Allgemeine Hinweise: Versuchen Sie beim Lösen der Beispiele *keine elektronischen Hilfsmittel* zu verwenden – beim Test werden Sie diese nicht zur Verfügung haben.
Damit ein Beispiel anerkannt wird, muss ein Lösungsweg erkennbar sein und es müssen alle enthaltenen Teilaufgaben gelöst sein. Ein korrektes Endergebnis ist nicht zwingend erforderlich!
Deadline für das Ankreuzen und Hochladen der Lösungen in TUWEL: Donnerstag, 17.10.2019, 13:00 Uhr (keine Toleranzzeit, verspätete Abgaben per E-Mail werden ausnahmslos nicht akzeptiert!)

Aufgabe 1: Zahlenumwandlungen

Gegeben sind die folgenden Dezimalzahlen:

$$A = (108.1625)_{10}$$
$$B = (-25.40625)_{10}$$

Wandeln Sie die Zahlen A und B direkt in die nachfolgend angegebenen Zahlensysteme um. Geben Sie das Ergebnis auf n Nachkommastellen genau an. Runden Sie Ihr Ergebnis durch *round to nearest* (Optimale Rundung) auf n Nachkommastellen. Falls es zwei nächstliegende Zahlen gibt, verwenden Sie *round to even.* Geben Sie Ihre Berechnungen sowie die verwendete Rundungsmethode an.

a) Binärsystem, $n = 4$

A = (108.1625)10 = (1101100.0011)2

U0 = 108 mod 2 = 0
U1 = 54 mod 2 = 0
U2 = 27 mod 2 = 1
U3 = 13 mod 2 = 1
U4 = 6 mod 2 = 0
U5 = 3 mod 2 = 1
U6 = 1 mod 2 = 1

U-1 = 0.1625*2 = 0.325 = 0
U-2 = 0.325 *2 = 0.65 = 0
U-3 = 0.65 *2 = 1.3 = 1
U-4 = 0.3 *2 = 0.6 = 0
U-5 = 0.6 *2 = 1.2 = 1

round to nearest

B = (-25.40625)10 = (-11001.0111)2

U0 = 25 mod 2 = 1
U1 = 12 mod 2 = 0
U2 = 6 mod 2 = 0
U3 = 3 mod 2 = 1
U4 = 1 mod 2 = 1

U-1 = 0.40625*2 = 0.81250 = 0
U-2 = 0.8125 *2 = 1.6250 = 1
U-3 = 0.625 *2 = 1.250 = 1
U-4 = 0.25 *2 = 0.5 = 0
U-5 = 0.5 *2 = 1 = 1

round to nearest

b) Hexadezimalsystem, $n = 2$

A = (108.1625)10 = (6C.30)16

U0 = 108 mod 16 = 12
U1 = 6 mod 16 = 6

U-1 = 0.1625*16 = 2.6 = 2
U-2 = 0.6 *16 = 9.6 = 9
U-3 = 0.6 *16 = 9.6 = 9

12=C

round to even

B = (-25.40625)10 = (-19.68)16

U0 = 25 mod 16 = 9
U1 = 1 mod 16 = 1

U-1 = 0.40625*16 = 6.5 = 6
U-2 = 0.5 *16 = 8.0 = 8
U-3 = 0 *16 = 0.0 = 0

round to nearest

c) Ternäres Zahlensystem (Basis $b = 3$), $n = 4$.

A = (108.1625)10 = (11000.0111)3

U0 = 108 mod 3 = 0
U1 = 36 mod 3 = 0
U2 = 12 mod 3 = 0
U3 = 4 mod 3 = 1
U4 = 1 mod 3 = 1

U-1 = 0.1625*3 = 0.4875 = 0
U-2 = 0.4875*3 = 1.4625 = 1
U-3 = 0.4625*3 = 1.3875 = 1
U-4 = 0.3875*3 = 1.1625 = 1
U-5 = 0.1625*3 = 0.4875 = 0

round to nearest

B = (-25.40625)10 = (-221.1020)16

U0 = 25 mod 3 = 1
U1 = 8 mod 3 = 2
U2 = 2 mod 3 = 2

U-1 = 0.40625*3 = 1.21875 = 1
U-2 = 0.21875*3 = 0.65625 = 0
U-3 = 0.65625*3 = 1.19875 = 1
U-4 = 0.19875*3 = 2.90625 = 2
U-5 = 0.90625*3 = 2.71875 = 2

round to even

Aufgabe 2: Zahlenumwandlungen

Führen Sie die folgenden Umwandlungen *ohne* Umweg über das Dezimalsystem durch.

a) Wandeln Sie die Hexadezimalzahl $(5E.1A)_{16}$ in eine Binärzahl um.

E = 14
A = 10

$(5E.1A)_{16} = (101\,1110.0001\,1010)_2$

0101 1110 0001 1010

b) Wandeln Sie die quarternäre Zahl $(1203311.313)_4$ in eine Hexadezimalzahl um.

$(1203311.313)_4 = (18F5.DC)_{16}$

$4^1 \cdot 0 + 4^0 \cdot 1$
$4^1 \cdot 2 + 4^0 \cdot 0$
$4^1 \cdot 3 + 4^0 \cdot 3$
$4^1 \cdot 1 + 4^0 \cdot 1$
$4^1 \cdot 3 + 4^0 \cdot 1$
$4^1 \cdot 3 + 4^0 \cdot 0$

c) Wandeln Sie die ternäre Zahl $(2212000.11012)_3$ in eine Zahl mit Basis $b = 9$ um.

$(2212000.11012)_3 = (2760.416)_9$

$3^1 \cdot 0 + 3^0 \cdot 2$
$3^1 \cdot 2 \cdot 3^0 \cdot 1$
$3^1 \cdot 2 + 3^0 \cdot 0$
$3^1 \cdot 0 + 3^0 \cdot 0$
$3^1 \cdot 1 + 3^0 \cdot 1$
$3^1 \cdot 0 + 3^0 \cdot 1$
$3^1 \cdot 2 + 3^0 \cdot 0$

Aufgabe 3: Rechnen im Binärsystem

Es sind die folgenden Binärzahlen gegeben:

$$A = (110111.011)_2$$
$$B = (10001.01)_2$$
$$C = (100.11)_2$$
$$D = (-10.011)_2$$
$$E = (10000010.00001)_2$$

Führen Sie mit diesen Zahlen die folgenden arithmetischen Operationen binär(!) durch. Berechnen Sie die Ergebnisse exakt und geben Sie Ihren Rechenweg(!) an.

a) Addition: $A + B$

$$\begin{array}{r} 110111.011 \\ + \quad 10001.01 \\ \hline 1001000.101 \end{array}$$

b) Subtraktion: $A - B$

$$\begin{array}{r} 110111.011 \\ - \quad 10001.01 \\ \hline 100110.001 \end{array}$$

c) Multiplikation: $A \cdot D$

$$\begin{array}{l} \underline{110111.011 \cdot (-10.011)} \\ 11011101100 \\ \quad\quad 110111011 \\ \quad\quad\;\; 110111011 \\ \hline -10000111.100001 \end{array}$$

d) Division: $\frac{E}{C}$

130, $\frac{1}{32}$: 4,75

$$\begin{array}{l} 10000010.00001 : 100.11 = 11011.011 \\ -\;10011 \\ \hline \quad 11011 \\ \;-\;10011 \\ \hline \quad\;\; 100000 \\ \quad -\;10011 \\ \hline \quad\quad 11010 \\ \quad\; -\;10011 \\ \hline \quad\quad\; 11100 \\ \quad\quad -\;10011 \\ \hline \quad\quad\quad 10011 \\ \quad\quad\; -\;10011 \\ \hline \quad\quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Aufgabe 4: Zahlendarstellungen

Es sind folgende Zahlen gegeben:

$$A = (-78)_{10}$$
$$B = (1A5)_{16}$$
$$C = (-0)_9$$

Geben Sie die Zahlen A, B und C als 10 Bit lange Maschinenwörter in den nachfolgenden Zahlendarstellungen jeweils in binärer und in hexadezimaler Notation an. Falls es in einer Zahlendarstellung für dieselbe Zahl unterschiedliche Darstellungen gibt, geben Sie alle an.

Beispiel für Notationen:

binäre Notation: $(01\ 1110\ 0111)_2$

hexadezimale Notation: $(1E7)_{16}$

a) Vorzeichen und Betrag

$A = (-78)_{10} = (10\ 0100\ 1110)_2 = (24E)_{16}$

$B = (1A5)_{16} = (0001\ 1010\ 0101)_2 = (01\ 1010\ 0101)_2 = (1A5)_{16}$

$C = (-0)_9 = (10\ 000\ 000)_2 = (200)_{16}$

b) Einerkomplementdarstellung

$A = (-78)_{10} = (11\ 1011\ 0001)_2 = (3B1)_{16}$

$B = (1A5)_{16} = (01\ 1010\ 0101)_2 = (1A5)_{16}$

$C = (-0)_9 = (11\ 1111\ 1111)_2 = (3FF)_{16}$

c) Zweierkomplementdarstellung

$A = (-78)_{10} = (11\ 1011\ 0010)_2 = (3B1)_{16}$

$B = (1A5)_{16} = (01\ 1010\ 0101)_2 = (1A5)_{16}$

$C = (-0)_9 = (00\ 0000\ 0000)_2 = (000)_{16}$

d) Exzessdarstellung (Exzess $= 2^8 - 1$)

$\hookrightarrow 255 \rightarrow FF$

$A = (-78)_{10} = A + e = (177)_{10} = (00\ 1011\ 0001)_2 = (0B1)_{16}$

$B = (1A5)_{16} = B + e = (2A4)_{16} = (10\ 1010\ 0100)_2 = (2A4)_{16}$

$C = (-0)_9 = C + e = (00\ 1111\ 1111)_2 = (0FF)_{16}$

Aufgabe 5: Rechnen in unterschiedlichen Zahlendarstellungen

Folgende Bitmuster sind gegeben: $Z_1 = (10110001)_2$ und $Z_2 = (00001011)_2$.
Interpretieren Sie Z_1 und Z_2 als Binärzahlen, die beide jeweils in einer der nachfolgend angegebenen Darstellungen a) bis c) codiert sind. Führen Sie damit die Berechnung

$-(Z_1 + Z_2)$ (Addition von Z_1 und Z_2 und anschließende arithmetische Negation des Ergebnisses)

mit einer Maschinenwortlänge von 8 Bit binär(!) durch und geben Sie Zwischenschritte an. Geben Sie das Ergebnis der Berechnung <u>auch als decodierte Dezimalzahl</u> an.

a) Darstellung durch Vorzeichen und Betrag

Z_1 10110001
+ Z_2 00001011
10111100
$(01000011)_2 = (67)_{10}$

b) Zweierkomplementdarstellung

$(01000011)_2 = (67)_{10}$

c) Exzessdarstellung mit Exzess = $(01101000)_2$

01101000
+ 01000011
10101011 $= (171)_{10}$

Aufgabe 6: Genauigkeit von Zahlenumwandlungen

Wandeln Sie die Zahl $(3.7625)_{10}$ in eine Binärzahl mit 2 Nachkommastellen um – alle weiteren Nachkommastellen werden abgeschnitten (*truncate*, Rundung durch Abschneiden).

a) Berechnen Sie den absoluten <u>und</u> den relativen Rundungsfehler, der bei der Umrechnung ins Binärsystem entstanden ist.

$(3.7625)_{10} = (10.11)_2 = (3.75)_{10}$
$\llcorner 2^{-1} + 2^{-2}$
$u_{-1} = 0{,}7625 \cdot 2 = 1{,}525 = 1$
$u_{-2} = 0{,}525 \cdot 2 = 1{,}05 = 1$

Absolut: $\varepsilon(x) = \varepsilon\,\square(x) = \square x - x$
$3.75 - 3.7625 = -0.0125$

Relativ: $\rho(x) = \frac{\square x - x}{x} = \frac{\varepsilon(x)}{x} \rightarrow \frac{-0.0125}{-3.7625} \approx 0{,}33\,\%$

b) Durch die Rundung werden alle reellen Zahlen aus einem Intervall $[a, b[\in \mathbb{R}$ auf dieselbe Binärzahl abgebildet. Geben Sie die dezimalen Werte a, b für das Intervall an, in dem $(3.7625)_{10}$ liegt.

11.10	11.11	100.0
3.5	3.75	4.0

$(3.7625)_{10} \rightarrow [3.75, 4.0[\in \mathbb{R}$

Aufgabe 7: IEEE 754 Gleitpunktzahlen

Stellen Sie die nachfolgenden Zahlen A und B im *Single Precision*-Format (mit implizitem ersten Bit) des IEEE 754 Gleitpunkt-Zahlensystems dar (vgl. *Informatik Grundlagen*, 5. Auflage, Kapitel 8.5).

$A = (-221.875)_{10}$ $\qquad\qquad$ $B = (0.788)_{16}$

$A = (-221.875)_{10} = (-11011101.111)_2$

$11011101.111 \cdot 2^0 = 1.1011101111 \cdot 2^7$

$\rightarrow$ Exp.: $(134)_{10} = (1000\ 0110)_2$

221 mod 2 = 1
110 mod 2 = 0
55 mod 2 = 1
27 mod 2 = 1
13 mod 2 = 1
6 mod 2 = 0
3 mod 2 = 1
1 mod 2 = 1

$0.875 \cdot 2 = 1.75 = 1$
$0.75 \cdot 2 = 1.5 = 1$
$0.5 \cdot 2 = 1 = 1$

$A = (\underbrace{1}_{\text{VZ}}\ \underbrace{10000110}_{\text{Exp.}}\ \underbrace{10111011110000000000000}_{\text{Mantisse}})_2$

$B = (0.788)_{16} = (0.011110001000)_2$

$0.011110001000 \cdot 2^0 = 1.1110001000 \cdot 2^{-2}$

$\rightarrow$ Exp.: $(125)_{10} = (0111\ 1101)_2$

$B = (\underbrace{0}_{\text{VZ}}\ \underbrace{01111101}_{\text{Exp.}}\ \underbrace{11100010000000000000000}_{\text{Mantisse}})_2$

Aufgabe 8: Codierung von Gleitpunktzahlen

Gegeben ist ein Gleitpunkt-Zahlensystem $F(2, 5, -14, 15, true)$, die Codierung erfolgt analog zum IEEE 754 *Single Precision*-Format.

Hinweis: Durch diese Vorgabe folgt unter anderem, dass obiges Format eine implizite Darstellung des ersten Bits verwendet und somit eine Wortlänge von 10 Bit (1 Bit Vorzeichen, 5 Bit Exponent und 4 Bit Mantisse) besitzt. Weiters ergibt sich $(15)_{10} = (1111)_2$ für den Exzess des Exponenten.

In diesem Gleitpunkt-Zahlensystem sind die nachfolgenden Codewörter gegeben. Geben Sie zu jedem Codewort die entsprechende Dezimalzahl oder die symbolische Bedeutung (z.B.: $+\infty$, NaN, ...) an.

a) 0 10000 1010

$10000 - 1111 = 1$ $\qquad$ $2^1 \cdot 1010 = 1.1010 \cdot 2^1$

$11.01 \cdot 2^0 = (3.25)_{10}$

b) 1 11111 1111

NaN

c) 1 00000 0000

-0

d) 0 00000 0010

-1111
$-1111 \rightarrow 2^{-15} \cdot 0010 = 1.0010 \cdot 2^{-15}$

$\underbrace{0{,}0000000000000001001}_{2^{-16}+2^{-19}} \cdot 2^0 = (0{,}00001695)_{10}$

e) 0 11111 0000

$+\infty$