4. UE Analysis f. INF und WINF

$\boxed{109}$ Für $u, v \in \mathbb{R}$ gilt nach den Eulerschen Formeln:

$$\cos(u+v) + i\sin(u+v) = e^{i(u+v)} = e^{iu} \cdot e^{iv} =$$

$$= (\cos u + i\sin u) \cdot (\cos v + i\sin v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v +$$
$$+ i(\sin u\cos v + \cos u\sin v).$$ Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil folgt daraus:

$$\underline{\cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v}$$ und

$$\underline{\sin(u+v) = \sin u\cos v + \cos u\sin v.}$$

Damit haben wir auch $\boxed{112}$ gelöst.

$\boxed{113}$ Die Exponentialfunktion e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und daher injektiv, d.h.:

$$e^x = e^y \Longrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Es gilt nun: $e^{\ln(xy)} = xy$, da $\ln x$ die Umkehrfunktion von e^x ist. Weiters ist

$$e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = xy,$$ also

$$\underline{\ln(xy) = \ln x + \ln y.}$$

Analog ist $e^{\ln(x^y)} = x^y$ und

$$e^{y\ln x} = (e^{\ln x})^y = x^y,$$

$$\underline{\text{also } \ln(x^y) = y\ln x.}$$

Anmerkung: Näheres zu Exponentialfunktion, Logarithmus und Winkelfunktionen findet man im Buch, Abschnitt 4.4 (Seite 175 – 186).

$\boxed{117}$ $\sin x$ hat die Periode 2π, also auch $\operatorname{sgn}(\sin x)$.

Für $0<x<\pi$ ist $\sin x>0$, also $\operatorname{sgn}(\sin x)=1$.

Für $\pi<x<2\pi$ ist $\sin x<0$, also $\operatorname{sgn}(\sin x)=-1$.

Für $x=0$, π und 2π ist $\sin x=0$, also $\operatorname{sgn}(\sin x)=0$.

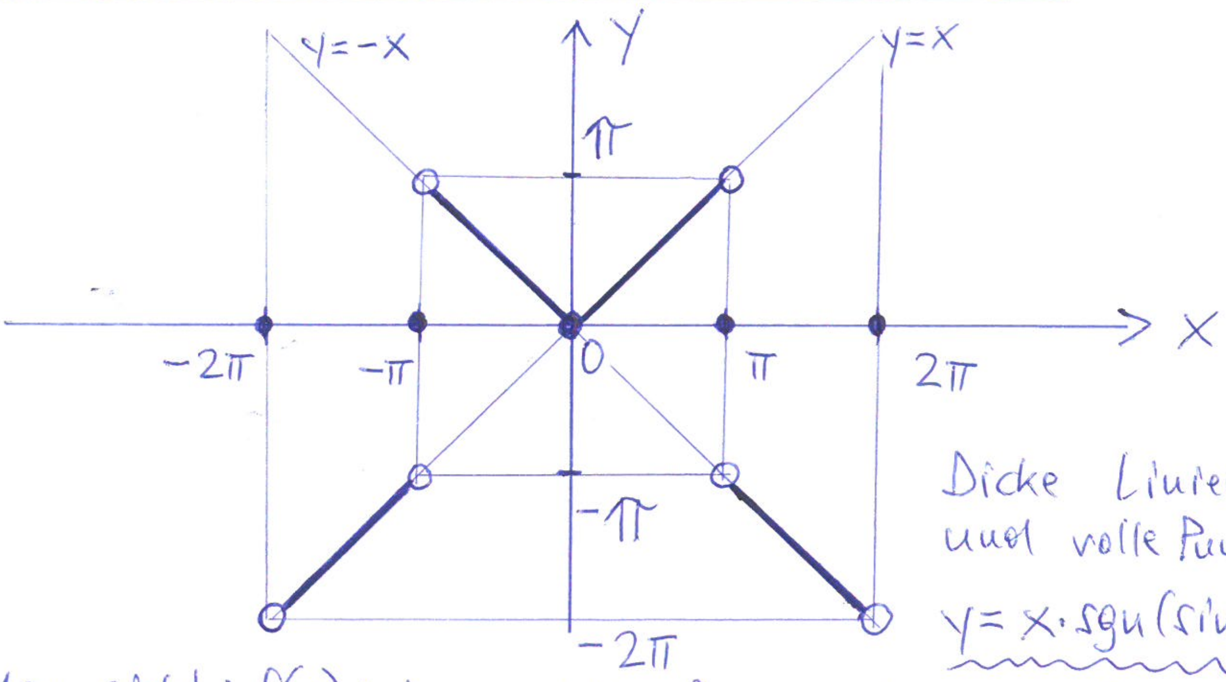
Somit ist für $k\in\mathbb{Z}$:

$$\operatorname{sgn}(\sin x)=\begin{cases}1, & \text{für } x\in(2k\pi,(2k+1)\pi),\\ -1, & \text{für } x\in((2k-1)\pi,2k\pi),\\ 0, & \text{für } x=k\pi.\end{cases}$$

Daher ist für $k\in\mathbb{Z}$:

$$f(x)=x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)=\begin{cases}x, & \text{für } x\in(2k\pi,(2k+1)\pi),\\ -x, & \text{für } x\in((2k-1)\pi,2k\pi),\\ 0, & \text{für } x=k\pi.\end{cases}$$

Graph für das Intervall $[-2\pi, 2\pi]$:



Dicke Linien und volle Punkte: $y=x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)=f(x)$

Man sieht: $f(x)$ ist unstetig für $x=k\pi$, $k\neq 0$.
(Sprungstellen der Höhe $|2k\pi|$)
An allen anderen Stellen ist $f(x)$ stetig.