Beispiel 91 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 10, 08.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Lösen Sie die Rekursion mit der Ansatzmethode:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2^{2n-2} \qquad n \geq 1, a_0 = 1$$

2 Theoretische Grundlagen: Imhomogene Differenzengleichungen n-ter Ordnung

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung n-ter Ordnung (Störfunktion in unserem Fall $s_n = f(n) = 2^{2n-2}$) in der Form

$$a_n + d_{k-1}a_{n-1} + \cdots + d_o a_{n-k} + f(n) = 0 \qquad n \geq k$$

ist die Addition der Lösung der allgemeinen homogenen Differenzengleichung ($x_n^{(h)}$) und der partikulären Lösung der inhomogenen Differenzengleichung ($x_n^{(p)}$):

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$$

partikulären Lösung der inhomogenen Differenzengleichung kann durch die Ansatzmethode gewonnen werden - abhängig von der Gestalt der Störfunktion - man erhält unbestimmte Koeffizienten:

- $\mathbf{s_n = f(n) = c, c \in \mathbb{R}}$

  Anwendung der Versuchslösung A

- $\mathbf{s_n = f(n) = r^n}$

  Anwendung der Versuchslösung Ar^n

- $\sin(\mathbf{rn})$ oder $\cos(\mathbf{rn})$

  Anwendung der Versuchslösung $A\sin(rn) + B\cos(rn)$

- n^k oder Polynom n-ten Grades:

  Anwendung der Versuchslösung $A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots$

- $n^k \cdot r^n$

  Anwendung der Versuchslösung $(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots) \cdot r^n$

- $\mathbf{s_n = f(n) = P_\mu(n)}$ (Polynom mit Grad μ in der Form $f(n) = P_\mu(n) \cdot q^n$; $q \in \mathbb{R}$ - ist q eine Nullstelle?

– ja, ist Nullstelle - Ansatz: $a_n^{(p)} = n^\lambda \cdot Q_\mu(n) \cdot q^n$ ($Q_\mu(n)$ ist Polynom vom Grad μ)
– nein - Ansatz wie oben, jedoch $\lambda = 0$

- $\mathbf{f(n) = P_\mu(n) \cdot q^n} \cdot \cos(\mathbf{n}\alpha)$ bzw. $\mathbf{f(n) = P_\mu(n) \cdot q^n} \cdot \sin(\mathbf{n}\alpha)$ - Ansatz anhängig von q:

  – $\bar{q}_{1,2} = q(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)$ sind konjugiert komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms mit Vielfachheit λ, so lautet der Ansatz ($R_\mu(n)$ und $S_\mu(n)$ Polynome vom Grad μ):

$$a_n^{(p)} = n^\lambda R_\mu(n) q^n \cos(n\alpha) + n^\lambda S_\mu(n) q^n \sin(n\alpha)$$

  – $\bar{q}_{1,2}$ keine Nullstellen, dann $\lambda = 0$ (Ansatz sonst wie oben)

3 Lösung des Beispiels

Zunächst ermitteln wir die **allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung**:

$$a_n - 2a_{n-1} = 0 \qquad x(t)) = t - 2 = 0 \qquad x_0 = 2$$

Der Ansatz für die homogene Lösung ist: $a_n = \lambda 2^n$.
Wir verwenden für den Ansatz für die **partikuläre Lösung** die Methode aus `Baron`, 'Mathematik für Informatiker', Bd. 3, S.44 um herauszufinden, welcher Ansatz nun benötigt wird:

$$f(n) = P_\mu(n) q^n \qquad P_\mu(n) \text{ ist Polynom vom Grad } \mu$$

Unser Polynom ist $P_\mu(n) = 2^{2n-2} = 4^{n-1}$ - q wäre in unserem Falle $\frac{1}{4}$:

$$f(n) = 2^{2n-2} = \frac{1}{4} \cdot 4^n$$

$\mu = 0, q = 4$ - es existiert keine Nullstelle. Zu wählen ist der **Ansatz**:

$$a_n^{(p)} = n^\lambda \cdot Q_\mu(n) \cdot q^n$$

Weil q keine Nullstelle ist , gilt $\lambda = 0$ ($n^\lambda = 1$) und mit Versuchslösung $A \cdot r^n$:

$$a_n^{(p)} = A \cdot 4^n$$

Einsetzen des Ansatzes:

$$a_n = 2a_{n-1} + 2^{2n-2} \begin{cases} a_n = A \cdot 4^n \\ a_{n-1} = A \cdot 4^{n-1} \end{cases}$$

$$A \cdot 4^n = 2 \cdot A \cdot 4^{n-1} + \frac{1}{4} \cdot 4^n \qquad | \ : 4^n$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot A + \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad a_n^{(p)} = \frac{1}{2} \cdot 4^n$$

Zusammenfassung homogener und partikulärer Lösung:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \lambda \cdot 2^n + \frac{1}{2} \cdot 4^n$$

Einsetzen des Anfangswertes, Bestimmung der Unbekannten:

$$a_0 = 1, n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 2^0 \cdot \lambda + \frac{1}{2} \cdot 4^0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{2}$$

Lösung ist:

$$\mathbf{a_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot 4^n}$$