Statistik u. Wahr

LVA–Nr.: 107.254

VO: W 2016

Prüfer: W. Gurker

1–2–2017

Nachname	[redacted]		
Vorname	[redacted]		
Kenn	033 534	Matr	[redacted]

Dieser Teil wird nur vom Prüfer ausgefüllt!

1	5	2	4,5	3	3,5	4	5
5	4	6	1	7	4	8	–

Pkt: 27 (40)	Note: 3
	Gesamt:

Datum

Unterschrift

Betrachten Sie die folgende – bereits geordnete – Stichprobe der Größe $n = 10$:

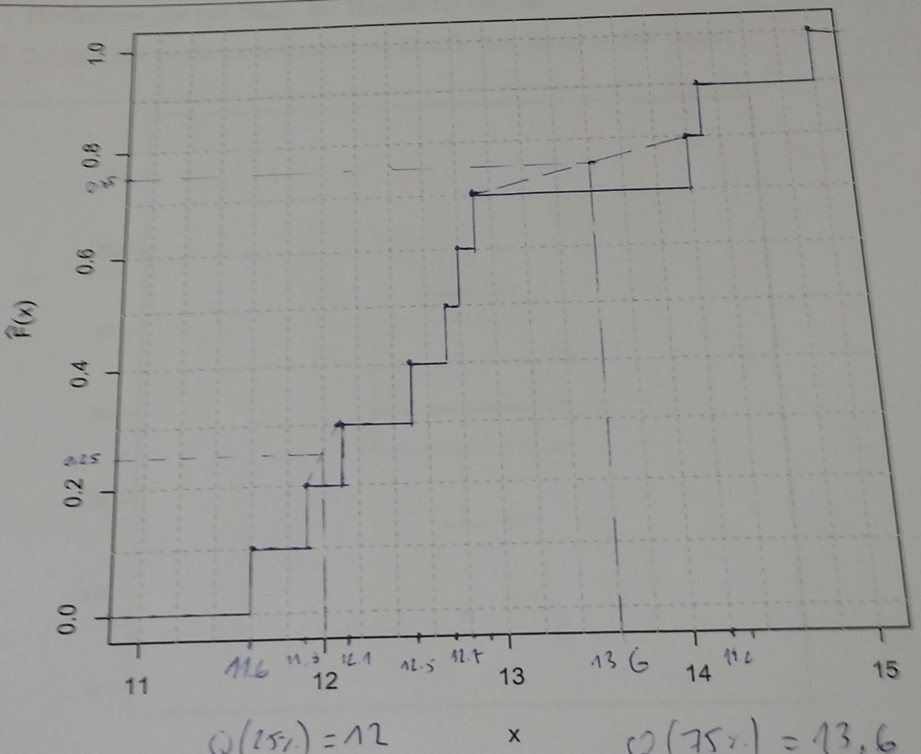
11.6 11.9 12.1 12.5 12.7 12.8 12.9 14.2 14.3 15.0

[2] Zeichnen Sie in die unten stehende Grafik die empirische Verteilungsfunktion.

[1] Bestimmen Sie grafisch das 25%– und 75%–Quantil vom Typ 4.

[1] Bestimmen Sie den Stichprobenmittelwert.

[1] Bestimmen Sie die Stichprobenvarianz und -streuung.



$Q(25\%) = 12$ $Q(75\%) = 13,6$

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 13$$

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 = 1,278$$

$$s_n = \sqrt{s_n^2} = 1,13$$

Betrachten Sie die folgende – bereits geordnete – Stichprobe der Größe $n = 22$:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Daten	7	17	20	21	24	25	26	27	27	28	28

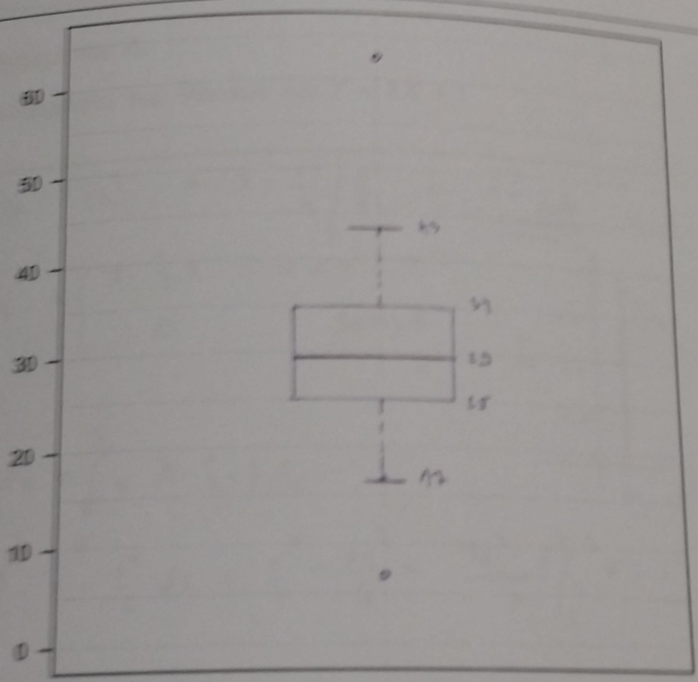
Rang	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Daten	30	31	31	32	33	34	36	39	41	43	63

[1] Bestimmen Sie den Median.

[1] Bestimmen Sie die Hinges.

[1] Bestimmen Sie auf Basis der Hinges die Fences.

[2] Zeichen Sie in die unten stehende Grafik den Boxplot der Daten.



Median = 29

lower Hinge = 25 wie best.?

upper Hinge = 34

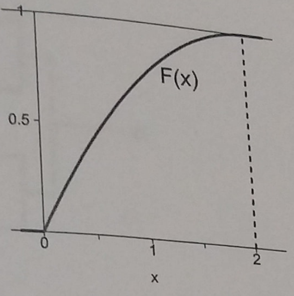
lower Fence = $\underbrace{Q_1 - 1{,}5\,(Q_3 - Q_1)}_{h} = 11{,}5$

upper Fence = $Q_3 + h = 47{,}5$

✓

Die Verteilungsfunction einer sG X lautet wie folgt:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x - \frac{x^2}{4} & 0 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$



Bestimmen Sie:

[2] die Dichte von X (plus Zeichnung).

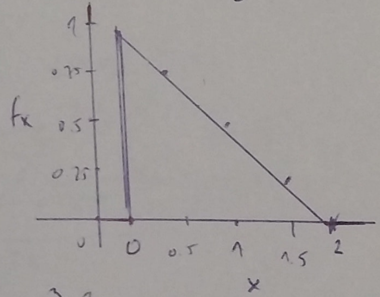
[1] den Erwartungswert von X.

[1] die Varianz von X.

[1] Erwartungswert und Varianz von $Y = 3X + 1$

Dichte: $f(x) = F'(x) = (x - \frac{x^2}{4})\frac{d}{dx} = 1 - \frac{2x}{4} = 1 - \frac{1}{2}x$

$$f_X = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$E(x) = \int_0^2 x\, f(x)\, dx = \int_0^2 x \cdot (1 - \frac{1}{2}x)\, dx$

$= \int_0^2 x - \frac{x^2}{2}\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} = \frac{3x^2 - x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{3 \cdot 2^2 - 2^3}{6} = \frac{12 - 8}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0{,}66 - 0{,}435 = 0{,}225$

wie best.?

$x^2(1 - \frac{1}{2}x)$

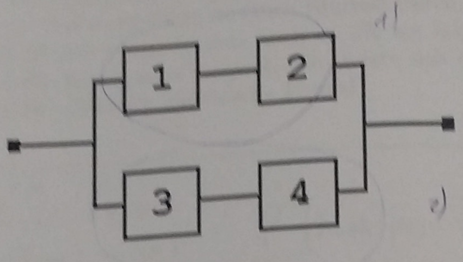
$x^2 - \frac{x^3}{2}$

$\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}$

$\frac{8}{3} - \frac{16}{8}$

$\frac{8}{3}$

Die logische Struktur eines Systems sei gegeben wie folgt:



Die Lebensdauern der Komponenten seien unabhängig und identisch verteilt mit Dichte $f(x) = e^{-x} I_{(0,\infty)}$ ($\widehat{=}$ Exp(1)). Wenn X die Lebensdauer des Systems ist, bestimmen Sie:

[3] die Verteilungsfunktion von X

[1] die Dichte von X

[1] den Erwartungswert von X

---

1) $F_{min}(x) = 1 - e^{-2\lambda x} = 1 - e^{-2x}$

2) $F_{min}(x) = 1 - e^{-2\lambda x} = 1 - e^{-2x}$

$F_{max}(x) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-2x}) \neq$ unnötig $\cancel{(1 - e^{-2x} \cdot e^{-2x} + e^{4x^2}) = 1 - 2e^{-2x} + e^{4x^2}}$

$= (1 - e^{-2x})^2$

$f_{max}(x) = F'_{max}(x) = \cancel{2x e^{-2x}}$ $\cancel{4e^{-2x}}$

$= n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$ $= 4e^{-2x} \cdot (1 - e^{-2x})$

$E(X_n) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n} + \dots + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

✓

2

[2] Eine Ärztin ist zu 30% davon überzeugt, dass eine Person eine bestimmte Krankheit hat. Zur genaueren Abklärung führt sie einen Bluttest durch, der bei Vorliegen der Krankheit zu 95% positiv reagiert, aber auch zu 2% ein falsch positives Resultat liefert. Wenn nun der Test positiv reagiert, wie ändert sich dadurch die erste Einschätzung der Ärztin? (Hinweis: Bayes'sche Formel)

P(krank) = 0,3

P(positiv | krank) = 0,95

P(positiv | $\overline{\text{krank}}$) = 0,02

P($\overline{\text{krank}}$) = 0,7

$$P(\text{krank} \mid \text{positiv}) = \frac{P(\text{positiv} \mid \text{krank}) \cdot P(\text{krank})}{P(\text{pos} \mid \text{krank}) \cdot P(\text{krank}) + P(\text{pos} \mid \overline{\text{krank}}) \cdot P(\overline{\text{krank}})}$$

$$= \frac{0{,}55 \cdot 0{,}3}{0{,}95 \cdot 0{,}3 + 0{,}02 \cdot 0{,}7}$$

✓

$$= \frac{0{,}285}{0{,}299} = 0{,}953$$

$\simeq$ 55,3%

[1] Die Dichte der sG X sei $f_X(x) = 2x\, I_{(0,1)}(x)$. Wie lautet die Dichte von $Y = \sqrt{X}$? (Hinweis: Transformationssatz)

2

[2] Welche der folgenden R–Commands generiert $n = 100$ unabhängige Beobachtungen einer sG X mit der Dichte $f(x) = 2x\, I_{(0,1)}(x)$? (Hinweis: Inversionsmethode)

☒	☐	☐
`u <- runif(100)` `x <- sqrt(u)`	`u <- runif(100)` `x <- u/2`	`u <- runif(100)` `x <- 2*u`
✓	$F(x) = x^2$	$\frac{y}{2} = x$ [illegible]

[1] Der Korrelationskoeffizient ρ von zwei sGn X, Y mit der gemeinsamen W–Funktion:

$$p(x,y) = \frac{1}{3} \quad \text{für} \quad (x,y) = (0,0),\ (1,1),\ (2,2)$$

($p(x,y) = 0$ sonst) ist gegeben durch:

☐ $\rho = 0$ ☐ $\rho = -1$ ☐ $\rho = 1$

[1] X_1, X_2, X_3, X_4 seien ua. nach $\mathsf{N}(0,1)$ verteilte sGn. Wie ist $X_1 - 2X_2 + 3X_3 - 4X_4$ verteilt? (Hinweis: Additionstheorem)

---

[1] Angenommen, die Bedienungszeit an der Kassa eines Supermarkts ist eine sG mit einem Mittelwert und einer Streuung von 3 Minuten. Mit welcher (approximativen) Wahrscheinlichkeit wird für die Bedienung von 16 Kunden insgesamt mehr als 1 Stunde benötigt? (Hinweis: ZGVS).

$\mu = 3$ $n = 16$ > 1

$\sigma = 3$

1 [2] Eine symmetrische Münze wird 20 Mal unabhängig geworfen. Mit welcher (approximativen) Wahrscheinlichkeit bekommt man exakt 10 Köpfe? (Hinweis: ZGVS mit Stetigkeitskorrektur).

$n = 20$ $p = \frac{1}{2}$

$P(Y_n = 10) \approx \phi\left(\frac{10 + 0{,}5 - 10}{\sqrt{10(0.5)}}\right) - \phi(\ldots)$

$= \phi\left(\frac{0{,}5}{\sqrt{5}}\right)$

$= \phi(0{,}22) = 0{,}5871$

Für eine Stichprobe x der Größe $m = 8$ von $X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ ergab sich:

```
> data.frame(m=length(x), mean=mean(x), var=var(x), sd=sd(x))
  m  mean   var    sd
  8 11.79 7.687 2.773
```

2

[2] Testen Sie zum Niveau 5%: $\mathcal{H}_0 : \mu_X = 10$ gegen $\mathcal{H}_1 : \mu_X > 10$

$$T_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n / \sqrt{n}} = \frac{11{,}79 - 10}{2.773/\sqrt{8}} = \frac{1{,}79}{0{,}98} = 1{,}83$$

$\mu_X > \mu_0$ $\quad T_0 > t_{n-1;\, 1-\alpha}$

$T_0 > t_{7;\, 0{,}95}$ ✓

$1{,}83 > 1{,}855$

H_0 nicht verwerfen

$1 - 0{,}05$ $\quad 0{,}95$ $\quad 0{,}05$ $\quad \alpha = 5\%$

Für eine von der obigen Stichprobe unabhängige zweite Stichprobe y der Größe $n = 10$ von $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ ergab sich:

```
> data.frame(n=length(y), mean=mean(y), var=var(y), sd=sd(y))
   n  mean   var    sd
  10 15.14 10.19 3.193
```

Bestimmen Sie unter der Annahme $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2$:

1 [1] den gepoolten Varianzschätzer S_p^2.

1 [2] ein 95% Konfidenzintervall für $\mu_Y - \mu_X$.

$$S_p^2 = \frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2} = \frac{7 \cdot 7{,}687 + 9 \cdot 10{,}19}{16} = \frac{145{,}5}{16} = 9{,}09$$ ✓

$\mu_Y - \mu_X$

$\bar{Y} - \bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}$

$3{,}35 \pm z_{1-0{,}05/2}$ $\quad 1{,}019$

$3{,}35 \pm z_{1-0{,}025} \cdot 1{,}4$ $\quad 0{,}96$

$3{,}35 \pm 1.96 \cdot 1{,}4$

$3{,}35 \pm 2{,}744$

$\boxed{[0{,}606 ;\ 6{,}054]}$

[2] $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe aus einer Verteilung mit der Dichte:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0 \quad (= 0 \text{ sonst})$$

Bestimmen Sie den ML-Schätzer von θ (> 0). (Genaue Herleitung!)

[1] Bei einer Meinungsbefragung von 300 Personen waren 55% für ein bestimmtes Projekt. Bestimmen Sie ein 95% Konfidenzintervall für den Anteil der Befürworter.

$n = 300$

[2] Bei der Kreuzung von bestimmten Planzen ergeben sich laut Theorie drei Genotypen im Verhältnis 9 : 12 : 4. Ist die Theorie haltbar, wenn bei einem Experiment mit 100 Planzen 26 vom Typ1, 57 vom Typ2 und 17 vom Typ3 sind? (Testen Sie zum Niveau $\alpha = 10\%$.)