spezifiziert dann geht `sympy` üblicherweise davon aus dass eine Variable/Funktion komplex ist:

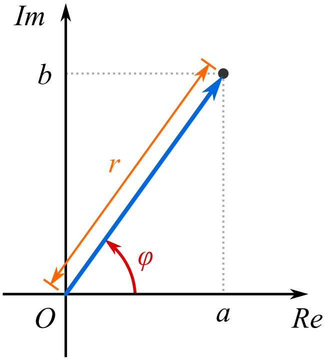
```
In [45]: y = sp.Symbol('y')
In [46]: sp.simplify(sp.log(sp.exp(y)))
Out[46]: log(exp(y))

In [47]: y = sp.Symbol('y', real=True)
In [48]: sp.simplify(sp.log(sp.exp(y)))
Out[48]: y
```

# Graphische Darstellung

Komplexe Ebene:




Ein Punkt $z$ kann auch durch “Länge” $r \geq 0$ und Winkel $\varphi$ beschrieben werden (Polardarstellung).
Schreibweise (nur hier): $z = (r, \varphi)$. (“Richtig”: $re^{i\varphi}$.)
Dabei ist $r = |z|$, und $\varphi = \tan^{-1}(\frac{b}{a})$ falls $a \neq 0$ (sonst $\pm\frac{\pi}{2}$).

# Polardarstellung

- D.h. mit $(r, \varphi)$ ist $r\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)$ gemeint.
  Insbesondere ist $a = (a, 0)$ für $a \geq 0$, und $-a = (a, \pi)$.
- Nicht eindeutig: $(r, \varphi + 2k\pi) = (r, \varphi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
  (Und $(0, \varphi) = 0$ für alle $\varphi$.)
- Es gilt: $(r_1, \varphi_1) \cdot (r_2, \varphi_2) = (r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$.
  Polardarstellung ist also nützlicher für Multiplikation (kartesische besser für Addition).
  Beweis: Additionstheorem: $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 =$
  $r_1 \cos(\varphi_1) r_2 \cos(\varphi_2) - r_1 \sin(\varphi_1) r_2 \sin(\varphi_2) = r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$;
  analog für $\mathrm{Im}(z_1 z_2)$.
- Daraus folgt auch: $\frac{1}{(r,\varphi)} = (\frac{1}{r}, -\varphi)$, $\frac{(r_1,\varphi_1)}{(r_2,\varphi_2)} = (\frac{r_1}{r_2}, \varphi_1 - \varphi_2)$, und
  $(r, \varphi)^* = z^* = \frac{|z|^2}{z} = \frac{(r^2,0)}{(r,\varphi)} = (r, -\varphi)$.

# Rechenregeln

$\mathbb{C}$ ist ein "Körper", d.h. es gelten (wie in $\mathbb{R}$) die folgenden Rechenregeln: Sei $z_1, z_2, z_3$ in $\mathbb{C}$.

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$,
- $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ und $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$,
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.
- $0 + z = z$, für alle $z$ gibt es $-z$, d.h. ein (eindeutiges) $z'$ mit $z + z' = 0$.
- $1 \cdot z = z$, für alle $z \neq 0$ gibt es $\frac{1}{z}$, d.h. ein (eindeutiges) $z'$ mit $z \cdot z' = 1$.
- $0 \cdot z = 0$; und wenn $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ dann ist auch $z_1 z_2 \neq 0$. (Bew.: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.)

Daraus folgt auch dass man dividieren kann: Wenn $z_2 \neq 0$, dann gibt es $\frac{z_1}{z_2}$, d.h. ein eindeutiges $z_3$ mit $z_1 = z_2 \cdot z_3$.
(Bew. der Eindeutigkeit: Wenn $z_2 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_4$, dann $z_2(z_3 - z_4) = 0$, daher $z_3 - z_4 = 0$.)

# $z^n$

- Wenn $z = (r, \varphi)$, dann ist $z^n = (r^n, n \cdot \varphi)$.
- Im Komplexen verhält sich die Funktion $z \mapsto z^n$ anders als im Reellen:
- Für $n \geq 1$ gibt es für jedes $u = (r, \phi)$ eine $n$-te Wurzel $z_0 = (\sqrt[n]{r}, \frac{\phi}{n})$. ($n$-te Wurzel heißt: $z_0^n = u$).
- Es gibt genau $n$ solcher Wurzeln: $z_j = (\sqrt{n}r, \frac{\varphi + 2j\pi}{n})$ für $j = 0, \dots, n-1$. ($\frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$ liefert wieder $x_0$, etc.)
- Insbesondere: Für $n > 1$ ist $z \mapsto z^n$ ist nicht injektiv.
- Bsp: Quadratwurzeln von $i = (1, \frac{\pi}{2})$ sind $(1, \frac{\pi}{4})$ und $(1, \frac{3\pi}{4})$. Die 4-ten Wurzeln von $1 = (1, 0)$ sind 1, $i$, $-1$, $-i$.
- Die $n$ vielen $n$-ten Wurzeln von 1 heißen $n$-te Einheitswurzeln.

# Fundamentalsatz

- $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ heißt Polynom vom Grad $n$.
- Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom von Grad $\geq 1$ hat (mindestens) eine Nullstelle.
- In $\mathbb{R}$ hat jedes Polynom ungeraden Grades ein Nullstelle.
- Bsp: $x^2 + 1$ hat komplexe Nullstellen $\pm i$ (aber keine reellen).
- Bsp: $x^3 - 2$ hat drei Nullstellen in $\mathbb{C}$, eine in $\mathbb{R}$, und gar keine in $\mathbb{Q}$, weil $\sqrt[3]{2} \notin Q$.

Inverse

- $z^{-n} := \frac{1}{z^n}$ definiert für $z \neq 0$.
- $(r, \varphi) \mapsto (\frac{1}{r^n}, -\frac{\varphi}{n})$.

# Bedeutung der Komplexen Zahlen

- Ursprünglich eingeführt um Nullstellen von Polynomen (auch reelle) zu bestimmen/finden.
- Sehr nützlich um alle möglichen reellen Funktionen effektiver zu beschreiben (Bsp: $\mathrm{Re}(e^{i\omega t})$ statt $\cos(\omega t)$.)
- Die Struktur von $\mathbb{C}$ entspricht fundamentalen Eigenschaften der Quantenmechanik (Wellenfunktion komplexwertig).
- ...

# Metrik, Topologie und Stetigkeit

- $d(z_1, z_2) := |z_2 - z_1|$ ist Metrik auf $\mathbb{C}$
  (dieselbe Metrik wie standard Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$).
- Dadurch ist $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ definiert.
- Konkreter: $\lim_{n\to\infty}(a_n + ib_n) = c + id$ gdw. $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = d$.
- Dadurch sind auch Bälle $B_\varepsilon(z)$, offene und abgeschlossene Teilmengen etc der komplexen Ebene definiert (genau dasselbe wie in $\mathbb{R}^2$).
- Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann man als Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen, mittels $g(x, y) := (\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy))$; umgekehrt läßt sich jedes $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ als $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ interpretieren mittels $f(a + ib) := g_1(a, b) + ig_2(a, b)$.
- $f$ ist stetig als Funktion von $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gdw stetig als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
- Bsp: $z \mapsto z^n$, $z \mapsto z^*$, $z \mapsto |z|$ sind alle stetig.
- Polar auf Kartesisch ist stetig, Umkehrung nicht!

# Differenzierbarkeit

- $u = \lim_{z \to 0} f(z)$ heißt: Wenn $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ dann $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = u$.
- (Erinnerung: Für $z_n = a_n + ib_n$ ist $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$; äquivalent: $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$.)
- Bem.: In $\mathbb{R}$ können wir "von zwei Seiten" kommen (rechtsseitiger und linksseitiger Limes), in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C}$ mehr Möglichkeiten.
- Def.: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar (in $z_0$), wenn $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$ existiert
- Das ist nicht dasselbe wie dass $f$ differenzierbar ist als $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$!

# Beispiele

Nicht komplex differentierbar:

- $z \mapsto z^*$ ist nicht (komplex) differenzierbar
  (sehr wohl aber als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$).

  Bew: $\frac{(z_0+h)^*-z_0^*}{h} = \frac{h^*}{h}$.
  Für $h$ reell ist $h^* = h$, und daher $\lim_{h\to 0} \frac{h^*}{h} = 1$.
  Für $h$ imaginär ist $h^* = -h$, und daher $\lim_{h\to 0} \frac{h^*}{h} = -1$.
- Analog: $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ nicht komplex differenzierbar.

Die folgenden Funktionen sind komplex differenzierbar:

- $z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$, mit Ableitung $nz^{n-1}$ (falls $n < 0$ natürlich nur für $z \neq 0$).

# Rechenregeln

Auch die komplexe Ableitung erfüllen:

- $(\alpha f)'(z) = \alpha f'(z)$ für $\alpha \in \mathbb{C}$,
- $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$,
- $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$,
- $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$.

Daraus folgt wie üblich:

- $(\frac{f}{g})'(z) = \frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g(z)^2}$.
- Wenn $f(g(z)) = z$, dann $f'(g(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.

# Holomorphe Funktionen und Potenzreihen

Komplexe Differenzierbarkeit ist viel mächtiger als reelle:

Sei $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ auf ganz $B_r(z_0)$ komplex diffbar. Dann gilt:

- $f$ ist beliebig oft komplex diffbar.
- Die Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ konvergiert auf $B_r(z_0)$ gegen $f$.
- Sei umgekehrt $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r$. Dann ist $g$ auf $B_r(z_0)$ komplex diffbar, und $a_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$.
  In dem Fall ist $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1}$.

# Exponentiation und Winkelfunktionen

- $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ hat Konvergenzradius $\infty$, mit $(e^z)' = e^z$.
- Für $\phi \in \mathbb{R}$ gilt $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$, d.h. $(1, \phi)$ in Polarschreibweise.
- Erfüllt die üblichen Rechenregeln: $e^0 = 1$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$, daher $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$, $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$.
- $e^{a+i\phi} = e^a e^{i\phi} = (e^a, \phi)$ in Polarschreibweise.
- Das Bild von $e^z$ ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- $e^z$ ist nicht injektiv: $e^{z+i2j\pi} = e^z$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.

# Logarithmus

- $e^x$ ist nicht injektiv, daher ist die Umkehrfunktion nicht wohldefiniert.
- Das ist auch der Grund warum `sympy` $\ln(e^x)$ nicht zu $x$ vereinfachen will: $x + 2\pi i \neq x$, aber $e^{x+2\pi i} = e^x$, d.h. was immer man auch für einen Wert für $\ln(2^x)$ wählt, we kann nicht sowohl $x$ als auch $x + 2\pi i$ sein.
- $f := e^x \restriction A$ z.B. für $A := \{z \in \mathbb{C} : \ -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ ist injektiv, und hat dasselbe Bild wie $e^x$, nämlich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

  Beweis: Wenn $z \neq 0$, dann ist $z = (r, \varphi)$ für eindeutige $r < 0$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$, und $z = e^u$ mit $u = \ln(r) + i\varphi \in A$.
- Wir können den komplexen Logarithmus ln also z.B. als Umkehrung dieses $f$ definieren. Dann ist ln auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert, aber auf $\{-r + 0i : \ r \in \mathbb{R}\}$ unstetig: $\ln(-r) = \ln(r) + i\phi$, aber $ln(-r - \epsilon i) \sim \ln(r) - i\phi$ für kleine $\epsilon > 0$.
- Man kann natürlih auch andere "Streifen" als $A$ wählen, und erhält dann andere "Zwege" des Logarithmus.