Theoretische Informatik
Übungsblatt 2 (2023W)
Lösungsvorschlag

Aufgabe 2.1 Gegeben sei folgende (deterministische) Turingmaschine M:

$$M = (\{q_0, q_1\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{A, B, C, Z_0\}, \delta, q_0, \{Z_0, Z_1, Z_2\}, B, \{q_1\})$$

wobei

$$\begin{aligned}
1:&\quad \delta(q_0, \underline{\mathtt{a}}, B) = (q_0, A, R, R)\\
2:&\quad \delta(q_0, \underline{\mathtt{b}}, B) = (q_0, C, R, R)\\
3:&\quad \delta(q_0, \underline{\mathtt{c}}, B) = (q_0, B, R, L)\\
4:&\quad \delta(q_0, \underline{\mathtt{a}}, A) = (q_0, B, R, L)\\
5:&\quad \delta(q_0, \underline{\mathtt{b}}, C) = (q_0, B, R, L)\\
6:&\quad \delta(q_0, Z_2, Z_0) = (q_1, Z_0, S, R)
\end{aligned}$$

a) Beschreiben Sie kurz die Arbeitsweise dieser Maschine.

b) Geben Sie $L(M)$ (also die Sprache, die von M akzeptiert wird) an.

c) Handelt es sich bei M um einen LBA, Kellerautomaten und/oder EA? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

a) 1 : Für jedes eingelesene Symbol $\underline{\mathtt{a}}$ wird ein Symbol A in den Keller (bzw. auf das Arbeitsband) geschrieben.

2 : Für jedes eingelesene Symbol $\underline{\mathtt{b}}$ wird ein Symbol C in den Keller (bzw. auf das Arbeitsband) geschrieben.

$3, 4, 5$: Nachdem das Symbol $\underline{\mathtt{c}}$ eingelesen wird, wird nun für jedes eingelesene Symbol $\underline{\mathtt{a}}$ ein Symbol A bzw. für jedes eingelesene Symbol $\underline{\mathtt{b}}$ ein Symbol C im Keller (bzw. auf dem Arbeitsband) gelöscht.

6 : wird Z_2 auf dem Eingabeband (d.h., das Ende der Eingabe) erreicht, so sollte das Arbeitsband leer sein. M geht dann in den (einzigen) Endzustand q_1 über und akzeptiert somit die Eingabe.

b) $L = \{w\underline{\mathtt{c}}w^r \mid w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*\}$

c) M ist ein LBA, da auf dem Arbeitsband während der Analyse eines Wortes w weniger als $|w|$ Zellen verwendet werden. M erfüllt darüberhinaus die Kellerautomatenbedingung, da zu jedem Zeitpunkt immer nur das "oberste" Symbol auf dem Arbeitsband gelesen wird.

Aufgabe 2.2 Geben Sie für die folgenden regulären Sprachen jeweils eine (möglichst einfache) Darstellung als reguläre Menge und auch als deterministischen endlichen Automaten (DEA) an.
(*Hinweis*: w^r bezeichnet das Spiegelbild von w.)

a) $L = \{uww^rv \mid u, v, w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^+\}$

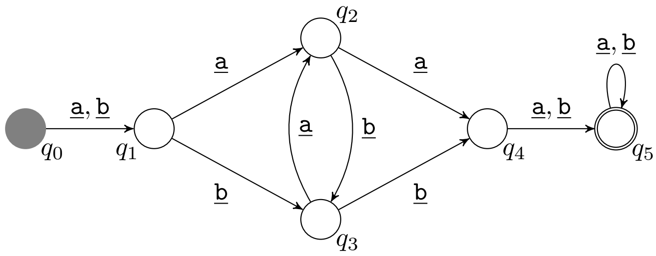
b) $L = \{xyzy^rx \mid x, y, z \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*\}$

Lösung

a) Jedes Wort in L besteht aus mindestens 4 Symbolen. Sei $|w| = 1$, dann besteht das Teilwort ww^r einfach aus zwei gleichen Symbolen hintereinander. L enthält also Wörter, die aus mindestens 4 Symbolen bestehen, wobei ein Symbol zweimal hintereinander vorkommt, allerdings muss davor und danach mindestens je ein Zeichen sein.

Also ergibt sich: $L = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^+\{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\}\{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^+$.

DEA für L:



b) $\{w = xyzy^r x \mid x, y, z \in \{\underline{\texttt{a}}, \underline{\texttt{b}}\}^*\} = \{\underline{\texttt{a}}, \underline{\texttt{b}}\}^*$ und damit jedenfalls eine reguläre Sprache, welche z.B. von folgendem DEA akzeptiert wird:

$$A = (\{q\}, \{\underline{\texttt{a}}, \underline{\texttt{b}}\}, \{(q, \underline{\texttt{a}}, q), (q, \underline{\texttt{b}}, q)\}, q, \{q\})$$

(*Anmerkung*: Auf den ersten Blick könnte man meinen, es handelt sich hier um eine kontextfreie, nicht-reguläre Sprache. Bei näherer Betrachtung sollte aber auffallen, dass $x, y, z \in \{\underline{\texttt{a}}, \underline{\texttt{b}}\}^*$ sind. Somit kann man natürlich auch $w = xyzy^r x$ als $w = z$ lesen, wenn $x = y = \varepsilon$.)

Aufgabe 2.3 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Jede unendliche Sprache ist das Komplement einer endlichen Sprache.

b) Jede Sprache, deren Komplement endlich ist, ist entscheidbar.

c) Die von $G = (\{S, A\}, \{\underline{\texttt{a}}\}, \{S \to A \mid \underline{\texttt{a}}, A \to \underline{\texttt{a}}\}, S)$ erzeugte Sprache ist (inhärent) mehrdeutig.

d) Sei A eine Sprache über $\{\underline{\texttt{0}}, \underline{\texttt{1}}\}$ und $B = A \cap \{\underline{\texttt{1}}\}^*$. Dann gilt: Ist B regulär, so ist auch A regulär.

e) Jede Teilmenge einer regulären Sprache ist regulär.

Lösung

a) **Falsch**. Gegenbeispiel: Das Komplement der Sprache $\{w \in \Sigma^* \; |w| = 2n, n \geq 0\}$ ist $\{w \in \Sigma^* \; |w| = 2n + 1, n \geq 0\}$. Beide Mengen sind unendlich.

b) **Richtig**. Jede endliche Sprache ist regulär und reguläre Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen. Weiters sind reguläre Sprachen eine echte Teilmenge der rekursiven Sprachen, also sicher entscheidbar.

c) **Falsch.** G ist mehrdeutig, da für das Wort $\underline{\texttt{a}}$ zwei Linksableitungen existieren: $S \Rightarrow A \Rightarrow \underline{\texttt{a}}$ und $S \Rightarrow \underline{\texttt{a}}$. Für die von der mehrdeutigen Grammatik G erzeugte Sprache $L(G) = \{\underline{\texttt{a}}\}$ existiert aber z.B. folgende eindeutige Grammatik: $G = (\{S\}, \{\underline{\texttt{a}}\}, \{S \to \underline{\texttt{a}}\}, S)$.

d) **Falsch**. Hier ein Gegenbeispiel: Sei $A = \{\underline{\texttt{0}}^n \underline{\texttt{1}}^n \mid n \geq 0\}$. A ist kontextfrei, aber sicher nicht regulär. Nun gilt aber: $B = A \cap \{\underline{\texttt{1}}\}^* = \{\varepsilon\}$, was aber sehr wohl eine reguläre Sprache ist.

e) **Falsch**. Diese Aussage gilt sicher nicht im Allgemeinen. Ein Gegenbeispiel: die Sprache $L = \{\underline{\texttt{0}}, \underline{\texttt{1}}\}^*$ ist regulär, $\{\underline{\texttt{0}}^n \underline{\texttt{1}}^n \mid n \geq 0\}$ ist eine Teilmenge von $L = \{\underline{\texttt{0}}, \underline{\texttt{1}}\}^*$, aber selbst sicher nicht regulär.

Aufgabe 2.4 Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

a) $\{w \in \{\underline{\texttt{a}}, \underline{\texttt{b}}, \underline{\texttt{c}}\}^* \mid |w|_{\underline{\texttt{a}}} + |w|_{\underline{\texttt{b}}} = 2 * |w|_{\underline{\texttt{c}}}\}$

b) $\{\underline{\texttt{0}}^n \underline{\texttt{1}}^m \mid n, m \geq 0\} \cup \{y \in \{\underline{\texttt{a}}, \underline{\texttt{b}}\}^* \mid y = y^r\}$

c) $\{(\underline{\texttt{a}}\underline{\texttt{b}})^n (\underline{\texttt{c}}\underline{\texttt{d}})^n \mid n \geq 0\}$

Lösung

a) Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.
$$w = \underline{\mathtt{a}}^{2m}\underline{\mathtt{c}}^{m}.$$
Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 3m > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{\mathtt{a}}^{2m}\underline{\mathtt{c}}^{m}$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{a}}$ des ersten Wortteils bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 0$ wählen, müsste auch $\underline{\mathtt{a}}^{2m-|y|}\underline{\mathtt{c}}^{m}$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

b) Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.
$$w = \underline{\mathtt{a}}^{m}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}^{m}.$$
Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 1 > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{\mathtt{a}}^{m}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}^{m}$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{\mathtt{a}}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 0$ wählen, müsste auch $xy^0z = xz = \underline{\mathtt{a}}^{m-|y|}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}^{m}$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

c) Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.
$$w = (\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^{m}(\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{d}})^{m}.$$
Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 4m > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = (\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^{m}(\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{d}})^{m}$, kann xy nur aus den Symbolen des ersten Wortteils (der ersten m Zeichen) bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 0$ wählen, müsste auch xy^0z aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Für den Fall $|y|$ ungerade hat dann w_0 nicht mehr die Form $\{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\}^*\{\underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{d}}\}^*$; ist $|y|$ hingegen gerade, so fällt mindestens ein Block von Symbolen $\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}$ weg. Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

Aufgabe 2.5 Seien L_1 und L_2 Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}$ und f eine Funktion mit $f(L_1) = L_2$. Wir nennen f genau dann *nett*, wenn gilt:
L_2 ist genau dann regulär, wenn L_1 regulär ist.
Geben Sie für jede der folgenden Funktionen an, ob sie *nett* ist oder nicht, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) $f(L) = L^r$

b) $f(L) = L \cup \{\underline{\mathtt{0}}\}^*$

c) $f(L) = \{w\underline{\mathtt{0}}\underline{\mathtt{0}} \mid w \in L\}$

Lösung

a) *Nett.* Reguläre Sprachen sind unter Spiegelung abgeschlossen.

b) *Nicht nett.* Sei $L = \{\underline{\mathtt{0}}^p \mid p \text{ ist prim}\}$, welche nicht regulär ist. Dann gilt aber $f(L) = \{\underline{\mathtt{0}}\}^*$, welche sehr wohl eine reguläre Sprache ist.

c) *Nett.* Wenn L regulär ist, dann ist $f(L)$ die Konkatenation von zwei regulären Sprachen und damit regulär, da reguläre Sprachen unter Konkatenation abgeschlossen sind.

Aufgabe 2.6 Geben Sie jeweils eine kontextfreie Grammatik an, welche die folgenden Sprachen erzeugt, sowie eine Linksableitung und einen Ableitungsbaum für ein von Ihnen gewähltes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq 5$. Zeigen Sie jeweils auch die Kontextfreiheit von L mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger (indem Sie entsprechende Sprachen D_n und R sowie einen entsprechenden Homomorphismus h angeben).

a) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}}^m \mid m \geq n \text{ und } m - n \text{ ist gerade}\}$

b) $L = \{ww^r \mid w \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*\} \ \cap \ \{\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}}^k \underline{\mathtt{a}}^n \mid k, n \geq 0\}$
(*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst L.)

Lösung

a) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}}^m \mid m \geq n \text{ und } m - n \text{ ist gerade}\}$ ist kontextfrei, da $L = h(D_2 \cap R)$, wobei

$$R = \{\underline{[}\underline{[}\}^* \{\underline{(}\}^* \{\underline{)}\}^* \{\underline{]}\underline{]}\}^*$$

und

$$h : \{\underline{[}, \underline{]}, \underline{(}, \underline{)}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^* \quad \text{mit} \quad h(\underline{[}) = \varepsilon, \quad h(\underline{(}) = \underline{\mathtt{a}}, \quad h(\underline{]}) = h(\underline{)}) = \underline{\mathtt{b}}$$

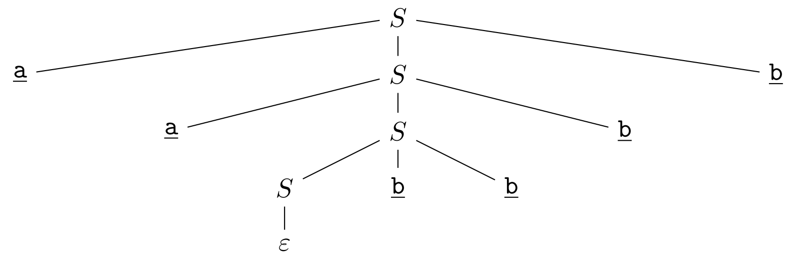
z.B. folgende kontextfreie Grammatik erzeugt L:

$G = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{b}} \mid S\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}} \mid \varepsilon\}, S)$

Linksableitung für $w = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}$:

$S \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{b}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{b}}^4 \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}^4$

Ableitungsbaum für $w = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}$:



b) Wir überlegen zunächst, dass $L = \{a^n b^{2m} a^n \mid n, m \geq 0\}$, also eine kontextfreie Sprache ist, da sie sich als $L = h(D_2 \cap R)$ darstellen lässt, wobei:

$$R = \{\underline{(}\}^* \{\underline{[}, \underline{]}\}^* \{\underline{)}\}^*$$

und

$$h : \{\underline{[}, \underline{]}, \underline{(}, \underline{)}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^* \text{ mit}$$

$$h(\underline{(}) = h(\underline{)}) = \underline{\mathtt{a}}, \quad h(\underline{[}) = h(\underline{]}) = \underline{\mathtt{b}}$$

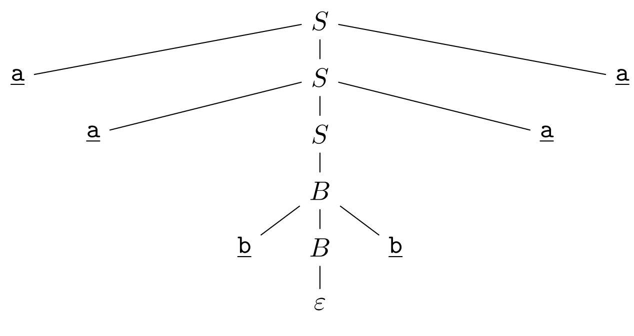
Eine kontextfreie Grammatik für L ist z.B.:

$G = (\{S, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{a}} \mid B, \quad B \to \underline{\mathtt{b}}B\underline{\mathtt{b}} \mid \varepsilon\}, S)$

Linksableitung für $w = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}$:

$S \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{a}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}S\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}B\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}B\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}} \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}$

Ableitungsbaum für $w = \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}$:



Aufgabe 2.7 Geben Sie für jede der folgenden Grammatiken an, ob diese regulär, kontextfrei, monoton, und/oder kontextsensitiv ist. Geben Sie weiters an, welche Sprache von der jeweils angegebenen Grammatik erzeugt wird, und ob diese regulär, kontextfrei, kontextsensitiv und/oder rekursiv aufzählbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Beispiel:

Sei $G_{BSP} = (\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to Saa \mid a \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}\} \cup \{S \to \varepsilon\}, S)$.

G_{BSP} ist kontextfrei. Wegen z.B. der Produktion $S \to S\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}$ ist G_{BSP} nicht regulär, und wegen $S \to \varepsilon$ nicht monoton und auch nicht kontextsensitiv, nachdem S auch auf der rechten Seite von Produktionen vorkommt.

$\mathcal{L}(G_{BSP}) = (\{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\}^* \cup \{\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\}^*)^*$ ist aber regulär, und damit auch kontextfrei, kontextsensitiv und rekursiv aufzählbar.

a) $G_1 = (\{S, A, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}A \mid \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}, \quad A \to \underline{\mathtt{b}}B \quad B \to \underline{\mathtt{c}}S\}, S)$

b) $G_2 = (\{S, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{c}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{a}} \mid \underline{\mathtt{c}}SB\underline{\mathtt{a}}, \quad \underline{\mathtt{a}}B \to B\underline{\mathtt{a}}, \quad \underline{\mathtt{b}}B \to \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\}, S)$

c) $G_3 = (\{S, T\}, \{\underline{\mathtt{x}}, \underline{\mathtt{y}}\}, \{S \to TT, \quad T \to \underline{\mathtt{x}} \mid \underline{\mathtt{y}} \mid \varepsilon\}, S)$

d) $G_4 = (\{S, T\}, \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{0}}\underline{\mathtt{1}}S \mid T, \quad \underline{\mathtt{0}}\underline{\mathtt{1}}T \to S\}, S\})$

Lösung

a) G_1 ist wegen $S \to \underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}$ nicht regulär, aber kontextfrei, kontextsensitiv und monoton.

$\mathcal{L}(G_1) = \{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{c}}\}^+$ ist aber eine reguläre, und somit auch kontextfreie und monotone Sprache.

b) G_2 ist monoton und unbeschränkt, aber wegen z.B. $\underline{\mathtt{a}}B \to B\underline{\mathtt{a}}$ weder regulär, noch kontextfrei, noch kontextsensitiv.

$\mathcal{L}(G_2) = \{\underline{\mathtt{c}}^n\underline{\mathtt{b}}^n\underline{\mathtt{a}}^n \mid n \geq 1\}$ ist kontextsensitiv und daher auch rekursiv aufzählbar. (aber weder regulär noch kontextfrei, siehe z.B. Folie 112 ff.).

c) G_3 ist eine kontextfreie Grammatik. (Wegen z.B. der Produktion $S \to TT$ ist G_3 nicht regulär, wegen $T \to \varepsilon$ ist G_3 auch nicht monoton oder kontextsensitiv.)

$\mathcal{L}(G_3) = \{\varepsilon, \underline{\mathtt{x}}, \underline{\mathtt{y}}, \underline{\mathtt{x}}\underline{\mathtt{x}}, \underline{\mathtt{x}}\underline{\mathtt{y}}, \underline{\mathtt{y}}\underline{\mathtt{x}}, \underline{\mathtt{y}}\underline{\mathtt{y}}\}$ ist endlich, also sicher regulär, und somit auch eine kontextfreie und monotone Sprache (Chomsky Hierarchie!).

d) Wegen z.B. $\underline{\mathtt{0}}\underline{\mathtt{1}}T \to S$ ist G_4 ist weder regulär, noch kontextfrei, noch monoton, noch kontextsensitiv.

$\mathcal{L}(G_4) = \{\}$ ist aber regulär, und damit, aufgrund der Chomsky Hierarchie auch kontextfrei, kontextsensitiv und rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 2.8 Beweisen Sie mittels einer Methode Ihrer Wahl, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind.
(Sie können dabei davon ausgehen, dass eine Sprache der Form $\{\underline{\mathtt{0}}^{kn}\underline{\mathtt{1}}^{ln}\underline{\mathtt{2}}^{mn} \mid n \geq 0\}$ für beliebige (von Ihnen frei wählbare) Konstanten $k, l, m > 0$ als nicht kontextfrei bekannt ist).

a) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^k\underline{\mathtt{c}}^{n+k}\underline{\mathtt{b}}^k\underline{\mathtt{a}}^n \mid n, k > 0\}$

b) $L = \{(\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^{2k}\underline{\mathtt{c}}^j(\underline{\mathtt{d}}\underline{\mathtt{e}})^{2k}\underline{\mathtt{f}}^{2j} \mid j, k \geq 0\} \cap \{(\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}})^j\underline{\mathtt{c}}^{2j}\underline{\mathtt{a}}^{4m}(\underline{\mathtt{d}}\underline{\mathtt{e}})^k\underline{\mathtt{f}}^{4j} \mid j, k, m \geq 0\}$

(*Hinweis*: Bestimmen Sie zunächst L.)

Lösung

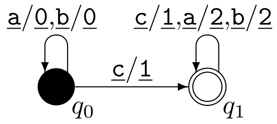
a) $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^k\underline{\mathtt{c}}^{n+k}\underline{\mathtt{b}}^k\underline{\mathtt{a}}^n \mid n, k > 0\}$ ist nicht kontextfrei.

Beweis indirekt. Angenommen, die Sprache L ist kontextfrei. Sei dann

$$M = (\{q_0, q_1\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}, \underline{\mathtt{2}}\}, \delta, q_0, \{q_1\})$$

die (deterministische) *gsm* mit

$\delta(q_0, \underline{\mathtt{a}}) = (q_0, \underline{\mathtt{0}}), \qquad \delta(q_0, \underline{\mathtt{b}}) = (q_0, \underline{\mathtt{0}}), \qquad \delta(q_0, \underline{\mathtt{c}}) = (q_1, \underline{\mathtt{c}}),$
$\delta(q_1, \underline{\mathtt{a}}) = (q_1, \underline{\mathtt{2}}), \qquad \delta(q_1, \underline{\mathtt{b}}) = (q_1, \underline{\mathtt{2}}), \qquad \delta(q_1, \underline{\mathtt{c}}) = (q_1, \underline{\mathtt{1}}).$



Da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber beliebigen gsm-Abbildungen abgeschlossen ist, müsste auch $M(L) = \{\underline{\mathtt{0}}^n\underline{\mathtt{1}}^n\underline{\mathtt{2}}^n \mid n > 1\}$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht kontextfrei sein.

b) Wir überlegen zunächst, dass $L = \left\{(\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}})^{2k}\underline{\mathtt{c}}^{4k}(\underline{\mathtt{d}}\,\underline{\mathtt{e}})^{2k}\underline{\mathtt{f}}^{8k} \mid k \geq 0\right\}$. L ist also nicht kontextfrei.

Beweis indirekt. Angenommen, L ist kontextfrei. Sei dann

$$h : \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}, \underline{\mathtt{e}}, \underline{\mathtt{f}}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{0}}, \underline{\mathtt{1}}, \underline{\mathtt{2}}\}^*$$

ein Homomorphismus mit

$$h(\underline{\mathtt{a}}) = \underline{\mathtt{0}}, \quad h(\underline{\mathtt{c}}) = \underline{\mathtt{1}}, \quad h(\underline{\mathtt{d}}) = \underline{\mathtt{2}}, \quad h(\underline{\mathtt{b}}) = h(\underline{\mathtt{e}}) = h(\underline{\mathtt{f}}) = \varepsilon.$$

Da die Familie der kontextfreien Sprachen gegenüber beliebigen Homomorphismen abgeschlossen ist, müsste auch $h(L) = \{\underline{\mathtt{0}}^{2n}\underline{\mathtt{1}}^{4n}\underline{\mathtt{2}}^{2n} \mid n \geq 0\}$ kontextfrei sein, was aber nicht der Fall ist. Widerspruch! Somit kann auch L nicht kontextfrei sein.

Aufgabe 2.9 Betrachten Sie folgendes RM-Programm:

$$P = (0,\ \{(0, t_1, 1, 2),\ (1, t_2, 6, 5),\ (2, t_2, 6, 3),\ (3, S_1, 4), (4, S_2, 0),\ (5, S_2, 5)\})$$

a) Führen Sie eine Beispielrechnung mit den Registerinhalten $R(1) = 3$, $R(2) = 1$ durch.

b) Führen Sie eine Beispielrechnung mit den Registerinhalten $R(1) = 1$, $R(2) = 3$ durch.

c) Welche Funktion vom Typ $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ wird durch P berechnet?

Lösung

a) $0{:}(3,1) \Rightarrow 2{:}(3,1) \Rightarrow 3{:}(3,1) \Rightarrow 4{:}(2,1) \Rightarrow 0{:}(2,0) \Rightarrow 2{:}(2,0) \Rightarrow 6{:}(2,0)$
6 ist keine Kennmarke und daher eine Endmarke. Das Program hält also und es gilt $F(P)(3,1) = 2$, wobei $F(P)$ die durch P berechnete Funktion ist.

b) $0{:}(1,3) \Rightarrow 2{:}(1,3) \Rightarrow 3{:}(1,3) \Rightarrow 4{:}(0,3) \Rightarrow 0{:}(0,2) \Rightarrow 1{:}(0,2) \Rightarrow 5 : (0,2) \Rightarrow$
$5 : (0,1) \Rightarrow 5 : (0,0) \Rightarrow 5 : (0,0) \Rightarrow \ldots$
Die RM hält bei dieser Eingabe nicht. Also ist $F(P)(1,3)$ undefiniert.

c) Es wird die (echte) Subtraktion über $\mathbb{N}$ berechnet. Es gilt also

$$F(P)(m,n) = \begin{cases} m - n & \text{falls } m \geq n \\ \text{undefiniert} & \text{falls } m < n \end{cases}$$

Aufgabe 2.10 Betrachten Sie folgende λ-Terme, wobei **T** und **F** die auf Folie 36, Teil2b definierten λ-Terme für Wahrheitswerte sind:
– **pair** $= (\lambda fsb.bfs)$
– **first** $= (\lambda p.p\mathbf{T})$
– **second** $= (\lambda p.p\mathbf{F})$

Werten Sie folgende λ-Terme schrittweise aus. Unterstreichen Sie dabei den jeweils verwendeten Redex in β-Reduktionen.

a) **first**(**pair** xy), wobei der jeweils am weitesten links stehende Redex verwendet werden soll.

b) **second**(**pair** xy), wobei der jeweils am weitesten rechts stehende Redex verwendet werden soll.

Lösung Zur Erinnerung: $\mathbf{T} = \lambda xy.x$ und $\mathbf{F} = \lambda xy.y$
Es ist in folgenden Reduktionen wichtig die Schreibkonventionen auf Folie 30, Teil 2b zu beachten!
(Es wird im Folgenden nicht von sämtlichen möglichen Klammereinspaarungsmöglichkeiten Gebrauch gemacht um die Verständlichkeit der einzelnen Reduktionsschritte zu erhöhen.)

a) Der jeweils am weitesten links stehende Redex ist im folgender Berechnung unterstrichen.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{first}(\mathbf{pair}\,xy) & = & \underline{(\lambda p.p\mathbf{T})((\lambda fsb.bfs)xy)} \\
& \to_\beta & (\underline{(\lambda fsb.bfs)x}y)\mathbf{T} \\
& \to_\beta & \underline{((\lambda sb.bxs)y)}\mathbf{T} \\
& \to_\beta & (\lambda b.bxy)\mathbf{T} \\
& = & (\lambda b.bxy)(\lambda xy.x) \\
& \to_\alpha & \underline{(\lambda b.bxy)(\lambda x'y'.x')} \\
& \to_\beta & (\underline{(\lambda x'y'.x')x}y) \\
& \to_\beta & \underline{(\lambda y'.x)y} \\
& \to_\beta & x
\end{array}
$$

b) Der jeweils am weitesten rechts stehende Redex ist im folgender Berechnung unterstrichen.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{second}(\mathbf{pair}\,xy) & = & (\lambda p.p\mathbf{F})(\underline{(\lambda fsb.bfs)x}y) \\
& \to_\beta & (\lambda p.p\mathbf{F})(\underline{(\lambda sb.bxs)y}) \\
& \to_\beta & \underline{(\lambda p.p\mathbf{F})(\lambda b.bxy)} \\
& \to_\beta & (\lambda b.bxy)\mathbf{F} \\
& = & (\lambda b.bxy)(\lambda xy.y) \\
& \to_\alpha & \underline{(\lambda b.bxy)(\lambda x'y'.y')} \\
& \to_\beta & (\underline{(\lambda x'y'.y')x}y) \\
& \to_\beta & \underline{(\lambda y'.y')y} \\
& \to_\beta & y
\end{array}
$$

Aufgabe 2.11

a) Definieren Sie einen $(\mathbf{Pr})$-Funktionsausdruck $ExpS$ für die Funktion $ExpS(m,n) = (m+1)^n$. Verwenden Sie dabei den bereits in der Vorlesung definierten Ausdruck $Mult$.

b) Werten Sie Ihren Ausdruck für $ExpS$ für das Eingabepaar $(2,3)$ aus. Behandeln Sie dabei $Mult$ wie eine Grundfunktion. (übersetzen Sie also $Mult$ direkt in entsprechende Multiplikationen.)

c) Welche Funktion wird durch $\overline{\mu}ASub$ dargestellt? (Siehe Teil2b, Folie 52, für $ASub$.)

d) Welche Funktion wird durch μAdd dargestellt? (Siehe Teil2b, Folie 51, für Add.)

Lösung

a) In üblicher mathematischer Notation lässt sich $ExpS$ wie folgt induktiv definieren:
$ExpS(m,0) = (m+1)^0 = 1$
$ExpS(m,n+1) = (m+1)^{n+1} = ExpS(m,n)\cdot(m+1)$
Man beachte, dass die Induktion dabei über das *zweite* Argument läuft. Um die Definition in einen **Pr**-Funktionsausdruck zu übersetzen, müssen wir die beiden Argumente vertauschen. Wir definieren daher zunächst folgende die Funktion $ExpS'(m,n) = (n+1)^m$:
$ExpS'(0,n) = (n+1)^0 = 1$
$ExpS'(m+1,n) = (n+1)^{m+1} = ExpS'(m,n)\cdot(n+1)$
Dafür ergibt sich der Funktionsausdruck $ExpS' = \mathbf{Pr}(C^1_1, Mult \circ (I^3_2, S \circ I^3_3))$.
Wegen $ExpS(m,n) = ExpS'(n,m)$ erhalten wir folgenden Funktionsausdruck für $ExpS$:

$$ExpS = ExpS' \circ (I^2_2, I^2_1) = \mathbf{Pr}(C^1_1, Mult \circ (I^3_2, S \circ I^3_3)) \circ (I^2_2, I^2_1)$$

b) Es gilt $(I^2_2, I^2_1)(2,3) = (3,2)$. Es bleibt daher den **Pr**-Ausdruck $ExpS'$ für das Argumentpaar $(3,2)$ auszuwerten.

$$ExpS'(3,2) = \mathbf{Pr}(C^1_1, Mult \circ (I^3_2, S \circ I^3_3))(3,2) = Mult \circ (I^3_2, S \circ I^3_3)(2, ExpS'(2,2), 2).$$

Dabei ist

$$ExpS'(2,2) = \mathbf{Pr}(C^1_1, Mult \circ (I^3_2, S \circ I^3_3))(2,2) = Mult \circ (I^3_2, S \circ I^3_3)(1, ExpS'(1,2), 2)$$

und

$$ExpS'(1,2) = \mathbf{Pr}(C_1^1, Mult \circ (I_2^3, S \circ I_3^3))(1,2) = Mult \circ (I_2^3, S \circ I_3^3)(0, ExpS'(0,2), 2),$$

wobei

$$ExpS'(0,2) = \mathbf{Pr}(C_1^1, Mult \circ (I_2^3, S \circ I_3^3))(3,2) = C_1^1(2) = 1.$$

Wir erhalten so
$ExpS'(0,2) = 1$
$ExpS'(1,2) = Mult \circ (I_2^3, S \circ I_3^3)(0,1,2) = 1 \cdot (2+1) = 3$
$ExpS'(2,2) = Mult \circ (I_2^3, S \circ I_3^3)(1,3,2) = 3 \cdot (2+1) = 9$
$ExpS'(3,2) = Mult \circ (I_2^3, S \circ I_3^3)(2,9,2) = 9 \cdot (2+1) = 27$
und damit auch das Endergebnis 27 für $ExpS(2,3) = ExpS'(3,2)$.

c) $\overline{\mu}ASub(m,n) = \min_{y \geq 0}[ASub(y,n){=}m] = \min_{y \geq 0}[(y \dot{-} n){=}m]$. Es gilt zwar allgemein $(m+n) \dot{-} n = m$; aber für $m = 0$ ist nicht $0+n$, sondern 0 die kleinste Lösung der Gleichung $y \dot{-} n = 0$. Es gilt also

$$\overline{\mu}ASub(m,n) = \min_{y \geq 0}[(y \dot{-} n){=}m] = \begin{cases} 0 & \text{falls } m = 0 \\ m+n & \text{falls } m > 0. \end{cases}$$

d) Es gilt

$$\mu Add(m,n) = \min_{y \geq 0}[y + n = 0] = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ \text{undefiniert} & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2.12 Erklären Sie warum der Satz von Rice in folgenden Fällen anwendbar bzw. nicht anwendbar ist. Wenn die Behauptung falsch ist, so erklären Sie warum.
Hinweis: Beachten Sie, dass bei einer Frage nach der (Un)entscheidbarkeit einer Spracheigenschaft die entsprechende Sprache $L = L(M)$ als Code der TM M spezifiziert ist, wie in Folie 64 von Teil2b definiert.

a) Es ist unentscheidbar, ob eine Sprache kontextfrei, aber nicht regulär ist.

b) Es ist unentscheidbar, ob eine Sprache regulär, aber nicht kontextfrei ist.

c) Es ist unentscheidbar, ob eine partiell rekursive Funktion (Typ $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$) einen leeren Wertebereich hat.

d) Es ist unentscheidbar, ob eine Turingmaschine eine λ-definierbare Funktion berechnet.

e) Es ist unentscheidbar, ob eine Turingmaschine weniger als 100 Zustände hat.

f) Es ist unentscheidbar, ob eine Turingmaschine die Additionsfunktion berechnet.

Lösung

a) Es gibt Sprachen die kontextfrei, aber nicht regulär sind (z.B., $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$). Anderseits ist die nicht-leere Menge der regulären Sprachen eine Teilmenge der kontextfreien Sprachen. Daher ist die Eigenschaft kontextfrei, aber nicht regulär zu sein nicht trivial. Der Satz von Rice ist also anwendbar.

b) Da alle regulären Sprachen kontextfrei sind, ist die Eigenschaft trivial entscheidbar. Der Satz von Rice ist also nicht anwendbar.

c) Es gibt Funktionen, die für alle Eingabe-Werte undefiniert sind, also einen leeren Wertebereich haben. Anderseits haben natürlich nicht alle Funktionen diese Eigenschaft. Die Eigenschaft ist also nicht trivial und der Satz von Rice ist somit (in der Variante von Folie 67, Teil 2b) anwendbar.

d) Jede Turing-berechenbare Funktion ist λ-definierbar (siehe Folie 44, Teil 2b). Die Eigenschaft ist also trivial entscheidbar und der Satz von Rice ist nicht anwendbar.

e) Die Eigenschaft einer TM weniger als 100 Zustände zu haben bezieht sich auf deren Darstellung und nicht auf die berechnete Funktion. Der Satz von Rice ist daher nicht anwendbar, weil es sich nicht um eine (extensionale) Sprach- bzw. Funktions-Eigenschaft handelt, sondern um eine intensionale Eigenschaft. Selbstverständlich lässt sich dem Code jeder TM entnehmen, ob diese TM weniger als 100 Zustände hat oder nicht. Die Eigenschaft ist also (nicht-trivial) entscheidbar.

f) Manche TMs berechnen die Additionsfunktion, andere aber nicht. Es geht also um eine nicht-triviale Funktions-Eigenschaft, auf die der Satz von Rice (in der Variante von Folie 67, Teil 2b) anwendbar ist.