Beispiel 439, 440 (MA1 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 3, 30.03.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 03/2006

1 Angabe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und differenzierbar. Man zeige, dass dann $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Folgt in obenstehendem Beispiel aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

2 Theoretische Grundlagen

Siehe Beispiel 406!

3 Lösung des Beispiels

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und überall differenzierbar. Wir betrachten dabei ein Intervall $I = [a, b], a < b$. Dann gilt für diese monoton wachsende Funktion auf dem Intervall I, dass die Funktionswerte der ersten Ableitungen alle grösser als 0 sind:

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in I$$

Zum Beweis: Sei f monoton wachsend, also

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

Weiters gilt:

$$\lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) \geq 0$$

Für ein $\xi : x_1 < \xi < x_2$ betrachten wir in Anlehnung an den Mittelwertsatz:

$$f'(x) < 0 \; \forall x : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \, \text{QED}$$

Bezüglich der strengen Monotonie argumentieren wir wie folgt: Für ein relatives Extremum an der Stelle x_0 gilt: $f'(x_0) = 0$. Dies ist eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines relativen Extremums, jedoch keine hinreichende!

Die eingangs erwähnten Ausführungen müssten für die strenge Monotonie dahingehend erweitert werden, dass für alle $f'(x_0) = 0$ gilt: $f''(x_0) = 0$, ansonsten ein (relatives) Maximum oder Minimum vorliegen würde.
Beispiel: $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend - die erste Ableitung $f'(0)$ ist 0. Obwohl die gesamte Funktion streng monoton steigend ist, gilt hier nicht $f'(x) > 0$.

4 Alter Lösungsversuch (trotzdem interessant!)

4.1 Vorüberlegungen

Wir gehen vom **Mittelwertsatz** aus. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im offenen Intervall $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Geometrisch anschaulicher: Sei $f : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $u, v \in J$ mit $u < v$ beliebig. Dann gibt es zur Sekante durch die Punkte $(u, f(u))$ und $(v, f(v))$ eine parallele Tangente an den Graphen G_f an einer zwischen u und v liegenden Stelle $c = u+\Theta(v-u)$ mit $0 < \Theta < 1$.
Anders gesagt: Sei J ein beliebiges Intervall und $f : J \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf J . Seien $u < v$ zwei beliebige Punkte aus J . Dann gibt es ein c mit $u < c < v$ und

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = f'(c).$$

Zum Beweis ziehen wir die Sekante $s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ von f ab und wenden den **Satz von Rolle** auf die Differenz $h(x) = f(x) - s(x)$ an. Es gibt danach ein $c \in]a, b[$ mit $0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Nun wenden wir unsere Erkenntnisse zur **Charakterisierung der strengen Monotonie einer differenzierbaren Funktion**. Wir setzen die Existenz der Ableitung im offenen Intervall $]a, b[$ voraus, aber weder die Ableitbarkeit im abgeschlossenen Intervall noch die die Stetigkeit der Ableitung, allerdings darf die Ableitung keine Nullstellen haben.

Kommen wir alsó zum **Monotoniekriterium**: Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Ist $f'(x) > 0$ für alle x , so ist f streng monoton wachsend, ist $f'(x) < 0$ für alle x , so ist f streng monoton fallend.
Wir beweisen: Sei $f'(x) > 0$ für alle x . Dann ist für beliebige u, v mit $u < v$ ein c zwischen u und v mit $f(v) - f(u) = f'(c)(v - u) > 0$.
Daraus erhalten wir den **zweiten Mittelwertsatz**: Seien $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall $]a, b[$ differenzierbar. Es gelte entweder $g'(x) > 0$ oder $g'(x) < 0$ für alle x . Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt eine Zwischenstelle c mit $a < c < b$ und

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Wir beweisen: Da g streng monoton ist, ist $g(a) \neq g(b)$. Wir wenden nun Satz von Rolle auf die Differenz $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$ an. Wir erhalten eine Zwischenstelle c mit

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c).$$

4.2 Zusammenfasung

Wenn nun$f'(x) \geq 0$ immer gelten muss, so muss auch immer $f(x_1) \geq f(x_2) \geq \cdots \geq f(x_n)$ gelten. Damit die Tangentensteigung immer höchstens null ist, muss für die Funktionswerte gelten, dass sie immer monton steigen.
Nun ist aber $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0 \;\; [a,b], a \leq b$
Wenn nun immer $f(b) \geq f(a)$ ist, dann ist der Zähler mindestens Null. Dass der nenner grösser Null ist haben wir vorausgesetzt.
Schließlich gilt nun auch $f'(a) \leq f'(b)$
Zu 440: Die Monotonie ist eine notwendige Bedingung für die strenge Monotonie, aber keine hinreichende, denn sobald einmal $f(x_n) = f(x_{n+1})$ gilt, ist die Tangentensteigung an diesem Punkt 0.
Rine hinreichende bedingung wäre für alle $f'(x) > 0 \forall x \in [a,b]$ und das Intervall $[a,b]$ muss mit $a < b$ definiert sein. Ausserdem muss gelten: $a < f(x) < b$