

Wichtige physikalische Konstanten

Die Fehlerangabe bezieht sich auf die letzte signifikante Stelle, z.B. $(6,673 \pm 10) \cdot 10^{-11} = (6,673 \pm 0,010) \cdot 10^{-11}$.

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	9.3.3	c	299 792 458 (exakt)	m s^{-1}
Influenzkonstante	6.1.1	ϵ_0	$8,854187817 \cdot 10^{-12}$ (exakt)	$\text{A s V}^{-1} \text{m}^{-1}$
Induktionskonstante	6.8.3	$\nu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2) = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs A}^{-1} \text{m}^{-1}$	$1,2566370614 \cdot 10^{-6}$ (exakt)	$\text{Vs A}^{-1} \text{m}^{-1}$
Gravitationskonstante	1.7.1	G	$(6,673 \pm 10) \cdot 10^{-11}$	$\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$
Avogadro-Konstante	5.1.5	N_A	$(6,0221420 \pm 5) \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Molvolumen bei Normalbedingungen	3.1.5	V_{mol}	$(22,41400 \pm 4) \cdot 10^{-3}$	$\text{m}^3 \text{mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	5.1.2	k	$(1,380650 \pm 2) \cdot 10^{-23}$	J K^{-1}
Gaskonstante	5.2.2	$R = kN_A$	$8,31447 \pm 2$	$\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$
Elementarladung	6.1.5	e	$(1,60217646 \pm 6) \cdot 10^{-19}$	C
Faraday-Konstante	6.4.4	$F = eN_A$	$(9,6485342 \pm 4) \cdot 10^4$	C mol^{-1}
Ruhmasse des Protons	18.1.2	m_p	$(1,6726216 \pm 1) \cdot 10^{-27}$	kg
Ruhmasse des Neutrons	18.1.2	m_n	$(1,6749272 \pm 1) \cdot 10^{-27}$	kg
Ruhmasse des Elektrons	6.4.1	m_e	$(9,1093819 \pm 7) \cdot 10^{-31}$	kg
Spezifische Ladung des Elektrons	6.4.1	e/m_e	$-(1,75882017 \pm 7) \cdot 10^{11}$	C kg^{-1}
Ruhenergie des Elektrons	16.3.6	$m_e c^2$	$0,51099890 \pm 2$	MeV
Massenverhältnis Proton/Elektron	18.1.2	m_p/m_e	$(1836,152668 \pm 4)$	
Atomare Masseneinheit	18.1.2	$\frac{1}{12} m(^{12}\text{C})$	$(1,6605387 \pm 1) \cdot 10^{-27}$	kg
Planck-Konstante	8.1.2	h $\hbar = h/(2\pi)$	$(6,6260688 \pm 5) \cdot 10^{-34}$ $(1,05457160 \pm 8) \cdot 10^{-34}$	J s J s
Stefan-Boltzmann-Konstante	11.2.5	$\sigma = 2\pi^5 k^4 / (15c^2 h^3)$	$(5,67040 \pm 4) \cdot 10^{-8}$	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$
Bohr-Radius	14.1.2	$r_1 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m_e e^2)$	$(0,529177208 \pm 2) \cdot 10^{-10}$	m
Rydberg-Konstante	14.1.2	$R_\infty = \alpha^2 m_e c / 2h$	$10\,973\,731,56855 \pm 8$	m^{-1}
Compton-Wellenlänge des Elektrons	13.1.3	$\mu_c = h/(m_e c)$	$(2,42631022 \pm 2) \cdot 10^{-12}$	m
Bohr-Magneton	14.3.2	$\nu_B = e\hbar / 2m_e$	$(9,2740090 \pm 4) \cdot 10^{-24}$	JT^{-1}
Feinstrukturkonstante	14.1.3	$\alpha = e^2 / (4\pi\epsilon_0 \hbar c)$	$1/(137,0359998 \pm 5)$	



Gerthsen Physik

Dieter Meschede

Bis zur 20. Auflage betreut
von Helmut Vogel

23., überarbeitete Auflage
mit 1347 meist zweifarbigen
Abbildungen, 94 Tabellen,
105 durchgerechneten Beispielen
und 1074 Aufgaben
mit vollständigen Lösungen
und Visualisierungen
der Relativitätstheorie
auf CD-ROM



Springer

Herausgeber:
Professor Dr. *Dieter Meschede*
Institut für Angewandte Physik
Universität Bonn
Wegeler Straße 8
53115 Bonn, Deutschland
e-mail: meschede@iap.uni-bonn.de

Graphisches Konzept:
Schreiber VIS
Joachim Schreiber
64342 Seeheim

ISBN-10 3-540-25421-8
ISBN-13 978-3-540-25421-8
23. Auflage
Springer
Berlin Heidelberg New York
Springer ist ein Unternehmen von
Springer Science+Business Media

ISBN 3-540-02622-3
22. Auflage
Springer Berlin Heidelberg New York

Bibliografische Information
der Deutschen Bibliothek:
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg
1956, 1958, 1960, 1963, 1964, 1966,
1969, 1971, 1974, 1977, 1982, 1986,
1989, 1993, 1995, 1997, 1999, 2002,
2004, 2006
Printed in Germany

SPIN 10975633
56/3141/YL - 5 4 3 2 1 0
Gedruckt auf säurefreiem Papier

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buche berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Herstellung, Satz und Umbruch:
LE- \TeX Jelonek, Schmidt & Vöckler
GbR, Leipzig

Zeichnungen:
Schreiber VIS, Seeheim
in Zusammenarbeit
mit Eva Werkmann, Wiesbaden

Einbandgestaltung:
Künkel&Lopka, Heidelberg

Einbandabbildung:
Instantane elektrische Feldstärke eines Femtosekunden-Laserpulses (1 Femtosekunde = 10^{-15} s). Um das Signal aufzunehmen, wurden Photoelektronen mit einem Attosekunden-Laserpuls (1 Attosekunde = 10^{-18} s) erzeugt und durch das elektrische Feld eines Femtosekunden-Laserpulses beschleunigt. In dem Signal ist die Ankunftszeit der Elektronen als Funktion der Verzögerung von Femtosekunden und Attosekundenlaserpuls aufgezeichnet, die die instantane elektrische Feldstärke wiedergibt. Eine genauere Beschreibung befindet sich im Ausblick am Ende von Kap. 15, Laserphysik. Mit freundlicher Erlaubnis von F. Krausz, Garching, und U. Heinzmann, Bielefeld.

Autorenportrait auf der
Einbandrückseite:
© Eric Lichtenscheidt, Bonn

Druck und Bindearbeiten:
Stürtz GmbH, Würzburg

Vorwort zur 23. Auflage

Eine neue Auflage zeichnet sich nicht nur durch die Korrektur alter, manchmal über Generationen konservierter Fehler aus. Schon ein neues Satzsystem in der schnell veränderlichen Produktionstechnik reicht aus, um auch immer wieder neue Fehler zu erzeugen. Ich bedanke mich bei allen Lesern, die mich in netter und aufmerksamer Form auf die kleineren und größeren Schwächen hingewiesen haben. Ich gehe allen Hinweisen nach, bedaure aber auch, dass nicht jeder konzeptionelle Vorschlag umgesetzt werden kann.

Hinweise von Lesern auf das etwas angestaubte Kapitel über die Spezielle Relativitätstheorie waren Anlaß genug, um zur 100-Jahr-Feier von Einsteins Wunderjahr 1905, dem *Annus Mirabilis*, von der hergebrachten Darstellung der Speziellen Relativitätstheorie abzurücken und eine neue Form auszuprobieren. Die Relativitätstheorie ist nun auch an einer

geeigneteren Position zu finden, sie ist vorgerückt und schließt nun die klassische Physik ab, bevor die Themen der mikroskopischen Physik behandelt werden. Ich bedanke mich bei zahlreichen Kollegen für die Aufmerksamkeiten und Hilfestellungen bei der Konzeption des neuen Kapitels, insbesondere bei *Norbert Dragon*, Hannover, *Claus Lämmerzahl*, Bremen, *Reinhard Werner*, Braunschweig, *Hans Ruder* und *Ute Krauss*, Tübingen, die sich auch mit Multimedia-Beiträgen zur Relativitätstheorie für den Gerthsen engagiert hat.

Herrn *Thorsten Schneider* vom Springer-Verlag und dem Team der Firma LE-TeX danke ich für ihr Bemühen, die verlegerische Qualität dieses Buches auch für die Zukunft zu erhalten.

Bonn, August 2005

Dieter Meschede

Vorwort zur 18. bis 20. Auflage

Ein halbes Jahrhundert ist dieses Buch nun alt. „Was man liebt, darf man auch kritisieren, sogar zu verbessern suchen“, schrieb ich vor 25 Jahren, als ich die Bearbeitung übernahm. Seitdem ist nicht viel vom Text, wohl aber von der Intention von Christian Gerthsen erhalten geblieben: Dem Studienanfänger eine möglichst klare und umfassende Einführung zu vermitteln, die ihm auch im späteren Studium noch nützt, obwohl er im Spezialgebiet seiner Diplom- oder Doktorarbeit viel genauer Bescheid wissen muß. Damals, kurz nach dem Krieg, ahnte man noch nichts von Quarks oder Quasars, man hörte Wunderdinge von Maschinen, die ganze Zimmer füllten und denen heute jeder Taschenrechner haushoch überlegen ist. Die zahllosen technischen Anwendungen, die unser Leben in nie gekanntem Tempo verändern, können in einem solchen Buch nur angedeutet werden, ebenso wie die Zweige der Physik, Bio-, Astro-, Geophysik, in denen Hochinteressantes passiert ist. Hiermit beschäftigen sich hauptsächlich viele Aufgaben. Als neue Gebiete konnten Festkörperphysik und nichtlineare Dynamik aufgenommen werden. Alles andere, besonders Relativitäts-, Quanten-, statistische Physik ist so systematisch dargestellt, wie es mit dem knappen, einführenden Charakter zu vereinbaren ist. Neben unseren Drang, die Welt zu verstehen, rückt immer mehr unser Bemühen, sie zu erhalten. Auch dem trägt dieses Buch nur stellenweise Rechnung. Klar ist aber, daß man die Welt verstehen muß, um sie zu erhalten.

Wird es immer schwieriger, Physik zu studieren, da immer mehr Neues dazukommt? Wohl kaum, denn auch didaktisch haben wir viel dazugelernt. Da fällt mir immer Isaac Newton ein, der 19 Jahre zögerte, sein Gravitationsgesetz, ein Kernstück seiner Principia, zu veröffentlichen, weil er zunächst nicht nachweisen konnte, daß eine Kugel genauso anzieht, als sei ihre Masse im Zentrum konzentriert. Schließlich hatte er die Mathematik dazu ja auch gerade erst erfinden müssen. Jeder bessere Student kann diesen Nachweis heute in ebenso vielen Sekunden führen, mit anderen Mitteln, nämlich der Feldvorstellung, die sich zudem noch auf ein Dutzend anderer Gebiete übertragen läßt. Solche hilfreichen Analogien zu finden und zu nutzen, soll dieses Buch auch anregen.

Der Klarheit und Anschaulichkeit haben Verlag und Autor diesmal besonders viel Mühe gewidmet. Herr *J. Schreiber* hat die von mir computergenerierten Abbildungen ebenso wie die bisherigen mit viel Geschick graphisch gestaltet. Durchgehende Neugestaltung und vollständiger Neusatz brachten viele technische Probleme. Daß schließlich alles in menschlich-erfreulicher Art geklappt hat, danke ich Herrn Dr. *H. J. Kölsch*, Frau *P. Treiber*, Herrn *C.-D. Bachem*, der nun schon vier Auflagen betreut, den vielen ungenannten Mitarbeitern im Verlag und in der Druckerei und wieder meiner lieben Frau *Carla*, ohne deren unermüdliche Hilfe ich besonders diese Arbeit bestimmt nicht geschafft hätte.

Freising, im Juli 1995

Helmut Vogel

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch ist aus Niederschriften hervorgegangen, die ich im Studienjahr 1946/47 den Hörern meiner Vorlesungen über Experimentalphysik an der Universität Berlin ausgehändigt habe. Sie sollten den drückenden Mangel an Lehrbüchern der Physik überwinden helfen.

Diesem Ursprung verdankt das Buch seinen in mancher Hinsicht vom Üblichen abweichenden Charakter. Es erhebt nicht den Anspruch, ein Lehrbuch zu sein, dessen Studium eine Vorlesung zu ersetzen vermag. Es soll nicht statt, sondern neben einer Vorlesung verwendet werden.

...

Die in dem vorliegenden Buch enthaltene Theorie ist um Anschaulichkeit bemüht und daher weniger systematisch. So habe ich z.B. die elektrischen Erscheinungen nicht einheitlich dargestellt. Die klassische Kontinuumstheorie wechselt mit der elektronentheoretischen Deutung je nach dem didaktischen Erfolg, den ich mir von der Darstellung verspreche.

Auch der Umfang, in dem ich die verschiedenen Gebiete behandelt habe, richtet sich nach den Bedürfnissen des Unterrichts. Gegenwärtig wird auf allen deutschen Hochschulen

von den Studierenden der Physik die Mechanik schon vor den Kursvorlesungen der theoretischen Physik gehört, sie durfte daher besonders knapp dargestellt werden.

Die Gebiete, die in der einführenden, sich über zwei Semester erstreckenden Vorlesung wegen der knappen Zeit wohl immer etwas zu kurz kommen, sind die Optik und die Atomphysik. Sie nehmen daher in diesem Buch einen verhältnismäßig großen Platz in Anspruch.

Bei dem Bemühen, den häufig sehr gedrängten Text durch möglichst anschauliche und inhaltsreiche Abbildungen zu ergänzen, erfreute ich mich der Hilfe meines Mitarbeiters, Herrn Dr. *Max Pollermann*, dem ich den zeichnerischen Entwurf mancher Abbildung verdanke.

Für das Lesen der Korrektur und manche Verbesserungsvorschläge habe ich vor allem Herrn Professor Dr. *Josef Meixner*, Aachen, zu danken. Auch Herrn Dr. *Werner Stein* und Fräulein Diplomphysiker *Käthe Müller* danke ich für gute Ratschläge.

Berlin-Charlottenburg, im August 1948

Christian Gerthsen

Inhaltsverzeichnis

Nutzen Sie dieses Buch individuell XXI

1. Mechanik der Massenpunkte **1**

1.1 Messen und Maßeinheiten	1
1.1.1 Messen	1
1.1.2 Maßeinheiten	2
1.1.3 Maßsysteme und Dimensionen	2
1.1.4 Längeneinheit	3
1.1.5 Winkelmaße	4
1.1.6 Zeitmessung	4
1.1.7 Messfehler	5
1.2 Kinematik	9
1.2.1 Ortsvektor	9
1.2.2 Geschwindigkeit	10
1.2.3 Beschleunigung	11
1.3 Dynamik	12
1.3.1 Trägheit	12
1.3.2 Kraft und Masse	12
1.3.3 Maßeinheiten	13
1.3.4 Newtons Axiome	13
1.4 Einfache Bewegungen	14
1.4.1 Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung	14
1.4.2 Die gleichförmige Kreisbewegung ..	16
1.4.3 Die harmonische Schwingung	18
1.5 Arbeit, Energie, Impuls, Leistung	20
1.5.1 Arbeit	20
1.5.2 Kinetische Energie	22
1.5.3 Impuls	23
1.5.4 Kraftfelder	24
1.5.5 Potentielle Energie	24
1.5.6 Der Energiesatz	25
1.5.7 Leistung	26
1.5.8 Zentralkräfte	26
1.5.9 Anwendungen des Energie- und Impulsbegriffes ...	27
1.5.10 Impulsraum	38
1.6 Reibung	40
1.6.1 Reibungsmechanismen	40
1.6.2 Bewegung unter Reibungseinfluss ..	42
1.6.3 Flug von Geschossen	43
1.6.4 Die technische Bedeutung der Reibung	44
1.7 Gravitation	46
1.7.1 Das Gravitationsgesetz	46

1.7.2 Das Gravitationsfeld	48
1.7.3 Gezeitenkräfte	49
1.7.4 Planetenbahnen	52
1.8 Trägheitskräfte	54
1.8.1 Arten der Kräfte	54
1.8.2 Inertialsysteme	55
1.8.3 Rotierende Bezugssysteme	56
1.8.4 Bahnstörungen	57
1.8.5 Invarianzen und Erhaltungssätze ...	59
Aufgaben	61

2. Mechanik des starren Körpers **2**

2.1 Translation und Rotation	72
2.1.1 Bewegungsmöglichkeiten eines starren Körpers	72
2.1.2 Infinitesimale Drehungen	73
2.1.3 Die Winkelgeschwindigkeit	73
2.2 Dynamik des starren Körpers	74
2.2.1 Rotationsenergie	74
2.2.2 Das Trägheitsmoment	74
2.2.3 Das Drehmoment	75
2.2.4 Der Drehimpuls	76
2.2.5 Das Trägheitsmoment als Tensor ...	77
2.2.6 Der Drehimpulssatz	77
2.2.7 Die Bewegungsgleichung des starren Körpers	80
2.3 Gleichgewicht und Bewegung eines starren Körpers	80
2.3.1 Gleichgewichtsbedingungen	80
2.3.2 Gleichmäßig beschleunigte Rotation	85
2.3.3 Drehschwingungen	85
2.3.4 Kippung	86
2.3.5 Drehung um freie Achsen	87
2.4 Der Kreisel	88
2.4.1 Nutation des kräftefreien Kreisels ..	88
2.4.2 Präzession des Kreisels	89
Aufgaben	91

3. Mechanik deformierbarer Körper **3**

3.1 Ruhende Flüssigkeiten und Gase (Hydro- und Aerostatik)	93
3.1.1 Der feste, flüssige und gasförmige Zustand	93

3.1.2	Die Gestalt von Flüssigkeitsoberflächen	94	4.3.7	Stoßwellen	179
3.1.3	Druck	95	4.4	Eigenschwingungen	181
3.1.4	Der Schweredruck	96	4.4.1	Gekoppelte Pendel	181
3.1.5	Gasdruck	98	4.4.2	Wellen im Kristallgitter; die Klein-Gordon-Gleichung	182
3.1.6	Der Atmosphärendruck	99	4.4.3	Stehende elastische Wellen	184
3.2	Oberflächenspannung	100	4.4.4	Eigenschwingungen von Platten, Membranen und Hohlräumen	186
3.3	Strömungen	104	4.4.5	Entartung	188
3.3.1	Beschreibung von Strömungen	104	4.5	Schallwellen	189
3.3.2	Innere Reibung	109	4.5.1	Schallmessungen	189
3.3.3	Die laminare Strömung	110	4.5.2	Töne und Klänge	191
3.3.4	Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit	115	4.5.3	Lautstärke	193
3.3.5	Kriterien für die verschiedenen Strömungstypen	116	4.5.4	Das Ohr	194
3.3.6	Strömung idealer Flüssigkeiten	118	4.5.5	Ultraschall und Hyperschall	196
3.3.7	Der hydrodynamische Impulssatz ..	121	4.6	Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten	197
3.3.8	Strömungswiderstand	123	Aufgaben	202	
3.3.9	Wirbel	125			
3.3.10	Turbulenz	128	5. Wärme	5	
3.4	Der deformierbare Festkörper	130	5.1	Wärmeenergie und Temperatur	207
3.4.1	Dehnung und Kompression	130	5.1.1	Was ist Wärme?	207
3.4.2	Scherung	131	5.1.2	Temperatur	208
3.4.3	Zusammenhang zwischen E -Modul und G -Modul	132	5.1.3	Thermometer	210
3.4.4	Anelastisches Verhalten	132	5.1.4	Freiheitsgrade	211
3.4.5	Elastische Energie	134	5.1.5	Wärmekapazität	212
3.4.6	Wie biegen sich die Balken?	134	5.1.6	Kalorimeter	214
3.4.7	Knickung	135	5.2	Kinetische Gastheorie	214
3.4.8	Härte	135	5.2.1	Der Gasdruck	214
Aufgaben	136	5.2.2	Die Zustandsgleichung idealer Gase ..	216	
		5.2.3	Der 1. Hauptsatz der Wärmelehre ..	217	
4. Schwingungen und Wellen	4	5.2.4	c_V und c_p bei Gasen	218	
4.1	Schwingungen	141	5.2.5	Adiabatische Zustandsänderungen ..	219
4.1.1	Überlagerung von Schwingungen ..	142	5.2.6	Druckarbeit	220
4.1.2	Gedämpfte Schwingungen	150	5.2.7	Mittlere freie Weglänge und Wirkungsquerschnitt	221
4.1.3	Erzwungene Sinusschwingungen ...	154	5.2.8	Brownsche Bewegung	223
4.1.4	Amplituden- und Phasenmodulation ..	158	5.2.9	Die Boltzmann-Verteilung	224
4.2	Wellen	160	5.2.10	Die Maxwell-Verteilung	225
4.2.1	Beschreibung von Wellen	160	5.3	Wärme kraftmaschinen	227
4.2.2	Die Wellengleichung	161	5.3.1	Thermische Energiewandler	227
4.2.3	Elastische Wellen	162	5.3.2	Arbeitsdiagramme	229
4.2.4	Überlagerung von Wellen	164	5.3.3	Wirkungsgrad von thermischen Energiewandlern ..	229
4.2.5	Intensität einer Welle	169	5.4	Wärmeleitung und Diffusion	232
4.3	Wellenausbreitung	171	5.4.1	Mechanismen des Wärmetransportes	232
4.3.1	Streuung	172	5.4.2	Die Gesetze der Wärmeleitung	232
4.3.2	Das Prinzip von Huygens-Fresnel ..	172	5.4.3	Wärmeübergang und Wärmedurchgang	236
4.3.3	Das Prinzip von Fermat	173	5.4.4	Wärmetransport durch Konvektion ..	237
4.3.4	Beugung	175	5.4.5	Diffusion in Gasen und Lösungen ..	237
4.3.5	Doppler-Effekt; Mach-Wellen	176			
4.3.6	Absorption	178			

5.4.6 Transportphänomene 239

5.5 Entropie 242

5.5.1 Irreversibilität 242

5.5.2 Wahrscheinlichkeit und Entropie ... 243

5.5.3 Entropie und Wärmeenergie 245

5.5.4 Berechnung von Entropien 245

5.5.5 Der 2. Hauptsatz der Wärmelehre .. 248

5.5.6 Reversible Kreisprozesse 249

5.5.7 Das thermodynamische Gleichgewicht 251

5.5.8 Chemische Energie 255

5.5.9 Freie Energie, Helmholtz-Gleichung und 3. Hauptsatz der Wärmelehre .. 259

5.6 Aggregatzustände 261

5.6.1 Koexistenz von Flüssigkeit und Dampf 261

5.6.2 Koexistenz von Festkörper und Flüssigkeit 265

5.6.3 Koexistenz dreier Phasen 266

5.6.4 Reale Gase 267

5.6.5 Kinetische Deutung der van der Waals-Gleichung 269

5.6.6 Joule-Thomson-Effekt; Gasverflüssigung 270

5.6.7 Erzeugung tiefster Temperaturen ... 272

5.7 Lösungen 274

5.7.1 Grundbegriffe 275

5.7.2 Osmose 275

5.7.3 Dampfdrucksenkung 276

5.7.4 Destillation 277

5.8 Vakuum 278

5.8.1 Bedeutung der Vakuumtechnik 278

5.8.2 Vakuumpumpen 279

5.8.3 Strömung verdünnter Gase 281

5.8.4 Vakuum-Messgeräte 282

Aufgaben 284

**6. Elektromagnetismus:
Ladungen und Ströme**

6

6.1 Elektrostatik 293

6.1.1 Elektrische Ladungen 293

6.1.2 Das elektrische Feld 296

6.1.3 Spannung und Potential 298

6.1.4 Berechnung von Feldern 302

6.1.5 Kapazität 305

6.1.6 Dipole 308

6.1.7 Influenz 309

6.1.8 Energie einer Ladungsverteilung ... 310

6.1.9 Das elektrische Feld als Träger der elektrischen Energie 310

6.2 Dielektrika 311

6.2.1 Die Verschiebungsdichte 311

6.2.2 Dielektrizitätskonstante 311

6.2.3 Mechanismen der dielektrischen Polarisation 314

6.2.4 Energiedichte des elektrischen Feldes im Dielektrikum 316

6.2.5 Elektrostriktion; Piezo- und Pyroelektrizität 316

6.3 Gleichströme 318

6.3.1 Stromstärke 318

6.3.2 Das ohmsche Gesetz 319

6.3.3 Energie und Leistung elektrischer Ströme 321

6.3.4 Gleichstromtechnik 322

6.4 Mechanismen der elektrischen Leitung ... 326

6.4.1 Nachweis freier Elektronen in Metallen 326

6.4.2 Elektronentransport in Metallen 327

6.4.3 Elektrische Leitfähigkeit 328

6.4.4 Elektrolyse 331

6.4.5 Elektrolytische Leitfähigkeit 333

6.4.6 Ionenwolken; elektrochemisches Potential 336

6.5 Galvanische Elemente 340

6.5.1 Ionengleichgewicht und Nernst-Gleichung 340

6.5.2 Auflösung von Metallionen 341

6.5.3 Galvanische Elemente 341

6.5.4 Galvanische Polarisation 342

6.5.5 Polarisation und Oberflächenspannung 343

6.6 Thermoelektrizität 344

6.6.1 Der Seebeck-Effekt 344

6.6.2 Peltier-Effekt und Thomson-Effekt 346

6.7 Ströme und Felder 346

6.7.1 Elektrostatik 346

6.7.2 Lorentz-Kraft und Magnetfeld 347

6.7.3 Kräfte auf Ströme im Magnetfeld .. 348

6.7.4 Der Hall-Effekt 350

6.7.5 Relativität der Felder 351

6.8 Erzeugung von Magnetfeldern 353

6.8.1 Das Feld des geraden Elektronenstrahls oder des geraden Drahtes 353

6.8.2 Der gerade Draht, relativistisch betrachtet 354

6.8.3 Allgemeine Eigenschaften des Magnetfeldes 355

6.8.4 Bezeichnungen elektromagnetischer Felder 357

6.9 Das Magnetfeld von Strömen	357
6.9.1 Vergleich mit dem elektrischen Feld; der Satz von Biot-Savart	360
6.9.2 Magnetostatik	362
6.9.3 Elektromagnete	364
6.9.4 Magnetische Spannung und Vektorpotential	365
6.9.5 Das Magnetfeld der Erde	366
Aufgaben	371

7. Elektrodynamik

7

7.1 Induktion	379
7.1.1 Faradays Induktionsversuche	379
7.1.2 Das Induktionsgesetz als Folge der Lorentz-Kraft	381
7.1.3 Die Richtung des induzierten Stromes (Lenz-Regel)	384
7.1.4 Wirbelströme	385
7.1.5 Induktivität	386
7.1.6 Ein- und Ausschalten von Gleichströmen	387
7.1.7 Energie und Energiedichte im Magnetfeld	388
7.1.8 Gegeninduktion	388
7.2 Magnetische Materialien	390
7.2.1 Magnetisierung	390
7.2.2 Diamagnetismus	392
7.2.3 Paramagnetismus	392
7.2.4 Ferromagnetismus	393
7.2.5 Der Einstein-de Haas-Effekt	395
7.2.6 Struktur der Ferromagnetika	395
7.2.7 Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus	398
7.2.8 Ferro- und Antiferroelektrizität	398
7.3 Wechselströme	398
7.3.1 Erzeugung von Wechselströmen	399
7.3.2 Effektivwerte von Strom und Spannung	401
7.3.3 Wechselstromwiderstände	402
7.3.4 Zweipole, Ortskurven, Ersatzschaltbilder	405
7.3.5 Messinstrumente für elektrische Größen	408
7.3.6 Drehstrom	411
7.3.7 Schwingkreise	413
7.3.8 Transformatoren	415
7.3.9 Das Betatron	418
7.3.10 Elektromotoren und Generatoren	420
7.3.11 Skineffekt	424
7.4 Elektromagnetische Wellen	425
7.4.1 Der Verschiebungsstrom	425

7.4.2 Der physikalische Inhalt der Maxwell-Gleichungen	426
7.4.3 Ebene elektromagnetische Wellen ..	427
7.4.4 Energiedichte und Energieströmung	431
7.4.5 Der lineare Oszillator	431
7.4.6 Die Ausstrahlung des linearen Oszillators	433
7.4.7 Wellengleichung und Telegraphengleichung	435
7.4.8 Warum funkt man mit Trägerwellen?	437
7.4.9 Drahtwellen	438
7.4.10 Hohlraumoszillatoren und Hohlleiter	439
Aufgaben	441

8. Freie Elektronen und Ionen

8

8.1 Erzeugung von freien Ladungsträgern	447
8.1.1 Glühemission (Richardson-Effekt) .	447
8.1.2 Photoeffekt (Lichtelektrischer Effekt)	449
8.1.3 Feldemission	450
8.1.4 Sekundärelektronen	451
8.1.5 Ionisierung eines Gases	451
8.2 Bewegung freier Ladungsträger	452
8.2.1 Elektronen im homogenen elektrischen Feld ...	452
8.2.2 Elektronen im homogenen Magnetfeld	453
8.2.3 Oszilloskop und Fernsehrohr	455
8.2.4 Thomsons Parabelversuch; Massenspektroskopie	456
8.2.5 Die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse	457
8.2.6 Die Elektronenröhre	458
8.2.7 Elektronenröhren als Verstärker	461
8.2.8 Schwingungserzeugung durch Rückkopplung	462
8.2.9 Erzeugung und Verstärkung höchsterfrequenter Schwingungen	463
8.2.10 Teilchenfallen	464
8.3 Gasentladungen	465
8.3.1 Leitfähigkeit von Gasen	465
8.3.2 Stoßionisation	468
8.3.3 Einteilung der Gasentladungen	469
8.3.4 Glimmentladungen	470
8.3.5 Bogen und Funken	470
8.3.6 Gasentladungslampen	471
8.3.7 Kathoden-, Röntgen- und Kanalstrahlung	472

8.4 Plasmen 473
 8.4.1 Der „vierte Aggregatzustand“ 473
 8.4.2 Plasmaschwingungen 475
 8.4.3 Plasmen im Magnetfeld 476
 8.4.4 Fusionsplasmen 478
Aufgaben 480

9. Geometrische Optik **9**

9.1 Reflexion und Brechung 483
 9.1.1 Lichtstrahlen 483
 9.1.2 Reflexion 484
 9.1.3 Brechung 487
 9.1.4 Totalreflexion 487
 9.1.5 Prismen 489
9.2 Optische Instrumente 490
 9.2.1 Brechung an Kugelflächen 490
 9.2.2 Dicke Linsen 493
 9.2.3 Linsenfehler 494
 9.2.4 Abbildungsmaßstab
 und Vergrößerung 495
 9.2.5 Die Lupe 496
 9.2.6 Das Mikroskop 496
 9.2.7 Der Dia-Projektor 498
 9.2.8 Das Fernrohr oder Teleskop 499
 9.2.9 Das Auge 501
9.3 Die Lichtgeschwindigkeit c 502
 9.3.1 Astronomische Methoden 502
 9.3.2 Laufzeitmessungen im Labor 503
 9.3.3 Resonatormethoden 504
 9.3.4 Anwendungen 505
 9.3.5 Lichtgeschwindigkeit im Medium .. 505
9.4 Matrizenoptik 506
9.5 Geometrische Elektronenoptik 507
 9.5.1 Das Brechungsgesetz
 für Elektronen 507
 9.5.2 Elektrische Elektronenlinsen 509
 9.5.3 Magnetische Linsen 510
 9.5.4 Elektronenmikroskope 511
Aufgaben 514

10. Wellenoptik **10**

10.1 Interferenz und Beugung 519
 10.1.1 Kohärenz 520
 10.1.2 Die Grundkonstruktion
 der Interferenzoptik 521
 10.1.3 Gitter 523
 10.1.4 Spalt- und Lochblende 525
 10.1.5 Auflösungsvermögen
 optischer Geräte 526

10.1.6 Auflösungsvermögen
 des Spektrographen 528
 10.1.7 Fraunhofer-Beugung 532
 10.1.8 Fresnel-Linsen 532
 10.1.9 Holographie 534
 10.1.10 Fresnel-Beugung 535
 10.1.11 Stehende Lichtwellen 536
 10.1.12 Interferenzfarben 537
 10.1.13 Interferometrie 538

10.2 Polarisation des Lichts 543

10.2.1 Lineare und elliptische Polarisation 543
 10.2.2 Polarisationsapparate 544
 10.2.3 Polarisation durch Doppelbrechung 544
 10.2.4 Polarisation
 durch Reflexion und Brechung 547
 10.2.5 Intensitätsverhältnisse
 bei Reflexion und Brechung 548
 10.2.6 Reflexminderung 550
 10.2.7 Interferenzen im parallelen
 linear polarisierten Licht 551
 10.2.8 Interferenzen im konvergenten
 polarisierten Licht 553
 10.2.9 Drehung der Polarisationssebene 553
 10.2.10 Der elektrooptische Effekt
 (Kerr-Effekt) 555

**10.3 Absorption, Dispersion und Streuung
 des Lichts** 555

10.3.1 Absorption 556
 10.3.2 Dispersion 557
 10.3.3 Atomistische Deutung
 der Dispersion 558
 10.3.4 Deutung des Faraday-Effektes 561
 10.3.5 Warum ist der Himmel blau? 562

Aufgaben 566

11. Strahlungsfelder **11**

11.1 Das Strahlungsfeld 569
 11.1.1 Strahlungsgrößen 569
 11.1.2 Photometrische Größen 571
 11.1.3 Photometrie
 und Strahlungsmessung 571
11.2 Strahlungsgesetze 573
 11.2.1 Wärmestrahlung
 und thermisches Gleichgewicht 573
 11.2.2 Das Spektrum
 der schwarzen Strahlung 575
 11.2.3 Plancks Strahlungsgesetz 576
 11.2.4 Lage des Emissionsmaximums;
 Wiensches Verschiebungsgesetz 578
 11.2.5 Gesamtemission des schwarzen
 Strahlers; Stefan-Boltzmann-Gesetz 579

11.2.6	Der kosmische schwarze Strahler ...	580
11.2.7	Pyrometrie	581
11.3	Die Welt der Farben	582
11.3.1	Farbe	582
11.3.2	Infrarot und Ultraviolett	587
11.3.3	Die Strahlung der Sonne	593
11.3.4	Warum sind die Blätter grün?	599
Aufgaben	602

12. Relativistische Physik

12

12.1	Maßstäbe und Uhren – Raum und Zeit	607
12.1.1	Bezugs- oder Inertialsysteme.....	608
12.1.2	Das Michelson-Experiment.....	609
12.1.3	Das Relativitätspostulat	613
12.1.4	Die 4. Dimension: Die Zeit	614
12.2	Gleichzeitigkeit	616
12.2.1	Pythagoras und Minkowski	618
12.2.2	Abstände in der Raumzeit.....	619
12.2.3	Kausalität.....	620
12.2.4	Bewegte Uhren gehen langsamer – die Zeitdilatation	620
12.2.5	Das Zwillingsparadoxon	623
12.2.6	Maßstabsvergleich und Längenkontraktion	626
12.3	Die Lorentz-Transformation	627
12.4	Vierervektoren	628
12.5	Relativistischer Doppler-Effekt	630
12.6	Addition von Geschwindigkeiten	633
12.7	Relativistisches Sehen	634
12.7.1	Ruhende Beobachter, bewegte Objekte	635
12.7.2	Bewegte Beobachter, ruhende Objekte	637
12.8	Relativistischer Impuls und relativistische Energie	639
12.8.1	Die newtonschen Impulse werden beim Wechsel des Bezugssystems nicht erhalten	640
12.8.2	Der 4-Impuls.....	641
12.8.3	Systeme von Teilchen.....	643
12.9	Elektromagnetische Felder und Bewegung 644	
12.9.1	Relativistische Ladungsinvarianz....	645
12.9.2	Der elektromagnetische Feldtensor .	648
12.9.3	Elektromagnetische Wellen.....	650
12.10	Gravitation und Kosmologie	650
12.10.1	Allgemeine Relativität	650
12.10.2	Einsteins Gravitationstheorie	652
12.10.3	Gravitationswellen	655
12.10.4	Schwarze Löcher	657
12.10.5	Kosmologische Modelle	659
12.10.6	Die kosmologische Kraft	661

12.10.7	Gab es einen Urknall?	663
12.10.8	Das Geheimnis der dunklen Massen	666
Aufgaben	667

13. Teilchen, Wellen, mikroskopische Physik

13

13.1	Das Photon	678
13.1.1	Entdeckung des Photons	678
13.1.2	Masse und Impuls der Photonen; Strahlungsdruck	679
13.1.3	Stoß von Photonen und Elektronen; Compton-Effekt	680
13.1.4	Rückstoß bei der γ -Emission; Mößbauer-Effekt	681
13.2	Wellen und Teilchen	683
13.2.1	Materiewellen	683
13.2.2	Elektronenbeugung	684
13.2.3	Elektronenbeugung an Lochblenden	685
13.2.4	Selbstinterferenz von Atomen	687
13.2.5	Interferometrie mit Materiewellen ..	689
13.2.6	Die Unbestimmtheitsrelation	690
13.3	Spektren	691
13.3.1	Emission und Absorption von Licht	691
13.3.2	Linienverbreiterung	692
13.3.3	Fluoreszenz	694
13.3.4	Phosphoreszenz	695
13.3.5	Raman-Effekt	695
13.4	Der Versuch von Franck und Hertz	696
13.4.1	Die Energiestufen der Atome	697
13.4.2	Anregung und Ionisierung	698
13.5	Die Entdeckung des Atomkerns	699
13.5.1	Das leere Atom	700
13.5.2	Das Experiment von Rutherford	701
13.6	Grundzüge der Quantenmechanik	704
13.6.1	Einleitung: Mathematisches Handwerkszeug ...	704
13.6.2	Vektoren und Funktionen	705
13.6.3	Matrizen und Operatoren	705
13.6.4	Eigenfunktionen und Eigenwerte ...	706
13.6.5	Zustandsgrößen der Quantenmechanik	708
13.6.6	Die Unbestimmtheitsrelation	711
13.6.7	Der Energieoperator (Hamilton-Operator)	713
13.6.8	Die Schrödinger-Gleichung	716
13.7	Teilchen in Potentialtöpfen	717
13.7.1	Stationäre Zustände	717
13.7.2	Der Tunneleffekt	720
13.7.3	Harmonisch gebundene Teilchen ...	722
13.7.4	Der Knotensatz	724
Aufgaben	726

14. Physik der Atome und ihre Anwendungen 14

- 14.1 Quantenphysik und Atome** 732
 - 14.1.1 Bohr-Sommerfeld-Modelle
des Atoms 732
 - 14.1.2 Quanten-Fluktuationen
stabilisieren die Atome 733
 - 14.1.3 Atomare Einheiten
und Feinstrukturkonstante α 734
- 14.2 Das Wasserstoffatom nach Schrödinger** .. 735
 - 14.2.1 Das Kepler-Problem
im Coulombfeld 735
 - 14.2.2 Schrödinger-Gleichung
für das Wasserstoffatom 736
 - 14.2.3 Quantenzahlen, Spektrum
und Energiediagramm 741
 - 14.2.4 Aufhebung der l -Entartung:
Einelektronenatome 743
- 14.3 Magnetismus von Atomen** 744
 - 14.3.1 Stern-Gerlach-Experiment 744
 - 14.3.2 Magnetisches Moment eines Atoms 744
 - 14.3.3 Präzession im Magnetfeld 745
 - 14.3.4 Spektrum im Magnetfeld,
der normale Zeeman-Effekt 745
- 14.4 Elektronenspin und Feinstruktur** 747
 - 14.4.1 Magnetische Spin-Bahn-Kopplung . 748
 - 14.4.2 Gesamtdrehimpuls 749
 - 14.4.3 Feinstruktur
im Einelektronen-Atom 750
 - 14.4.4 Zeeman-Effekt
von Einelektronen-Atomen 752
 - 14.4.5 Stark-Effekt 755
- 14.5 Atome mit zwei Elektronen** 755
 - 14.5.1 Das Helium-Atom 755
 - 14.5.2 Der Grundzustand
des Helium-Atoms 757
 - 14.5.3 Angeregte Zustände
des Helium-Atoms 758
 - 14.5.4 Drehimpulse im Helium-Atom 759
 - 14.5.5 Andere Zweielektronen-Atome 760
- 14.6 Wie strahlen die Atome?** 761
 - 14.6.1 Atomare Antennen 761
 - 14.6.2 Quantentheorie
der atomaren Strahlung 765
 - 14.6.3 Absorption und Emission 769
 - 14.6.4 Strahlungsverschiebungen 774
- 14.7 Lichtkräfte** 777
 - 14.7.1 Strahlungsdruck 777
 - 14.7.2 Optische Dipolkräfte 778
 - 14.7.3 Laserkühlung 778
- 14.8 Atomoptik** 780
 - 14.8.1 Atomare Beugung 782

- 14.8.2 Atominterferometer 783
- 14.9 Der Einfluss der Atomkerne** 784
 - 14.9.1 Isotopieverschiebungen 784
 - 14.9.2 Kernmagnetismus
und Hyperfeinstruktur 786
 - 14.9.3 Magnetische Resonanz 789
 - 14.9.4 Magnetische Resonanz
in Chemie und Medizin 794
 - 14.9.5 Rabi-Atomstrahlresonanz 796
 - 14.9.6 Ramseys Methode
der getrennten oszillierenden Felder 798
 - 14.9.7 Atomuhren, atomare Springbrunnen
und GPS 800
 - 14.9.8 Optisches Pumpen
und Magnetometer 803
- 14.10 Kräfte zwischen Atomen** 804
 - 14.10.1 Van der Waals-Kräfte 804
 - 14.10.2 Atomare Stöße 805
 - 14.10.3 Streuung
ununterscheidbarer Teilchen 807
- 14.11 Quantenmaterie** 808
 - 14.11.1 Bose-Einstein-Kondensation 810
 - 14.11.2 Atomare Bose-Kondensate 811
 - 14.11.3 Einteilchen-
und Vielteilchen-Quantenzustände . 813
 - 14.11.4 Materiewellen 814
 - 14.11.5 Suprafluidität und Vortizes 815
 - 14.11.6 Atomare Fermi-Gase 818
- Aufgaben** 820

15. Laserphysik 15

- 15.1 Laserprozesse** 823
 - 15.1.1 Wie strahlen die Atome? 823
 - 15.1.2 Energieaustausch
von Licht und Materie 825
 - 15.1.3 Inversion und Verstärkung 826
 - 15.1.4 Verstärkung und Verluste im Laser . 827
 - 15.1.5 Laserschwelle
und gesättigte Verstärkung 828
 - 15.1.6 Laserbetrieb
mit drei und vier Niveaus 828
- 15.2 Laserstrahlen** 829
 - 15.2.1 Gaußstrahlen 829
 - 15.2.2 Optische Resonatoren 831
 - 15.2.3 Laserleistung 832
- 15.3 Laser, Typen und Eigenschaften** 833
 - 15.3.1 Helium-Neon-Laser und Gaslaser .. 833
 - 15.3.2 Neodym-Laser und Festkörperlaser 835
 - 15.3.3 Diodenlaser 837
 - 15.3.4 Durchstimmbare Laser 838

15.4	Kurzzeitleaser	839	17.2	Gitterschwingungen	910
15.4.1	Güteschaltung	839	17.2.1	Spezifische Wärmekapazität	911
15.4.2	Modenkopplung	840	17.2.2	Gitterdynamik	915
15.4.3	Das Femtosekunden-Stroboskop	843	17.2.3	Optik der Ionenkristalle	918
15.4.4	Höchstleistungslaser	844	17.2.4	Phononen	920
Aufgaben	845	17.2.5	Wärmeleitung in Isolatoren	921	
16. Die Elemente und die Chemie	16		17.3 Metalle	922	
16.1	Systematik des Atombaus	847	17.3.1	Das klassische Elektronengas	923
16.1.1	Das Periodensystem der Elemente	847	17.3.2	Das Fermi-Gas	925
16.1.2	Einteilchenmodell und Quantenzustände	850	17.3.3	Metalloptik	927
16.2	Atome mit mehreren Elektronen in der Quantenmechanik	851	17.3.4	Elektrische und Wärmeleitung	929
16.2.1	Bauprinzipien der Elektronenhülle ..	851	17.3.5	Energiebänder	931
16.2.2	Zentralfeldnäherung	852	17.3.6	Elektronen und Löcher	933
16.2.3	Drehimpuls und Spin im Mehrelektronenatom	853	17.4 Halbleiter	935	
16.2.4	Jenseits des Periodensystems	855	17.4.1	Reine Halbleiter	935
16.3 Röntgenstrahlung	856	17.4.2	Gestörte Halbleiter	938	
16.3.1	Erzeugung und Nachweis	856	17.4.3	Halbleiter-Elektronik	941
16.3.2	Röntgenbeugung	857	17.4.4	Amorphe Halbleiter	944
16.3.3	Röntgenoptik	861	17.5 Gitterfehler	945	
16.3.4	Bremsstrahlung	862	17.5.1	Idealkristall und Realkristall	946
16.3.5	Charakteristische Strahlung	863	17.5.2	Thermische Fehlordnung	946
16.3.6	Röntgenabsorption	865	17.5.3	Chemische Fehlordnung	948
16.4 Moleküle	869	17.5.4	Versetzungen	949	
16.4.1	Die Energiestufen der Moleküle	869	17.6 Makromolekulare Festkörper	952	
16.4.2	Rotationsbanden	870	17.6.1	Definition und allgemeine Eigenschaften	952
16.4.3	Das Rotations-Schwingungs- Spektrum	871	17.6.2	Länge eines linearen Makromoleküls	953
16.4.4	Die Potentialkurve des Moleküls ...	872	17.6.3	Gummielastizität	955
16.4.5	Molekulare Quantenzustände	874	17.6.4	Hochpolymere	956
16.4.6	Quantenchemie	875	17.7 Supraleitung	957	
Aufgaben	880	Aufgaben	963		
17. Festkörperphysik	17		18. Kerne und Elementarteilchen	18	
17.1	Kristallgitter	884	18.1	Kernbausteine	969
17.1.1	Dichteste Kugelpackungen	885	18.1.1	Kernbausteine und Kernkräfte	969
17.1.2	Gittergeometrie	889	18.1.2	Massendefekt, Isotopie und Massenspektroskopie	971
17.1.3	Kristallstrukturanalyse	891	18.1.3	Kernmodelle	973
17.1.4	Gitterenergie	895	18.1.4	Kernspaltung	976
17.1.5	Kristallbindung	900	18.1.5	Kernfusion	977
17.1.6	Einiges über Eis	903	18.2 Radioaktivität	981	
17.1.7	Kristallwachstum	907	18.2.1	Elementumwandlung	981
17.1.8	Fullerene	909	18.2.2	Zerfallsenergie	984
			18.2.3	Das Zerfallsgesetz	986
			18.3 Schnelle Teilchen	988	
			18.3.1	Durchgang schneller Teilchen durch Materie	989
			18.3.2	Nachweis schneller Teilchen	990
			18.3.3	Teilchenbeschleuniger	995
			18.3.4	Strahlendosis und Strahlenwirkung	999

18.4 Elementarteilchen 1002

18.4.1 Historischer Überblick 1002

18.4.2 Wie findet man neue Teilchen? 1004

18.4.3 Myonen und Pionen 1008

18.4.4 Neutron und Neutrinos 1009

18.4.5 Wechselwirkungen 1012

18.4.6 Elektromagnetische Wechselwirkung 1016

18.4.7 Die innere Struktur der Nukleonen . 1018

18.4.8 Das Quarkmodell 1019

18.4.9 Quantenchromodynamik 1023

18.4.10 Symmetrien, Invarianzen, Erhaltungssätze 1026

18.4.11 Magnetische Monopole 1029

18.5 Kosmische Strahlung 1030

18.5.1 Ursprung und Nachweis 1030

18.5.2 Wechselwirkung mit Materie 1031

18.5.3 Strahlungsgürtel 1032

Aufgaben 1035

19. Statistische Physik 19

19.1 Statistik der Ensembles 1045

19.1.1 Zufallstexte 1045

19.1.2 Wahrscheinlichkeit einer Komposition 1046

19.1.3 Die wahrscheinlichste Komposition 1048

19.1.4 Schwankungserscheinungen 1050

19.1.5 Die kanonische Verteilung 1051

19.1.6 Beispiel: „Harmonischer Oszillator“ 1054

19.1.7 Mischungsentropie 1055

19.1.8 Das kanonische Ensemble (Ensemble von Gibbs) 1056

19.1.9 Arbeit und Wärme 1057

19.2 Physikalische Ensembles 1058

19.2.1 Physikalische Deutung 1058

19.2.2 Zustandsänderungen 1058

19.2.3 Verteilungsmodul und Temperatur . 1059

19.2.4 Wahrscheinlichkeit und Entropie ... 1060

19.2.5 Die freie Energie; Gleichgewichtsbedingungen 1060

19.2.6 Statistische Gewichte 1062

19.2.7 Der Phasenraum 1063

19.2.8 Das ideale Gas 1064

19.2.9 Absolute Reaktionsraten 1066

19.3 Quantenstatistik 1067

19.3.1 Abzählung von Quantenteilchen 1067

19.3.2 Fermi-Dirac- und Bose-Einstein-Statistik 1068

19.3.3 Das Fermi-Gas 1071

19.3.4 Stoßvorgänge bei höchsten Energien 1074

19.3.5 Extreme Zustände der Materie 1076

19.3.6 Biografie eines Schwarzen Loches . 1077

Aufgaben 1079

20. Nichtlineare Dynamik 20

20.1 Stabilität 1086

20.1.1 Dynamische Systeme 1086

20.1.2 Stabilität von Fixpunkten 1088

20.1.3 Der Phasenraum deterministischer Systeme 1090

20.2 Nichtlineare Schwingungen 1093

20.2.1 Pendel mit großer Amplitude 1093

20.2.2 Erzwungene Schwingungen mit nichtlinearer Rückstellkraft 1094

20.2.3 Selbsterregte Schwingungen 1096

20.2.4 Parametrische Schwingungserregung 1100

20.3 Biologische und chemische Systeme 1101

20.3.1 Populationsdynamik 1101

20.3.2 Einfache ökologische Modelle 1106

20.3.3 Kinetische Probleme 1109

20.4 Chaos und Ordnung 1113

20.4.1 Einfache Wege ins Chaos 1113

20.4.2 Chaos und Fraktale 1115

20.4.3 Iteratives Gleichungslösen 1120

20.4.4 Chaos im Kochtopf 1121

Aufgaben 1125

Quellennachweis

für die Einleitungs- und Ausblickabbildungen ... 1131

Sach- und Namenverzeichnis

A–Z..... 1133

Mechanik der Massenpunkte

■ Inhalt

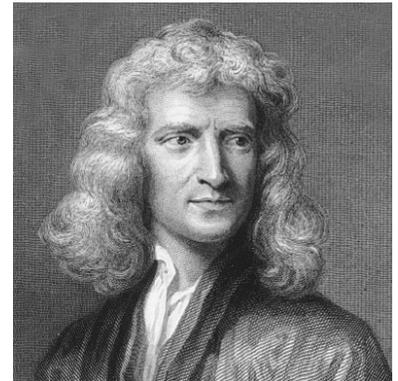
1.1	Messen und Maßeinheiten	1
1.2	Kinematik	9
1.3	Dynamik	12
1.4	Einfache Bewegungen	14
1.5	Arbeit, Energie, Impuls, Leistung	20
1.6	Reibung	40
1.7	Gravitation	46
1.8	Trägheitskräfte	54

▼ Einleitung

Der einfachste Teil der Mechanik behandelt Fälle, in denen man von der Ausdehnung der Körper absehen und sie als mit Masse behaftete Punkte, **Massenpunkte** betrachten kann.

Dieser Begriff des Massenpunktes ist nicht so unproblematisch wie er klingt. Es ist verwunderlich, dass er sich überhaupt auf die Wirklichkeit anwenden lässt. Selbst ein Atom ist z. B. eigentlich kein Massenpunkt: Es kann u. A. rotieren und Rotationsenergie aufnehmen, was ein Massenpunkt nicht kann (oder wenn er es täte, würde es niemand merken). Wieso die Punktmechanik trotzdem für Atome so gut stimmt, hat erst die Quantenmechanik aufgeklärt (Abschn. 16.4.2). Eine weitere dem Begriff des Massenpunktes innewohnende Schwierigkeit, nämlich dass er eine unendliche Energie haben müsste, macht der Physik der Elementarteilchen noch heute zu schaffen (Abschn. 18.4.6).

Aus der Punktmechanik kann man logisch einwandfrei die Mechanik des starren Körpers (Kap. 2) und die der deformierbaren Körper (Kap. 3) entwickeln, indem man diese als Systeme unendlich vieler Massenpunkte mit festen bzw. veränderlichen relativen Lagebeziehungen auffasst.



„... im November (1665) hatte ich die Differentialrechnung, im Januar darauf die Farbtheorie, im Mai hatte ich Zugang zu der umgekehrten Differentialrechnung, und im selben Jahr begann ich zu denken, dass die Schwerkraft sich auch auf den Mond erstrecke, und ... aus Keplers Gesetz ... leitete ich ab, dass die Kräfte auf die Planeten in umgekehrtem Verhältnis zum Quadrat ihres Abstandes stehen ... denn damals war ich in der Blüte des Alters, in dem ich Erfindungen machte...“

Isaac Newton, 1716

1.1 Messen und Maßeinheiten

Die Physik ist eine messende Wissenschaft. Parallel zum „Wie“ und oft noch vor dem „Warum“ fragt sie nach dem „Wie viel“.

1.1.1 Messen

Eine Größe messen heißt, sie direkt oder indirekt mit einer Maßeinheit vergleichen. Der direkteste Vergleich besteht z. B. im wiederholten Anlegen eines Maßstabes. Meist ist der Vergleich indirekt, er benutzt dann eine Frage der Art: Wie heiß muss der Körper sein, damit er eine gewisse

Wirkung hervorbringt, z. B. so und so stark Licht abstrahlt (**Pyrometrie**). Indirektes Messen setzt ein Naturgesetz voraus, das die zu messende Größe (die Temperatur) und ihre direkt beobachtete Wirkung (die Lichtstrahlung) verknüpft. Dieses Naturgesetz muss durch unabhängige Beobachtungen vorher sichergestellt worden sein, die die nicht direkt beobachtete Größe (die Temperatur) durch eine andere ihrer Wirkungen (z. B. die Längenausdehnung von Körpern) erfassen. Offensichtlich läuft dieses Verfahren Gefahr, sich in den Schwanz zu beißen. Der einzige Ausweg aus dem *Circulus vitiosus* ist eine *Definition* der zu messenden Größe durch eine ihrer Wirkungen. So wird die **Temperatur** im täglichen Leben durch die Längenausdehnung einer Quecksilbersäule, in der Physik durch die mittlere kinetische Energie der Moleküle *definiert*. Andere als solche **operationellen Definitionen** von Größen, die implizit ein Messverfahren enthalten, darf die Physik nicht anerkennen. Ein tieferes Durchdenken der Frage, ob eine Größe operationell definiert ist oder nicht, führt zu weit reichenden Ergebnissen, z. B. zur Relativitäts- und zur Quantentheorie.

1.1.2 Maßeinheiten

Für jede physikalische Größe muss eine **Maßeinheit** materiell festgelegt sein. Man unterscheidet natürliche und willkürliche Einheiten, aber diese Unterscheidung ist selbst nicht ganz natürlich. Wenn Henry I. von England (1120) das Yard durch seinen ausgestreckten Arm definierte, oder selbst wenn König David von Schottland (1150) das Inch als durchschnittliche Daumendicke dreier Männer „eines großen, eines kleinen und eines mittelgroßen Mannes“ festlegte, so sind das zweifellos willkürliche Definitionen. Aber auch der Erdäquator ist weder unveränderlich, noch hat er universelle Bedeutung. Eine natürliche **Längeneinheit** könnte man z. B. durch den Abstand zweier Atome in einem bestimmten Kristall festlegen, der keiner Kraft ausgesetzt ist. Willkürliche Einheiten müssen durch **Normale** festgehalten werden. Jeder Meterstab ist ein solches, wenn auch mehr oder weniger unvollkommenes, Normal. Natürliche Einheiten lassen sich im Prinzip jederzeit reproduzieren, allerdings oft durch einen ziemlich langwierigen Prozess.

1.1.3 Maßsysteme und Dimensionen

Welche physikalischen Größen man als Grund- und welche als abgeleitete Größen betrachtet, ist lediglich eine Frage der Zweckmäßigkeit. Von den vielen **Maßsystemen**, jedes charakterisiert durch einen Satz von Grundgrößen, die die Physik und ihre Teilgebiete entwickelt haben, wird in diesem Buch nur eins benutzt:

Das **Internationale System (SI)**, das als Weiterentwicklung des mechanischen MKS- und des elektromagnetischen Giorgi-Systems die Grundgrößen *Länge, Zeit, Masse, Temperatur, elektrischer Strom, Lichtstärke* und *Substanzmenge* mit den **Einheiten** Meter (m), Sekunde (s), Kilogramm (kg), Kelvin (K), Ampere (A), Candela (cd), und Mol (mol) benutzt und in der Technik Gesetzeskraft hat.

Das **CGS-System**, das die Ladung durch die mechanischen Grundgrößen ausdrückt, mit den **Einheiten** Zentimeter (cm), Sekunde (s) und Gramm (g), beherrscht noch praktisch die ganze atomphysikalische Literatur, besonders im nichtdeutschen Sprachbereich. Die Atomphysik hat es nämlich hauptsächlich mit **Punktladungen** zu tun, und die elektrostatische Energie zweier Punktladungen e im Abstand r ist im CGS-System einfach e^2/r , im SI $e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$. In den Energiestufen des bohrschen Atommodells tritt der Faktor $4\pi\epsilon_0$ sogar zweimal auf. Dagegen ist die Umrechnung von Strömen, Widerständen, Induktivitäten zwischen den CGS-Einheiten und den praktischen Einheiten Ampere, Ohm, Henry des SI ziemlich unangenehm.

Abgeleitete Größen erhalten eine **Dimension**, d. h. eine algebraische Kombination der Grundgrößen, die ihrer Definition entspricht. Man sollte bei keiner physikalischen Rechnung versäumen nachzuprüfen, ob die berechneten Größen die richtige Dimension haben, und ob zwei durch ein Gleichheits-, Plus- oder Minuszeichen verknüpfte Ausdrücke die gleiche Dimension haben. Über diese schnellste Fehlerkontrolle hinaus liefert die Dimensionsanalyse häufig Anhaltspunkte, wie eine gesuchte Beziehung überhaupt aussehen kann. In den Ähnlichkeitskriterien der Hydrodynamik und anderer Gebiete sind diese Methoden weit entwickelt worden.

In den einzelnen Gebieten der Physik und ihrer Anwendungen treten sehr verschiedene Größenordnungen für die einzelnen Größen auf. Es ist daher bequem, Vielfache und Teile der Einheiten zu benutzen (Tabelle 1.1).

× Beispiel ...

Prüfen Sie die angegebene Länge des Lichtjahres nach. Die Astronomen benutzen öfter 1 Parsec = 1 pc. Das ist der Abstand, aus dem der Erdbahnradius unter dem Winkel 1'' (1 Bogensekunde) erscheinen würde. Wie lang ist 1 pc?

$$1 \text{ Lichtjahr} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \cdot 3,16 \cdot 10^7 \text{ s} = 9,47 \cdot 10^{15} \text{ m.}$$

$$1 \text{ pc} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} \cdot 57 \cdot 60 \cdot 60 = 3,08 \cdot 10^{16} \text{ m.}$$

Tabelle 1.1. Präfixe für Einheiten

Vorsilbe	Symbol	Potenz
Exa-	E	$1 \cdot 10^{18}$
Peta-	P	$1 \cdot 10^{15}$
Tera-	T	$1 \cdot 10^{12}$
Giga-	G	$1 \cdot 10^9$
Mega-	M	$1 \cdot 10^6$
Kilo-	k	$1 \cdot 10^3$
Centi-	c	$1 \cdot 10^{-2}$
Milli-	m	$1 \cdot 10^{-3}$
Mikro-	μ	$1 \cdot 10^{-6}$
Nano-	n	$1 \cdot 10^{-9}$
Pico-	p	$1 \cdot 10^{-12}$
Femto-	f	$1 \cdot 10^{-15}$
Atto-	a	$1 \cdot 10^{-18}$

Die Wellenlängen des sichtbaren Lichts liegen knapp unter $1 \mu\text{m}$, die Durchmesser der Atome betragen einige \AA ($1 \text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$), die der Atomkerne einige fm. Fixsterne sind einige Lichtjahre voneinander entfernt ($1 \text{ Lichtjahr} = 9,47 \cdot 10^{15} \text{ m}$), dem ganzen Weltall schreibt man einen Radius von etwa 10^{10} Lichtjahren zu.

1.1.4 Längeneinheit

Das **Meter** war vor 1799 als der 10 000 000ste Teil des (ungenau gemessenen) Erdquadranten, später auf Grund dieser Definition durch einen im Sevres deponierten Platin-Iridium-Stab, das Archivmeter, festgelegt. Nachdem das Archivmeter den steigenden Anforderungen von Physik und Technik an Definiertheit und Konstanz nicht mehr genügte, wurde 1960 die Vakuum-Wellenlänge zugrunde gelegt, die das Nuklid ^{86}Kr beim Übergang $5d_5 \rightarrow 2p_{10}$ aussendet. Seit 1983 ist das Meter an die sehr viel genauere Sekundendefinition durch die modernen Atomuhren angeschlossen: Das Meter ist die Strecke, die das Licht im Vakuum in $1/299\,792\,458 \text{ s}$ zurücklegt.

Große Entfernungen lassen sich damit aus der Laufzeit elektromagnetischer Wellen direkt mit der Uhr messen, sehr kleine Abstände mit interferometrischen Methoden ebenfalls. Im dazwischenliegenden Bereich alltäglicher Längen überträgt man die natürliche Einheit auf sekundäre Normale wie **Endmaße**.

Endmaße dienen für besonders genaue Messungen nicht zu großer Längen. Es sind quaderförmige Metallstücke, an denen zwei gegenüberliegende Flächen sehr genau planparallel geschliffen und hochpoliert sind. Der Abstand dieser Flächen ist auf wenige μm genau angegeben. Planflächen von so hoher Qualität haften aneinander, sodass man durch Aneinandersetzen mehrerer Endmaße neue Maße bilden kann, die ebenso präzise sind.

1.1.5 Winkelmaße

Ebene **Winkel** kann man im Gradmaß angeben. 1 Grad (1°) ist $\frac{1}{360}$ des „vollen“ Winkels. Kleinere Einheiten sind (Bogen-) Minute ($'$) und (Bogen-) Sekunde ($''$). $1^\circ = 60' = 3\,600''$. Bei astronomischen Messungen erreicht man eine Genauigkeit von Bruchteilen von Bogensekunden.

Mathematisch einfacher ist das **Bogenmaß**, d. h. das Verhältnis der Kreisbogenlänge, die der gegebene Winkel aufspannt, zum Radius dieses Kreises.

Die Einheit erhält manchmal den eigenen Namen **Radian (rad)**:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,295^\circ .$$

Radian ist nur ein anderer Name für die Zahl 1. Entsprechend ist 1° nur ein anderer Name für die Zahl $\frac{1}{57,295} = 0,01745$.

Ein **Raumwinkel** ist gegeben durch das Verhältnis des über ihm aufgespannten Kugelflächenteils zum Quadrat des Radius der Kugel. Die Einheit wird manchmal **Steradian** genannt (Aufgabe 1.1.1).

1.1.6 Zeitmessung

Alle periodischen Vorgänge sind als mehr oder weniger genaue **Uhren** brauchbar. Der Ablauf einmaliger Vorgänge hat dagegen nur noch geringe Bedeutung für die Zeitmessung (Sanduhr). Besonders regelmäßige periodische Vorgänge sind Pendelschwingungen, elastische Schwingungen, Atomschwingungen und die Rotation der Erde. Bei der Erddrehung sind zu unterscheiden die Rotationsperiode relativ zu den Fixsternen (**Sterntag**) und relativ zur Sonne (**Sonnentag**). Die Länge des Sonnentages variiert mit der Jahreszeit. Der **mittlere Sonnentag** ist um $\frac{1}{365,256}$ länger als der Sterntag, weil die Erde an einem Tag auf ihrer Bahn um die Sonne um gerade diesen Teil des Vollkreises weiterückt und die Drehungen der Erde um die Sonne und um ihre Achse im gleichen Sinn erfolgen (Aufgabe 1.1.2). Sterntag und Sonnentag werden gemessen als Zeitabstand der Durchgänge eines Fixsterns bzw. der Sonne durch den gleichen Himmelsmeridian, z. B. durch den Meridian, der durch den Zenit geht (obere bzw. untere Kulmination). Ältere Zeiteinheit ist die *mittlere Sonnensekunde* (s).

Auch diese Sekunde ist keine zuverlässige natürliche Einheit. Die Achsdrehung der Erde hängt von der Massenverteilung um die Achse

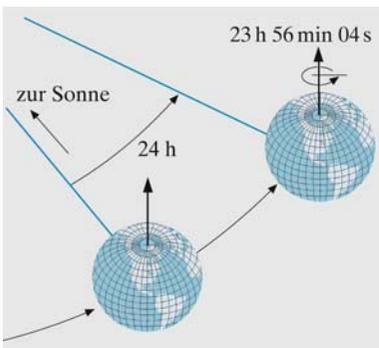


Abb. 1.1. Die Erde erfährt in 24 Stunden etwas mehr als eine volle Umdrehung, weil sie auch auf ihrer Bahn um einen Winkel von fast einem Grad vorgerückt ist

ab und erfolgt nicht mit genau konstanter Winkelgeschwindigkeit. Die Gezeitenreibung bremst außerdem die Drehung langsam, aber ständig ab. Andererseits ist die Schwingungsdauer eines „Sekundenpendels“ nicht nur von der Pendellänge, sondern auch von der Fallbeschleunigung abhängig; diese hängt ebenfalls von der Massenverteilung auf und in der Erde ab und ist daher örtlich und in geringerem Maße zeitlich veränderlich (Aufgaben 1.1.4–1.1.6).

Ein Quarzstab kann piezoelektrisch (Abschn. 6.2.5) zu Schwingungen angeregt werden, deren Periode außer von den Stababmessungen nur von der Dichte und den elastischen Eigenschaften abhängt (Abschn. 4.4.3). Diese sind aber durch Masse, Anordnung der Atome im Kristallgitter und Atomkräfte eindeutig bestimmt. Es gibt **Quarzuhren**, deren Gang an Regelmäßigkeit den der besten astronomischen Pendeluhrn übertrifft.

Eine bessere Konstanz als die Rotation der Erde zeigen auch periodische Vorgänge innerhalb des Atoms. Zum Bau von höchst konstanten Uhren verwendet man einen inneratomaren Prozess eines Isotops des Caesiums (^{133}Cs), dessen Frequenz im Bereich technisch erzeugbarer elektromagnetischer Schwingungen liegt ($9 \cdot 10^9$ Hz). Die Absorption dieser Schwingungen durch die ^{133}Cs -Atome wird benützt, um die Frequenz des sie erzeugenden Senders dauernd genau auf dieser inneratomaren Frequenz zu halten. Die relative Frequenzabweichung kann um 10^{-13} gehalten werden.

Im Jahr 1964 wurde durch Anschluss an die alte Sekundendefinition (Sonnensekunde) provisorisch festgelegt, die Zeit für 9 192 631 770 Schwingungen dieses ^{133}Cs -Übergangs als 1 s zu bezeichnen.

1.1.7 Messfehler

Eine völlig genaue Messung einer kontinuierlichen Größe ist nicht möglich. Es besteht immer eine Abweichung $\Delta x = x_a - x_r$, genannt **absoluter Fehler**, zwischen dem abgelesenen Wert x_a und dem realen Wert x_r . Für Vergleichszwecke wichtig ist auch der **relative Fehler** $\Delta x/x_a$. Die Kunst des Experimentators liegt darin, den Fehler klein zu halten und den unvermeidlichen Fehler sauber abzuschätzen.

Von **groben Fehlern**, bedingt durch Unachtsamkeit, unsachgemäße Handhabung des Messgeräts, Benutzung einer falschen Theorie der untersuchten Vorgänge wollen wir hier nicht reden. Die Messung soll „allen Regeln der Kunst“ entsprechen. Dann bleiben Fehler, die durch Unvollkommenheiten des Messgeräts oder störende Einflüsse der Umgebung bedingt sind (objektive Fehler), und Fehler, die der Beobachter beim Einstellen und Ablesen macht (subjektive Fehler). Beide Arten von Fehlern können konstant, systematisch oder zufällig sein.

Konstante Fehler, z. B. infolge einer falsch gestellten Uhr (objektiv) oder die Tatsache, dass der Beobachter immer etwas von links her auf Zeiger und Skala schaut statt genau senkrecht (**parallaktischer Fehler**, subjektiv), sind meist leicht durch Differenzmessung zu beseitigen. Oft kommt es nur auf die Differenz zweier Ablesungen an; der Parallaxenfehler fällt weg, wenn der Beobachter aller Zeigerstellungen von seiner „persönlichen Nullstellung“ an rechnet.

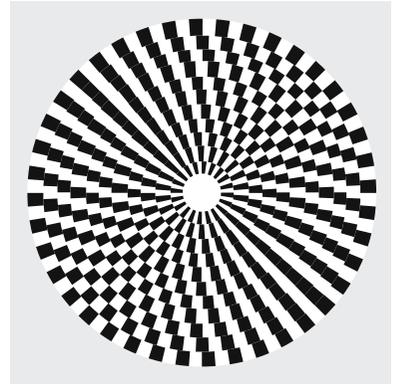


Abb. 1.2. Stroboskop. Der innerste Ring hat $N = 20$ schwarze Sektoren, nach außen nimmt N in Zwaiserschritten zu bis 40 ganz außen. Wenn im Lampenlicht, das mit 100 Hz schwankt, nur der Ring mit N klar zu sehen ist, hat die Scheibe $6000/N$ Umdrehungen/min oder ein Vielfaches davon

Für die Erfassung und Beseitigung **systematischer Fehler** gibt es keine so einfache Regel. Bestandteil jeder Messung ist eine mindestens qualitative Analyse der erkennbaren, aber mit den gegebenen Mitteln nicht unterdrückbaren systematischen Fehler.

Oft ist das Ergebnis eines Experiments keine direkte Zeigerablesung, sondern entsteht durch Kombination aus Messungen mehrerer Größen. So bestimmt man eine Geschwindigkeit i. Allg. aus einer Weg- und einer Zeitmessung. Die zu bestimmende Größe y sei also eine Funktion mehrerer anderer Größen x_1, x_2, \dots, x_k :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Wenn die Fehler der x_i bekannt und klein sind, d. h. $\Delta x_i \ll x_i$, ergibt sich der Fehler von y nach dem **Fehlerfortpflanzungsgesetz**

$$\Delta y = \sum_{i=1}^k \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i. \quad (1.1)$$

Dies folgt analytisch aus der Taylor-Entwicklung der Funktion f , anschaulich wenigstens für zwei Variable ($k = 2$) durch Betrachtung der Fläche $y = f(x_1, x_2)$. Die Absolutstriche sorgen dafür, dass man den *maximalen* Fehler von y erhält, der bei *ungünstiger* Kombination der Einzelfehler zustandekommen kann. Aus (1.1) sieht man sofort:

Der *absolute* Fehler einer *Summe* oder *Differenz* zweier Größen, $y = x_1 + x_2$ oder $y = x_1 - x_2$, ist die *Summe der absoluten Fehler* dieser Größen. Der *relative* Fehler eines *Produktes* oder *Quotienten* $y = x_1 x_2$ oder $y = x_1 / x_2$ ist die *Summe der relativen Fehler* dieser Größen. Der relative Fehler der n . Potenz einer Größe, $y = ax^n$, ist n -mal der relative Fehler dieser Größe.

Zufällige Fehler sind zwar in der Einzelmessung unvermeidlich, aber durch Kombination mehrerer Messungen im Prinzip beliebig reduzierbar. Im Gegensatz zu den systematischen Fehlern rechnet man hierzu Abweichungen, die auf unkontrollierbaren Einflüssen des Messgeräts, der Umgebung oder des Beobachters beruhen und die *ebenso oft* in *positiver* wie in *negativer* Richtung erfolgen. Wenn man eine solche Messung mehrfach unter Umständen ausführt, die so identisch wie möglich sind, erhält man Ergebnisse x_1, x_2, \dots, x_n , die sich irgendwo über die x -Achse verteilen. x_i sei das Ergebnis der i -ten Messung (zu unterscheiden von den x_i in (1.1), die Messungen *verschiedener* Größen beschreiben). Dann definiert man als **Mittelwert** der Ergebnisse

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.2)$$

Er stellt offenbar die unter den Umständen beste Schätzung des wahren Wertes x_T dar. Wie gut diese Schätzung ist, sieht man aus der Breite der Verteilung, beschrieben durch die *Streuung* oder **Standard-Abweichung**

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \tag{1.3}$$

(für $n \gg 1$: Aufgabe 1.1.7). Wenn man das Quadrat ausmultipliziert und (1.2) benutzt, findet man, dass

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{1}{n} (\sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + \sum \bar{x}^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} (\sum x_i^2 - 2n\bar{x}\bar{x} + n\bar{x}^2)} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

günstiger ist. (Man beachte: in $\overline{x^2}$ wird erst quadriert, dann gemittelt, in \bar{x}^2 umgekehrt.)

Mit zufälligen Fehlern behaftete Größen sind i. Allg. *normalverteilt*, d. h. sie folgen einer **Normal-** oder **Gauß-Verteilung**: Eine Einzelmessung der Größe x hat die Wahrscheinlichkeit $p(x)dx$, einen Wert aus dem Intervall $(x, x + dx)$ zu ergeben, wobei

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/(2\sigma^2)}. \tag{1.5}$$

Das Bild dieser Funktion ist eine symmetrische Glockenkurve mit dem Maximum bei $x = \bar{x}$. Wenn man sich auf der Abszisse um ein Stück σ von diesem Wert \bar{x} entfernt, fällt die Kurve auf den Bruchteil $e^{-1/2} = 0,607$ ihres Maximalwerts. Der Faktor $1/\sqrt{2\pi} \sigma$ sorgt dafür, dass die Fläche unter der Kurve von $x = -\infty$ bis $x = \infty$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass x irgendeinen Wert hat, sich zu 1 ergibt (Aufgabe 1.1.8). \bar{x} ist der Mittelwert, denn

$$\int x p(x) dx = \bar{x},$$

σ ist die Streuung, denn

$$\int (x - \bar{x})^2 p(x) dx = \sigma^2.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gemessener Wert nicht mehr als eine gegebene Abweichung δ vom wahren Wert (repräsentiert durch \bar{x}) hat, ist gleich der Fläche unter der Gauß-Kurve zwischen $\bar{x} - \delta$ und $\bar{x} + \delta$. Diese Wahrscheinlichkeit heißt auch *statistische Sicherheit* P für die **Vertrauensgrenze** δ . P hängt nur von δ/σ ab. Wenn jemand 95% Sicherheit haben will, dass seine Vertrauensgrenzen den wahren Wert umfassen, muss er angeben $x = \bar{x} \pm 1,96 \sigma$.

Normalverteilte zufällige Fehler reduzieren sich durch wiederholte Messung. Ein einzelner Messpunkt weicht im Durchschnitt um σ vom wahren Wert ab, d. h. er hat die Wahrscheinlichkeit 0,683 ▶

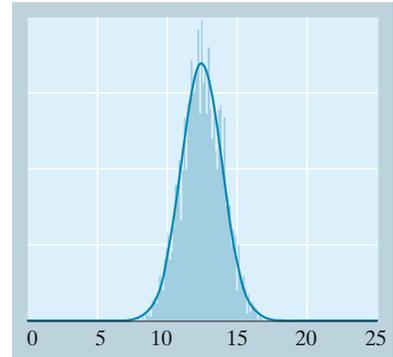


Abb. 1.3. 2 500 Summen aus je 25 Zufallszahlen verteilen sich nach Gauß, ähnlich wie die Ergebnisse vieler gleichartiger Messungen. Wovon hängen Mittel und Standard-Abweichung ab? Das Mittel von Zufallszahlen aus $(0, 1)$ ist $\frac{1}{2}$, ihre Standard-Abweichung $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$, wobei $\bar{x}^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, also $\sigma = 0,2887$. Für N Summen aus je Z Zufallszahlen: Mittel $Z/2$, Standard-Abweichung $\sqrt{Z}\sigma$. Je größer N , desto besser die Annäherung an die Gauß-Funktion

δ/σ	0,676	1,000	1,960
	2,000	2,581	3,000
P	0,500	0,683	0,950
	0,954	0,990	0,997

Wie kommt man zu diesen Werten? $P(z)$ ist die Fläche unter der Gauß-Kurve zwischen $z = 0$ und $z = \delta/(\sqrt{2}\sigma)$, also $P(z) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} \int_0^z e^{-x^2} dx$. Das Integral bestimmen wir durch Reihenentwicklung des Integranden: $\int_0^z (1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - + \dots) = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{10}z^5 - + \dots$. Das ist noch mit $2/\sqrt{\pi}$ zu multiplizieren. Wenige Taschenrechnerschritte liefern die Tabellenwerte.

innerhalb des Intervalls $x_r \pm \sigma$ zu liegen. Der *Mittelwert* von n Messungen weicht im Durchschnitt nur um

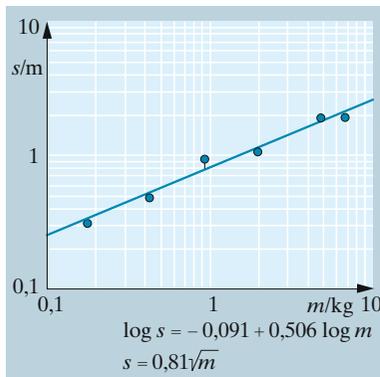
$$\Delta \bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1.6}$$

ab, d. h. liegt mit der Wahrscheinlichkeit 0,683 in dem viel kleineren Intervall $x \pm \sigma/\sqrt{n}$.

Leonardo da Vinci stellte folgende Daten über Körpermassen m und Flügelspannweiten s von Vögeln zusammen (hier in heutigen Einheiten ausgedrückt):

	m/kg	s/m
Amsel	0,17	0,32
Eichelhäher	0,42	0,48
Blesshuhn	0,92	0,95
Stockente	1,95	1,10
Graugans	4,80	1,85
Storch	6,60	1,95

Da wir eine Potenzabhängigkeit $s(m) = am^b$ vermuten, tragen wir die Werte in einem $\log(s)$ - $\log(m)$ -Diagramm auf, dessen Steigung den Exponenten b ergibt. Lesen Sie b ab und erklären Sie das Ergebnis. Welche Spannweite braucht ein fliegender Mensch?



Dies ist ein wichtiges Ergebnis der von *C.F. Gauß* begründeten **Ausgleichsrechnung**. Sie geht davon aus, dass sich die Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ereignisse zur Wahrscheinlichkeit des Gesamtereignisses multiplizieren. Wenn man Wahrscheinlichkeiten wie (1.5) multipliziert, addieren sich die Exponenten. Nun geht es darum, die Schätzwerte x_r so zu bestimmen, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit maximal wird, dass also der Exponent, der ja negativ ist, minimal wird. Der Exponent ist die Summe der Quadrate von Abweichungen $x - x_r$. Daher spricht man von der **Methode der kleinsten Quadrate**.

Diese Überlegungen führen auf ein anderes Fehlerfortpflanzungsgesetz als (1.1). Dieses stellt den schlimmsten Fall dar, wo sich alle Einzelfehler im gleichen Sinn summieren, um das Ergebnis zu verfälschen. Wenn es sich um viele *unabhängige* Einzelfaktoren handelt, ist das sehr unwahrscheinlich. Man bleibt im Rahmen vernünftig gewählter statistischer Sicherheit (z. B. $P = 0,683$), wenn man die Standard-Abweichung der *kombinierten* Verteilung als Vertrauensgrenze angibt. Diese Standard-Abweichung ergibt sich aus der *geometrischen* Addition der Einzelfehler:

$$\Delta y = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2}, \tag{1.7}$$

als ob jeder Einzelfaktor seine eigene Raumdimension hätte und der Gesamtfehler aus dem Pythagoras folgte, oder, was dasselbe ist, als Betrag eines Vektors entstünde. Da der Betrag eines Vektors immer kleiner ist als die Summe seiner absolut genommenen Komponenten, gibt das **Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß** (1.7) eine mildere Schätzung als (1.1).

Eine andere wichtige Anwendung der Ausgleichsrechnung ist die **lineare Regression**. Man hat eine Größe y gemessen, von der man annimmt, dass sie linear von einer anderen Größe x abhängt. Messwerte von y liegen für die x -Werte x_1, x_2, \dots, x_n vor, d. h. man verfügt über n Wertepaare (x_i, y_i) , die in die x, y -Ebene eingetragen eine mehr oder weniger längliche Punktwolke ergeben. Welches ist die Gerade $y = a + bx$, die die Messwerte am besten beschreibt? Gesucht sind also die Werte a und b , für die die Summe S der Quadrate der vertikalen Abstände zwischen den Messpunkten und der Geraden so klein wie möglich ist, d. h. für die

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 = \min . \tag{1.8}$$

Man findet dieses Minimum durch Nullsetzen der Ableitungen nach a und b :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum (y_i - a - bx_i) = 0, \tag{1.9}$$

d. h. $\sum y_i = a + b \sum x_i.$

Das bedeutet, dass die beste Gerade durch den Punkt geht, der den Mittelwerten von x und y entspricht. Weiter

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum x_i (y_i - a - bx_i) = 0,$$

d. h. $\sum x_i y_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2.$

Hier setzen wir $a = \sum y_i - b \sum x_i$ aus (1.9) ein und erhalten, nach b aufgelöst,

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \tag{1.10}$$

Damit sind Steigung b und y -Abschnitt a der besten Geraden durch die bekannten Messwerte x_i und y_i ausgedrückt. Kompliziertere als lineare Abhängigkeiten kann man oft durch geeignete Auftragung auf lineare zurückführen. Vermutet man z. B. ein Gesetz $y = a e^{-bx}$, dann trage man y logarithmisch auf (einfach-logarithmisches mm-Papier) und kann aus $\ln y = -bx + \ln a$ die Konstanten $-b$ und $\ln a$ nach der obigen Methode finden.

1.2 Kinematik

Die Kinematik untersucht das „Wie“, den Ablauf der Bewegung, ohne nach dem „Warum“ zu fragen.

1.2.1 Ortsvektor

Um Bewegungen zu beschreiben, muss man zuerst ein **Bezugssystem** festlegen. Sein Ursprung O kann materiell definiert sein (Zimmerecke, Autozündschloss, Erdmittelpunkt, Sonne ...), oder ein gedachter Punkt (Schwerpunkt des Systems Erde–Mond ...). Ob sich O selbst bewegt, spielt zunächst keine Rolle und lässt sich auch prinzipiell nicht sagen, jedenfalls nicht bei gleichförmiger Bewegung (Abschn. 1.8). Den Ort eines Massenpunktes zur Zeit t beschreibt man dann durch einen Vektor $r(t)$, der von O bis zu diesem Ort führt. Will man diesen **Ortsvektor** in cartesische Koordinaten zerlegen, braucht man noch drei durch O gehende aufeinander senkrechte Achsen. Wenn sich der Massenpunkt relativ zu O bewegt, ändert sich r mit der Zeit t . Die Gesamtheit aller Endpunkte der Vektoren $r(t)$ zu allen möglichen Zeiten t bildet die Bahnkurve des Massenpunktes.

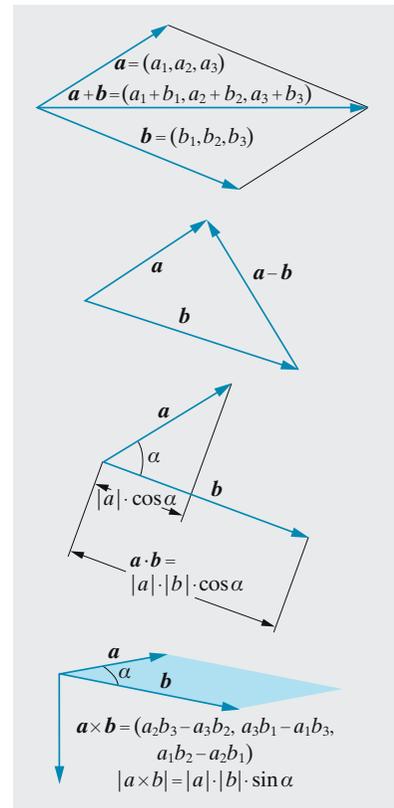


Abb. 1.4. Rekapitulation der Vektoralgebra

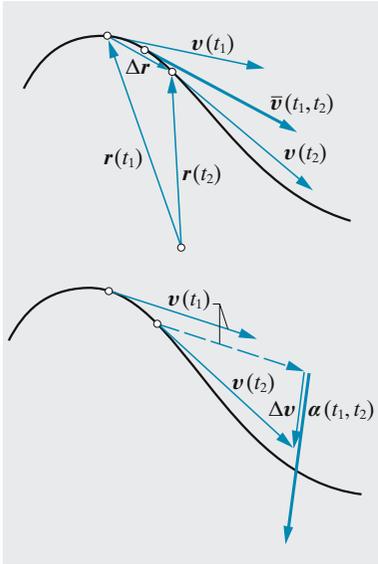


Abb. 1.5. *Oben*: Konstruktion der Geschwindigkeit aus der Bahnkurve. *Unten*: Konstruktion der Beschleunigung aus den Geschwindigkeitsvektoren

1.2.2 Geschwindigkeit

Die Differenz der Ortsvektoren für zwei Zeiten t_1 und t_2 ist die *Verschiebung* des Massenpunktes während dieser Zeit:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) . \tag{1.11}$$

Diese Verschiebung ist „in Luftlinie“ gemessen, ohne Berücksichtigung eventueller Bahnkrümmungen (Abb. 1.5).

✘ Beispiel . . .

Worauf beruht die bekannte Regel: Man teile die Zeit zwischen Blitz und Donner (in Sekunden) durch 3 und erhält den Abstand des Gewitters in km?

Der Schall breitet sich mit $c = 333 \text{ m/s}$ aus, das Licht praktisch unendlich schnell. Wenn das Gewitter 1 km entfernt ist, hört man den Donner 3 s nach dem Blitz.

Division der Verschiebung durch die dazu benötigte Zeit $t_2 - t_1$ liefert die **mittlere Geschwindigkeit** während dieser Zeit:

$$\bar{\mathbf{v}}(t_1, t_2) = \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{t_2 - t_1} . \tag{1.12}$$

Sie berücksichtigt offensichtlich nur den Gesamteffekt, nicht eventuelle Änderungen der Geschwindigkeit während dieser Zeit. Um die **Momentangeschwindigkeit** oder **Geschwindigkeit** schlechthin für einen bestimmten Zeitpunkt, etwa t_1 , zu erhalten, argumentiert man folgendermaßen: Wenn man den Zeitpunkt t_2 immer näher an t_1 heranrücken lässt, verringert man immer mehr die Möglichkeit für Geschwindigkeitsänderungen innerhalb dieses Zeitintervalls.

Der Grenzwert des Ausdruckes $\bar{\mathbf{v}}(t_1, t_2)$ für $t_2 \rightarrow t_1$ ist die **Momentangeschwindigkeit**

$$\mathbf{v}(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} . \tag{1.13}$$

In der Folge werden wir häufig die zeitliche Ableitung einer Größe kurz durch einen darübergesetzten Punkt kennzeichnen.

Wählt man das Meter als Längen- und die Sekunde als Zeiteinheit, so ist die Einheit der Geschwindigkeit sinngemäß m/s.

Die Geschwindigkeit ist zweifellos ein Vektor: Ihrer mathematischen Entstehung nach als Quotient des Verschiebungsvektors und des Skalars Zeit; vor allem aber ihrer physikalischen Bedeutung nach, denn sie hat eine Größe *und* eine Richtung. Ihre *Richtung* ist die gleiche wie die Grenzlage des Verschiebungsvektors für $t_2 \rightarrow t_1$, also die Richtung der Tangente an die Bahnkurve an der entsprechenden Stelle.

Im Allgemeinen wird sich die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ von Bahnpunkt zu Bahnpunkt, also auch von Zeitpunkt zu Zeitpunkt ändern. Ändert sich die Richtung von \mathbf{v} nicht (aber evtl. die Größe), so ist die Bahn geradlinig. Ändert sich die Größe von \mathbf{v} nicht (aber evtl. die Richtung), so nennt man

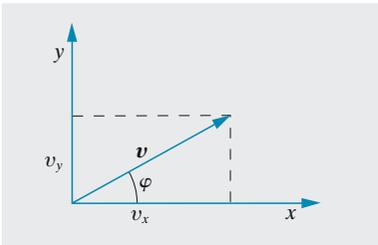


Abb. 1.6. Komponentenzerlegung

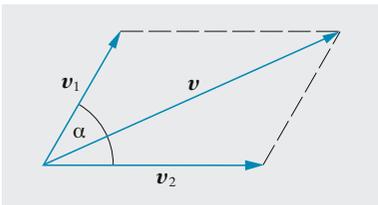


Abb. 1.7. Addition von Geschwindigkeiten

die Bewegung *gleichförmig*; sie kann indessen noch auf jeder beliebig gekrümmten Bahn erfolgen.

× Beispiel ...

Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit der Erde auf der Bahn um die Sonne; die des Mondes auf der Bahn um die Erde; die eines Punktes am Äquator bei der Achsendrehung der Erde? Mittlerer Abstand Sonne–Erde $1,5 \cdot 10^8$ km; mittlerer Abstand Erde–Mond 384 000 km; mittlerer Erdradius 6 378 km.

Erde um Sonne: $2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ km} / 3,15 \cdot 10^7 \text{ s} = 29,7 \text{ km/s}$.

Mond um Erde: $2\pi \cdot 384\,000 \text{ km} / (27,3 \cdot 86\,400 \text{ s}) = 1,02 \text{ km/s}$.

Punkt am Äquator: $2\pi \cdot 6\,378 \text{ km} / (86\,400 \text{ s} \cdot 365/366) = 0,465 \text{ km/s}$.

1.2.3 Beschleunigung

Die Geschwindigkeitsänderung $\Delta \mathbf{v}(t_1, t_2)$ zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 ergibt sich wieder durch vektorielle Differenzbildung zwischen $\mathbf{v}(t_2)$ und $\mathbf{v}(t_1)$. Diese Operation erfasst auch den Fall, dass sich nicht, oder nicht nur die Größe, sondern auch die Richtung der Geschwindigkeit ändert. Bei der zeichnerischen Bestimmung von $\Delta \mathbf{v}$ muss man einen der beiden Vektoren so parallelverschieben, dass beide Anfangspunkte koinzidieren (eine Parallelverschiebung ändert den Vektor nicht).

Die **mittlere Beschleunigung** während eines Zeitraums, z. B. des Intervalls (t_1, t_2) , ergibt sich wieder, indem man die Geschwindigkeitsänderung durch die dazu benötigte Zeit dividiert:

$$\bar{\mathbf{a}}(t_1, t_2) = \frac{\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (1.14)$$

Der Grenzübergang $t_2 \rightarrow t_1$ definiert die **Momentanbeschleunigung** oder **Beschleunigung** schlechthin für den Zeitpunkt t_1 :

$$\mathbf{a}(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.15)$$

Die Einheit der mittleren und der momentanen Beschleunigung ist sinngemäß $\text{m/s/s} = \text{ms}^{-2}$.

Folgende Tatsachen sind leicht aus diesen Definitionen abzuleiten (Abb. 1.8):

Wenn sich nur die *Größe* der Geschwindigkeit ändert, hat die Beschleunigung \mathbf{a} die Richtung (oder Gegenrichtung) zur Geschwindigkeit \mathbf{v} , je nachdem, ob es sich um eine „Beschleunigung“ im alltäglichen Sinne oder um eine Bremsung handelt (Tangentialbeschleunigung).

Wenn sich nur die *Richtung* der Geschwindigkeit ändert, steht der Beschleunigungsvektor senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor, also auch senkrecht auf der Bahn (Normalbeschleunigung).

Im allgemeinen Fall der Größen- und Richtungsänderung der Geschwindigkeit führt die eine zu einer Tangential-, die andere zu einer Normalkomponente der Beschleunigung („normal“ = senkrecht).

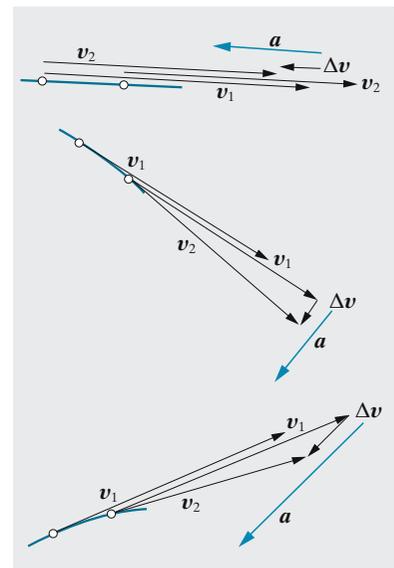


Abb. 1.8. Oben: Reine Tangentialbeschleunigung. Mitte: Reine Normalbeschleunigung. Unten: Allgemeiner Fall

1.3 Dynamik

Jetzt fragen wir auch nach der Ursache der Bewegung, besser nach der Ursache einer Änderung des Bewegungszustandes.

1.3.1 Trägheit

Der Nutzen des kinematischen Verfahrens, aus einem beliebigen Bewegungsablauf nacheinander die Vektorfunktionen $\mathbf{r}(t)$ (Bahnkurve), $\mathbf{v}(t)$ (Geschwindigkeit) und $\mathbf{a}(t)$ (Beschleunigung) herzuleiten, zeigt sich besonders, wenn man zu den Ursachen der Bewegung vorstoßen will. Hierzu muss man sich zunächst einigen, welche Bewegungen einer besonderen Ursache bedürfen und welche nicht. Die moderne exakte Naturwissenschaft begann mit der Feststellung *G. Galileis* (1564–1642), dass eine Bewegung mit konstantem Geschwindigkeitsvektor, eine **geradlinig gleichförmige Bewegung**, keiner Ursache bedarf, sondern aus sich selbst heraus immer weiter geht. Mit anderen Worten:

Ein sich selbst überlassener Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig (*Galileisches Trägheitsprinzip*). Ruhe ist danach nur ein Spezialfall einer geradlinig gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

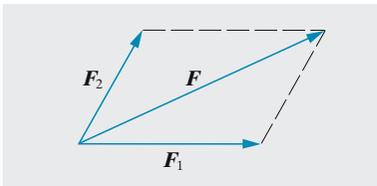


Abb. 1.9. Parallelogramm der Kräfte

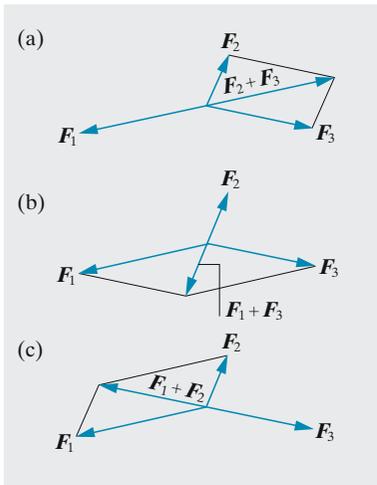


Abb. 1.10a–c. Gleichgewicht dreier Kräfte; $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}$, d. h.:

- (a) $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$,
 (b) $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3$,
 (c) $\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$

1.3.2 Kraft und Masse

Um einen Körper zu veranlassen, seinen geradlinig gleichförmigen Bewegungszustand aufzugeben, also um ihn zu beschleunigen, muss eine **Kraft** auf ihn wirken. Die Kraft ist ihrer Natur nach als Vektor darzustellen, der die gleiche Richtung hat wie die Beschleunigung, die sie hervorruft. Man stellt empirisch fest: Für einen gegebenen Körper ist die Größe der Kraft proportional der Größe der Beschleunigung. Gleiche Kräfte beschleunigen verschiedene Körper verschieden stark. Jeder Körper hat also eine gewisse Fähigkeit, dem Beschleunigtwerden Widerstand zu leisten, ausgedrückt durch seine **Masse**, genauer seine **träge Masse** m . Sir *I. Newton* (1643–1727) fasste diese Erfahrungstatsachen in dem **Aktionsprinzip** zusammen.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (\text{Bewegungsgleichung}) . \quad (1.16)$$

Diese Gleichung lässt sich in drei Richtungen lesen:

- Als Definitionsgleichung oder Bestimmungsgleichung für m : Wenn ein Körper unter dem Einfluss der gegebenen Kraft \mathbf{F} eine Bewegung mit der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ ausführt, welche Masse m ist ihm dann zuzuschreiben?
- Als Definitionsgleichung oder Bestimmungsgleichung für \mathbf{F} : Wenn ein Körper der Masse m eine Bewegung mit der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ ausführt, welche Kräfte müssen dann auf ihn gewirkt haben? (Kinematische Methode.)

- Als Bestimmungsgleichung für $\ddot{\mathbf{r}}$: Wie sieht die Bewegung aus, die ein Körper der Masse m unter dem Einfluss der Kraft \mathbf{F} ausführt? (Dynamische Methode; Integration der Bewegungsgleichung.)

Die erste Fragestellung ist prinzipiell bedeutungsvoll, da sie die einzig konsequente Definition der *trägen* Masse darstellt. Praktisch ist sie weniger wichtig als die anderen beiden. Beim Studium spezieller Bewegungsformen werden wir entweder die zweite oder die dritte Methode benutzen.

1.3.3 Maßeinheiten

Dass in Newtons Bewegungsgleichung keine Proportionalitätskonstante auftritt, ist der Wahl der Einheiten zu verdanken: Man wählt die Einheitskraft so, dass sie der Einheitsmasse die Einheitsbeschleunigung mitteilt. Die Einheitsmasse war ursprünglich an die Längeneinheit angeschlossen: 1 kg ist die Masse von 1 dm³ Wasser bei 4 °C und 1 bar Druck. Als Masseneinheit dient heute ein Normal, das Archivkilogramm.

Im SI ist die Krafteinheit

$$1 \text{ Newton} = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2} .$$

Bei homogenen Körpern ist die Masse dem Volumen proportional: $m = \varrho V$. Die Größe $\varrho = m/V$ heißt **Dichte** oder spezifische Masse und wird in kg/m³ oder g/cm³ ausgedrückt. Wasser hat bei 4 °C und 1 bar die Dichte 1 000 kg/m³ oder 1 g/cm³.

1.3.4 Newtons Axiome

Newton baute die gesamte Mechanik auf drei Sätzen auf, von denen wir die beiden ersten schon kennen:

1) **Trägheitsprinzip**. Ein kräftefreier Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig.

2) **Aktionsprinzip**. Wenn eine Kraft \mathbf{F} auf einen Körper mit der Masse m wirkt, beschleunigt sie ihn mit

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m} . \quad (1.17)$$

(Das Trägheitsprinzip ist der Spezialfall $\mathbf{F} = 0$ des Aktionsprinzips.)

3) **Reaktionsprinzip**. Wenn die Kraft \mathbf{F} , die auf einen Körper wirkt, ihren Ursprung in einem anderen Körper hat, so wirkt auf diesen die entgegengesetzt gleiche Kraft $-\mathbf{F}$.

Newton hat sein Aktionsprinzip eigentlich anders formuliert:

2') Wenn eine Kraft F auf einen Körper wirkt, ändert sich sein **Impuls** mv so, dass

$$\frac{d}{dt}(mv) = F. \quad (1.17')$$

Diese Fassung gilt, im Gegensatz zu (2) auch bei veränderlicher Masse. Es ist, als hätte *Newton* die Relativitätstheorie vorausgeahnt, in der sich ja tatsächlich die Masse mit der Geschwindigkeit ändert. Die moderne Physik zieht daher (1.17') vor. Man hat sogar mehrfach versucht, den Kraftbegriff ganz aus der Physik zu eliminieren und ihn durch den Begriff des Impulsaustausches zu ersetzen. Wegen ihrer Anschaulichkeit werden wir meist die Fassung (1.17) benutzen. Man muss aber beachten, dass sie nur bei Geschwindigkeiten gilt, die klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind.

1.4 Einfache Bewegungen

Das Aktionsprinzip ist ein allgemein gültiges Rezept zur Analyse von Bewegungen. Wir werden es abwechselnd „vorwärts“ und „rückwärts“ anwenden, nämlich aus den wirkenden Kräften auf den Ablauf der Bewegung schließen oder umgekehrt.

1.4.1 Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Eine konstante Kraft (bei der sich weder Größe noch Richtung ändert) erzeugt nach Newtons Beschleunigungsgleichung eine konstante Beschleunigung $a = \ddot{r} = F/m$. Zunächst sei diese Beschleunigung a parallel zu der in einem bestimmten Zeitpunkt herrschenden Geschwindigkeit v . Dann behält die Geschwindigkeit auch stets die Richtung, d. h. die Bahn ist eine Gerade, und man kann hier vom Vektorcharakter von r , v und a absehen und die Lage des Körpers durch seinen skalaren Abstand x von einem zu wählenden Nullpunkt auf dieser Geraden darstellen.

Dass die Beschleunigung a der Größe nach konstant ist, bedeutet, dass die Geschwindigkeit v linear mit der Zeit zunimmt. Wenn zur Zeit $t = 0$ schon eine gewisse Geschwindigkeit v_0 vorhanden war, ist die Geschwindigkeit zur Zeit t

$$v(t) = v_0 + at. \quad (1.18)$$

Den Abstand x vom Nullpunkt zur Zeit t erhält man (auch ohne Kenntnisse im Integrieren) folgendermaßen: Bei $t = 0$ befinde sich der Massenpunkt bei $x = x_0$ und fliege mit v_0 . Zur Zeit t fliegt er mit $v(t)$. Dazwischen hat er die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v}(t) = \frac{1}{2}(v_0 + v(t)) = v_0 + \frac{1}{2}at. \quad (1.19)$$

Man beachte: Diese Mittelung ist nur möglich, weil v inzwischen linear angewachsen ist. Mit der Geschwindigkeit \bar{v} würde in der Zeit t der Weg

$$\Delta x = \bar{v}(t)t = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (1.20)$$

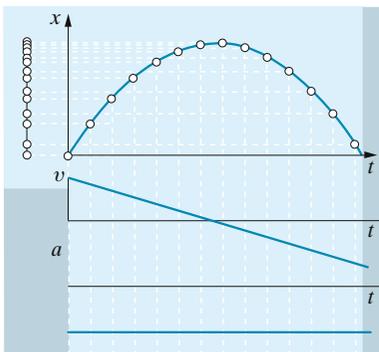


Abb. 1.11. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung: $x(t)$ -, $v(t)$ -, $a(t)$ -Diagramm

zurückgelegt werden. Also befindet sich der Massenpunkt dann bei

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (1.21)$$

Durch Integrieren folgen (1.18) und (1.21) unmittelbar aus der **Bewegungsgleichung** (1.17) und den **Anfangsbedingungen** $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$. Wenn speziell $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$, vereinfachen sich (1.18) und (1.21) zu

$$v = at, \quad x = \frac{1}{2}at^2 \quad (1.22)$$

In diesen beiden Beziehungen lässt sich jede der vier Größen x, v, a, t durch zwei andere ausdrücken. Jede dieser Kombinationen gibt interessante Aufschlüsse und ist vielfach praktisch anwendbar. Speziell ist die Geschwindigkeit nach der Beschleunigungsstrecke x

$$v = \sqrt{2ax} \quad (1.23)$$

Der Fall, dass die Beschleunigung \vec{r} unter einem Winkel zu der in einem bestimmten Zeitpunkt herrschenden Geschwindigkeit \vec{r} steht, bietet für die Vektorrechnung überhaupt keine Schwierigkeit. Man schreibt die Beziehungen (1.18) und (1.21) einfach vektoriell:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t, & (1.24) \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2. & (1.25) \end{aligned}$$

x Beispiel ...

Dr. *Stapp* bremst seinen Raketenschlitten aus 1000 km/h mit bis zu 300 m/s² ab. Wie lange dauert die Bremsung, wie lang ist der Bremsweg?

Bremszeit und Bremsweg ergeben sich aus $t = v/a$ und $s = \frac{1}{2}v^2/a$ zu 0,93 s bzw. 130 m. Dass jedes Experiment mindestens einige Wochen Klinik nach sich zog, ist wohl klar.

Alle Richtungsprobleme regeln sich mit Hilfe der Gesetze der Vektoraddition von selbst. Anschaulich kann man sagen: Jede Bewegung lässt sich beliebig (auch schiefwinklig) in Komponenten aufspalten, die unabhängig voneinander erfolgen. Zum Beispiel lässt sich (1.25) so deuten, dass der Körper von seiner Anfangslage die kräftefreie Bewegung \mathbf{v}_0t und unabhängig davon die gleichmäßig beschleunigte Bewegung $\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ ausgeführt hat.

Ein wichtiger Spezialfall der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist der **freie Fall** unter dem Einfluss der Erdschwerkraft, aber ohne Luftwiderstand. In der Nähe der Erdoberfläche erfährt dabei jeder Körper eine Beschleunigung

$$a = g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad (\text{Erdbeschleunigung}),$$

die auf den Erdmittelpunkt gerichtet ist (über den Zusammenhang mit dem Gravitationsgesetz vgl. Abschnitt 1.7, über Abweichungen Abschn. 1.8). Ein Körper der Masse m , der auf diese Weise beschleunigt wird, muss

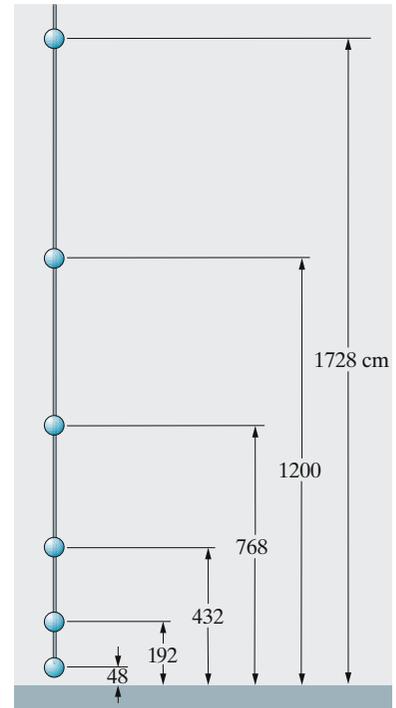


Abb. 1.12. Fallschnur: Wenn man die Aufhängung ausklinkt, trommeln die Kugeln in gleichmäßigem Rhythmus auf den Fußboden. Wenn die Abstände der Kugeln vom Boden sich wie die Quadratzahlen 1, 4, 9, ... verhalten, verhalten sich die Fallzeiten wie die Zahlen 1, 2, 3, ... Man hört also ein gleichmäßiges Trommeln, im Beispiel mit 0,10 s Abstand zwischen zwei Schlägen. Hängt das Seil etwas höher, dann ist die Zunahme der Fallzeit für die kurzen Strecken fühlbarer als für die langen, der Trommelwirbel verlangsamte sich daher gegen das Ende zu

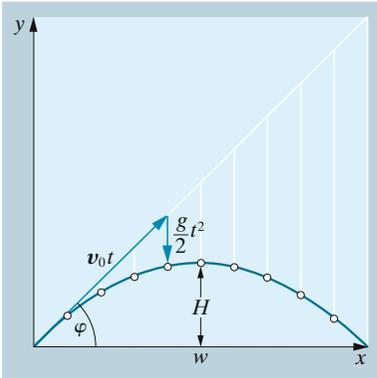


Abb. 1.13. Entstehung der Wurfbewegung aus der Überlagerung einer geradlinig gleichförmigen Bewegung und der Fallbewegung

nach dem Aktionsprinzip unter dem Einfluss einer Kraft vom Betrage $F = mg$ stehen, die ebenfalls auf den Erdmittelpunkt zeigt. Diese Kraft ist das **Gewicht** des Körpers und ist begrifflich streng von der Masse zu unterscheiden. Um diese Unterscheidung zu erleichtern, gab es früher die Einheit kp (**Kilopond**). 1 kp ist das Gewicht einer Masse von 1 kg. Das Kilopond ist also eine *Krafteinheit*, keine Masseneinheit. Zum N (**Newton**) verhält es sich seiner Definition nach wie folgt:

$$1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N} .$$

Galileis Fall- und Wurfgesetze sind Folgerungen aus (1.24) und (1.25), ebenso wie viele Vorschriften der Straßenverkehrsordnung (Aufgaben 1.4.1–1.4.6).

1.4.2 Die gleichförmige Kreisbewegung

Ein Massenpunkt bewege sich auf einer kreisförmigen Bahn mit dem Radius r um das Zentrum Z mit einer Geschwindigkeit konstanter Größe v , wenn auch natürlich veränderlicher Richtung. Der *Betrag* v der Geschwindigkeit, auch **Bahngeschwindigkeit** genannt, gibt die Bogenlänge des Kreises an, die in der Sekunde durchlaufen wird. Wichtig ist ferner der Begriff der **Winkelgeschwindigkeit** ω . Sie gibt den Winkel an, den der Strahl vom Zentrum Z zum Massenpunkt in einer bestimmten Zeit überstreicht, dividiert durch diese Zeit. Der Winkel ist hierbei im Bogenmaß anzugeben. Aus dieser Definition folgt der Zusammenhang zwischen Bahn- und Winkelgeschwindigkeit:

$$v = \omega r . \quad (1.26)$$

Die **Umlaufzeit** T , innerhalb der der Winkel 2π überstrichen wird, hängt mit ω so zusammen:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (1.27)$$

Ein rotierender starrer Körper, z. B. ein Rad, hat an allen Punkten die gleiche Winkelgeschwindigkeit; die Bahngeschwindigkeit nimmt wegen (1.26) nach außen hin zu. Bei einem Zahnrad- oder Seiltrieb sind die Bahngeschwindigkeiten der wirksamen Peripherien der im Eingriff stehenden Räder gleich (andernfalls würde ein Rad auf dem anderen rutschen). Hieraus ergeben sich z. B. die Grundbeziehungen der Getriebetechnik.

× Beispiel...

Bei der Rotation eines Stahlteils sollte man eine Umfangsgeschwindigkeit von 100 m/s nicht überschreiten (Grund: Aufgabe 3.4.2). Wie viele Umdrehungen pro Minute kann man also einem Teil mit dem Durchmesser d zumuten?

Die Umfangsgeschwindigkeit ist $v = \omega r = \omega d/2$, also die zulässige Drehzahl $\omega = 200/d \text{ s}^{-1}$, $v = 32/d \text{ s}^{-1} = 1900/d \text{ U/min}$, z. B. bei $d = 1 \text{ cm}$: $v = 190000 \text{ U/min}$, bei $d = 1 \text{ m}$: $v = 1900 \text{ U/min}$.

Wir ermitteln nun die Beschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung. Eine Beschleunigung liegt vor, weil sich die Geschwindigkeit

der Richtung (wenn auch nicht der Größe) nach ändert. Sie ist nach dem allgemeinen Verfahren der Kinematik durch Bildung der Geschwindigkeitsdifferenz für zwei genügend eng benachbarte Positionen A und B des Massenpunktes oder die entsprechenden Zeitpunkte t_1 und t_2 zu finden (Abb. 1.14). Der Kreissektor ZAB lässt sich dann mit beliebiger Genauigkeit durch ein Dreieck annähern. Dieses Dreieck ist *ähnlich* dem Dreieck BCD aus den beiden Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}(t_1)$ und $\mathbf{v}(t_2)$ (beide an B angetragen) und der Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta\mathbf{v}$: Beide Dreiecke sind gleichschenkelig (ZAB , weil es zwei Kreisradien enthält, BCD , weil die Geschwindigkeit dem Betrag nach konstant ist), beide haben den gleichen Winkel an der Spitze (weil jedes \mathbf{v} als Tangente auf dem zugehörigen Radius senkrecht steht). Folglich haben entsprechende Seiten beider Dreiecke das gleiche Verhältnis:

$$\frac{AB}{r} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v}, \quad (1.28)$$

wenn Δr die Länge des Kreisbogens ist, der im Grenzfall in die Dreiecksseite übergeht. Division dieser Gleichung durch die Zeitdifferenz $t_2 - t_1 = \Delta t$, die benötigt wird, um den Weg AB zurückzulegen bzw. die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\mathbf{v}$ herbeizuführen, liefert

$$\frac{\Delta r/\Delta t}{r} = \frac{v}{r} = \frac{|\Delta\mathbf{v}|/\Delta t}{v} = \frac{a}{v} \quad (1.29)$$

oder

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}, \quad (1.30)$$

wenn man für $\Delta r/\Delta t$ im Grenzfall v und für $|\Delta\mathbf{v}|/\Delta t$ die Beschleunigung a setzt.

Die Größe der Beschleunigung ist also konstant. Ihre Richtung ergibt sich aus der Konstruktion (Abb. 1.14) als stets zum Zentrum hin gerichtet (man beachte, dass $\Delta\mathbf{v}$ und \mathbf{a} eigentlich am derzeitigen Ort A oder B des Körpers anzutragen sind). Es herrscht also eine **Zentripetalbeschleunigung**. Dynamisch betrachtet:

Damit oder wenn ein Körper mit der Masse m eine gleichförmige Kreisbewegung ausführt, muss auf ihn eine Kraft vom Betrag

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \quad (1.31)$$

wirken, die immer zu einem festen Punkt, dem Zentrum, hinzeigt (Zentripetalkraft).

Im physikalisch realen Fall wird eine Zentripetalkraft ausgeübt, die den Körper P auf die Kreisbahn zwingt. Das kann durch eine starre Verbindung geschehen, mit der ein Körper um ein Zentrum geschleudert wird, oder durch die Haftkraft, wenn ein Auto eine Kurve fährt. Dann übt umgekehrt P auf Q nach dem Reaktionsprinzip eine Gegenkraft aus, deren Betrag ebenfalls durch (1.31) gegeben wird, die aber entgegengesetzte

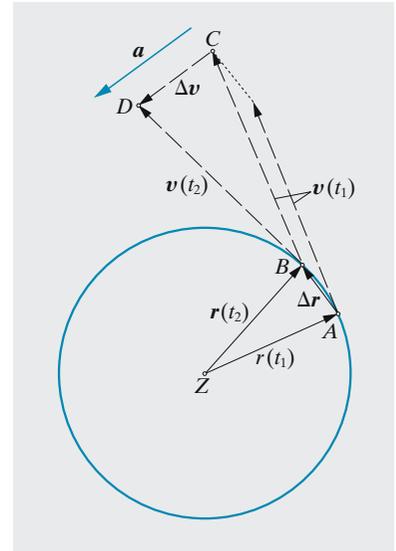


Abb. 1.14. Kinematik der gleichförmigen Kreisbewegung

Richtung hat, eine **Zentrifugalkraft**. Eine andere Deutung der Zentrifugalkraft wird sich bei der Diskussion verschiedener Bezugssysteme ergeben (vgl. Abschn. 1.8.4).

× Beispiel . . .

Die Zentrifugalkraft infolge der täglichen Rotation der Erde lässt sich leicht direkt messen. Wie äußert sie sich? Ist das für den Jahreslauf der Erde um die Sonne auch so?

Erdrotation: $a = \omega^2 r = 0,03 \text{ m/s}^2 = (1/300) g$: Am Äquator ist ein 100 kg-Mensch 0,3 kg leichter als am Pol. Ebenso viel bringt die verringerte Anziehung infolge der Erdabplattung.

Jahresumlauf: $a = v^2/r = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$. Dies wird durch die Anziehung durch die Sonne genau kompensiert und ist so nicht nachweisbar.

1.4.3 Die harmonische Schwingung

Wenn man eine gleichförmige Kreisbewegung „von der Seite betrachtet“, d. h. sie auf eine Gerade c projiziert, die in der Kreisbahnebene liegt, so erhält man eine **harmonische Schwingung**. Damit ist dieser Bewegungstyp kinematisch vollständig gekennzeichnet, und alle wesentlichen Tatsachen darüber lassen sich ohne Rechnung ablesen. Man übernimmt einfach die Ergebnisse für die gleichförmige Kreisbewegung mit der Bahngeschwindigkeit v_0 , wobei aber natürlich nur die Komponenten von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung zählen, die in Richtung der Projektionsgeraden c fallen.

Der Radius r der Kreisbahn spielt hier die Rolle der maximalen Auslenkung oder **Amplitude** der Schwingung. Der Betrag der Geschwindigkeit v ändert sich zeitlich, weil zu jeder Zeit ein verschiedener Teil der Bahngeschwindigkeit v_0 beim Kreis in die Projektionsrichtung fällt. Nur wenn der Massenpunkt die Mittellage passiert, nimmt v den vollen Wert v_0 an. Bei maximaler Auslenkung ist $v = 0$. Die Beschleunigung, da sie in radialer Richtung zeigt, wird dagegen mit dem vollen Kreisbahnwert $a = \pm v_0^2/r$ gerade dann auf c projiziert, wenn der Körper maximal ausgelenkt ist. In der Mittellage ist $a = 0$.

Allgemeiner lassen sich alle drei Größen – Auslenkung x aus der Mittellage, Geschwindigkeit v , Beschleunigung a – durch den Winkel α

[www.](#)

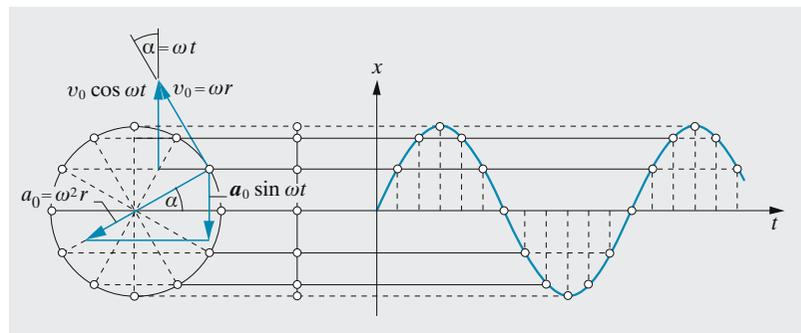


Abb. 1.15. Die harmonische Schwingung als „von der Seite gesehene“ gleichförmige Kreisbewegung

in der äquivalenten Kreisbewegung (Definition s. Abb. 1.15) ausdrücken. Im Fall der Schwingung nennt man α die **Phase**. Zählt man die Zeit t von einem Durchgang durch die Mittellage nach oben an, so ist nach Definition der Winkelgeschwindigkeit

$$\alpha = \omega t \quad (1.32)$$

und man liest aus Abb. 1.15 sofort ab:

$$x = r \sin \omega t, \quad (1.33)$$

$$v = v_0 \cos \omega t, \quad (1.34)$$

$$a = -a_0 \sin \omega t. \quad (1.35)$$

Vergleich von (1.33) und (1.35) zeigt, dass für jeden Zeitpunkt die Beschleunigung a proportional zur Auslenkung x , wenn auch dieser entgegengerichtet ist:

$$a = -\frac{a_0}{r}x = -\omega^2 x \quad (1.36)$$

(vgl. (1.30)).

Damit oder wenn ein Körper der Masse m eine solche Bewegung ausführt, muss auf ihn also eine Kraft

$$F = ma = -m\omega^2 x \quad (1.37)$$

wirken, die proportional zur Auslenkung x aus der Ruhelage und dieser entgegengerichtet ist. Eine Kraft mit einem solchen Abstandsgesetz nennt man **elastische Kraft**. Wenn man also umgekehrt weiß, dass auf einen Körper bei der Auslenkung aus einer Ruhelage eine rücktreibende Kraft wirksam wird, die proportional zu dieser Auslenkung x ist:

$$F = -Dx, \quad (1.38)$$

so folgt, dass der Massenpunkt eine harmonische Schwingung ausführt.

Die Proportionalitätskonstante D heißt auch **Federkonstante** oder Direktionskraft, obwohl sie keine Kraft, sondern Kraft/Abstand ist. Vergleich von (1.37) und (1.38) erlaubt Umrechnung der dynamischen in die kinematischen Größen:

$$D = m\omega^2 \quad \text{oder} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (1.39)$$

Je stärker die Rückstellkraft, desto schneller ist die Schwingung; je größer die zu bewegende Masse, desto langsamer ist sie.

Natürlich ist die harmonische Schwingung periodisch, denn die gleichförmige Kreisbewegung ist es auch. Im Fall der Schwingung ist die **Periode** T die Zeit zwischen zwei Durchgängen durch den gleichen Punkt, etwa die Ruhelage, in gleicher Richtung. In Analogie mit der Kreisbewegung (vgl. (1.27)) ist

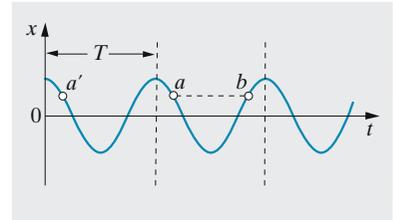


Abb. 1.16. Zur Definition der Phase einer Schwingung. a' und a stimmen in der Phase überein, a und b nicht

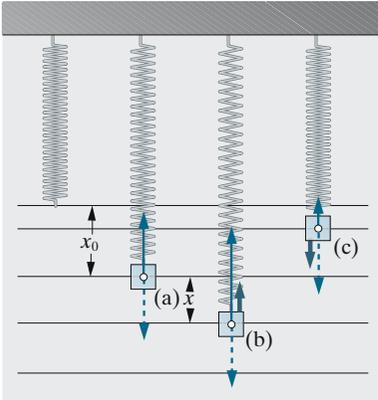


Abb. 1.17a-c. $\cdots \downarrow$ Gewicht des Klotzes, \rightarrow Rückstellkraft der Feder, \rightarrow resultierende Kraft

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}. \quad (1.40)$$

Der Kehrwert von T heißt *Frequenz* der Schwingung:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (1.41)$$

Was bei der Kreisbewegung Winkelgeschwindigkeit hieß, heißt bei der Schwingung **Kreisfrequenz**

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (1.42)$$

Es ist kein Wunder, dass harmonische Schwingungen so häufig auftreten, auch außerhalb der Mechanik. Jede Abweichung von einem stabilen Gleichgewichtszustand führt nämlich, solange sie klein ist, zu einem rüctreibenden Einfluss, der proportional zur Größe der Abweichung ist. Speziell wirken jeder mechanischen Deformation eines Körpers rüctreibende Kräfte entgegen, die zunächst proportional zur Deformation sind (Hookesches Gesetz, vgl. Abschn. 3.4.1), was in Abwesenheit von Reibung zu harmonischen Schwingungen führt.

1.5 Arbeit, Energie, Impuls, Leistung

Manchmal braucht man den zeitlichen Ablauf der Bewegung nicht zu kennen, um Aussagen über Anfangs- und Endzustand zu machen. Mathematisch entspricht das einer Integration der Bewegungsgleichung.

1.5.1 Arbeit

Der physikalische Arbeitsbegriff entwickelte sich aus dem Studium der Kraftübertragung durch Hebel, Seile und Rollen. Man stellt dabei fest, dass sich durch eine geeignete Übersetzung zwar „Kraft gewinnen“ lässt, d. h. dass man um einen gewissen Faktor weniger Kraft aufzuwenden braucht als schließlich auf die zu bewegende Last wirkt, dass man aber dann mit dem Angriffspunkt dieser Kraft einen um den gleichen Faktor größeren Weg zurückzulegen hat als die Last. Umgekehrt kann man „Weg gewinnen“, muss dann aber an Kraft zusetzen. In jedem Fall gibt es also – abgesehen von Reibungsverlusten – eine Größe, die bei einer derartigen Kraftübertragung erhalten bleibt, nämlich das Produkt Kraft · Weg („Goldene Regel der Mechanik“).

Es ist zweckmäßig, dieser Größe einen Namen beizulegen und zu definieren:

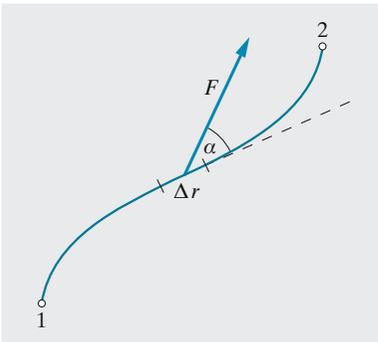


Abb. 1.18. Zur Berechnung der Arbeit bei der Verschiebung von 1 nach 2

Wenn eine konstante Kraft F den Massenpunkt, auf den sie wirkt, um die Strecke Δr in ihrer eigenen Richtung verschiebt, führt sie ihm die **Arbeit** W zu:

$$W = F \Delta r. \quad (1.43)$$

Diese Definition kann in zwei Richtungen verallgemeinert werden:

- Berücksichtigung des vektoriellen Charakters von Kraft und Verschiebung: Stimmen die Richtungen von Kraft \mathbf{F} und Verschiebung $\Delta\mathbf{r}$ nicht überein, so resultiert eine Arbeit nur aus der Komponente von $\Delta\mathbf{r}$ in Richtung von \mathbf{F} . Negativ ausgedrückt: Eine Kraft leistet keine Arbeit auf einen Massenpunkt, der sich senkrecht zu ihr bewegt. Diese Tatsachen werden genau durch das Skalarprodukt von \mathbf{F} und $\Delta\mathbf{r}$ ausgedrückt:

$$W = F \Delta r \cos(\mathbf{F}, \Delta\mathbf{r}) = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}. \quad (1.44)$$

- Ändert sich die Kraft längs des Weges oder ist dieser gekrümmt, so ist die Definition (1.43) nicht mehr direkt anwendbar. Jedenfalls erwartet man ein besseres Resultat, wenn man den Gesamtweg in mehrere Teile zerlegt, die einigermaßen gerade sind und auf denen die Änderung der Kraft unwesentlich ist. Auf jedem solchen Wegelement $\Delta\mathbf{r}$ fällt dann der Arbeitsanteil

$$\Delta W \approx \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

an. Für den Gesamtweg addieren sich diese Anteile:

$$W \approx \sum \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}.$$

Das Verfahren wird i. Allg. umso genauer, je feiner die Unterteilung ist. In fast allen physikalisch wesentlichen Situationen existiert der Grenzwert für unendlich feine Unterteilung, der genau der mathematischen Definition des (Riemannschen) Linienintegrals entspricht

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.45)$$

× Beispiel...

Bestimmen Sie Leistung, Arbeit und Kraft bei folgenden Tätigkeiten: Treppensteigen, Kniebeugen, Klimmzug, Loch graben.

Wenn man seine 75 kg in 15 s bis zum 4. Stock (ca. 16 m) hochbringt, hat man 12 000 N m = 12 000 J bzw. 800 W aufgebracht. Kniebeuge in 1/2 s (Hebung um 0,7 m): 1,05 kW. Klimmzug (0,3 m in 1 s): 250 W. Die Erde (1 m³ oder ca. 2 000 kg) muss im Durchschnitt mindestens um 1 m gehoben werden. Rein physikalisch ist die Leistung kläglich: 20 000 J in 1 h: 5,6 W!

Für eine Bewegung auf einer Geraden mit veränderlicher Kraft $F(x)$ lässt sich W als die Fläche unter der Kurve $F(x)$ darstellen (Abb. 1.19). Für eine krummlinige Bewegung trägt man als Abszisse die Bogenlänge, als Ordinate die Kraftkomponente in Kurvenrichtung auf.

Die Einheit der Arbeit ergibt sich aus dieser Definition:

$$1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ N m} = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ J}.$$

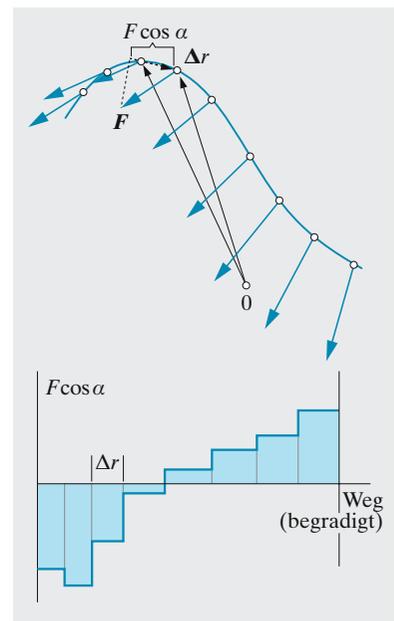


Abb. 1.19. Die Arbeit als Wegintegral der Kraft

1.5.2 Kinetische Energie

In der obigen Definition haben wir uns für die Aussage zu verantworten, die Arbeit werde dem Massenpunkt zugeführt. Das impliziert, dass sie noch in ihm steckt und sich auch wieder entnehmen lässt. Wenn der Massenpunkt durch die Kraft beschleunigt worden ist, müsste er also die Arbeit in Form von Bewegung mitführen. Zunächst sei angenommen, die Beschleunigung sei von der Ruhe aus über eine Strecke x gleichmäßig erfolgt, also durch eine konstante Kraft F , die definitionsgemäß auf der Strecke x die Arbeit $W = Fx$ leistet. Nach dieser Beschleunigungsstrecke hat der Massenpunkt die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{\frac{2Fx}{m}} = \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

erreicht (vgl. (1.23)). Nach W aufgelöst, ergibt sich

$$W = \frac{m}{2}v^2. \quad (1.46)$$

In dieser Form, als **kinetische Energie**, steckt also die Beschleunigungsarbeit im bewegten Massenpunkt.

Von den Beschränkungen des speziellen Beschleunigungstyps kann man sich freimachen, entweder indem man einfach sagt: Wenn der Arbeitsbegriff überhaupt einen Sinn hat, muss es ganz gleichgültig sein, auf welche Weise – gleichmäßig oder nicht – der Betrag W zustande gekommen ist; oder, ohne diese Rückversicherung bei der „Goldenen Regel“, mit Hilfe der Vektorrechnung: Für jeden Beschleunigungsvorgang gilt natürlich das Aktionsprinzip $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$. Diese Gleichung kann man beiderseits mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ skalar multiplizieren:

$$\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.47)$$

Links steht die in der Zeiteinheit auf den Massenpunkt geleistete Arbeit; der Ausdruck rechts ist nach den Differentiationsregeln die zeitliche Ableitung des Ausdrucks $\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 \right) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.48)$$

Auch für endliche Zeiträume findet sich die geleistete Arbeit stets als Zunahme von $\frac{1}{2}mv^2$, der kinetischen Energie, wieder.

Es bleibt noch nachzuweisen, dass diese kinetische Energie eines Massenpunktes P als Arbeit verfügbar ist, um an einen anderen Massenpunkt Q abgegeben zu werden. Beim Studium dieses Vorgangs wird man auf zwei weitere Begriffe geführt: den Impuls und die potentielle Energie.

1.5.3 Impuls

Wir betrachten die Massenpunkte P und Q . Q möge auf P die Kraft \mathbf{F} ausüben, die P mit $\dot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{F}/m_P$ beschleunigt. Nach dem Reaktionsprinzip erfährt Q dann gleichzeitig die Kraft $-\mathbf{F}$, die Q mit $\dot{\mathbf{r}}_Q = -\mathbf{F}/m_Q$ beschleunigt. Es ist also

$$m_P \dot{\mathbf{r}}_P + m_Q \dot{\mathbf{r}}_Q = \mathbf{F} - \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (1.49)$$

Der Ausdruck $m_P \dot{\mathbf{r}}_P + m_Q \dot{\mathbf{r}}_Q$, der demnach verschwindet, ist die zeitliche Ableitung einer Größe

$$\mathbf{p} = m_P \dot{\mathbf{r}}_P + m_Q \dot{\mathbf{r}}_Q = \mathbf{p}_P + \mathbf{p}_Q, \quad (1.50)$$

die also bei jeder Wechselwirkung zwischen P und Q erhalten bleibt. Dies lässt sich auf Wechselwirkungen zwischen beliebig vielen Massenpunkten erweitern, falls keiner dieser Massenpunkte Kräften ausgesetzt ist, die von einem Körper außerhalb dieses Systems herrühren, also falls es sich um ein **abgeschlossenes System** handelt:

Impulssatz

Der **Gesamtimpuls**

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (1.51)$$

eines abgeschlossenen Systems aus den Massenpunkten m_1, m_2, \dots ist zeitlich konstant.

Der Gesamtimpuls kann also auf die Impulse der einzelnen Massenpunkte

$$\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (1.52)$$

infolge der gegenseitigen Kraftwirkungen nur verschieden verteilt werden.

Eine wichtige Folgerung aus dem Impulssatz bezieht sich auf den **Schwerpunkt** eines Systems zweier oder mehrerer Massenpunkte. Dies ist der Punkt mit dem Ortsvektor \mathbf{r}_S , gekennzeichnet durch die Bedingung

$$(m_P + m_Q) \mathbf{r}_S = m_P \mathbf{r}_P + m_Q \mathbf{r}_Q. \quad (1.53)$$

Zweimalige zeitliche Differentiation dieser Gleichung liefert

$$(m_P + m_Q) \ddot{\mathbf{r}}_S = m_P \ddot{\mathbf{r}}_P + m_Q \ddot{\mathbf{r}}_Q = \dot{\mathbf{p}}. \quad (1.54)$$

Die rechte Seite ist die Gesamtimpulsänderung, verschwindet also. Links steht die Beschleunigung des Schwerpunktes, die also auch Null ist:

Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich geradlinig-gleichförmig, unabhängig von den Bewegungen und Wechselwirkungen der Teile des Systems.

In einem Bezugssystem, das seinen Ursprung im Schwerpunkt hat (Schwerpunktsystem), ist der Gesamtimpuls aller Massen des Systems Null.

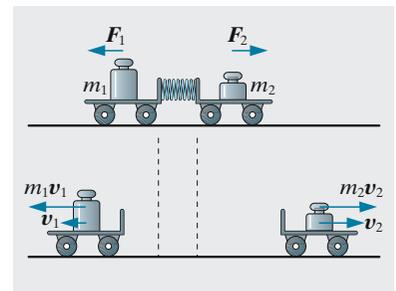


Abb. 1.20. Die beiden Wagen haben auch nach der Trennung noch den Gesamtimpuls 0

1.5.4 Kraftfelder

Wenn die Kraft auf einen Massenpunkt nur von dem Ort \mathbf{r} abhängt, wo er sich befindet (und evtl. von der Zeit, nicht aber z. B. direkt von der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$), also wenn $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, so sagt man, in dem betreffenden Raumgebiet herrsche ein **Kraftfeld** $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Bei der Verschiebung des Massenpunktes in diesem Kraftfeld von \mathbf{r}_1 nach \mathbf{r}_2 ist die Arbeit

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

zu leisten (vgl. (1.45)). Diese Arbeit hängt i. Allg. nicht nur vom Start- und Zielort der Verschiebung ab, sondern auch von dem Weg, auf dem sie erfolgt. Jedoch tritt diese Komplikation in vielen wichtigen Feldern, wie dem Gravitationsfeld oder elektrostatischen Feld *nicht* auf, d. h. W ist dort allein eine Funktion von Start- und Zielort. Anders ausgedrückt: In einem solchen Feld ist die Gesamtarbeit für jeden abgeschlossenen Weg Null. Felder, für die das zutrifft, heißen **Potentialfelder** oder **konservative Felder**. Nur in ihnen gilt der Energieerhaltungssatz. Der Gegensatz zu konservativ ist **dissipativ**.

1.5.5 Potentielle Energie

Hebt man nahe dem Erdboden einen Körper der Masse m um die Höhe h , so leistet man gegen die Schwerkraft mg eine Arbeit

$$W = E = mgh .$$

Sie steckt ebenfalls als Energie in dem Körper; man kann sie z. B. jederzeit in ebenso viel kinetische Energie verwandeln, indem man den Körper fallen lässt. Daher heißt mgh die **potentielle Energie des Körpers im Erdschwerefeld**, *bezogen* oder *normiert* auf den Ort, von dem die Hebung begann.

Das lässt sich verallgemeinern: Wenn man bei der Ermittlung der Arbeit $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ immer vom gleichen Ort \mathbf{r}_1 ausgeht, aber den Zielort \mathbf{r}_2 variiert, ist natürlich W eine Funktion von \mathbf{r}_2 allein. Man nennt sie die **potentielle Energie** $E_{\text{pot}}(\mathbf{r}_2)$, normiert auf den Ort \mathbf{r}_1 . Es gibt also so viele verschiedene **Normierungen** der potentiellen Energie, wie es verschiedene Startorte gibt. Zwei solche Normierungen für die Startorte \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}'_1 unterscheiden sich aber nur um eine konstante additive Größe, nämlich die Arbeit $W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_1)$:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}\mathbf{r}'_1}(\mathbf{r}) &= W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}) = W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_1) + W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \\ &= E_{\text{pot}\mathbf{r}_1}(\mathbf{r}) + W(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_1) . \end{aligned} \quad (1.55)$$

Man benutzt gelegentlich auch Normierungen, bei denen diese additive Konstante einen willkürlichen, gar keinem möglichen Startort entsprechenden Wert hat, der nur durch die mathematische Zweckmäßigkeit bestimmt ist. Das kann man tun, weil physikalisch letzten Endes nur *Differenzen* zwischen den potentiellen Energien zweier Orte interessieren; bei der Bildung dieser Differenz fällt die additive Konstante fort.

Die potentielle Energie hat den großen formalen Vorteil, dass sie das Kraftfeld genauso erschöpfend beschreibt wie die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, obwohl sie als Skalar sehr viel einfacher ist als der Vektor \mathbf{F} . Man kann nämlich, wenn nur das Skalarfeld $E_{\text{pot}}(\mathbf{r})$ gegeben ist, die Kraft einfach durch Gradientenbildung gewinnen:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}}(\mathbf{r}) . \quad (1.56)$$

Die **Gradientenoperation** (kurz: Gradient) ist die Umkehrung des Linienintegrals, das nach (1.45) von $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ auf W oder E_{pot} führt.

Anschaulich bedeutet (1.56) Folgendes: An jedem Ort zeigt die Kraft in die Richtung, in der E_{pot} am schnellsten *abnimmt* (deswegen auch das Minuszeichen in (1.56)). Die Kraft ist gleich dem Gefälle des E_{pot} -Gebirges in dieser Falllinie. In allen anderen Richtungen nimmt E_{pot} langsamer ab, und entsprechend kleiner ist die Kraftkomponente in diesen Richtungen. Sie ist Null in jeder der unendlich vielen Richtungen senkrecht zur Falllinie, weil sich E_{pot} in einer solchen Richtung nicht ändert. Das alles gilt für sehr kleine Verschiebungen. Allgemein sind sowohl die Falllinien oder **Feldlinien** als auch die Flächen konstanter E_{pot} , die **Niveaulinien** des Feldes, gekrümmt. Richtig bleibt, dass die Feldlinien die Niveaulinien senkrecht schneiden, d. h. ihre **Orthogonaltrajektorien** sind.

Zur graphischen Darstellung eines Potentialfeldes genügt es, hinreichend viele Niveaulinien zu zeichnen und an jede den dort herrschenden E_{pot} -Wert zu schreiben. Andererseits genügt auch die Angabe hinreichend dicht liegender Feldlinien, falls man – z. B. durch die Dichte dieser Feldlinien – die Größe der Kraft angibt.

1.5.6 Der Energiesatz

Mit Hilfe des Begriffs der potentiellen Energie schreibt sich (1.47) für die Beschleunigung eines Massenpunktes im konservativen Kraftfeld:

$$\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\text{grad } E_{\text{pot}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{dE_{\text{kin}}}{dt} .$$

Mechanischer Energiesatz

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = 0 . \quad (1.57)$$

Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, genannt mechanische Energie, ist in einem konservativen Kraftfeld konstant.

Man beachte die Beschränkung auf konservative Felder. Sie war beim Impulssatz nicht nötig: Er gilt auch für dissipative Kräfte. Für den Energiesatz wird diese Beschränkung erst überflüssig, wenn man auch die Wärme in die Energiebilanz einbezieht, die durch dissipative Kräfte erzeugt wird. Dies geht über den Rahmen der eigentlichen Mechanik hinaus, obwohl ja auch die Wärme eine Form kinetischer Energie ist, nämlich die der ungeordneten Molekülbewegung. Die Trennung von Mechanik und Wärmelehre hat hauptsächlich rein praktische Gründe: Ein makroskopisches

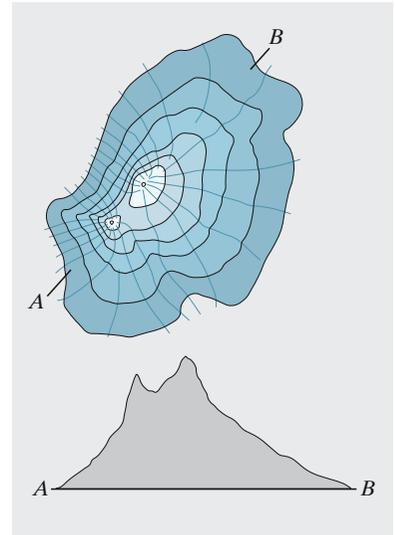


Abb. 1.21. Oben: Kraftfeld mit Niveaulinien und Feldlinien. Unten: Schnitt durch das Potentialgebirge

Objekt hat zu viele Moleküle, als dass sie sich mit den eigentlich mechanischen Methoden behandeln lassen; man muss zur statistischen Mechanik übergehen.

1.5.7 Leistung

Ein weiterer Begriff ist stillschweigend schon im Zusammenhang mit (1.47) aufgetaucht, nämlich die

Leistung, d. h. die Arbeit oder Energieänderung *pro Zeiteinheit*.
Man misst sie im SI in der Einheit

$$1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^3 = 1 \text{ W} = 1 \text{ Watt} .$$

Aus (1.47) und (1.48) ergibt sich, dass Leistung = Kraft · Geschwindigkeit ist:

$$\boxed{P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}} . \quad (1.58)$$

1.5.8 Zentralkräfte

Wechselwirkungen zwischen zwei Massenpunkten sind fast immer so beschaffen, dass die Kräfte zwischen beiden in Richtung ihrer Verbindungslinie wirken. Dies ist schon aus Symmetriegründen klar: Wenn sich im Raum nur die beiden Massenpunkte befinden, gibt es nur *eine* ausgezeichnete Richtung, die ihrer Verbindungslinie. Alle Richtungen senkrecht dazu z. B. sind völlig gleichberechtigt, und es ist nicht einzusehen, warum die Kraft in eine davon zeigen sollte. Wenn einmal eine seitliche Kraft zwischen zwei Körpern auftritt (z. B. bei Kreiselwirkungen oder magnetischen Ablenkungen durch einen Stromleiter), handelt es sich bestimmt nicht um die Wechselwirkung zweier Massenpunkte, sondern ausgedehnter Körper, und daher kann die Problemstellung noch andere Richtungen auszeichnen.

Die Größe der Kraft \mathbf{F} auf den einen der Massenpunkte, P , darf deswegen noch jede beliebige Abhängigkeit vom Abstand zwischen P und Q haben; sie darf zu Q hinzeigen (Anziehung) oder von ihm weg (Abstoßung).

Solche Kräfte, die stets auf einen festen Punkt Z zeigen (gleichgültig, ob sich ein anderer Massenpunkt dort befindet, oder ob Z der Schwerpunkt des Systems P – Q ist, usw.), heißen **Zentralkräfte**.

Für einen Massenpunkt in einem Zentralfeld gilt ein weiterer Erhaltungssatz, der **Flächensatz**. Er verallgemeinert sich für ein abgeschlossenes System von Massenpunkten zum **Drehimpulssatz**.

Der Massenpunkt P befinde sich in einem Zentralfeld, um dessen Herkunft wir uns zunächst nicht zu kümmern brauchen. Den festen Punkt Z , auf den die Kraft immer zeigt, erklären wir naturgemäß zum Ursprung. Wir stellen wieder die Bewegungsgleichung auf und multiplizieren sie diesmal *vektoriell* mit dem Ortsvektor \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = m \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} .$$

Da es sich um eine Zentralkraft handelt, ist \mathbf{F} parallel zu \mathbf{r} ; das Vektorprodukt paralleler Vektoren verschwindet aber, also

$$m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}.$$

Nun ist $m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$ identisch mit der zeitlichen Ableitung der Größe $m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + m\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}},$$

denn das Produkt $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}$ verschwindet als Produkt paralleler Vektoren ebenfalls.

Für die Größe $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, den **Drehimpuls** des Massenpunktes P in Bezug auf das Zentrum Z , gilt also: In einem Zentralfeld ist der Drehimpuls eines Massenpunktes konstant (*Flächensatz*).

Der Drehimpuls ist ein Vektor. Die Konstanz seiner Richtung bedeutet, dass die Bahn des Massenpunktes in einer Ebene senkrecht zu dieser Richtung liegt (also z. B. keine Schraubenlinie sein kann). Wegen der Definition eines Vektorprodukts, wie $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, liegen nämlich sowohl \mathbf{r} als auch $\dot{\mathbf{r}}$ immer senkrecht zu ihm, spannen also in jedem Zeitpunkt die gleiche Ebene senkrecht zu $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ auf. Die Konstanz der Größe des Drehimpulses kann man so deuten: $|\mathbf{L}|/m = rv \sin(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r})$ ist genau das Doppelte der Fläche des von \mathbf{r} und $\dot{\mathbf{r}}$ aufgespannten Dreiecks. Dieses Dreieck ist die in der Zeiteinheit vom Ortsvektor („Radiusvektor“) \mathbf{r} überstrichene Fläche. Diese Fläche ist also zeitlich konstant (im Spezialfall der Planetenbewegung im Zentralfeld der Sonne ist dies das 2. Kepler-Gesetz). Je näher also P an Z ist, desto größer muss seine Geschwindigkeit (genauer: ihre zu \mathbf{r} senkrechte Komponente) sein. Je spitzwinkliger $\dot{\mathbf{r}}$ zu \mathbf{r} steht, desto größer muss der Betrag v sein.

1.5.9 Anwendungen des Energie- und Impulsbegriffes

a) Geschoss- oder Treibstrahlgeschwindigkeiten. Für einen Sprengstoff sei die spezifische Explosionsenergie η gegeben, d. h. die auf die Masse bezogene Energie, die bei der Explosion frei wird. Allein hieraus kann man auf die **Geschossgeschwindigkeit** schließen.

Der gesamte Sprengstoff verwandelt sich im Idealfall in expandierende Explosionsgase. Das Geschoss kann nicht schneller sein als diese Gase. Mehr braucht man nicht zu wissen, speziell nichts aus der Wärmelehre. Die kinetische Energie der Gase und des Geschosses stammt aus η , neben zahlreichen Verlusten. Wenn m_S die Sprengstoff- und m_G die Geschossmasse ist, ergibt sich die Maximalgeschwindigkeit der Explosionsgase zu

$$v = \sqrt{\frac{2m_S}{m_S + m_G} \eta}.$$

Ein typischer Wert für moderne Sprengstoffe ist $\eta = 4 \cdot 10^6$ J/kg, folglich $v \lesssim 2$ km/s.

Für einen Brennstoff und die Maximalgeschwindigkeit seiner z. B. zum **Düsenantrieb** verwendeten Verbrennungsgase gilt eine ähnliche

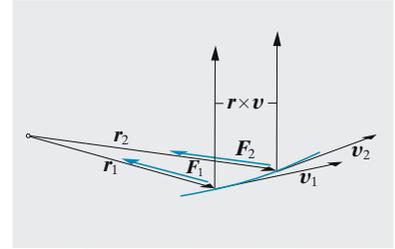


Abb. 1.22. Flächensatz: Eine Zentralkraft verändert den Drehimpuls $m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ nicht

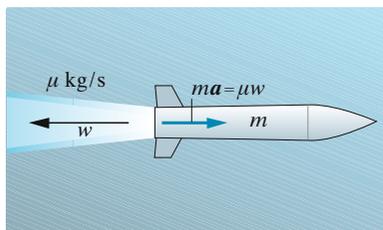


Abb. 1.23. Raketenantrieb

Betrachtung, nur ist hier die Masse des Oxidationsmittels (meist O_2) einzubeziehen, da sie in den Verbrennungsgasen mit beschleunigt werden muss.

Man beachte, wie sehr zweckmäßige Maßeinheiten alles vereinfachen. Die Einfachheit der Betrachtung und des Ergebnisses sollte allerdings nicht über die für eine genaue Rechnung notwendigen Präzisionen hinwegtäuschen.

b) Raketenphysik. Eine **Rakete** der Masse m , die im leeren, kräftefreien Raum fliegt, stoße in der Zeit dt eine Treibstoffmasse dm mit der Geschwindigkeit w , also mit dem Impuls $w dm$ aus. Da der Gesamtimpuls konstant bleibt, muss die Rakete selbst den entgegengesetzt gleichen Impuls aufnehmen, der ihre Geschwindigkeit v um dv erhöht: $w dm = -m dv$, oder nach Division durch dt

$$-w \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma. \quad (1.59)$$

Das Minuszeichen stammt nicht aus den Geschwindigkeitsrichtungen, sondern aus dm , das als Massenänderung der Rakete negativ zu nehmen ist. (1.59) stellt die effektive Kraft auf den Raketenkörper dar, die technisch Schub genannt wird: Der **Schub** ist das Produkt von Ausströmrates $-dm/dt$ und Ausströmgeschwindigkeit w .

Bei dem Massenverlust dm/dt nimmt die Raketenmasse vom Anfangswert m_0 auf m ab, um die Geschwindigkeit v zu erreichen. Aus (1.59) folgt bei konstantem w :

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = -\frac{1}{w} \frac{dv}{dt},$$

d. h. integriert

$$\boxed{\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{v}{w} \quad \text{oder} \quad m = m_0 e^{-v/w}}. \quad (1.60)$$

Nur noch eine Nutzlast $m = m_0 e^{-v/w}$ fliegt mit v weiter. Der Rest ist als Treibgas verpufft. Da technisch ein Massenverhältnis $m_0/m \approx 6$ von voll getankter zu leerer Maschine kaum zu überschreiten ist, ergibt sich für die Brennschlussgeschwindigkeit der Einstufenrakete $v \approx 2w$.

Die üblichen Treibstoffgemische (Brennstoff plus Oxidationsmittel) haben spezifische Energien η zwischen 10^7 und $2 \cdot 10^7$ J/kg (O_2 ist zu berücksichtigen). Bei verlustfreier Umwandlung in kinetische Energie ergäbe sich $w = \sqrt{2\eta} \approx 4 \cdot 10^3$ bis $6 \cdot 10^3$ m/s. Die kinetische Gastheorie zeigt, dass dies Temperaturen von über $10\,000$ °C entspräche, die keine Brennkammer aushielte; w ist in Wirklichkeit nur etwa halb so groß. Ohne das Stufenprinzip brächte man also nicht einmal Erdsatelliten auf die Bahn.

c) Propeller- und Düsenantrieb. Etwas vereinfachend kann man sagen: Beim **Propellerantrieb** wird der Energieinhalt η des Treibstoffs ausgenutzt, beim **Düsenantrieb** sein Impulsinhalt. Warum zieht man für hohe Fluggeschwindigkeiten die Düse, für kleine den Propeller vor? Warum vollzog sich der Übergang gerade gegen Ende des Zweiten Weltkrieges?

Wir vergleichen die bei den beiden Antriebsarten durch Verbrennung von μ kg Treibstoff pro Sekunde erzielten Beschleunigungen. Beim Propellerantrieb wird ein Bruchteil γ des Energieinhaltes in E_{kin} des Flugzeuges umgesetzt. Der Gesamtwirkungsgrad γ ist nicht viel größer als 0,1, denn als Wärmekraftmaschine hat der Motor einen Wirkungsgrad von höchstens 20–30%, und die Verluste an der Luftschraube sind auch erheblich. Die nutzbare Leistung ist, wenn m und v Flugzeugmasse und -geschwindigkeit sind:

$$P = \gamma\eta\mu = Fv = m\dot{v}v,$$

also ist die Beschleunigung

$$\dot{v}_P = \frac{\gamma\eta\mu}{mv}.$$

Beim Düsenantrieb wird der maximale Schub, entsprechend dem Ausstoß der Verbrennungsgase mit der maximal möglichen Geschwindigkeit $w = \sqrt{2\eta}$, in modernen Triebwerken fast erreicht. Nach dem Impulssatz ist dann bei Ausstoß von μ kg Verbrennungsgas pro Sekunde

$$m\dot{v} = \mu w = \mu\sqrt{2\eta} \quad \text{oder} \quad \dot{v}_D = \sqrt{2\eta} \frac{\mu}{m}.$$

Das Verhältnis der Beschleunigungen

$$\frac{\dot{v}_D}{\dot{v}_P} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{\eta}} v$$

ist umso günstiger für die Düse, je schneller das Flugzeug ist. Oberhalb der Geschwindigkeit

$$v_{\text{kr}} = \gamma \sqrt{\frac{\eta}{2}}$$

ist die Düse ökonomischer, unterhalb der Propeller. Mit vernünftigen Werten erhält man Übergangsgeschwindigkeiten um 1 000 km/h.

d) Durchschlagskraft von Geschossen. Die folgende Betrachtung stammt von *Newton*: Ein Geschoss mit der Masse m , der Länge l und dem Querschnitt A schlägt in ein Medium ein und erzeugt darin einen Kanal. Welche Länge L kann dieser haben?

Das Geschoss hat zwei Arbeiten zu leisten, nämlich Arbeit gegen die Kohäsionskräfte des Mediums und Beschleunigungsarbeit: Die Substanz des Kanals muss ausweichen und dazu auf die Geschwindigkeit des Geschosses selbst gebracht werden. Müsste die ganze Masse im Kanal, $m_k = AL\rho_m$ (ρ_m Dichte des Mediums) auf die Geschwindigkeit v gebracht werden, so wäre ihr die kinetische Energie $\frac{1}{2}AL\rho_m v^2$ zuzuführen. Diese darf höchstens gleich der Geschossenergie $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Al\rho v^2$ sein (ρ Dichte des Geschossmaterials), also ergibt sich für die durchschlagene Länge

$$L = l \frac{\rho}{\rho_m}. \tag{1.61}$$

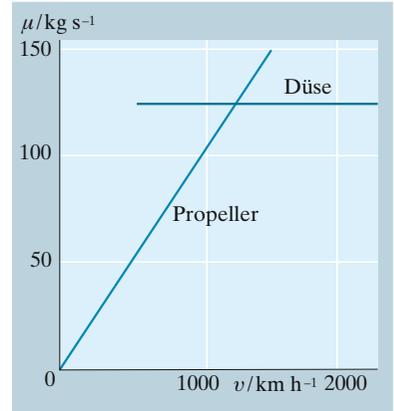


Abb. 1.24. Propeller- und Düsenantrieb: Treibstoffbedarf für eine Beschleunigung a in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit. Zahlenwerte für $a = 1 \text{ m/s}^2$, Startmasse 120 t

Das Geschoss dringt etwa so viele seiner eigenen Längen ein, wie seine Dichte größer ist als die des Mediums.

Die überraschende Unabhängigkeit von seiner Geschwindigkeit gilt allerdings nur für so hohe v , dass die Kohäsionsenergie gegen die kinetische zu vernachlässigen ist.

e) Potentielle Energie der Schwere. Die Schwerkraft auf einen bestimmten Körper stellt ein konservatives Kraftfeld dar, das über einem kleinen Teil der Erdoberfläche (der noch als eben angesehen werden kann) und in nicht zu großer Höhe zudem homogen ist (\mathbf{F} konstant). Die Niveaulinien sind parallel zur Erdoberfläche, Feldlinien sind die Vertikalen. Wenn die potentielle Energie auf den Erdboden normiert wird, ist

$$E_{\text{pot}} = mgh \quad (1.62)$$

(h Höhe über dem Boden).

Die Fallgesetze können damit aus dem Energiesatz hergeleitet werden. Da wir diese Gesetze (besonders (1.23)) aber schon zur Ableitung des Energieausdrucks benutzt haben, wäre dies rein logisch ein Zirkelschluss. Praktisch bietet aber der Energiesatz für die schnelle Lösung von Fall- und Wurfproblemen große Vorteile.

In Wirklichkeit nimmt die Schwerebeschleunigung mit der Höhe ab, und zwar umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes r vom Erdmittelpunkt (vgl. Abschn. 1.7). Im Abstand r ist sie also nicht mehr $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, wie im Abstand $R = 6370 \text{ km}$, d. h. an der Erdoberfläche, sondern sie ist dort $a = gR^2/r^2$. Eine Rakete werde auf die Geschwindigkeit v_0 gebracht und fliege dann, praktisch außerhalb der bremsenden Atmosphäre, antriebsfrei genau senkrecht weiter. Die Schwerkraft erteilt ihr, wenn sie im Abstand r ist, die Beschleunigung $\ddot{r} = -gR^2/r^2$, also die Kraft $m\ddot{r} = -mgR^2/r^2$. Auf der kleinen Strecke dr muss die Rakete die Arbeit $mgR^2r^{-2} dr$ leisten, beim Aufstieg von $r = R$ bis zum Abstand r_1 die Arbeit

$$W = \int_R^{r_1} \frac{mgR^2}{r^2} dr = mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Diese Arbeit stammt aus der kinetischen Energie der Rakete, die anfangs $\frac{1}{2}mv_0^2$ war, jetzt aber um W kleiner ist: $\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = mgR^2(1/R - 1/r_1)$. Die Gesamtenergie der Rakete ist konstant:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \quad (1.63)$$

und z. B. aus dem Anfangszustand angebar. Bei der Normierung $E_{\text{pot}}(\infty) = 0$ hat ja die potentielle Energie negatives Vorzeichen.

Wichtig ist die Unterscheidung zwischen positiver und negativer Gesamtenergie. Bei $E > 0$, d. h. $v_0 > \sqrt{2gR} = 11,2 \text{ km/s}$, bleibt auch bei $r = \infty$, wo $E_{\text{pot}} = 0$ ist, noch Geschwindigkeit v übrig: Die Rakete kann sich vollkommen von der Erde lösen. Der kritische Wert von $11,2 \text{ km/s}$ heißt auch (parabolische) **Fluchtgeschwindigkeit** oder zweite kosmi-

sche Geschwindigkeitsstufe (die erste ist die Kreisbahngeschwindigkeit $v = \sqrt{gR} = 7,9 \text{ km/s}$). Bei $E < 0$, d. h. $v_0 < \sqrt{2gR}$, gibt es einen Abstand, wo $v = 0$ wird, nämlich $r_{\max} = mgR^2/|E|$. Dort kehrt die Rakete um und fällt wieder zurück.

Wie läuft dieser Auf- und Abstieg zeitlich ab? Aus (1.63) folgt die Geschwindigkeit

$$\dot{r} = v = \sqrt{\frac{2gR^2}{r} - \frac{2|E|}{m}}. \tag{1.64}$$

Die Integration ist elementar, aber ohne viel Erfahrung oder gute Integraltabelle mühsam. Interessanter ist es, das Ergebnis vorwegzunehmen und seine Richtigkeit hinterher zu beweisen: Die Funktion $r(t)$ ist nichts weiter als ein Stück einer Zykloide. Wie Abb. 1.25 zeigt (vgl. auch Aufgabe 1.5.10), lässt sich die Zykloide, die beim Abrollen eines Rades vom Radius a entsteht, darstellen als

$$y = a(1 - \cos \varphi), \quad x = a(\varphi - \sin \varphi).$$

Wir identifizieren y mit r und x mit wt . w ist ein Maßstabsfaktor, der zunächst nur aus Dimensionsgründen eingeführt wird, dessen Sinn sich aber später ergibt. Man beachte: Es geht hier nicht um eine räumliche Kurve in den Ortsvektoren x, y , sondern um einen graphischen Fahrplan r, t . Wir bilden die Geschwindigkeit

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{w dy}{dx} = w \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{w \sin \varphi}{1 - \cos \varphi};$$

wegen $1 - \cos \varphi = r/a$, $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - (1 - 2r/a + r^2/a^2)}$ kann man auch sagen

$$\dot{r} = \frac{w\sqrt{2r/a - r^2/a^2}}{r/a} = \sqrt{\frac{2aw^2}{r} - w^2}.$$

Der Vergleich mit (1.64) ergibt völlige Übereinstimmung, wenn

$$w^2 = \frac{2|W|}{m}, \quad a = \frac{gR^2 m}{2|E|}.$$

w ist die Geschwindigkeit, bei der die kinetische Energie allein gleich $|E|$ wäre. a ist natürlich die halbe Steighöhe. Die Periode der Zykloide ist $t = 2\pi a/w = 2\pi gR^2(m/(2E))^{3/2}$. Diese Periode ist ein Spezialfall des allgemeinen Kepler-Problems (Abschn. 1.7.4). Wäre die Erde eine Punktmasse, dann würde die Rakete bei $r = 0$ mit $v = \infty$ ankommen (die Zykloide ist am Anfang oder am Ende unendlich steil). Der Tunnel, der die Erde axial durchbohrt, könnte im Prinzip garantieren, dass die Rakete periodisch mehrere Zykloidenbögen $r(t)$ durchläuft (innerhalb des Tunnels allerdings mit anderem Kraftgesetz, vgl. Aufgabe 1.7.10). Wir werden die Zykloidenbahn als Modell des ganzen Kosmos wiederfinden (vgl. Abschn. 12.10.5).

f) Schwingungsenergie. Eine elastische Kraft $\mathbf{F} = -D\mathbf{r}$ (\mathbf{r} , die Auslenkung aus der Ruhelage $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, ist hier allgemein vektoriell aufgefasst) ist als Zentralkraft konservativ. Ihre potentielle Energie (auf die Ruhelage normiert) ist

$$E_{\text{pot}}(\mathbf{r}_0) = - \int_0^{r_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} D r_0^2.$$

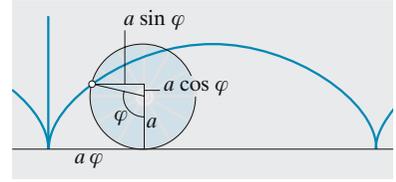


Abb. 1.25. Zykloide, beschrieben von einem Punkt am Umfang des Rades, das auf einer ebenen Bahn rollt

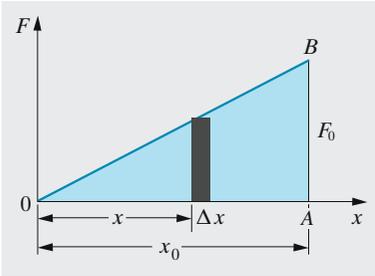


Abb. 1.26. Zur Berechnung der Dehnungsarbeit einer Feder

Für Bewegungen auf einer Geraden durch $r = \mathbf{0}$ ist das ohne Integration ebenso leicht herzuleiten: $E_{\text{pot}}(x)$ ist die Fläche unter der Kurve $F(x)$, ein Dreieck mit der Basis x_0 und der Höhe Dx_0 , also $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} Dx_0^2$.

Die Niveaulinien sind Kugeln um $r = 0$, die Feldlinien sind deren Radien. Da das Feld als Zentralfeld konservativ ist, bleibt die Gesamtenergie $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$ konstant. Allein daraus können wir die Form der Bewegung ohne explizite Benutzung der Bewegungsgleichung herleiten. Für eine radial schwingende Masse mit der Auslenkung x ist

$$E = \frac{1}{2} Dx^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \text{const.} \quad (1.65)$$

Gesucht ist also eine Funktion $x(t)$, deren Ableitung \dot{x} , quadriert, sich mit x^2 in jedem Moment nach (1.65) zu einer Konstanten ergänzt. (1.65) erinnert an den trigonometrischen Pythagoras $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, und $\cos \alpha$ ist tatsächlich die Ableitung von $\sin \alpha$. Der Ansatz $\alpha = \omega t$ mit $\omega = \sqrt{D/m}$ befriedigt (1.65) vollkommen:

$$E = \frac{1}{2} Dx_0^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} Dx_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2. \quad (1.66)$$

An einem Faden der Länge l ist ein Körper der Masse m aufgehängt. Wenn man ihn um den Winkel φ , d. h. um die Bogenlänge $s = l\varphi$ auslenkt, hängt er um

$$h = l(1 - \cos \varphi)$$

höher als in Ruhelage. Solange φ klein ist, kann man $\cos \varphi$ entwickeln: $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2} \varphi^2$, also

$$h \approx \frac{l\varphi^2}{2} = \frac{s^2}{2l}.$$

Die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = mgh \approx mg \frac{s^2}{2l} = \frac{1}{2} Ds^2$$

ist proportional dem Quadrat des Ausschlags, also elastisch. Vergleich mit (1.65) und (1.39) liefert

$$D = \frac{mg}{l}, \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Schwingungsdauer des Pendels hängt (für kleinere Ausschläge) nicht von der Amplitude ab, sondern nur von Pendellänge und Erdbeschleunigung. Diskussion für größere Amplituden: Aufgabe 1.4.16, Abschn. 20.2.1.

g) Stoßgesetz. Ein **Stoß** ist eine sehr kurzzeitige Wechselwirkung zwischen zwei Körpern (nicht Massenpunkten, denn die könnten einander gar nicht finden, da sie definitionsgemäß unendlich klein sein sollen). Vor und nach dem Stoß bewegen sich beide, ohne einander zu beeinflussen. Sind sonst keine Kräfte zu berücksichtigen, so fliegen daher beide Körper vor und nach dem Stoß mit den konstanten Geschwindigkeiten

$$\text{vor dem Stoß: } v, v'; \quad \text{nach dem Stoß: } u, u'.$$

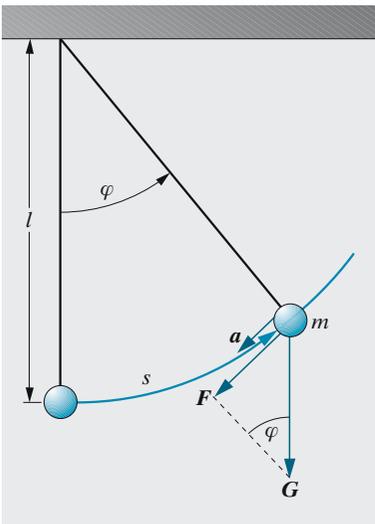


Abb. 1.27. Die rücktreibende Kraft beim Fadenpendel ist annähernd proportional zur Auslenkung

Der Gesamtimpuls vor und nach dem Stoß ist derselbe:

$$mv + m'v' = mu + m'u'$$

Wenn der Stoßvorgang keine Energie verzehrt, also elastisch ist (das Wort ist hier nicht auf elastische Kräfte im Sinne von $F = -Dx$ beschränkt, sondern umfasst alle konservativen Kräfte), bleibt auch die Energie erhalten:

$$mv^2 + m'v'^2 = mu^2 + m'u'^2$$

Besonders übersichtlich sind die Verhältnisse im **Schwerpunktsystem** (S-System), d. h. wenn der Ursprung sich ebenso relativ zu dem ruhenden **Laborsystem** (L-System) bewegt wie der Schwerpunkt der beiden Körper. Dann ist und bleibt der Gesamtimpuls Null (Abschn. 1.5.3), also vor dem Stoß: $m\mathbf{v} = -m'\mathbf{v}'$, nach dem Stoß: $m\mathbf{u} = -m'\mathbf{u}'$ (Abb. 1.28). Die Erhaltungssätze sagen noch nichts über den **Streuwinkel** ϑ zwischen \mathbf{v} und \mathbf{u} bzw. \mathbf{v}' und \mathbf{u}' . Er wird bestimmt durch die Einzelheiten des Stoßprozesses (Form der Körper, Lage, in der sie sich treffen, usw.). Ebenso erlaubt der *Impulssatz* noch jeden Wert des Verhältnisses $u^2/v^2 = u'^2/v'^2$ der Energien vor und nach dem Stoß. Man sieht aber leicht, dass der *Energiesatz* dieses Verhältnis auf 1 bei elastischem Stoß und < 1 bei anelastischem Stoß festsetzt.

Bei elastischem Stoß sind also im S-System alle vier Impulsvektoren gleich lang.

Wichtig ist die **Impulsübertragung** $\Delta p = m(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ von einem Körper auf den anderen. Aus Abb. 1.28 liest man ihre Abhängigkeit vom Streuwinkel ab:

$$\Delta p = m|\mathbf{v} - \mathbf{u}| = 2mv \sin \frac{\vartheta}{2} \tag{1.67}$$

Maximale Impulsübertragung tritt ein für $\vartheta = \pi$ (den **zentralen Stoß**), nämlich $\Delta p = 2mv$. Energie wird im Schwerpunktsystem nicht übertragen, denn aus der Gleichheit der vier Impulsbeträge folgt speziell $u = v$, also $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2$: $\Delta W_S = 0$.

Wir gehen jetzt in ein **Bezugssystem** über, in dem sich der Schwerpunkt bewegt, und zwar mit der Geschwindigkeit \mathbf{w} . Die in diesem System gemessenen Geschwindigkeiten gehen aus denen im Schwerpunktsystem einfach durch vektorielle Addition von \mathbf{w} hervor. Wir drücken Impuls- und Energieübertragung im neuen System durch die im Schwerpunktsystem (jetzt bezeichnet durch den Index S) aus.

$$\Delta \mathbf{p} = m(\mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{u} - \mathbf{w}) = m(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{p}_S \tag{1.68}$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2}m \left[(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 - (\mathbf{u} + \mathbf{w})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}m(v^2 - u^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + w^2 - w^2) \\ &= \frac{1}{2}m(v^2 - u^2) + m(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = \Delta W_S + \Delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} = \Delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

Die Impulsübertragung ist unabhängig von der Wahl des Bezugssystems, aber Energieübertragung und Streuwinkel hängen davon ab.

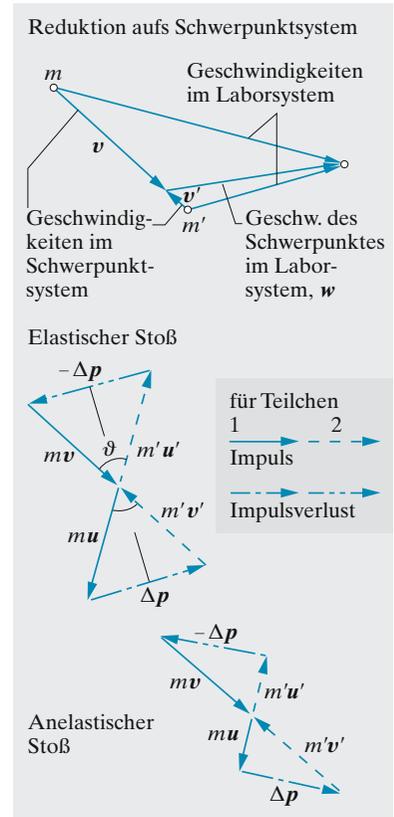


Abb. 1.28. Geschwindigkeiten und Impulse beim Stoß im Labor- und Schwerpunktsystem

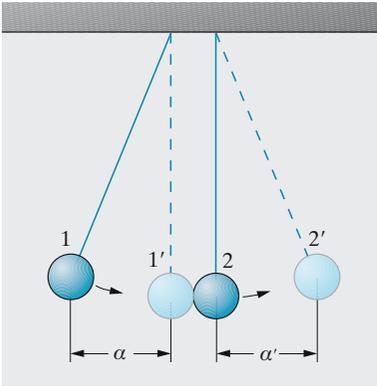


Abb. 1.29. Elastischer Stoß zwischen zwei Pendelkugeln mit gleicher Masse und gleicher Pendellänge

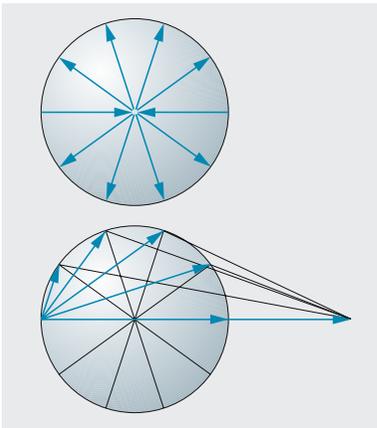


Abb. 1.30. Im Schwerpunktsystem enden alle möglichen Impulsvektoren der Partner nach dem Stoß auf einer Kugel. Diese Kugel verschiebt sich nur im Laborsystem, wo ein Partner ruhte. Für die v -Vektoren werden zwei konzentrische Kugeln daraus

Speziell betrachten wir das Bezugssystem, in dem der Körper mit der Masse m' anfangs ruhte. Für dieses System ist $\mathbf{w} = -\mathbf{v}' = m\mathbf{v}/m'$. Der Anfangsimpuls des anderen Körpers ist $\mathbf{p} = m(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = m(1 + m/m')\mathbf{v}$. Davon kann maximal $\Delta\mathbf{p} = 2m\mathbf{v}$ übertragen werden, also ein Bruchteil $\Delta p/p = 2m'/(m + m')$. Seine Anfangsenergie ist

$$E = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{m}{m'}\right)^2.$$

Davon kann maximal übertragen werden $\Delta E = \Delta p w = 2mvv' = 2mv^2 m/m'$, also ein Bruchteil

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{4m/m'}{(1 + m/m')^2} = \frac{4mm'}{(m + m')^2}. \quad (1.69)$$

Man liest daraus ab: Ein leichtes Teilchen ($m' \ll m$) kann einem schweren nur wenig von seinem Impuls entziehen. Die Energieübertragung ist auch im entgegengesetzten Fall $m' \gg m$ klein. Dann prallt nämlich das leichte Teilchen mit der gleichen Geschwindigkeit, also der gleichen Energie zurück und hat zwar seinen doppelten Impuls, aber keine Energie abgegeben.

Wir bleiben weiter in dem Bezugssystem, wo die Masse m' ruht. Allgemein auch bei verschiedenen Massen kann man die Geschwindigkeitsvektoren nach dem Stoß folgendermaßen konstruieren (Abb. 1.30): Man zeichne den Vektor \mathbf{v}_L der Anfangsgeschwindigkeit des stoßenden Teilchens und zerlege ihn im Verhältnis m'/m in zwei Abschnitte. Um den Teilpunkt lege man je eine Kugel durch den Anfangs- und den Endpunkt von \mathbf{v}_L . Nach Konstruktion sind diese Kugeln konzentrisch. Dann enden alle Vektoren der Endgeschwindigkeit des stoßenden Teilchens auf der Kugel durch den Endpunkt von \mathbf{v}_L , die des gestoßenen Teilchens auf der Kugel durch den Anfangspunkt. Welche dieser Vektoren jeweils für einen bestimmten Stoß zusammengehören, entnimmt man daraus, dass \mathbf{u}'_L parallel zu $\mathbf{v}_L - \mathbf{u}_L$ sein muss, oder gleichbedeutend: Die Verbindungslinie der Enden von \mathbf{u}_L und \mathbf{u}'_L muss durch die Mitte der Kugeln gehen.

Der Beweis für alle diese Tatsachen ergibt sich sofort daraus, dass im S-System die Beträge der Geschwindigkeiten durch den Stoß nicht

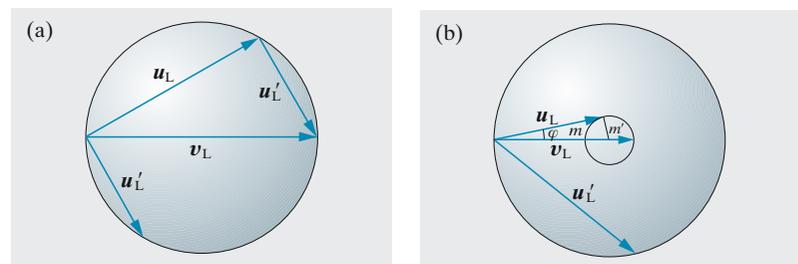


Abb. 1.31. (a) Bei gleichen Massen verschmelzen die beiden v -Kugeln zu einer (Laborsystem). Nach dem Stoß stehen die Impulse der beiden Partner immer aufeinander senkrecht. (b) Wenn das gestoßene Teilchen viel leichter ist, ändert das stoßende kaum seinen Impuls und kann höchstens den Energieanteil $4m'/m$ übertragen

geändert werden, dass in diesem System also bestimmt alle entsprechenden Vektoren auf Kugeln enden, und dass diese Kugeln durch den Übergang zum L -System nur um $v_L m' / (m + m')$ verschoben, aber in ihrer Kugelform nicht verändert werden.

Bei $m = m'$ verschmelzen die beiden Kugeln zu einer einzigen. Dann bilden die drei Impulse (stoßendes Teilchen vor und nach dem Stoß, gestoßenes nachher) ein rechtwinkliges Thales-Dreieck (Abb. 1.31a). Bei $m \gg m'$ ist die m' -Kugel, auf der die u_L -Vektoren enden, sehr klein (Abb. 1.31b). Man liest dann die maximalen Ablenkwinkel des stoßenden Teilchens zu $\varphi \approx m'/m$ ab, die maximale Energieübertragung (bei zentralem Stoß) zu $\Delta E = E4m'/m$. Bei $m \ll m'$ wird umgekehrt die Kugel, auf der die Vektoren u'_L enden, sehr klein, dagegen kann u_L nach allen Richtungen zeigen und hat sich beim Stoß betragsmäßig kaum geändert (Abb. 1.32). Maximal beim zentralen Stoß wird wieder die Energie $\Delta E = E4m/m'$ übertragen. Eine feste Wand (Abb. 1.33) ist als Stoßpartner unendlicher Masse m' aufzufassen.

h) Zur Energiekrise. Jeder Mensch unserer technischen Zivilisation verbrennt grob gerechnet 10 t Öl oder Kohle im Jahr, teils direkt in seinem Ofen oder Auto, teils indirekt in den Kraftwerken, die seinen Haushaltsstrom liefern oder die für ihn arbeitende Industrie versorgen. Wenn alle Menschen dieses materielle Niveau erreicht haben, wird der Energiekonsum der Menschheit um 10^{14} W liegen. Einem solchen Verbrauch werden selbst die optimistisch geschätzten Weltvorräte an Erdöl kaum einige dutzend, die an Kohle kaum einige hundert Jahre standhalten. Und wir sind ja schon mitten in der **CO₂-Krise**. Bei dem angegebenen Konsum an fossilen Brennstoffen beladen wir die Atmosphäre jährlich mit $2 \cdot 10^{13}$ kg CO₂. Meerwasser löst pro m³ etwa ebenso viel CO₂, wie die Atmosphäre im m³ enthält. Bei der effektiven Atmosphärendicke von 8 km und der mittleren Meerestiefe von 4 km schluckt das Meer also nur 1/3 dieser Neuproduktion. Allerdings binden die Meereslebewesen erhebliche und schwer abzuschätzende Mengen CO₂, wie die Kalkgesteine bezeugen. Ohne diese Pufferung würden wir die heutige CO₂-Konzentration (360 ppm, um 1900 erst 300 ppm, also $2 \cdot 10^{15}$ kg insgesamt) in knapp 100 Jahren verdoppeln. CO₂ absorbiert hauptsächlich Strahlung zwischen 16 und 22 μm. Dort liegt das Maximum der Rückstrahlung des Erdbodens (vgl. (11.14)), von der das heutige CO₂ daher etwa 10% schluckt. Ohne CO₂ und H₂O, das noch mehr absorbiert, läge das Gleichgewicht zwischen Ein- und Rückstrahlung um -15°C (Aufgabe 11.2.16). Diese **Treibhausgase** verschieben es um fast 30 K aufwärts (Aufgabe 11.3.7). Eine Verdoppelung des CO₂-Gehalts brächte weitere 10% Absorption und etwa 5 K Temperaturanstieg. Die Folgen wie Verschiebung der Klimazonen vor allem durch Vergrößerung der Trockengebiete, Abschmelzen des Inlandeises mit Anstieg des Meeresspiegels sind oft diskutiert worden. Wenn auch die genauen Zahlenwerte von vielen Annahmen abhängen, ist die CO₂-Zunahme ein Faktum, die beginnende Erwärmung ebenfalls. Venus mit 100 bar CO₂-Druck und 400°C ist eine gar nicht so ferne Warnung. Methan und FCKW (Fluor-Chlor-Kohlenwasserstoffe) sind noch wirksamere, zum Glück z. Z. noch seltenere Treibhausgase.

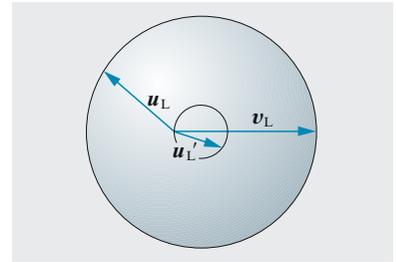


Abb. 1.32. Wenn das stoßende Teilchen sehr leicht ist, kann es zwar unter 180° zurückprallen, aber nur den geringen Energieanteil $4m/m'$ übertragen

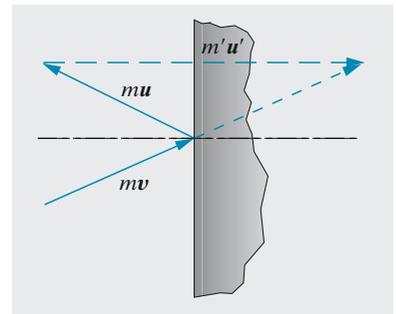


Abb. 1.33. Eine feste Wand wirkt als Stoßpartner unendlich großer Masse

Die gesamte Sonneneinstrahlung auf die Erde beträgt $1\,400\text{ W m}^{-2} \cdot 1,2 \cdot 10^8\text{ km}^2 \approx 2 \cdot 10^{17}\text{ W}$. Nur $0,1\%$ davon wird photosynthetisch ausgenutzt bzw. müsste technisch eingefangen werden. Etwa $0,1\%$ der gesamten Erdoberfläche müsste also mit Auffängern ausgelegt werden, die einen Wirkungsgrad der Konversion von nahezu 1 garantieren (Konzentration durch Hohlspiegel, Photoelemente, deren Wirkungsgrad allerdings z. Z. nur knapp $0,1$ ist; Abschn. 17.4). Einfachere **Solarenergie**-Empfänger, wie das Treibhaus, würden nur Temperaturdifferenzen um 10° , also Wirkungsgrade von nicht viel mehr als 1% liefern (Abschn. 5.3.3) und müssten daher einen erheblichen Teil der Landfläche der Erde ausfüllen. Außer zur Direktheizung kämen sie wohl kaum in Frage.

„**Wasserkraft**“ und **Windenergie** sind nichtpolluierend, machen aber nur einen winzigen Bruchteil der Strahlungsenergie aus. Wir schätzen einen Grenzwert für die Wasserkraftreserven der Erde: Die mittlere Verdunstungsrate der Ozeane liegt etwas unterhalb 1 m/Jahr , die des Festlandes bei etwa der Hälfte (vgl. Aufgabe 5.6.3 und typische Niederschlagsmengen). Der Wasserdampf wird durchschnittlich um etwa 1 km gehoben, repräsentiert also annähernd gerade wieder die benötigten 10^{14} W – bei vollständigem Einfang und idealem Wirkungsgrad.

Die **geothermische Energie** scheint auf den ersten Blick sehr ausgiebig, ist aber sehr schwer abzuzapfen. Da der größte Teil des Erdinnern etwa $3\,000\text{ K}$ haben dürfte, errechnet man eine geothermische Energiereserve von etwa $3 \cdot 10^{24}\text{ kg} \cdot 3\,000\text{ K} \cdot 600\text{ J/(kg K)} \approx 5 \cdot 10^{30}\text{ J}$, die im Prinzip die Menschheit unter den heutigen Umständen etwa $1 \cdot 10^8$ Jahre versorgen könnte. Mindestens ebenso lange wird es aber dauern, bis diese Energie von selbst durch Wärmeleitung an die Oberfläche kommt (vgl. Aufgabe 5.4.3), m. a. W., die natürliche Bodenheizung macht weniger als $1/1\,000$ der Strahlungsheizung aus. Wenn die Erdwärme an der Oberfläche ankommt, ist sie praktisch im thermischen Gleichgewicht mit der Erdoberfläche, d. h. der Wirkungsgrad einer damit betriebenen Maschine wäre minimal, es sei denn, man bohrte bis in erhebliche Tiefen und erhöhte die effektive Wärmeleitfähigkeit der Anlage um einen entsprechenden Faktor. Beim durchschnittlichen T -Gradienten von $2\text{--}3\text{ K/100 m}$ würde selbst eine 5-km -Bohrung erst theoretische Wirkungsgrade um $0,3$ ergeben. Daher zieht man z. Z. nur jung- oder altvulkanische Gegenden mit erhöhtem T -Gradienten in Betracht. Der Wärmetransport wird natürlich durch Strömung, nicht durch Leitung erfolgen. Wenn man so die Transportkapazität der Leitung im Gestein auf das 10^6 -fache steigerte, müsste man nach den obigen Werten immer noch mehr als $1/10^6$ der Erdoberfläche in Tiefbohrungen verwandeln, um den Gesamtbedarf der Menschheit zu decken.

Auch die **Gezeitenenergie** ist pollutionsfrei, wenn man davon absieht, dass ihre Ausnutzung die Erdrotation abbremst, bis im Grenzfall Tag und Monat gleich lang werden (56 heutige Tage). Dass es sich eigentlich um Rotationsenergie der Erde (relativ zum Mond) handelt, garantiert ihre praktische Unerschöpflichkeit: Die Rotationsenergie $\approx \frac{1}{2}J\omega^2$ ist von der Größenordnung 10^{29} J . In der Gezeitenwelle, aufgefasst als Scherwelle der Wellenlänge $\lambda = \pi R$, einer mittleren Höhe von $h \approx \frac{1}{2}\text{ m}$ und einer Frontbreite $b \approx R$ (R Erdradius) steckt eine Energie $\frac{1}{2}g\lambda b h^2$ von der

Größenordnung 10^{17} J, die bestenfalls innerhalb 12 h abgezapft werden könnte. Das ergibt weniger als 10^{13} W, selbst bei vollständiger Ausnutzung, die natürlich fast noch utopischer ist als bei geothermischer, Wasser- oder Windenergie.

Kernspaltung und **Kernfusion** werden hinsichtlich der technischen Möglichkeiten zur Energiegewinnung in Abschn. 18.1.4 diskutiert. Der Urangehalt der oberen Erdkruste wird auf 0,0002% geschätzt. Erdmantel und -kern haben wesentlich weniger, wie schon aus der Tatsache folgt, dass dieser U-Gehalt in 50 km Krustendicke allein infolge seiner radioaktiven Zerfallswärme (also ohne dass von Spaltung die Rede ist) bereits die gesamten Wärmeleitungsverluste der Erde ersetzt (vgl. Aufgabe 5.4.3). Da die Geothermie andererseits bei vollständiger Ausnutzung die Menschheit energetisch versorgen könnte (s. o.), folgt, dass das gesamte Uran der Erdkruste, vollständig extrahiert, allein aufgrund seiner α - und β -Aktivität das auch könnte, abgesehen von der technischen Schwierigkeit der Umwandlung in nutzbare Energieformen, und zwar auf mehrere Milliarden Jahre (Halbwertszeit $4,5 \cdot 10^9$ a). Spaltbares ^{235}U ist im Natururan nur zu 0,7% vertreten, dafür bringt aber ein Spaltakt etwa 200 MeV ein, die ganze Kette der radioaktiven Zerfallsakte des U nur etwa 40 MeV (Abschn. 18.2.3). Bei vollständiger Extrahierung kann daher das U der Erde „nur“ einige 10^8 Jahre reichen.

Das zur Fusion verwendbare Deuterium macht 0,015% allen Wasserstoffs aus. Die 10^{21} kg Meerwasser enthalten etwa 10^{20} kg Wasserstoff und davon etwa 10^{16} kg Deuterium (zum Vergleich: etwa 10^{20} kg äußere Erdkruste mit 10^{14} kg Uran, davon 10^{12} kg ^{235}U). Die Fusion zweier Deuteriumkerne zu einem Heliumkern liefert etwa 20 MeV, also ist die Energieausbeute pro Gewichtseinheit bei der Fusion noch fast zehnmal höher als bei der Spaltung, und die Fusion könnte als einzige bekannte Energiequelle selbst einem mehr als tausendfachen Anschwellen unserer „Bedürfnisse“ mehrere Millionen Jahre lang prinzipiell ohne weiteres standhalten oder bei unserem jetzigen Lebensstandard uns ein Weltalter (10^{10} Jahre) unterhalten.

i) Der Virialsatz. Rudolf Clausius, der auch die Entropie „erfand“, leitete 1870 einen Satz ab, der für subtilere Probleme der Gasdynamik, der Astrophysik, aber auch der Atom- und Molekülphysik sehr nützlich ist. Dieser **Virialsatz** gilt nicht so allgemein wie Impuls- und Energiesatz, sondern nur für *stabile mechanische Systeme*, d. h. für Systeme von Massenpunkten, deren Bestimmungsstücke, über hinreichend lange Zeit gemittelt, sich zeitlich nicht ändern. Ein solches System bestehe aus den Massen m_k ($k = 1, 2, \dots$), die sich an den Orten \mathbf{r}_k befinden und die Impulse \mathbf{p}_k haben. Alle diese Einzelgrößen ändern sich natürlich zeitlich, aber das Zeitmittel z. B. der Summe $\sum \mathbf{p}_k \mathbf{r}_k$ für das ganze stabile System ändert sich nicht, d. h.

$$\frac{d}{dt} \overline{\sum \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{r}_k} = \overline{\sum \dot{\mathbf{p}}_k \cdot \mathbf{r}_k} + \overline{\sum \mathbf{p}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k} = 0. \quad (1.70)$$

$\sum \mathbf{p}_k \cdot \dot{\mathbf{r}}_k$ ist genau die doppelte kinetische Energie. Da $\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k$ die auf das k -te Teilchen wirkende Gesamtkraft ist, kann man die erste Summe schreiben $\sum \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k$. Sie heißt das **Virial** der wirksamen Kräfte. \mathbf{F}_k ist die Summe aller Wechselwirkungen mit anderen Teilchen des Systems: $\mathbf{F}_k = \sum \mathbf{F}_{kj}$ (äußere Kräfte dürfen nicht in das System hineingreifen, sonst wäre es nicht stabil; man kann diese

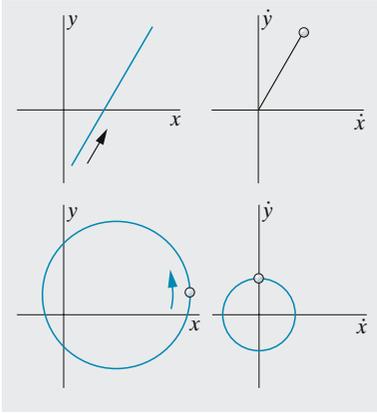


Abb. 1.34. Für die geradlinig-gleichförmige Bewegung ist der Hodograph ein Punkt, für die gleichförmige Kreisbewegung ein Kreis um den Ursprung

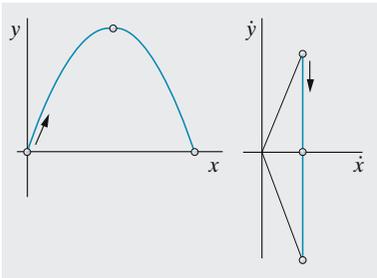


Abb. 1.35. Der Hodograph der Wurfparabel ist eine gleichförmig durchlaufene Gerade

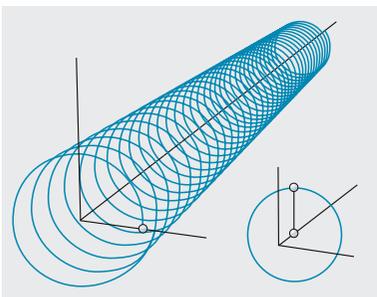


Abb. 1.36. Der Hodograph einer Spiralbewegung (perspektivisch dargestellt) ist ein verschobener Kreis

äußeren Kräfte ggf. auch eliminieren, indem man z. B. ein frei fallendes Bezugssystem benutzt). Zu jedem F_{kj} taucht im Virial auch die Gegenkraft $F_{jk} = -F_{kj}$ auf den Wechselwirkungspartner auf. Der Beitrag jedes Paares k, j lässt sich also zusammenfassen zu $F_{kj}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)$. Die Kraft folge nun einem Potenzgesetz $F_{kj} = a_{kj}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|^{-n-1}$ (z. B. $n = 2$, $a_{kj} = Gm_k m_j$ für die Gravitation). Der Beitrag des Paares k, j wird dann $a_{kj}|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|^{-n+1}$. Andererseits ist sein Beitrag zur potentiellen Energie $E_{kj} = -(n-1)^{-1}a_{kj}|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|^{-n+1}$. Also lautet (1.70), in E_{pot} und E_{kin} ausgedrückt

$$E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}(n-1)E_{\text{pot}}.$$

E_{kin} und E_{pot} teilen daher die konstante Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ unter sich auf gemäß

$$E_{\text{kin}} = -\frac{n-1}{3-n}E, \quad E_{\text{pot}} = \frac{2}{3-n}E.$$

Für Gravitation und Coulomb-Anziehung ($n = 2$) folgt $E_{\text{kin}} = -E$, $E_{\text{pot}} = 2E$, was wir für den Spezialfall der Kreis- oder Ellipsenbahn eines Teilchens um das andere in Abschn. 1.7.2 und für das Atom in Abschn. 14.2.1 bestätigen werden, was aber offenbar sehr viel allgemeiner gilt. Dass diese Kräfte $n = 2$ haben, ist ein „glücklicher Zufall“, denn für $n < 1$ oder $n > 3$ ist ein positives E_{kin} bei negativer (bindender) Gesamtenergie E überhaupt nicht mehr möglich, d. h. Kräfte mit solcher Abstandsabhängigkeit können keine stabilen Systeme zusammenhalten. Für einen Stern folgt sofort, dass unabhängig von der inneren Struktur die gesamte Gravitationsenergie doppelt so groß wie die kinetische (thermische) ist. Daraus ergibt sich die Größenordnung der Temperaturen im Sterninnern, obwohl der exakte Wert von der Massenverteilung abhängt (vgl. Aufgabe 5.2.7).

1.5.10 Impulsraum

Ein bewegtes Objekt wird am anschaulichsten durch seine Lage als Funktion der Zeit gekennzeichnet, d. h. durch den Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ oder die drei Ortskoordinaten $x(t), y(t), z(t)$. Die graphische Darstellung ergibt direkt die Bahn des Objekts. Fast ebenso viel und manchmal sogar mehr sagt der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ aus. Wenn man ihn oder seine Komponenten $v_x(t) = \dot{x}(t)$, $v_y(t) = \dot{y}(t)$, $v_z(t) = \dot{z}(t)$ für alle Zeiten kennt, bleibt zwar unbekannt, wo das Objekt z. B. bei $t = 0$ war, aber diese Anfangslage $\mathbf{r}(0)$ ist für die Dynamik meist zweitrangig. Ist sie gegeben, dann legt $\mathbf{v}(t)$ die Bahn genauso gut fest wie $\mathbf{r}(t)$.

Ähnlich wie $\mathbf{r}(t)$ kann man auch alle $\mathbf{v}(t)$ für die verschiedenen Zeiten vom Ursprung aus antragen. Die Endpunkte der Vektoren $\mathbf{v}(t)$ bilden ebenfalls eine stetige Kurve, den **Hodographen** der Bewegung. $\mathbf{r}(t)$ ist stetig, weil $\dot{\mathbf{r}}(t)$ nicht unendlich werden kann, $\mathbf{v}(t)$ ist stetig, weil $\dot{\mathbf{v}}(t)$ nicht unendlich werden kann. Der Hodograph sieht meist völlig anders aus als die räumliche Bahn. Für die geradlinig-gleichförmige Bewegung ist er ein Punkt, denn $\mathbf{v}(t)$ bleibt konstant. Für die gleichförmige Kreisbewegung ist er ebenfalls ein Kreis, der aber mit einer um eine Viertelperiode verschiedenen Phase durchlaufen wird: $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$; $\dot{x} = -\omega r \sin \omega t$, $\dot{y} = \omega r \cos \omega t$. Entsprechendes gilt für die harmonische Schwingung (seitliche Projektion der Kreisbewegung, $x = a \cos \omega t$; $\dot{x} = -a\omega \sin \omega t$). Die Wurfparabel $x = vt$, $y = wt - \frac{1}{2}gt^2$ hat als Hodographen $\dot{x} = v$, $\dot{y} = w - gt$ eine gleichförmig durchlaufene Gerade senkrecht zur \dot{x} -Achse. Der Hodograph einer Schraubenlinie, die sich um die x -Achse schlingt, ist ein Kreis, der parallel zur \dot{y}, \dot{z} -Ebene, aber nicht in ihr liegt, sondern um \dot{x} darüber. Eine Kegelschnittbahn in einem Schwerfeld hat als Hodographen einen Kreis, der allerdings nicht mehr gleichförmig durchlaufen wird.

Eine Verschiebung des Ursprungs im Ortsraum ändert nichts am Hodographen. Ein Übergang zu einem geradlinig-gleichförmig bewegten Bezugssystem (Geschwindigkeit \mathbf{w}) besteht in einer Verschiebung des ganzen Hodographen um $-\mathbf{w}$ ohne Änderung seiner Form. Auf die räumliche Bahnkurve hat ein solcher Übergang einen sehr viel drastischeren Einfluss.

Der Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ist physikalisch tiefgründiger als die Geschwindigkeit. Multiplikation aller Abstände mit m macht aus dem \mathbf{v} -Raum den **Impulsraum**, die Impulsbahn $\mathbf{p}(t)$ hat bei nichtrelativistischen Bewegungen dieselbe Form wie der Hodograph $\mathbf{v}(t)$. Ein Stoß zweier Teilchen, die vorher kräftefrei flogen, sieht im Impulsraum so aus: Zwei Punkte, die vorher still lagen (geradlinig-gleichförmige Bewegung), aber evtl. ziemlich weit getrennt waren (verschiedene \mathbf{p} -Werte), springen plötzlich beide in die neue Lage. Die Schwäche dieses Bildes ist, dass es nicht kausal erkennen lässt, warum die Punkte springen, wie es die Ortsraumdarstellung tut. Seine Stärke liegt darin, dass sich die Bedingung für die neuen Lagen sofort ablesen lässt. Nach dem Impulssatz muss die Summe der beiden \mathbf{p} -Vektoren vorher und nachher dieselbe sein. Am einfachsten ist die Übersicht im Schwerpunktsystem. Dort liegen die beiden \mathbf{p} -Punkte gleich weit beiderseits des Ursprungs, und das muss auch hinterher so bleiben. Beim elastischen Stoß bleiben die Abstände erhalten, nur die Richtung kann sich drehen (Abschn. 1.5.9g). Die kinetische Energie ist proportional dem Quadrat des Abstands vom Ursprung im Impulsraum: $E_{\text{kin}} = p^2/2m$. Eine Bewegung mit konstantem E_{kin} , aber vielleicht variabler Flugrichtung verläuft immer auf der Kugelfläche $p = \sqrt{2mE_{\text{kin}}}$.

Ein Gas wird im Ortsraum durch ein Gewimmel von Punkten dargestellt, das das ganze verfügbare Volumen gleichmäßig erfüllt. Im Impulsraum sieht das Bild ähnlich aus. Obwohl hier keine materiellen Wände vorhanden sind, verdünnt sich die Punktwolke nach außen hin. Die N Teilchen haben nämlich eine konstante Gesamtenergie E , und keines weicht allzu sehr nach oben vom Mittelwert E/N ab. Die \mathbf{p} -Punktwolke wird also nach außen hin immer dünner, besonders ungefähr von einem Abstand $p = \sqrt{2mE/N}$ ab. E ist proportional der absoluten Temperatur T

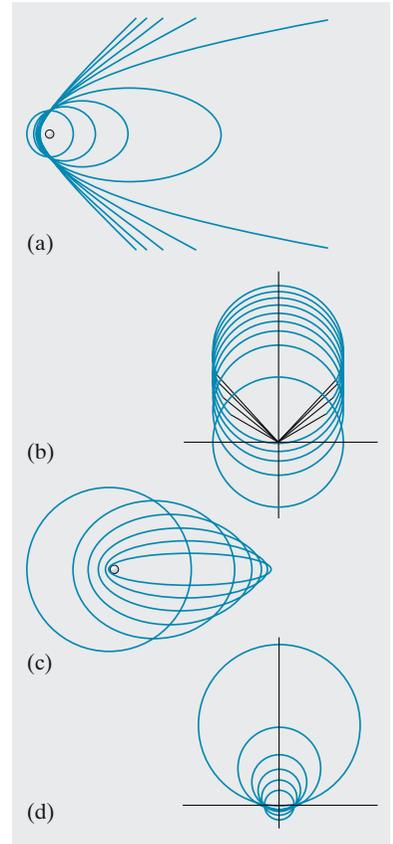


Abb. 1.37a–d. Der Hodograph der Kepler-Bewegung ist immer ein Kreis, der allerdings im Fall der Hyperbel nicht vollständig durchlaufen wird. (a) Bahnkurven mit gleichem Drehimpuls, aber verschiedenen Energien, (b) Hodographen dazu. (c) Bahnkurven mit gleicher Energie, aber verschiedenen Drehimpulsen, (d) Hodographen dazu. Die Kreisform und ihre Parameter ergeben sich einfach durch Bildung von \dot{x} und \dot{y} aus $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ mit $r = p/(1 - \varepsilon \cos \varphi)$ und $\dot{\varphi} = L/mr^2$ (Abschn. 1.7.4)

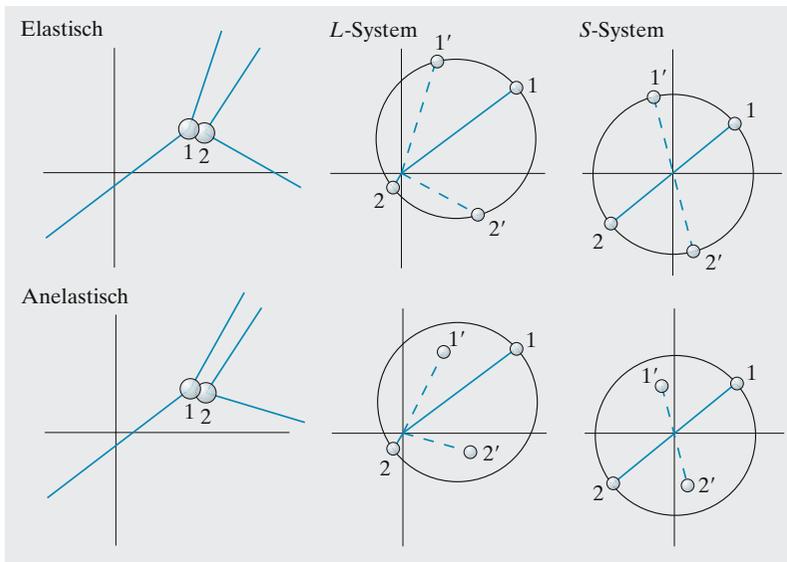


Abb. 1.38. Elastischer und inelastischer Stoß im Impulsraum

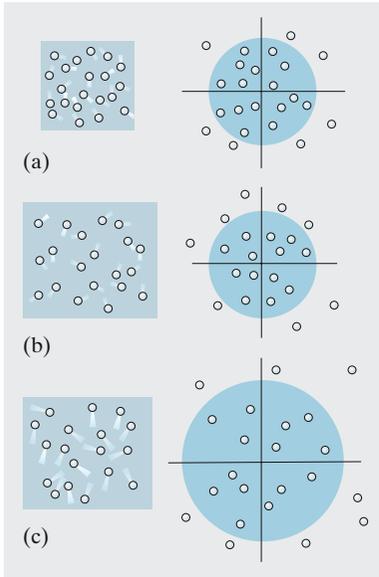


Abb. 1.39a–c. Ein Gas im Ortsraum und im Impulsraum. (a) Temperatur und Volumen klein, (b) größeres Volumen, gleiche Temperatur, (c) auch die Temperatur ist gewachsen

des Gases. Wenn man das Gas erhitzt, dehnt es sich im Impulsraum aus und lässt sich, anders als im Ortsraum, durch keine Wand daran hindern.

Der Impulsraum ist ein wesentliches Darstellungs- und Denkmittel für die statistische und die Quantenphysik (Kap. 5, 19 und 13).

1.6 Reibung

Reibung verwandelt kinetische Energie, also geordnete Bewegung, in Wärme, also ungeordnete Bewegung der Teilchen. Sie durchbricht somit die Energieerhaltung nur scheinbar, nämlich was die mechanische Energie betrifft. Dem Impulssatz kann sie nichts anhaben.

1.6.1 Reibungsmechanismen

Bisher haben wir Bewegungen betrachtet, für die der rein mechanische Energiesatz gilt, bei denen also die Summe von kinetischer und potentieller Energie konstant ist und nur Umwandlungen zwischen diesen beiden Energieformen erfolgen. Jede reale Bewegung, zumindest auf der Erde, sei es auf einer festen Unterlage, sei es in einem Medium, wie Wasser oder Luft, ist aber mit einem Energieverlust verbunden, genauer mit der Umwandlung von kinetischer in Wärmeenergie. Für diesen Energieverlust sind **Reibungskräfte** verantwortlich. Wir greifen aus den zahlreichen Reibungsmechanismen die drei wichtigsten heraus.

a) Die **Coulomb-Reibung** oder **trockene Reibung** erfolgt, wenn sich ein Körper ohne Schmiermittel auf fester Unterlage bewegt.

Diese Reibungskraft ist annähernd unabhängig von der Geschwindigkeit. Sie ist allein bestimmt durch die **Normalkraft** F_N , die den Körper auf die Unterlage drückt, und proportional zu dieser:

$$F_R = \mu F_N \quad (1.71)$$

μ heißt **Reibungskoeffizient**. Er hängt von der Art und der Oberflächenbeschaffenheit der beiden Materialien ab. Wenn der Körper noch ruht, verhindert eine Kraft F'_R , dass er sich in Bewegung setzt, es sei denn, die Antriebskraft ist größer als F'_R . Diese **Haftreibung** F'_R ist immer größer als die **Gleitreibung** F_R und ebenfalls proportional zu F_N , mit einem anderen Reibungskoeffizienten μ' , der offenbar größer ist als μ . Wenn die Antriebskraft also einen Körper einmal in Bewegung gesetzt hat, bewegt sie ihn beschleunigend weiter.

x Beispiel...

Für Stahl auf Stahl ist der Reibungskoeffizient aus der Ruhe 0,15, im Gleiten um 0,05. Welche Bremsstrecken und -zeiten treten bei der Eisenbahn auf?

Bremsweg $v^2/(2\mu_0g)$ und Bremszeit $v/(\mu_0g)$ etwa fünfmal länger als auf der Straße, aus 120 km/h etwa 400 m, 22 s. Bei zu starkem Bremsen verdreifachen sich diese Werte.

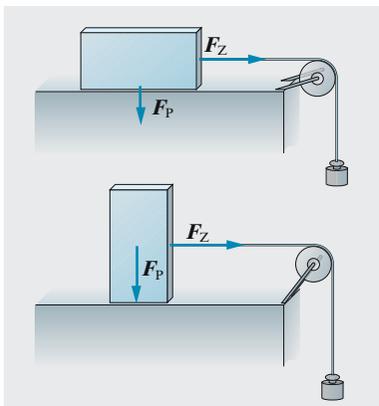


Abb. 1.40. Der Klotz erfährt hochkant die gleiche Reibung wie breitseits, zu deren Überwindung die gleiche Zugkraft F_Z nötig ist, denn es kommt nur auf die Normalkraft an, und die ist beide Mal gleich dem Gewicht F_P

Am einfachsten bestimmt man einen Reibungskoeffizienten aus dem Winkel α einer schiefen Ebene, bei dem ein Körper gerade zu rutschen anfängt (Haftreibung), oder bei dem er sich langsam gleichförmig weiterbewegt (Gleitreibung). Es gilt

$$\mu = \tan \alpha . \quad (1.72)$$

Das ergibt sich aus Abb. 1.41: Vom Gewicht mg wirkt nur die Komponente $mg \cos \alpha$ als Normalkraft. Die Reibung ist also $\mu mg \cos \alpha$. Wenn sie größer ist als der Hangabtrieb $mg \sin \alpha$, d. h. wenn $\tan \alpha < \mu$, rutscht der Körper nicht.

Warum ist die Coulomb-Reibung geschwindigkeitsunabhängig? Bei einer Verschiebung des Körpers um dx muss eine Anzahl mikroskopischer Vorsprünge überwunden oder abgeschliffen werden. Diese Anzahl ist proportional zu dx , die zur Verschiebung erforderliche Energie dW daher ebenfalls. Der Proportionalitätsfaktor zwischen dW und dx ist die Reibungskraft, die also nicht von der Verschiebung oder ihrer Geschwindigkeit abhängt. Die Haftreibung ist größer als die gleitende, weil ein ruhender Körper tiefer in die Vertiefungen der Unterlage einrasten kann als ein bewegter. Daraus sieht man, dass die Unabhängigkeit von v nicht exakt sein kann: Bei sehr kleinem v muss sich der Körper erst in die Gleitstellung heben, also nimmt μ erst allmählich auf seinen Gleitwert ab.

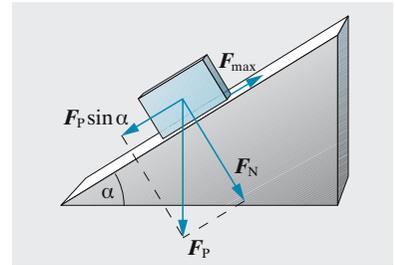


Abb. 1.41. Der Klotz beginnt zu rutschen, wenn $\tan \alpha$ gleich dem Reibungskoeffizienten μ wird

b) **Stokes-Reibung** oder **viskose Reibung**: Nicht zu große Körper, die sich nicht zu schnell durch ein Fluid (Flüssigkeit oder Gas) bewegen, erfahren eine Bremskraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist.

Wie in Abschn. 3.3.3e gezeigt wird, ist diese Kraft für eine Kugel vom Radius r

$$F_R = 6\pi\eta r v , \quad (1.73)$$

wo η eine Eigenschaft des Fluids, seine **Viskosität** ausdrückt.

c) **Newton-Reibung**: Der schnellen Bewegung größerer Körper durch ein Fluid wirkt eine Kraft entgegen, die proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist:

$$F_R = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2 . \quad (1.74)$$

A ist der Querschnitt des Körpers, in Bewegungsrichtung gesehen, ρ die Dichte des Fluids, c_w ein Widerstandskoeffizient, der von der Form des Körpers bestimmt wird. Bei Stromlinienform oder Zuspitzung ist $c_w < 1$, bei einer Kugel etwa $c_w \approx 1$, bei hydrodynamisch ungünstiger Form $c_w > 1$. Wir leiten die Newton-Reibung nach dem Gedankengang von Abschn. 1.5.9d her. Will ein Körper mit der Geschwindigkeit v durch ein Fluid der Dichte ρ dringen, muss er es zur Seite drängen und es dabei auf eine Geschwindigkeit v_f beschleunigen, die etwa gleich seiner eigenen v ist (günstige Formgebung verringert allerdings das Verhältnis v_f/v erheblich). In der Zeit dt muss dies geschehen für eine Säule von der

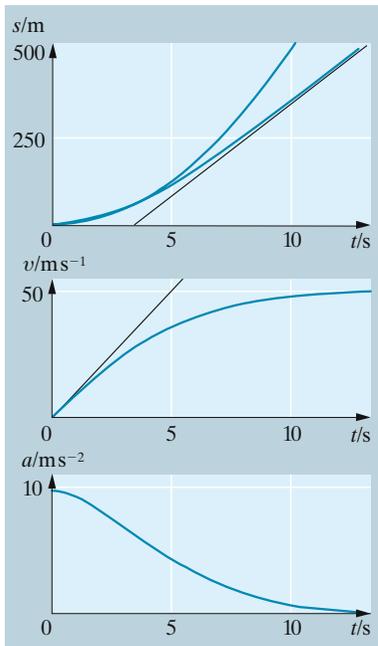


Abb. 1.42. Bewegung in einem Medium mit einer Reibungskraft $F \sim v^2$. Zahlenwerte entsprechen dem Fall eines menschlichen Körpers durch die Luft in Bodennähe

Länge $v dt$ und vom Querschnitt A . Sie hat das Volumen $Av dt$ und die Masse $m_f = \rho Av dt$. Um diese Masse auf die Geschwindigkeit v zu bringen, muss man ihr die Energie $\frac{1}{2}m_f v^2 = \frac{1}{2}\rho Av^3 dt$ zuführen, natürlich auf Kosten des bewegten Körpers. $\frac{1}{2}\rho Av^3$ ist die zuzuführende Leistung. Da Leistung = Kraft \cdot Geschwindigkeit, vgl. (1.58), ergibt sich für die Reibungskraft (1.74).

Ob eine Bewegung durch ein Fluid durch Stokes- oder Newton-Reibung beherrscht wird, entscheidet man mit dem **Reynolds-Kriterium** (Abschn. 3.3.5). Es gibt noch viele andere Reibungsmechanismen mit anderen $F_R(v)$ -Gesetzen. Die Reibung zwischen geölten und geschmierten Flächen folgt z. B. einem $v^{1/2}$ -Gesetz (Abschn. 3.3.3g). Bei sehr hohen Geschwindigkeiten gilt in einem Fluid ein höherer v -Exponent als 2, besonders bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit.

1.6.2 Bewegung unter Reibungseinfluss

Wie sieht nun die durch solche Kräfte beeinflusste Bewegung aus? Wir betrachten das Beispiel einer konstanten Kraft, modifiziert durch eine Reibung $\sim v^2$, z. B. den Fall eines Körpers im Erdschwerefeld mit Luftwiderstand. Die Bewegungsgleichung ergibt sich durch Zusammenfassung der wirkenden Kräfte:

$$ma = -mg + kv^2 \quad (k = \frac{1}{2}\rho A) . \quad (1.75)$$

Auch ohne exakte Behandlung der Gleichung (1.75) (die etwas umständlich ist) lässt sich das Wesen der Lösung leicht erkennen: Der Körper sei zunächst in Ruhe und werde unter dem Einfluss von mg allmählich beschleunigt. Ganz zuerst spielt dann die Reibung noch keine Rolle, da v und erst recht v^2 noch klein sind: Die Bewegung verläuft fast wie beim freien Fall, speziell nimmt v zu wie gt . Unbeschränkt lange kann v aber nicht so anwachsen: Spätestens dann, wenn kv^2 auf diese Weise die Konstante mg eingeholt hat, muss die Beschleunigung wesentlich abgenommen haben, denn bei $kv^2 = mg$ würde ja $ma = 0$ folgen. Wenn bis dahin v tatsächlich wie gt anstiege, wäre die Zeit, bei der dieser **quasistationäre Zustand** erreicht wird,

$$t_q = \sqrt{\frac{m}{kg}} . \quad (1.76)$$

Nach einer Zeit dieser Größenordnung ist die Beschleunigung praktisch Null, und die dann konstante Geschwindigkeit ergibt sich aus $kv^2 = mg$ zu

$$v_q = \sqrt{\frac{mg}{k}} . \quad (1.77)$$

Diese Beziehungen bleiben sogar richtig, wenn sich die Konstante k langsam ändert. Da k nach (1.75) die Dichte des Mediums enthält, entspricht dies z. B. dem Fall aus großer Höhe. Bedingung für die Anwendbarkeit von (1.77) ist nur, dass sich während der Einstellzeit t_q die Dichte, d. h. k nur wenig ändert.

Diese quasistationäre Betrachtungsweise ist immer dann sehr nützlich, wenn in einem aus mehreren Summanden bestehenden Ausdruck zuerst

der eine, dann ein anderer dominiert. In der Kinetik chemischer und anderer Reaktionen und bei der Behandlung der Relaxationserscheinungen kann man oft ähnlich vorgehen.

Die Bewegung unter konstanter Antriebskraft F , aber mit einer Reibung $F_R \sim v$ lässt sich analog behandeln:

$$ma = F - cv. \tag{1.78}$$

Die Bewegung wird quasistationär für Zeiten wesentlich größer als $t_q = m/c$ und hat dann die Geschwindigkeit $v_q = F/c$.

Die exakte Lösung ist wegen der Linearität von (1.78) auch leicht zu finden:

$$v = v_0 e^{-t/t_q} + v_q (1 - e^{-t/t_q}).$$

Sie zeigt genau das mittels der Quasistationaritätsbetrachtung gefolgerte Verhalten.

1.6.3 Flug von Geschossen

Nur für sehr kleine Schussweiten ist die Wurfparabel eine ausreichende Näherung. Wann sie versagt, zeigt am einfachsten die Abschätzung von *Newton* (Abschn. 1.5.9d), die für ein Widerstandsgesetz $F = -kv^2$ gilt, aber auch für andere v -Abhängigkeiten ihre Bedeutung hat. Wenn die Schussweite in die Größenordnung $x_0 = m/k \approx 2m/(A\rho_l)$ kommt, d. h. bei Kugeln etwa 10 000 Geschosslängen, bei günstigerer Form bis zu fünfmal mehr, wird sie fast unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und ist daher kaum noch zu steigern. Natürlich muss v_0 so groß sein, dass diese Grenzweite überhaupt erreicht wird. Die Wurfparabel muss also über x_0 hinausreichen, d. h. es muss $v_0^2/g > m/k$ sein oder $v_0 > v_\infty = \sqrt{gm/k}$. (v_∞ ist die stationäre Geschwindigkeit eines fallenden Körpers unter diesen Umständen).

Die Schussbahn fängt wie die Wurfparabel an, endet aber, falls nach unten hinreichend Platz ist, in einem ganz anderen asymptotischen Verhalten: Die Horizontalkomponente von v ist dann völlig aufgezehrt (nach einer Weite $\approx x_0$ und einer Zeit $\approx x_0/v_0$), die Vertikalkomponente beträgt stationär $-v_\infty$. Dementsprechend fällt die Bahn hinten steiler als sie vorn steigt, und die Geschwindigkeit ist auf dem absteigenden Ast wesentlich kleiner als in gleicher Höhe auf dem ansteigenden (Energiesatz mit Berücksichtigung der Reibungsverluste). Eine analytisch geschlossene Darstellung der ballistischen Kurve gibt es aber nicht (bis auf $n = 1$, Abschn. 1.6.2, was hier nicht interessiert). Selbst bei $n = 2$ sind die Integrale nicht geschlossen ausführbar. $n = 2$ gilt übrigens nicht durchgehend: Nahe der Schallgeschwindigkeit hat man mit größerem n zu rechnen. Aufgabe 1.6.12 zeigt, wie weit man mit analytischen Mitteln kommt. Numerische Lösungen sind mit jeder gewünschten Genauigkeit in Schusstafeln festgehalten.

Als man noch mit Kanonenkugeln schoss, war das Problem mit der Berechnung der Schwerpunktsbahn theoretisch erledigt. Allerdings machen die 10 000 Kaliber Reichweite selbst bei den 64pfündigen Kugeln der „Achterstücke“ nur wenig mehr als 2 km aus. Verringerung des Luftwiderstandes durch aerodynamisch bessere Formgebung war also wichtiger als Steigerung der Mündungsgeschwindigkeit. Längliche Geschosse neigen aber im heftigen Fahrtwind zu wilden Achsenkipungen, die Flugbahn und -weite völlig unvorhersagbar machen. Man stabilisiert durch Kreiselbewegung, d. h. zwingt dem Geschoss im Lauf mit schraubenförmig gezogener Innenwand einen Drall auf. Die entsprechende Bremsung im Lauf ist unerheblich. Die Winkelgeschwindigkeit ω der Achsrotation muss über einer

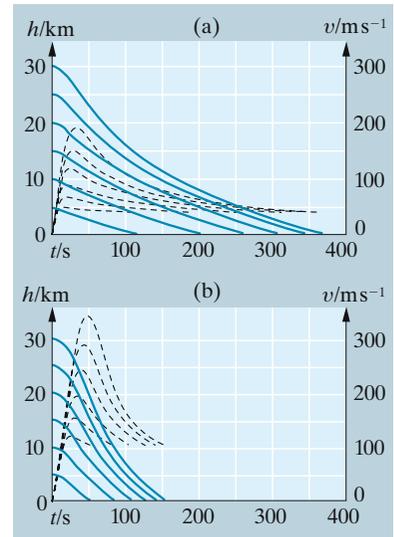
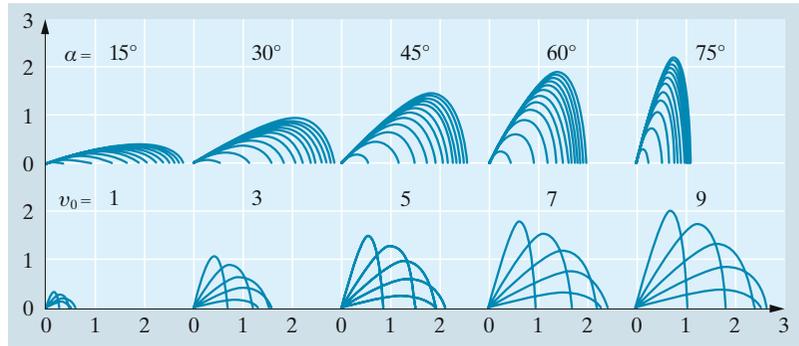


Abb. 1.43a,b. Fall eines Menschen aus verschiedenen großen Höhen durch die Luft. (—) Höhe h , (---) Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit, (a) in Querlage, (b) in Aufrechtstellung des Körpers. Spätestens nach 1 Minute nimmt v seinen stationären Wert an, der sich mit der Luftdichte ändert und am Boden unabhängig von der Anfangshöhe immer die gleiche Größe hat

www. Abb. 1.44. *Ballistische Kurven*, berechnet nach dem Runge-Kutta-Verfahren. Annahme: Luftwiderstand $\sim v^2$. Ähnlich wirkt sich der Luftwiderstand auf einen Wasserstrahl aus, unterstützt durch das Zersprühen in Tropfen. v_0 : Anfangsgeschwindigkeit, α : Abschusswinkel. *Oben*: Für jedes α läuft v_0 von 1 bis 12. *Unten*: Für jedes v_0 läuft α von 15° bis 90° in Schritten von 15° . Einheit des Weges ist $m/k = 2m/(c_w \rho A)$, Einheit der Geschwindigkeit ist $\sqrt{mg/k}$. So lassen sich die Kurven für jedes Geschoss verwenden. Beispiel: Infanteriegeschoss mit $A = 0,5 \text{ cm}^2$, $c_w = 0,2$, $m = 20 \text{ g}$; x -Einheit 3 km, v -Einheit 170 m/s



Stabilitätsgrenze ω_g liegen. Diese ergibt sich daraus (vgl. Aufgabe 2.4.9), dass die Aufbauzeit $t = L_p/T = J'/(J\omega)$ der Präzession des Geschosses unter der Wirkung eines Drehmoments T kleiner sein muss als die Zeit $\tau \approx \sqrt{J'/T}$, in der das gleiche Moment den Kreisel einfach kippt (J Trägheitsmoment um die Geschossachse, J' um eine Achse senkrecht dazu). Das Drehmoment, mit dem der Luftwiderstand zu kippen versucht, ist Kraft \cdot Kraftarm $\approx \rho_t v^2 l r \cdot l/2$. Einsetzen typischer Werte liefert Kreisfrequenzen von einigen 1000 s^{-1} . Bei $v_0 \approx 1 \text{ km/s}$ erfordert das einen Anstellwinkel der „Züge“ im Lauf von nur einigen Grad.

Das kreiselnde Geschoss behält zunächst seine Achsrichtung bei und muss eben deshalb, sowie die Flugbahn sich unter die Anfangstangente abzusenken beginnt, schief zur Bahn stehen und sich damit dem Drehmoment des Luftwiderstandes aussetzen. Wenn das Geschoss nicht rotierte, würde es sich dadurch noch steiler stellen. Als Kreisel beginnt es zu präzedieren, d. h. einen Kegel um die momentane Bahntangente zu beschreiben. Die Frequenz dieser **Präzession** ist $\omega_p = T/(L \sin \alpha)$, die Periode beträgt mit den obigen Werten einige Sekunden, oft länger als der Flug des Geschosses. Den größeren Teil der Flugzeit zeigt also die Geschossachse auf die Seite der Bahn, wohin sie sich zu Anfang der Präzession gewendet hat. Bei Rechtsdrall ist das, von oben betrachtet, die rechte Seite (Abschn. 2.4.2). Damit erhält der Luftwiderstand eine Komponente senkrecht zur Bahn, und zwar nach rechts hin. Alle Geschosse mit Rechtsdrall werden systematisch nach rechts abgelenkt, allerdings um einen Betrag, der sich wegen der Regularität des Dralls und der Präzession vorhersagen lässt. Diese Rechtsabweichung gilt auch auf der Südhalbkugel, denn sie ist etwa 100mal größer als der Einfluss der Coriolis-Kraft.

1.6.4 Die technische Bedeutung der Reibung

Jedes Glatteis zeigt die positive Rolle der Reibung für die Fortbewegung von Mensch, Tier und Fahrzeug. Auf einer mit Spiritus polierten, mit Nähmaschinenöl dünn eingeriebenen Spiegelglasplatte sind fast alle Tiere völlig hilflos, die meisten fallen sogar um; nur Laubfröschen und Stubenfliegen mit ihren Saugnapf-Füßen macht das nichts aus, ebenso wenig den Schnecken. Abgesehen davon könnte man sich bei Wegfall der Reibung nur auf den Raketenantrieb verlassen. Andererseits schätzt man, dass alle Eisenbahnen jährlich etwa 1 Mill. Tonnen Stahl zu feinem Pulver zermahlen, besonders beim Bremsen (vor Bahnhöfen und auf Gefällstrecken sind Schotter und Schwellen rot vom Abrieb). Mindestens ebenso viel Gummistaub verteilen die Autos in der Landschaft, und Fußgänger sind in dieser Hinsicht nicht viel besser. Bei Landfahrzeugen beherrscht die

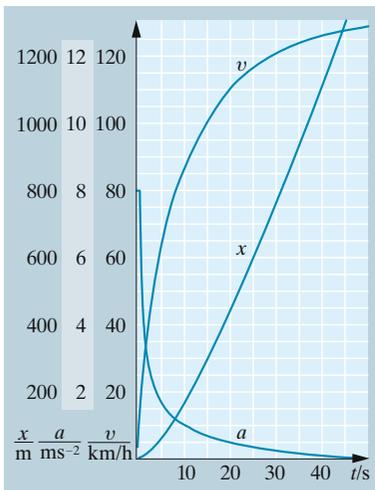


Abb. 1.45. Anfahrvorgang eines Fahrzeugs bis zur durch den Luftwiderstand begrenzten Höchstgeschwindigkeit

Reibung, abgesehen von Bremsen, Kupplung und vom Kurvenfahren, den **Anfahrvorgang**, aber auch die Höchstgeschwindigkeit.

Wir untersuchen das Anfahren. Könnte das Fahrzeug seine volle Antriebsleistung P ausnutzen, ergäbe sich aus $E = Pt = \frac{1}{2}mv^2$ sofort $v = \sqrt{2Pt/m}$, ein Anstieg in Form einer liegenden Parabel. In Wirklichkeit liegt der Anfangsteil von $v(t)$ tiefer, denn die beschleunigende Kraft kann höchstens gleich der Reibung sein, die Straße oder Schiene aufnehmen: $F = m\dot{v} \leq F_r = \mu F_n = \mu mg$, also bestenfalls $\dot{v} = \mu g$ und $v = \mu gt$. Wegen $P = Fv$ kann man erst bei der **Reibungsgeschwindigkeit** $v_r = P/F_r = P/(\mu mg)$ die volle Motorleistung auf die Straße bringen. Bei $v < v_r$ quietscht es, wenn man es doch versucht. Bei der Eisenbahn ist μ viel kleiner, also v_r größer.

Die Höchstgeschwindigkeit v_m wird überwiegend durch den Luftwiderstand bestimmt, weil seine Leistung mit v^3 steigt, die der trockenen Reibung nur mit v , die der **Schmiermittelreibung** mit $v^{3/2}$. Aus $P = \frac{1}{2}c_w \rho A v_m^3$ ergibt sich, dass v_m mit P nur wie $P^{1/3}$ steigt (Abb. 1.46), abgesehen von Maßnahmen zur Verringerung von A und c_w . In diesem Bereich spart man pro Zeiteinheit den halben Treibstoff, wenn man auf nur 21% der Geschwindigkeit verzichtet. Viel stärker wirken sich Leistung (und Preis) des Autos auf die Beschleunigungszeit aus. Wenn man den Luftwiderstand unterhalb 100 km/h vernachlässigt, ebenso die Einbuße im reibungsbeherrschten Bereich $v < v_r$, erreicht man $v_1 = 100$ km/h in $t_{100} = mv_1^2/(2P)$.

Leistungsmessung an einem Motor. Motorleistung ist Kreisfrequenz ω mal Drehmoment T . Die Kreisfrequenz wird mit der Drehzahl-Messuhr bestimmt, deren Achse wieder durch Reibung mitgenommen wird; heutzutage misst man meist stroboskopisch oder elektronisch. Das Drehmoment bestimmt man oft mit dem **Prony-Zaum**. Ein Riemen oder zwei Schraubbacken (Abb. 1.47) werden an die rotierende Motorwelle gepresst, bis Gleichgewicht besteht, d. h. der durch F_p belastete Arm sich weder hebt noch senkt. Dann ist das Drehmoment $T = F_p l$ betragsgleich dem Moment, das der Motor gegen die Reibung an den Backen ausübt, und die Leistung ergibt sich aus $P = T\omega$.

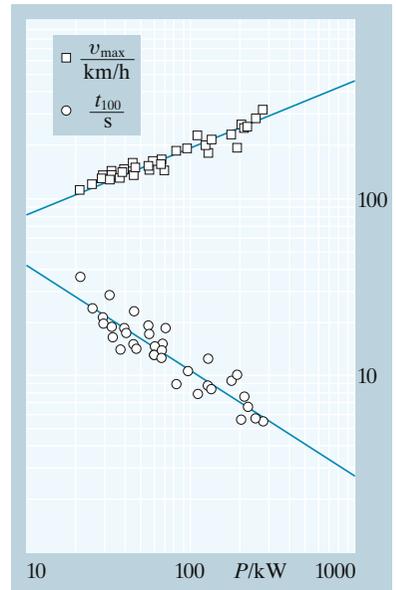


Abb. 1.46. Leistungen P , Höchstgeschwindigkeiten v_{\max} und Beschleunigungszeiten t_{100} von 0 auf 100 km/h für einige Autotypen (einschließlich eines chinesischen „Volkswagens“ mit 10 kW). Die doppellogarithmische Auftragung zeigt durch ihre Steigung die Abhängigkeiten $v_{\max} \sim P^{1/3}$ und $t_{100} \sim P^{-1}$

× Beispiel ...
 Wie viel Treibstoff spart man pro *Wegeinheit*, wenn man 120 km/h statt 160 km/h fährt?
 44%, wenn es nur um den Luftwiderstand geht.

Rollreibung. Räder vermindern die Reibung verglichen mit dem Schleifen; die verbleibende Gleitreibung in den Achslagern wird durch Wälzlager (Kugel- oder Zylinderlager) noch erheblich reduziert. Ideal harte Rollen auf ideal harter, ebener Unterlage erführen überhaupt keinen Widerstand. Ebenso wäre es bei ideal elastischer Deformation, denn sie läge immer symmetrisch zum Auflagepunkt, und die Reaktionskraft der Unterlage wäre in jedem Augenblick entgegengesetzt zur Normalkraft F_N , es bliebe keine Komponente in Bewegungsrichtung. In Wirklichkeit hat die Deformation immer einen anelastischen Anteil (Abschn. 3.4.4), d. h. sie hinkt

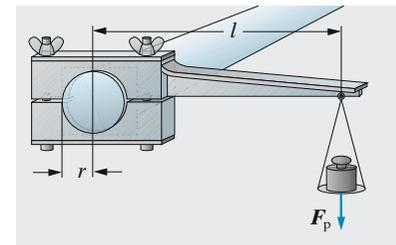


Abb. 1.47. Prony-Zaum zur Leistungsmessung an einer Motorwelle

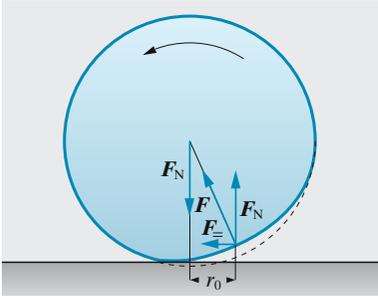


Abb. 1.48. Die Rollreibung beruht auf der anelastischen Deformation von Rollkörper und Unterlage. Was ist gegen diese Erklärung der Rollreibung einzuwenden, besonders was die Geschwindigkeitsabhängigkeit betrifft? Wenn die Rollreibung allein eine Folge der elastischen Relaxation wäre, nämlich der Tatsache, dass die Deformation hinter der Belastung nachhinkt, müsste sie von der Geschwindigkeit abhängen, denn der Winkel zwischen F_N und F in Abb. 1.48 ist umso größer, je schneller das Rad rollt. Tatsächlich ist die Rollreibung geschwindigkeitsabhängig, aber schwächer als proportional. Der Effekt ist also komplizierter als dargestellt

etwas nach, wie in Abb. 1.48 für eine völlig harte Unterlage angedeutet ist. Die Reaktionskraft F , die der Hauptteil des Rollkörpers erfährt, wird ihm durch seine deformierten Teile vermittelt. Ihr Angriffspunkt ist gegen den Punkt, auf den F_N zielt, etwas nach hinten verschoben (um die Strecke r_0). Die Normalkomponente der Reaktionskraft kompensiert genau F_N ; es bleibt aber eine Tangentialkomponente $F_{\parallel} = r_0 F_N / r$ entgegen der Rollrichtung, die durch eine Zugkraft von gleichem Betrage kompensiert werden muss, wenn der Körper mit konstanter Geschwindigkeit rollen soll. Bei technischen Rollkörpern (Rädern, Kugellagern) liegt r_0 im Bereich 10^{-2} mm bis 1 mm.

1.7 Gravitation

In sehr großen Maßstäben überwiegt die Gravitation alle anderen Kräfte und bestimmt den Aufbau des Weltalls fast allein.

1.7.1 Das Gravitationsgesetz

In seinen durch die Londoner Pestepidemie verlängerten Semesterferien 1665–1666 fand *Isaac Newton* außer dem verallgemeinerten binomischen Satz, der Differential- und Integralrechnung, der Spektralzerlegung des weißen Lichts auch das **Gravitationsgesetz**. Die Grundidee ist uns heute so geläufig geworden, dass wir ihre Genialität und Tragweite kaum noch richtig einschätzen können. Die Kraft, die den Apfel vom Baum fallen lässt, ist die gleiche, die den Mond um die Erde und die Erde um die Sonne zwingt, d. h.: Beide Fälle sind Spezialfälle eines allgemeinen Kraftgesetzes, nach dem alle Massen einander anziehen. Die Kraft wird von den Massen m_1 und m_2 der beiden beteiligten Körper, ihrem Abstand und vielleicht auch noch anderen Größen abhängen:

$$F = f(m_1, m_2, r, \dots).$$

Aus dem Reaktionsprinzip folgt gleichzeitig, dass es sich um eine *beiderseitige* Anziehung handeln muss: Die Erde wird vom Apfel mit der gleichen Kraft angezogen wie umgekehrt. m_1 und m_2 müssen also in symmetrischer Weise in die Funktion f eingehen. Folgende Beobachtungen legen die Form des Gesetzes näher fest:

- Auf der Erdoberfläche fallen alle Körper gleich schnell, abgesehen von denen, die so leicht sind, dass der Luftwiderstand eine wesentliche Rolle spielt. Die Fallbeschleunigung ist also unabhängig von der Masse m_2 des fallenden Körpers. Die zur Erklärung dieser Beschleunigung zu postulierende *Kraft* muss also proportional m_2 sein.
- Aus dem Reaktionsprinzip folgt dann, dass F auch proportional zu m_1 sein muss.
- An der Erdoberfläche, also einen Erdradius oder $r_E = 6\,370$ km vom Anziehungszentrum (Erdmittelpunkt) entfernt, beträgt die Schwerebeschleunigung $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$. Die Beschleunigung in dem Abstand r , wo sich der Mond befindet ($r = 60 r_E$), ergibt sich sofort aus der Kreisbahn-

bedingung für den Mond, d. h. der Gleichheit von Schwere- und Zentripetalbeschleunigung (vgl. (1.30), $T_{\text{Um}} = 27,3 \text{ Tage} = 2,36 \cdot 10^7 \text{ s}$):

$$a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T_{\text{Um}}} \right)^2 \cdot r = 2,73 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Die Beschleunigung im Mondabstand ist also $1/3\,600 = 60^{-2}$ von der auf der Erdoberfläche wirkenden. Es war kühn, allein hieraus allgemein auf eine Abstandsabhängigkeit wie r^{-2} zu schließen:

$$F \sim r^{-2}, \quad \text{also} \quad \boxed{F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}}, \quad (1.79)$$

aber diese Hypothese bestätigt sich tatsächlich glänzend. Man beachte, dass die Masse des Trabantens in dieser Betrachtung keine Rolle spielt. Schon auf diesem Stadium lassen sich Relativbestimmungen der Massen von Himmelskörpern (ausgedrückt in der noch unbekanten Erdmasse) durchführen, sofern diese einen Satelliten mit bekanntem Abstand vom Zentralkörper und bekannter Umlaufzeit haben.

× Beispiel...

Schätzen Sie die Masse der Erde ohne Benutzung der Gravitationskonstante. Was kann man aus der Abweichung vom richtigen Wert schließen?

Man weiß seit *Eratosthenes* (ca. 300 v. Chr.), dass der Erdradius $R \approx 6\,400 \text{ km}$ ist. Wenn die Erde ganz aus Stein (Dichte ca. $2,7 \text{ g/cm}^3$) bestünde, erhielte man eine Masse $M = \frac{4}{3}\pi \rho R^3 = 3 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Dass die Masse in Wirklichkeit doppelt so groß ist, zeigt, dass schwereres Material in der Tiefe liegt.

- Es fehlt noch die Proportionalitätskonstante G in der Formel (1.79), d. h. die Größe der Kraft zwischen zwei Einheitsmassen im Einheitsabstand. Sie kann experimentell erst bestimmt werden, wenn die Massen beider wechselwirkenden Körper bekannt sind. Für astronomische Objekte einschließlich der Erde ist die Masse naturgemäß nicht direkt bestimmbar, wenn auch aus Volumen und vermutlicher Dichte Schätzwerte abgeleitet werden können. *Cavendish* maß als erster die Kraft zwischen zwei Objekten bekannter Masse, nämlich Bleikugeln, mit Hilfe seiner **Drehwaage**. *Eötvös* u. A. verfeinerten die Messung und erhielten

$$\boxed{G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2}. \quad (1.80)$$

- Es wäre denkbar, dass die Kraft zwischen zwei Körpern noch von anderen Größen abhängt. Zwei davon verdienen Erwähnung, nämlich die Geschwindigkeit der Massen, besser ihre Relativgeschwindigkeit und das Material, mit dem evtl. der Raum zwischen den beiden Körpern erfüllt ist. Gibt es Substanzen, die die Gravitation abschirmen, wie das im sonst ziemlich analogen elektrostatischen Feld zutrifft?

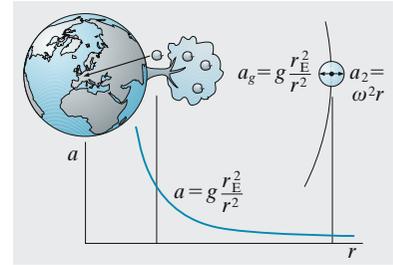


Abb. 1.49. Schwerebeschleunigung in Erdnähe und im Mondabstand (nicht maßstäblich)

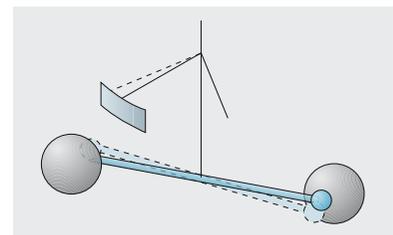


Abb. 1.50. Drehwaage von Cavendish-Eötvös (schematisch)

Einsteins Theorie liefert in der Tat eine winzige Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit und auch vom Rotationszustand der Körper. Für die Existenz von Gravitationsschirmen besteht keinerlei Anhaltspunkt.

- Wenn die gravitierenden Körper ausgedehnt sind, kommt es allerdings auf ihre Form an. Strenggenommen gilt das Newton-Gesetz nur für Massenpunkte. Zum Glück verhält sich jede kugelsymmetrische Massenverteilung so, als sei ihre Masse im Mittelpunkt konzentriert. Die Bestimmung der Gravitationskonstante ist gleichzeitig eine Wägung der Erde und aller übrigen Himmelskörper, für die vorher nur eine *Relativbestimmung* der Masse (z. B. Vergleich mit der Erdmasse) möglich war.

× Beispiel . . .

Eigentlich sind doch elektrostatische Kräfte viel größer als die Gravitation (wie viel größer z. B. zwischen Elektron und Proton?). Sie wirken sich im Weltall nur kaum aus, sagt man, weil die Himmelskörper gleich viele Elektronen und Protonen enthalten. Wenn nun aber eines dieser Teilchen eine etwas größere Ladung hätte?

$e^2/(4\pi\epsilon_0 G m_p m_E) \approx 10^{40}$. Elektrische Kräfte führen zum Ladungsausgleich (nicht unbedingt Anzahlgleichheit), der das elektrische Feld kompensiert; beim Gravitationsfeld geht das nicht, weil es keine negativen Massen gibt.

1.7.2 Das Gravitationsfeld

In den Ausdruck (1.79) für die Schwerkraft zwischen zwei Massenpunkten gehen beide Massen in völlig symmetrischer Weise ein. Man kann sich aber auf den Standpunkt stellen, dass der eine Massenpunkt (etwa Q) die Quelle eines Kraftfeldes sei, in dem sich der andere Massenpunkt P bewegt. In dem Ausdruck $F(r) = -m_p(Gm_Q)/r^2$ oder, wenn man der Richtungseigenschaft Rechnung tragen will,

$$\mathbf{F} = -m_p \frac{Gm_Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.81)$$

ist dann $-Gm_Q/r^3$ eine Eigenschaft des Feldes allein, unabhängig von der speziellen „Probemasse“ m_p . Man nennt diese Größe die **Feldstärke g des Gravitationsfeldes**.

Auch im allgemeinen Fall, nicht nur für das Feld einer Punktmasse, ist die Feldstärke zu definieren durch den Zusammenhang mit der Kraft auf eine Probemasse m_p :

$$\mathbf{g} = \frac{1}{m_p} \mathbf{F}. \quad (1.82)$$

Für das Gravitationsfeld ist $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ dasselbe wie die an diesem Ort \mathbf{r} gültige **Schwerebeschleunigung**. Diese Zerlegung der Kraft in eine Eigenschaft des Feldes (\mathbf{g}) und eine Eigenschaft des Probekörpers (m_p) ist möglich, weil $\mathbf{F} \sim m_p$, m. a. W. wegen der Proportionalität zwischen schwerer (dem Gravitationsfeld unterworfen) und träger Masse. Für an-

dere Arten von Feldern muss die Zerlegung anders vorgenommen werden, z. B. für das elektrostatische Feld in die elektrische Feldstärke \mathbf{E} und die Ladung e des Probekörpers.

Das Gravitationsfeld einer Punktmasse ist konservativ, denn es ist kugelsymmetrisch. Also existiert eine eindeutig vom Ort, und zwar nur vom Betrag r des Abstands abhängige potentielle Energie einer Probemasse m_P . Am einfachsten normiert man sie auf einen unendlich fernen Punkt, wo keine Kraft mehr herrscht. $E_{\text{pot}}(r)$ ist dann die Arbeit, die nötig ist, die Masse m_P aus dem Unendlichen in den endlichen Abstand r zu bringen. Wegen der Wegunabhängigkeit kann man das immer längs eines Radius tun und erhält

$$E_{\text{pot}}(r) = - \int_{\infty}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m_P \int_{\infty}^r Gm_Q \frac{1}{r^2} dr = -m_P \frac{Gm_Q}{r}. \quad (1.83)$$

Das Minuszeichen besagt vernünftigerweise, dass keine Arbeit nötig ist, sondern welche frei wird.

Auch die potentielle Energie lässt sich in einen vom Probekörper abhängigen Anteil m_P und eine reine Feldeigenschaft, nämlich

$$\varphi = -\frac{Gm_Q}{r}, \quad (1.84)$$

das **Potential** des Feldes, aufspalten. Ganz allgemein (nicht nur für das Feld der Punktmasse) ergeben sich \mathbf{F} aus $E_{\text{pot}}(r)$ und die Feldstärke \mathbf{g} aus dem Potential φ durch Gradientenbildung:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{g} = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}). \quad (1.85)$$

Das Feld einer komplizierten Massenverteilung sieht natürlich ganz anders aus als das der Punktmasse (1.84). Da sich aber jede solche Verteilung als Summe oder Integral von Punktmassen darstellen lässt, ergeben sich auch \mathbf{F} , \mathbf{g} , $E_{\text{pot}}(\mathbf{r})$ und $\varphi(\mathbf{r})$ durch entsprechende Summierung oder Integration der Beiträge der einzelnen Massenelemente.

1.7.3 Gezeitenkräfte

Es gibt keine vernünftige Massenverteilung, die ein homogenes Gravitationsfeld erzeugt. Höchstens eine gleichmäßig massenerfüllte Scheibe wie die einer Galaxis tut das annähernd in nicht zu großem Abstand. In jedem inhomogenen Feld aber sind die Kräfte, die auf die einzelnen Teile eines ausgedehnten Probekörpers wirken, verschieden. Selbst wenn der Probekörper sich der Gravitation möglichst zu entziehen sucht, indem er „sich fallen lässt“, müssen diese Unterschiede als Spannungen übrig bleiben. Wir betrachten ein Raumschiff, das etwa auf einer Kreisbahn antriebslos um die Erde fliegt. Die Insassen sind „schwerelos“, einfach weil sie ebenso schnell „fallen“ wie die Schiffswände und alle anderen Gegenstände (Proportionalität von träger und schwerer Masse). Sehr genau betrachtet sind aber die Felder und Beschleunigungen auf der erdzugewandten Seite des Schiffes etwas größer (da r kleiner ist), auf der anderen Seite etwas kleiner als im Schwerpunkt, nach dem sich die Gesamtbewegung der Rakete richtet. Die „oben“ und „unten“ schwebenden Gegenstände würden also sehr langsam an die entsprechenden

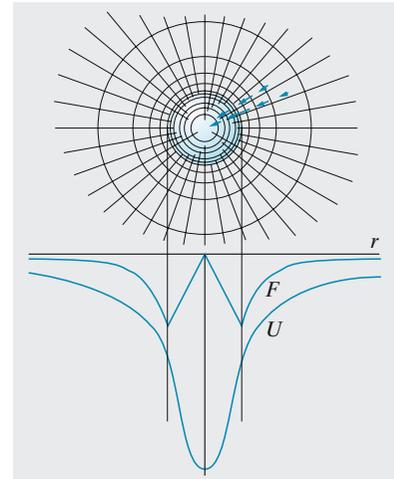


Abb. 1.51. Das Gravitationsfeld einer Kugel homogener Dichte

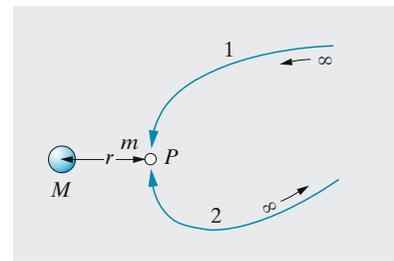


Abb. 1.52. Die Arbeit W bei der Verschiebung von ∞ nach P ist unabhängig vom Weg: Das Kraftfeld hat ein Potential, und dessen Wert bei P ist W/m

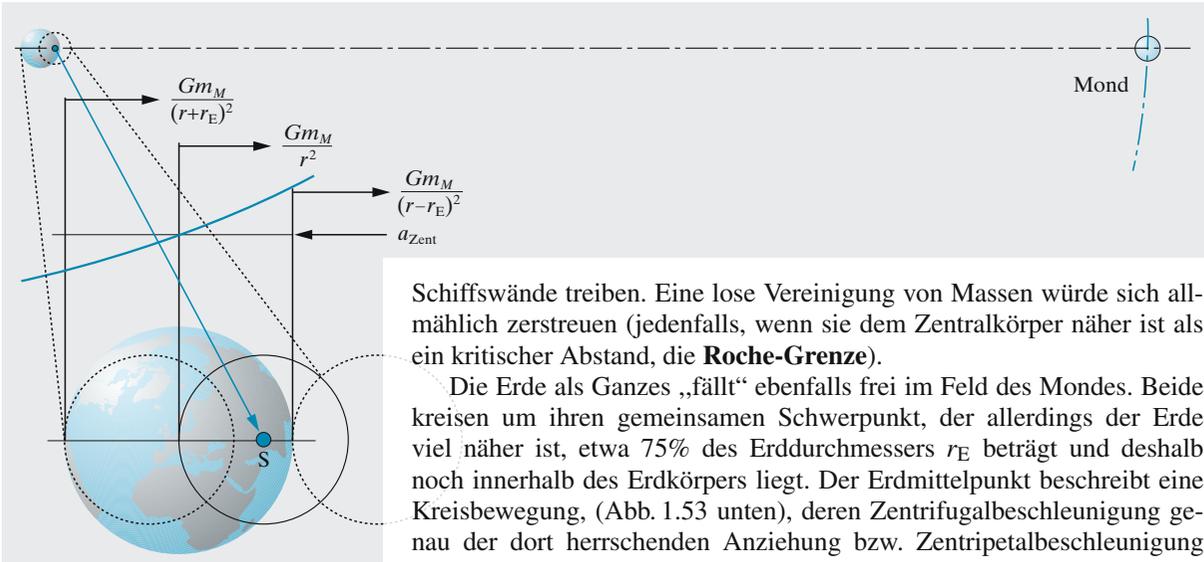


Abb. 1.53. Gezeitenkräfte. Erde und Mond laufen um den gemeinsamen Schwerpunkt S (oben; Mond etwa doppelt so groß wie maßstäblich korrekt). Die Zentripetalbeschleunigung des Mondes wird für den Erdmittelpunkt gerade durch die Zentrifugalbeschleunigung kompensiert (mitte, blaue bzw. schwarze Linie). Der Erdmittelpunkt läuft genau um den Schwerpunkt, alle anderen Punkte durchlaufen Kreise mit gleichem Radius aber verschiedenen Mittelpunkten (unten). Auf der mondzugewandten Seite ist die Zentripetalbeschleunigung deshalb etwas zu groß, auf der abgewandten Seite etwas zu klein. In beiden Fällen wirkt die resultierende Beschleunigung aus der Sicht eines Oberflächenbewohners „nach oben“

Schiffswände treiben. Eine lose Vereinigung von Massen würde sich allmählich zerstreuen (jedenfalls, wenn sie dem Zentralkörper näher ist als ein kritischer Abstand, die **Roche-Grenze**).

Die Erde als Ganzes „fällt“ ebenfalls frei im Feld des Mondes. Beide kreisen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, der allerdings der Erde viel näher ist, etwa 75% des Erddurchmessers r_E beträgt und deshalb noch innerhalb des Erdkörpers liegt. Der Erdmittelpunkt beschreibt eine Kreisbewegung, (Abb. 1.53 unten), deren Zentrifugalbeschleunigung genau der dort herrschenden Anziehung bzw. Zentripetalbeschleunigung durch den Mond (Masse m_M , Abstand Erde-Mond r) genügen muss: $a_{Zent} = Gm_M/r^2$. Alle Punkte des Erdkörpers beschreiben identische Kreise mit dem gleichen Radius, d. h. sie erfahren dieselbe Zentrifugalbeschleunigung (Die Eigenrotation der Erde braucht hierbei nicht beachtet zu werden! Sie ist schon durch die Abplattung niveauflächenmäßig kompensiert.).

Auf der mondzugewandten Erdseite ist die Anziehungskraft des Mondes größer, also suchen alle Gegenstände, zusätzlich zur Kreisbewegung, mit der Differenzbeschleunigung $Gm_M/(r - r_E)^2 - a_{Zent} = Gm_M/(r - r_E)^2 - Gm_M/r^2$ auf den Mond zu, also nach oben zu „fallen“. Auf der gegenüberliegenden Erdseite ist $Gm_M/(r + r_E)^2$ etwas kleiner als die Zentripetalbeschleunigung, daher sucht alles nach außen, d. h. wieder nach oben zu fallen. Wenn, wie man meist sagt, einfach der Zug des Mondes den Flutberg auftürmte, müsste auf der anderen Erdseite Ebbe sein und nicht ebenfalls Flut.

Wir wollen die Differenzbeschleunigung a_{Gez} auf der mondzu- bzw. abgewandten Seite mit der Erdbeschleunigung vergleichen und berechnen zunächst näherungsweise

$$a_{Gez} = Gm_M \left(\frac{1}{(r \pm r_E)^2} - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{Gm_M}{r^2} \left(\frac{1}{(1 \pm r_E/r)^2} - 1 \right) \\ \approx \frac{Gm_M}{r^2} (1 \mp 2(r_E/r) - 1) = \mp \frac{2Gm_M r_E}{r^3} \quad (1.86)$$

Vergleich mit der Schwerebeschleunigung durch die Erde liefert

$$\frac{a_{Gez}}{g} = \frac{2Gm_M r_E r^{-3}}{Gm_E r_E^{-2}} = 2 \frac{m_M}{m_E} \frac{r_E^3}{r^3}, \quad \text{also} \quad a_{Gez} \approx 10^{-7} g.$$

Der feste Erdkörper zieht sich unter der Wirkung der **Gezeitenkräfte** etwas in die Länge, aber die Einstellzeit dieser Deformation, die ja in 24 h ihre Richtung um volle 2π drehen muss, ist zu groß, als dass es zu einer

Tabelle 1.2. Das Sonnensystem (nach *Encyclopaedia Britannica*, Chicago 1992)

	Masse	Mittlerer Äquator- radius	Mittlere Dichte	Mittlerer Abstand vom Zentral- körper	Siderische Umlaufzeit	Nume- rische Bahn- exzen- trizität	Rotations- periode
	kg	km	g/cm ³	10 ⁶ km	Jahre		Tage
Sonne	$1,99 \cdot 10^{30}$	696 128	1,41				27
Merkur	$3,3 \cdot 10^{23}$	2 440	5,4	57,9	0,240	0,206	58,6
Venus	$4,78 \cdot 10^{24}$	6 050	5,24	108,21	0,616	0,007	243
Erde	$5,98 \cdot 10^{24}$	6 378	5,52	149,60	1	0,017	1
Mond	$0,73 \cdot 10^{23}$	1 738	3,34	0,384	0,075	0,055	27,3
Mars	$6,4 \cdot 10^{23}$	3 400	3,75	227,9	1,88	0,093	1,02
Phobos	$1,1 \cdot 10^{16}$	11	1,9	0,0094	0,0009		
Deimos	$1,8 \cdot 10^{15}$	6	1,8	0,0235	0,0035		
Ceres	$1,0 \cdot 10^{21}$	465	2,3	412	4,60	0,079	0,38
Eros	$\approx 10^{16}$	≈ 10		219	1,8	0,23	0,22
(und ca. 10^5 andere Planetoiden)							
Jupiter	$1,9 \cdot 10^{27}$	71 350	1,33	778,3	11,86	0,048	0,41
Ganymed	$1,5 \cdot 10^{23}$	2 631	1,93	1,071	0,0196		
(und 15 andere Monde, Ringe)							
Saturn	$5,7 \cdot 10^{26}$	60 400	0,69	1 428	29,46	0,056	0,44
Titan	$1,31 \cdot 10^{23}$	2 575	1,88	1,223	0,044	0,029	
(und 17 andere Monde, viele Ringe)							
Uranus	$8,7 \cdot 10^{25}$	25 559	1,29	2 872	84,02	0,046	0,72
Oberon	$3,0 \cdot 10^{21}$	761	1,64	0,583	0,037		
(und 14 andere Monde, Ringe)							
Neptun	$1,02 \cdot 10^{26}$	24 800	1,64	4 504	164,79	0,009	0,67
Triton	$2,1 \cdot 10^{22}$	1 350	2,07	0,354	0,016	0,000	
(und 7 andere Monde, Ringe)							
Pluto	$1,2 \cdot 10^{22}$	1 151	1,9	5 910	247,69	0,251	6,39
Charon	$1,8 \cdot 10^{21}$	593	2,1	0,0194	0,0175	0,156	6,39
Transpluto?					675		

vollen Anpassung an die verzerrten Niveauflächen käme (sonst gäbe es gar keine Meereszeiten). Das Wasser folgt mit geringerer Verzögerung. Eine gewisse Verzögerung muss vorhanden sein, solange Kräfte die notwendige Verschiebung der Wassermassen hemmen. Solche Kräfte sind: Die innere Reibung der Wassermassen, die Reibung am Meeresboden, der Anprall an die Kontinentalränder mit Eindringen in Meerengen und Buchten. Diese verzögernden Kräfte führen zu einer Phasenverschiebung zwischen Mondhöchststand und Flut und zu einer Bremsung der Erdrotation. Der Erde wird so ständig Drehimpuls entzogen, der nach dem Drehimpulssatz irgendwo

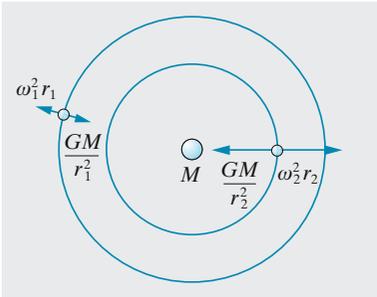
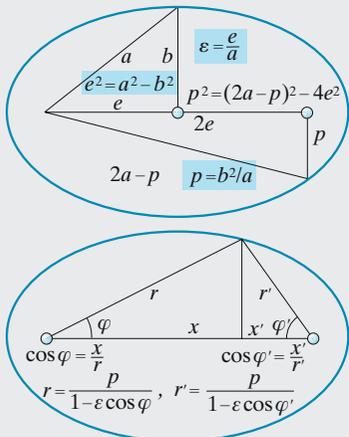


Abb. 1.54. Aus dem Gleichgewicht zwischen Schwerkraft und Fliehkraft folgt das 3. Kepler-Gesetz



$$r(1 - \varepsilon \cos \varphi) = r - \varepsilon x = p$$

$$r'(1 - \varepsilon \cos \varphi') = r' - \varepsilon x' = p$$

$$r + r' = 2p + \varepsilon(x + x') = 2(p + \varepsilon e)$$

$$= 2\left(\frac{b^2}{a} + \frac{e^2}{a}\right) = 2a$$

$$r + r' = 2a : \text{Definition der Ellipse!}$$

Abb. 1.55. Zur Geometrie der Ellipse. *Oben:* Zusammenhang zwischen Halbachsen a , b , Exzentrizität ε und Parameter p . *Unten:* Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten

im System wieder auftauchen muss, und zwar im Mond als Hauptverantwortlichem. Dies führt schließlich zu einer sehr langsamen Zunahme des Abstands Erde–Mond. Aufhören kann dieser Prozess offenbar erst, wenn Tag und Monat gleich lang geworden sind.

Genau wie der Mond verursacht auch die unterschiedliche Anziehungskraft der Sonne auf der zu- bzw. abgewandten Seite der Erde eine Gezeitenbeschleunigung, die etwa 1/3 der Wirkung des Mondes ausmacht.

× Beispiel . . .

Welche der Daten aus Tabelle 1.2 können Sie nachrechnen?

$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ verknüpft Masse, Dichte und Radius. Siderische Umlaufzeit in Jahren: $r^{3/2}$ (Bahnradius r in Erdbahnradien). Für Satelliten $T = r^{3/2}m^{-1/2}$ (Planetenmasse m in Sonnenmassen).

1.7.4 Planetenbahnen

Der wichtigste Teil von *Johannes Keplers* Lebenswerk bestand darin, aus einem ungeheuren astronomischen Beobachtungsmaterial (völlig mit bloßem Auge gewonnen und entsprechend ungenau) seine drei Gesetze zu kondensieren:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der „Radiusvektor“ (der Strahl Sonne–Planet) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Bahnachsen.

Das zweite dieser **Kepler-Gesetze** folgt für die moderne Dynamik sofort als Sonderfall des Drehimpuls- oder Flächensatzes; seine Voraussetzung, nämlich dass das Kraftfeld der Sonne ein Zentralfeld sei, ist ja kaum zu bezweifeln (*Kepler* selbst dachte allerdings an tangential zur Bahn wirkende Kräfte, die die Planeten, ganz aristotelisch gedacht, in Gang halten sollen): Der Drehimpuls $L = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ des Planeten ist also konstant. Das erste und das dritte Gesetz ergeben sich erst, wenn man eine bestimmte Form dieses Kraftfeldes, und zwar $F \sim r^{-2}$, annimmt. Die umgekehrte Frage, nämlich wie ein Kraftfeld beschaffen sein muss, in dem sich die Körper auf Ellipsen- oder allgemeiner auf Kegelabschnittbahnen bewegen, ist viel einfacher zu lösen.

Wir beschreiben die Bewegung, die sich ja nach dem **Flächensatz** in einer Ebene abspielt, in ebenen Polarkoordinaten r, φ . Zunächst legen wir eine ganz allgemeine Bahnkurve $r = r(\varphi)$ zugrunde, die empirisch bekannt sei. Wie hier φ und damit r von der Zeit abhängen, interessiert uns zunächst nicht; das kann später der Flächensatz zeigen. Wenn also irgendwo die Zeit auftaucht, und sei es nur in der Form einer zeitlichen Ableitung, müssen wir sie sofort beseitigen, was wieder mit dem Flächensatz gelingt.

Die Geschwindigkeit des Planeten, in ihre radiale und tangential Komponente zerlegt, sieht so aus (Abb. 1.58):

$$\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi) = (\dot{r}, r\dot{\varphi}) .$$

Der Drehimpulsbetrag ist

$$L = mrv_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} \quad (1.87)$$

Wir schreiben auch die kinetische Energie auf:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2). \quad (1.88)$$

Hier beseitigen wir die zeitlichen Ableitungen mittels $\dot{\varphi} = L/(mr^2)$ und $\dot{r} = r'\dot{\varphi} = r'L/(mr^2)$ (der Strich bedeutet hier Ableitung nach φ). Die kinetische Energie wird also

$$E_{\text{kin}} = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{r'^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right). \quad (1.89)$$

Die potentielle Energie nennen wir U und formulieren den Energiesatz:

$$E = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{r'^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} \right) + U. \quad (1.90)$$

Jetzt können wir prüfen, welche potentielle Energie $U(r)$ hinter verschiedenen Bahnkurven $r(\varphi)$ steckt. Probieren Sie es selbst mit der **logarithmischen Spirale**, der **Pascal-Schnecke**, speziell der **Cardioid**, der **Lemniskate**, aber auch der Geraden und der Mittelpunktsellipse (Abb. 1.59). Wir gehen von Keplers Befund, der Brennpunktsellipse, aus und verallgemeinern gleich zum Kegelschnitt:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (1.91)$$

Es folgt $r' = -p\varepsilon \sin \varphi / (1 - \varepsilon \cos \varphi)^2 = -r^2\varepsilon \sin \varphi / p$. Wir bilden $r'^2/r^4 = \varepsilon^2 \sin^2 \varphi / p^2 = \varepsilon^2(1 - \cos^2 \varphi) / p^2$. Hier lässt sich φ ganz beseitigen mittels $\cos \varphi = (1 - p/r) / \varepsilon$. Dann wird

$$\frac{r'^2}{r^4} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} + \frac{2}{pr} - \frac{1}{r^2}. \quad (1.92)$$

In (1.90) eingesetzt:

$$E = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} + \frac{2}{pr} \right) + U. \quad (1.93)$$

Das kann nur konstant sein, wenn U ebenfalls eine $1/r$ -Abhängigkeit enthält: $U = C - L^2/(mpr)$. Wegen $U(\infty) = 0$ ist $C = 0$, also

$$U = -\frac{L^2}{mpr}. \quad (1.94)$$

Das Potential eines Kraftfeldes, das die Körper auf **Kegelschnittbahnen** zwingt, ist proportional r^{-1} , die Kraft verhält sich wie r^{-2} .

Wir wissen ja, wie das Potential eigentlich heißt: $U = -GMm/r = -L^2/(mpr)$, also

$$L = m\sqrt{GMp} = mb\sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (1.95)$$

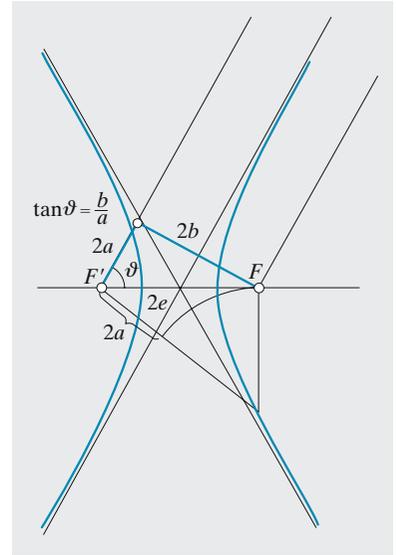


Abb. 1.56. Zur Geometrie der Hyperbel

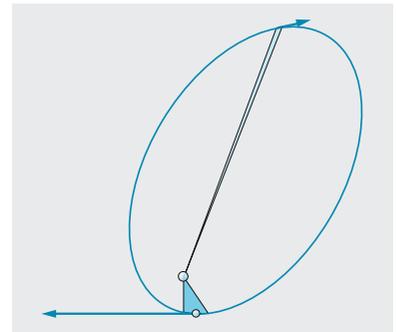


Abb. 1.57. Der Ortsvektor eines Körpers im Zentralfeld überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz oder 2. Kepler-Gesetz)

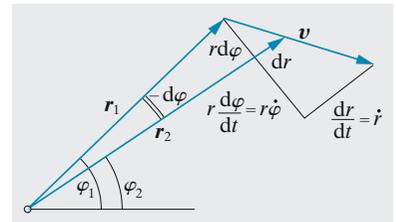


Abb. 1.58. Komponentenzerlegung der Geschwindigkeit in Polarkoordinaten

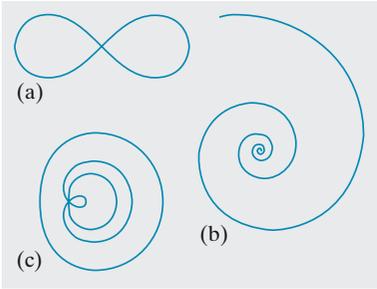


Abb. 1.59. (a) Lemniskate: Alle ihre Punkte haben das gleiche Produkt der Abstände von zwei festen Punkten, die um $2a$ auseinander liegen; dieses Produkt ist a^2 ; es folgt $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$. (b) Logarithmische Spirale, $r = ae^{b\varphi}$. (c) Pascal-Schnecken (nach *Blaise Pascals Vater Etienne*): $r = a \cos \varphi + b$; in der Mitte die Cardioide mit $a = b$; die innere Schleife gehört zur innersten Kurve mit $a = 2b$

Für die Gesamtenergie des Planeten bleibt aus (1.92)

$$E = \frac{L^2}{2m} \frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} = GMm \frac{\varepsilon^2 - 1}{2p}. \quad (1.96)$$

Für eine Ellipse ($\varepsilon < 1$) ist E negativ, wie für jeden gebundenen Zustand; eine Parabel mit $\varepsilon = 1$ hat $E = 0$, eine Hyperbel mit $\varepsilon > 1$ hat $E > 0$. Mit den geometrischen Beziehungen $p = b^2/a$ und $1 - \varepsilon^2 = (a^2 - e^2)/a^2 = b^2/a^2$ folgt

$$E = -\frac{GMm}{2a}. \quad (1.97)$$

Die Gesamtenergie einer Kegelschnittbahn hängt nur von der großen Halbachse ab, und zwar ist sie genau halb so groß wie die potentielle Energie in diesem Abstand a .

Schließlich bestimmen wir die Umlaufzeit T , natürlich nur für die Ellipsenbahn. T ist die Zeit, in der der Radiusvektor die ganze Ellipsenfläche πab überstreicht. Nach dem Flächensatz überstreicht er in der Zeiteinheit die Fläche $\frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = L/2m = \frac{1}{2}b\sqrt{GM/a}$. Für die ganze Fläche braucht er also

$$T = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}b\sqrt{GM/a}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}. \quad (1.98)$$

Dies drückt das dritte **Kepler-Gesetz** aus.

1.8 Trägheitskräfte

Man kann Bewegungen in beliebig bewegten Bezugssystemen beschreiben (aber wer bewegt sich eigentlich „wirklich“?). Dabei muss man aber meist damit rechnen, dass sich die Körper ziemlich bizarr verhalten, angetrieben durch zunächst rätselhafte Kräfte. Nach *Einstein* beruht ja sogar die Gravitation darauf, dass wir normalerweise ein falsches Bezugssystem benutzen.

1.8.1 Arten der Kräfte

Alle Kräfte, die man in der Natur beobachtet, lassen sich zwanglos in mehrere Gruppen einteilen:

1. Kräfte, die auf der direkten Kontaktwechselwirkung zwischen Körpern beruhen: Druck, Zug, Stoß usw., meist zusammengefasst als **Nahewirkungskräfte**. Beispiel: Die verschiedenen Glieder der Kräfteübertragungskette im Auto vom Druck des explodierenden Treibstoffgas-Luft-Gemisches bis zur Reibung der Reifen an der Straße.
2. Kräfte, bei denen keine direkte Kontaktwechselwirkung nachweisbar ist. Diese Gruppe enthält so verschiedenartige Kräfte wie die Zentrifugalkraft, elektromagnetische Wechselwirkungen und die Gravitation. Sie ordnen sich in zwei Untergruppen:

- 2a) Kräfte, die dadurch entstehen, dass man den Vorgang in einem bestimmten Bezugssystem beschreibt, und die in anderen Bezugssystemen nicht vorhanden wären: **Trägheitskräfte**.
- 2b) Kräfte, die durch keine Änderung des Bezugssystems zu beseitigen sind (echte **Fernkräfte**).

Das einfachste Beispiel für eine Trägheitskraft verspüren die Insassen eines bremsenden Autos. Es ist kein Nahwirkungskontakt mit einem anderen Körper vorhanden, der sie nach vorn drängt. Die Beschleunigungen und Kräfte, die im Bezugssystem des Autos auftreten, verschwinden beim Übergang zu einem System, das sich geradlinig-gleichförmig weiterbewegt; die Insassen tun ja auch nur, was das Trägheitsgesetz verlangt, d. h. sie suchen sich geradlinig-gleichförmig weiterzubewegen. Diese Entlarvung der Kraft als **Scheinkraft** ändert allerdings nichts an ihren oft katastrophalen Folgen.

Was die echten Fernkräfte (2b) betrifft, so schien selbst ihre Existenz lange Zeit den Physikern (z. B. *Newton*) fragwürdig, wenn nicht absurd. Es gibt viele Versuche, z. B. die Gravitation auf Nahwirkungskräfte zurückzuführen. Besonders die Elektrodynamik hat uns aber so an die Vorstellung einer Fernkraft gewöhnt, dass durch die Entwicklung der Atomphysik schließlich gerade die Möglichkeit eines direkten Kontaktes fraglich wurde und die Nahwirkungen als verkappte Fernwirkungen erschienen. Was die Gravitation betrifft, so hat *Einstein* sie (mit einigen Einschränkungen) wohl endgültig unter die Trägheitskräfte eingeordnet, indem er die allerdings recht raffinierten Transformationen des Bezugssystems fand, die sie zum Verschwinden bringen (vgl. Abschn. 12.10.1). Für die elektromagnetischen Fernwirkungen hat er dies ebenfalls versucht (Allgemeine Feldtheorie), allerdings ohne überzeugenden Erfolg.

1.8.2 Inertialsysteme

Die Erfahrung lässt vermuten, dass es Systeme gibt, in denen alle Kräfte sich entweder auf direkte Kontaktwechselwirkung oder elektromagnetische Felder zurückführen lassen, m. a. W. in denen keinerlei Trägheitskräfte auftreten. Von der Schwerkraft sehen wir zunächst ab, da ihre Einordnung vorläufig noch in zu tiefes Wasser führen würde. Auf der Erdoberfläche können wir sowieso nicht damit rechnen, ein solches **Inertialsystem** zu finden, denn Trägheitskräfte sind hier unvermeidbar (vor allem Zentrifugalkräfte). Auch ein antriebslos fliegendes Raumschiff stellt kein Inertialsystem dar, solange es in der Nähe größerer Massen ist: Im Innern der Rakete stellt man zwar keine „rätselhaften“ Beschleunigungen fest (außer den Gezeitenbeschleunigungen), doch wird der unbefangene Beobachter sich wundern, warum z. B. die Erde ihm beschleunigt entgegenkommt; diese Beschleunigung fällt genau genommen auch unter die Gezeitenbeschleunigungen.

Eine fast vollkommene Annäherung an ein Inertialsystem wäre erst durch eine antriebslose Rakete im interstellaren Raum fern von allen Massen realisiert, falls sie nicht rotiert. Ein solches „antriebsloses Raumschiff“ ist auch die Sonne (abgesehen von ihrem fast kreisförmigen Umlauf um das Zentrum der Galaxis). Ein mit der Sonne verbundenes Achsenkreuz, des-

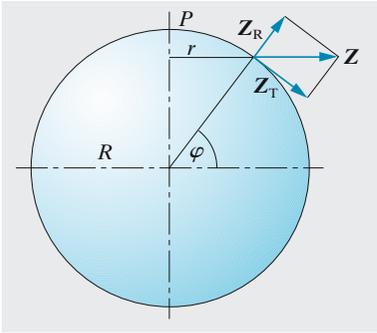


Abb. 1.60. Die Fliehkraftkomponente Z_R infolge der Erdrotation ist von der Schwerkraft abzuziehen

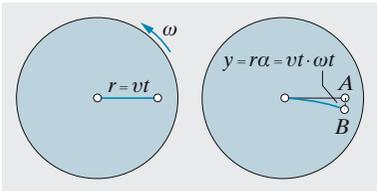


Abb. 1.61. Zur Berechnung der Coriolis-Kraft

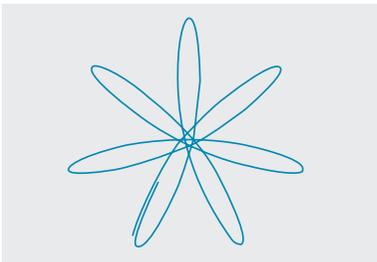


Abb. 1.62. Rosettenschleife als Spur eines über einer Drehscheibe schwingenden Pendels

sen Achsen auf bestimmte Fixsterne zeigen, ist ein praktisch ausreichendes Inertialsystem, falls man von den Gravitationswirkungen der Sonne und der Planeten absieht.

1.8.3 Rotierende Bezugssysteme

Die **Zentrifugalkraft** gehört zweifellos zu den Trägheitskräften. Im Bezugssystem des Autos in einer Kurve ist sie vorhanden und übt auf alle Insassen und das Auto selbst eine Beschleunigung nach außen aus. Für den Beobachter im Inertialsystem ist dagegen keine solche Beschleunigung vorhanden: Die Insassen bewegen sich einfach geradlinig gleichförmig weiter und müssen dabei allerdings mit Teilen des seinerseits ungleichförmig bewegten Fahrzeuges kollidieren, falls sie sich nicht durch Nahwechselwirkung mit anderen Fahrzeugteilen ebenfalls in diese ungleichförmige Bewegung zwingen, was natürlich entsprechende Kräfte fordert, die genau entgegengesetzt gleich denen sind, die die Insassen als Zentrifugalkräfte empfinden.

Die Zentrifugalkraft ist aber nicht die einzige Kraft, die in rotierenden Systemen auftritt. In der Mitte einer Drehscheibe, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht (Abb. 1.61), befindet sich ein Beobachter. Er schießt eine Kugel mit der Geschwindigkeit v ab. Diese Kugel ist nach dem Abschuss mit der Scheibe durch keinerlei Kräfte verbunden, sondern fliegt frei durch den Raum. Für einen Beobachter außerhalb der Scheibe bewegt sich die Kugel also geradlinig mit der konstanten Geschwindigkeit v nach außen. Nach der Zeit $t = r/v$ ist sie im Abstand r vom Zentrum angelangt. In dieser Zeit hat sich die Scheibe aber um den Winkel $\alpha = \omega t$ weitergedreht. Daher stellt der Beobachter auf der Scheibe fest, dass sich die Kugel nicht über dem Punkt A seiner Scheibe befindet, wie er vielleicht erwartet hätte, sondern über einem Punkt B: Sie ist von der Scheibe aus gesehen um die Strecke $y = r\alpha$ nach rechts abgelenkt worden, senkrecht zur erwarteten Flugrichtung. Wir drücken diese Strecke durch die Flugzeit t aus: $y = r\alpha = vt\omega t = v\omega t^2$. Der Beobachter auf der Scheibe muss diese Ablenkung auf eine Beschleunigung zurückführen, die senkrecht zur Geschwindigkeit wirkt. Der Bewegungsablauf $y \sim t^2$ lässt auf eine konstante Beschleunigung a schließen, denn diese führt zu $y = \frac{1}{2}at^2$. Der Vergleich liefert

$$a = 2\omega v \quad \text{(Coriolis-Beschleunigung)} \quad (1.99)$$

Dieser Beschleunigung entspricht eine Kraft

$$F_C = ma = 2m\omega v \quad \text{(Coriolis-Kraft)} \quad (1.99')$$

Eine solche Kraft spürt der Beobachter auch, wenn er sich selbst oder einen seiner Körperteile mit der Geschwindigkeit v bewegt.

An dem Ergebnis ändert sich nichts, wenn die Bahn der Kugel nicht durch den Mittelpunkt Z der Scheibe geht. Wenn v nicht senkrecht zur Drehachse steht, sondern mit ihr den Winkel α bildet, ist die Coriolis-Beschleunigung

$$a_C = 2v \times \omega, \quad a_C = 2v\omega \sin \alpha \quad (1.100)$$

Beides folgt aus der allgemeinen vektoralgebraischen Betrachtung (Aufgabe 1.8.13).

An jedem Körper, der sich in einem rotierenden Bezugssystem bewegt, scheint dem mitrotierenden Beobachter eine solche **Coriolis-Kraft** anzugreifen. Sie steht senkrecht zur Richtung der Drehachse und senkrecht zur Geschwindigkeit.

Auf der rotierenden Erde hat die Coriolis-Kraft im Allgemeinen eine Horizontal- und eine Vertikalkomponente. Wenn die Bewegung in der Oberfläche erfolgt, wirkt die Coriolis-Kraft am Pol nur horizontal, am Äquator nur radial; im letzteren Fall ist sie gleichgerichtet mit der Zentrifugalkraft. Die Horizontalkomponente bewirkt für alle sich auf der nördlichen Halbkugel bewegenden Körper eine Rechtsabweichung. Dies ist von entscheidender Bedeutung für die Bewegung atmosphärischer Luftmassen.

1.8.4 Bahnstörungen

Ceres, der erste Planetoid, von *Piazzi* in der Neujahrsnacht 1800 entdeckt, war bald danach wegen zu großer Sonnennähe nicht mehr beobachtbar. Erst der junge *C.F. Gauß* fand sie auf dem Papier wieder: Er berechnete die Bahn aus den wenigen vorliegenden Beobachtungen. Mit ähnlichen Mitteln konnten *Leverrier* und *Adams* aus den **Bahnstörungen** des Uranus die Existenz und Position des **Nep-tun** vorhersagen, den *Galle* dann fand. Dasselbe leisteten *Lowell* und *Pickering* für **Pluto**, der 1930 von *Tombaugh* entdeckt wurde. Im ganzen Sonnensystem blieb danach nur eine unerklärte Bahnstörung, die **Perihelverschiebung** des Merkur von 43 Bogensekunden im Jahrhundert, bis *Einstein* genau diesen Wert aus seiner Gravitationstheorie folgerte. Mit Recht zählt man diese Voraussagen zu den größten Leistungen des menschlichen Geistes.

Wir wollen die **Störungsrechnung** aufs äußerste vereinfachen. Ein Planet bewege sich im Potential $U = -A/r + B/r^n$ auf einer sehr kreisähnlichen Bahn. Ohne das kleine Störglied B/r^n beschriebe er eine Ellipse mit sehr kleiner Exzentrizität. Wir zeigen: Mit dem Störglied ändert sich die Form der Ellipse kaum, aber sie schließt sich nicht mehr, sondern wird zu einer Rosette. Man kann das so auffassen, als rotiere die Ellipse selbst mit einer Winkelgeschwindigkeit ω' , die viel kleiner ist als die Winkelgeschwindigkeit ω des Planeten auf der Ellipsenbahn. ω' heißt Geschwindigkeit der Perihelverschiebung. Dass dies alles stimmt und wie groß ω' ist, zeigen wir durch Übergang in ein Bezugssystem, das sich mit $-\omega'$ dreht, in dem also die Ellipse wieder in sich geschlossen ist. Das ist nur möglich, wenn die Trägheitskräfte in diesem Bezugssystem gerade das Störglied B/r^n im Potential, d. h. $-nmB/r^{n+1}$ in der Kraft wegkompensieren. Als Trägheitskräfte kommen die Zentrifugalkraft $m\omega'^2 r$ und die Coriolis-Kraft $2m\omega'v$ in Frage, wobei $v \approx \omega r$ (kreisähnliche Bahn im ursprünglichen und im neuen System). Da $\omega' \ll \omega$, spielt die Zentrifugalkraft keine Rolle. Es muss also sein $2m\omega'\omega r \approx nmB/r^{n+1}$ oder $\omega' \approx nB/(2\omega r^{n+2})$. Nun ist ω fast allein durch den Hauptteil mA/r^2 des Kraftfeldes bestimmt: $\omega^2 r \approx A/r^2$. Es folgt

$$\omega' \approx \omega \frac{nB}{2Ar^{n-1}}. \tag{1.101}$$

Die wichtigsten Störfelder sind das **Dipolfeld** ($n = 2$) und das **Quadrupol-feld** ($n = 3$). Wenn die Zentralmasse nicht ganz kugelsymmetrisch verteilt, z. B. abgeplattet, von einem Ring oder von anderen Planeten umgeben ist, hat ihr Feld

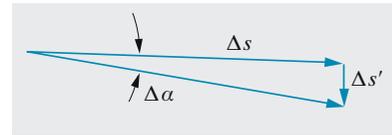


Abb. 1.63. Drehung der Schwingungsebene des Foucault-Pendels unter der Wirkung der am Pendelkörper angreifenden Coriolis-Kraft

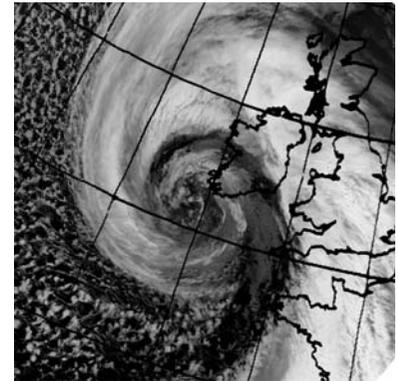


Abb. 1.64a. Tiefdruckgebiet, von dem US-Wettersatelliten NOAA 11 aus einer Höhe von 850 km aufgenommen und im Institut für Meteorologie der FU Berlin empfangen und aufbereitet. Das Abstradiometer im Satelliten liefert kontinuierlich Daten in fünf Spektralkanälen mit einer geometrischen Auflösung von 1×1 km. Nach dem Empfang werden die Daten online in eine stereographische Landkartenprojektion entzerrt und archiviert. Die vorliegende Aufnahme vom 3. Februar 1994 zeigt die Wolkenspirale eines voll entwickelten Sturmwirbels bei Irland im thermischen Infrarot $10,3-11,3 \mu\text{m}$. Die gemessenen Strahlungstemperaturen werden in Grautöne umgesetzt und schwanken zwischen 12°C an der Meeresoberfläche (*dunkelgrau*) und -51°C an der höchsten Wolkenoberfläche (*weiß*). Mit freundlicher Genehmigung © Institut für Meteorologie, Freie Universität Berlin. Die Luft strudelt doch ins Tief hinein. Läuft der Wirbel dann nicht falsch herum, da doch auf der Nordhalbkugel Rechtsablenkung herrscht? Lösung des Paradoxons: Nächste Seite!

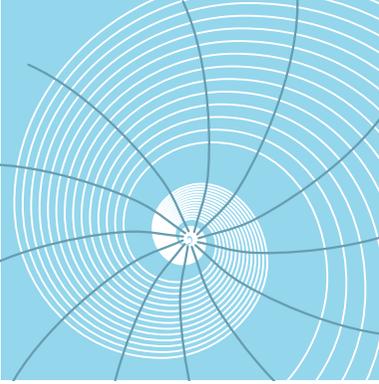


Abb. 1.64b. Eine stationäre, also unbeschleunigte Luftströmung weht so, dass sich Druckgradient, Coriolis-Kraft und Reibung die Waage halten. In der Höhe, wo sich Wolken bilden, ist die Reibung gering. Dort weht der Wind fast senkrecht zum Druckgradienten, damit die auf seiner Richtung senkrecht stehende Coriolis-Kraft diesen Gradienten ausgleichen kann: Gegenüber diesem Gradienten (*schwarze Linien*) ist er also tatsächlich rechts abgelenkt. Die Reibung bewirkt eine leichte Abweichung von 90°C , die zur annähernd logarithmischen Spirale führt. Genau genommen sind die schwarzen Linien hier Orthogonaltrajektorien zu den log-Spiralen $r = ae^{-k\varphi}$, also ebenfalls log-Spiralen $e^{\varphi/k}$, sehr viel flacher und anders herum laufend

einen Quadrupolanteil (ein Dipolfeld kommt im elektrischen Fall vor, wo es zwei Ladungsvorzeichen gibt). Ganz allgemein kann man das Feld einer Massen- oder Ladungsverteilung, die wenigstens zylindersymmetrisch ist, in den Koordinaten r und ϑ (Winkel von der Symmetrieachse aus) als Summe von **Kugelfunktionen** darstellen:

$$U = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \cos \vartheta + \frac{C}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \dots \quad (1.102)$$

Man findet diese Reihe am einfachsten, wenn man einen Massenpunkt nicht in den Koordinatenursprung, sondern im Abstand a auf die Symmetrieachse setzt. Ein Punkt r, ϑ hat dann nach dem Cosinussatz von diesem Massenpunkt den Abstand $r' = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \vartheta}$. Für das Potential kommt es auf $1/r'$ an. Wir entwickeln dies für $a < r$ nach dem binomischen Satz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} \cos \vartheta \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} - \frac{1}{2r} \left(\frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} \cos \vartheta \right) + \frac{3}{8r} \left(\frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} \cos \vartheta \right)^2 - \dots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} \cos \vartheta + \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) \frac{a^2}{r^3} + \dots \end{aligned} \quad (1.103)$$

Diese Darstellung liefert z. B. sofort das elektrische Feld einer Antenne der Höhe a , die an ihrer Spitze eine positive Ladung U , in der Tiefe a unter dem Erdboden (Höhe $-a$) eine ebenso große negative Gegenladung $-U$ trägt. Beide Felder haben natürlich auch entgegengesetzte Vorzeichen. Daher heben sich die $1/r$ - und die $1/r^3$ -Glieder weg. Es bleibt das Dipolfeld mit dem Potential $2Qa r^{-2} \cos \vartheta$, das uns noch oft begegnen wird.

Für die Astronomie handelt es sich meist um ringförmige störende Massenverteilungen. Einen abgeplatteten Zentralkörper kann man auffassen als exakte Kugel mit „Bauchbinde“, auch die anderen Planeten kann man für die sehr langen betrachteten Zeiträume als Ringe über ihre Bahnen verschmiert denken. Außerdem interessiert im Sonnensystem zunächst nur das Potential in der Ringebene, denn alle Planeten kreisen annähernd in der gleichen Ebene (bis auf **Pluto**). Wir bestimmen also das Potential eines Ringes vom Radius R , dem Querschnitt A und der Dichte ρ , also der Masse $M = 2\pi r A \rho$, in seiner eigenen Ebene. Das Ringelement der Masse $dM = \rho A R d\varphi$ ist vom betrachteten Punkt P um $r' = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \varphi}$ entfernt und liefert zum Gravitationspotential den Beitrag $dU = -G \rho A R d\varphi / r'$, der sich nach (1.102) nach Kugelfunktionen entwickeln lässt:

$$dU = -G \rho A R d\varphi \left[\frac{1}{r} + \frac{R}{r^2} \cos \varphi + \left(\frac{3}{2} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \frac{R^2}{r^3} + \dots \right]. \quad (1.104)$$

Das Potential des ganzen Ringes erhalten wir durch Integration über φ , wobei alle ungeraden Potenzen von $\cos \varphi$ wegfallen, weil sie ebenso oft negativ wie positiv sind. $\cos^2 \varphi$ dagegen hat den Mittelwert $\frac{1}{2}$, also wird mit $M = 2\rho A R$

$$U = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{R^2}{r^2} + \frac{9R^4}{64r^4} + \dots \right). \quad (1.105)$$

In großem Abstand wirkt der Ring wie eine Punktmasse ($U \approx -GM/r$). Innerhalb des Ringes ($r < R$) erhält man durch Entwicklung nach r/R ganz analog

$$U = -\frac{GM}{R} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{r^2}{R^2} + \frac{9}{64} \frac{r^4}{R^4} + \dots \right). \quad (1.106)$$

Jupiter dreht danach das Merkur-Perihel mit $\omega' = M_J r_M^3 / (4M_0 R_J^3)$ (in (1.102) ist $n = -2$, $B = \frac{1}{4} G M_J / R_J^3$). Mit den mittleren Bahnradien folgt $\omega' = 55''/\text{Jahrh.}$, unter Berücksichtigung der Bahnexzentrizität, die bei Merkur besonders groß ist,

folgt $\omega' = 153''/\text{Jahrh.}$ (Abb. 1.65). Alle Planeten zusammen liefern $531''/\text{Jahrh.}$ von den beobachteten $574''/\text{Jahrh.}$, mit denen das Merkur-Perihel sich verschiebt. Die fehlenden $43''/\text{Jahrh.}$ versuchte man auf einen unentdeckten Planeten „Vulkan“ innerhalb der Merkurbahn zurückzuführen, bis *Einstein* genau diese Abweichung von der Kepler-Bahn aus der allgemeinen Relativitätstheorie folgerte.

1.8.5 Invarianzen und Erhaltungssätze

Wir betrachten ein System von n Massenpunkten und beschreiben seinen mechanischen Zustand zunächst in einem cartesischen Bezugssystem durch die $3n$ Lagekoordinaten r_i und die $3n$ Geschwindigkeitskomponenten \dot{r}_i . Wir nummerieren sie alle durch: Das erste Teilchen hat r_1, r_2, r_3 , das zweite r_4, r_5, r_6 usw. Statt der \dot{r}_i können wir auch die Impulskomponenten $p_i = m_i \dot{r}_i$ benutzen. Die $3n$ Zahlen r_i kann man sich als Koordinaten eines $3n$ -dimensionalen Ortsraums denken, in dem die Lage *aller* n Teilchen durch *einen* Punkt beschrieben wird. Ebenso bringt man die $3n$ Impulse p_i in einem $3n$ -dimensionalen Impulsraum unter. Dann ist es nur noch ein Schritt weiter, auch Orts- und Impulsraum zu einem $6n$ -dimensionalen **Phasenraum** zusammenzufassen, in dem die momentane Lage und Bewegung *aller* Teilchen durch *einen* Punkt beschrieben werden können.

Wenn wir die Kräfte kennen, die von außen auf die Teilchen wirken, und die diese aufeinander ausüben, können wir die potentielle Energie E_{pot} des Systems berechnen. Sie hängt nur von den Lagen aller Teilchen ab: $E_{\text{pot}} = f(r_i)$. Ihre Ableitung nach der Koordinate r_i liefert die Kraft auf das entsprechende Teilchen in der angegebenen Richtung. Diese Kraft ist gleich der zeitlichen Impulsänderung: $\partial E / \partial r_i = -F_i = -\dot{p}_i$. Es schadet nichts, wenn man hier in E auch die kinetische Energie stehen hat, denn sie hängt nicht von r_i , sondern nur von \dot{r}_i bzw. p_i ab: $E_{\text{kin}} = g(p_i)$. Die $3n$ Beziehungen für die Kräfte lassen sich zu einem $3n$ -dimensionalen Vektor des Ortsgradienten von E zusammenfassen: $\text{grad}_r E = -\dot{p}$. Auch im Impulsraum kann man den Gradientenvektor von E bilden. Er hat die $3n$ Komponenten $\partial E / \partial p_i$. Die Ableitung betrifft nur die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2} \sum p_i^2 / m_i$. Es folgt $\partial E / \partial p_i = p_i / m = \dot{r}_i$, oder zusammengefasst $\text{grad}_p E = \dot{r}$. Wir erhalten so die Differentialgleichungen von *Hamilton*:

$$\text{grad}_r E = -\dot{p}, \quad \text{grad}_p E = \dot{r}. \tag{1.107}$$

Die Gesamtenergie $E(r_i, p_i)$ eines Systems, in dieser Schreibweise oft auch **Hamilton-Funktion** genannt, hängt nicht von der Lage des Koordinatensystems ab, in dem man die Teilchen beschreibt. Speziell kann man den Ursprung $r = \mathbf{0}$ woanders hinlegen oder das Koordinatensystem um den gegebenen Ursprung drehen oder den Zeitnullpunkt anders wählen, ohne dass sich E ändert. Diese drei **Invarianzen** sind logisch äquivalent mit den Erhaltungssätzen für Impuls, Drehimpuls und Energie.

Die **Homogenität der Zeit** bedeutet einfach $\dot{E} = 0$, also den Energiesatz. **Homogenität des Raumes:** Wir verschieben den Ursprung um δr , ersetzen also r überall durch $r - \delta r$. Dabei soll sich E nicht ändern, soll also nur von der *relativen* Lage der Teilchen abhängen, was vernünftigt ist. Die Änderung $\delta E = \sum (\partial E / \partial r_i) \delta r_i$ soll 0 sein. Nach der Hamilton-Gleichung (1.107) heißt das $\delta E = -\dot{p} \cdot \delta r = 0$. Wenn dieses Produkt verschwinden soll, gleichgültig wie wir δr gewählt haben, muss $\dot{p} = \mathbf{0}$ sein, also der Impulsvektor (mit allen seinen Komponenten) ist zeitlich konstant. **Isotropie des Raumes:** Bei einer kleinen Drehung um den Winkel $\delta \alpha$ (Drehachse gegeben durch die Richtung des Vektors $\delta \alpha$, Drehwinkel gegeben durch seinen Betrag) ändert sich der Ortsvektor r um $\delta r = \delta \alpha \times r$ (vgl. Abschn. 2.1.2). Aber auch der Impulsvektor ändert sich bei der Drehung (bei der Verschiebung blieb er konstant), er ist ja jetzt, ebenso wie der Ortsvektor r , nach

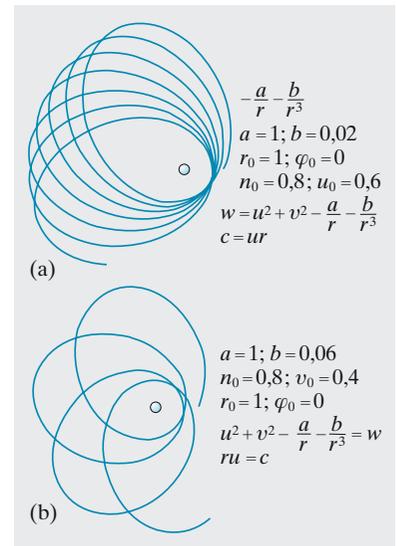


Abb. 1.65a,b. Bahnen in einem Potential $\varphi = a/r - b/r^3$, wie es z. B. um einen abgeplatteten Himmelskörper herrscht oder (gemittelt) um einen Stern, der von einem kleineren umkreist wird. Die Bahnellipse präzediert umso schneller, je größer der r^{-3} -Anteil ist ($a = 1, b = 0,02$ bzw. $0,06$)

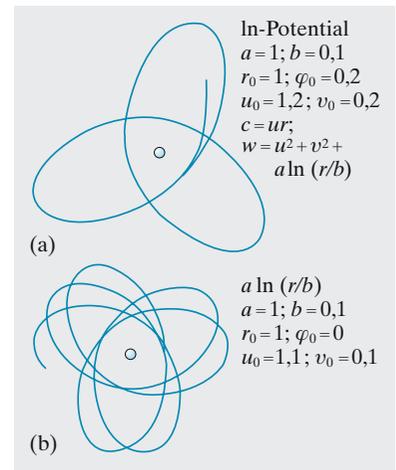


Abb. 1.66a,b. Bahnen in einem logarithmischen Potential $\varphi = a \ln(r/b)$, wie es z. B. auf einer runden Gummimembran herrscht, die man in der Mitte hinunterdrückt, oder in der Umgebung eines gleichmäßig geladenen Drahtes. Die einzelnen Bahnen entsprechen verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten

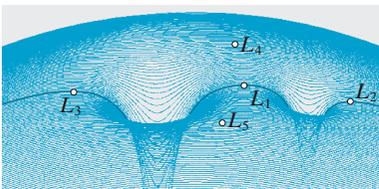
anderen Koordinatenrichtungen aufzuspalten: $\delta \mathbf{p} = \delta \alpha \times \mathbf{p}$. Die Energie dagegen muss von der Drehung unberührt bleiben: $\delta E = \text{grad}_{\mathbf{r}} E \cdot \delta \mathbf{r} + \text{grad}_{\mathbf{p}} E \cdot \delta \mathbf{p} = 0$. Wir setzen die Ausdrücke für $\delta \mathbf{r}$ und $\delta \mathbf{p}$ ein und benutzen die Hamilton-Gleichungen: $\delta E = -\dot{\mathbf{p}} \cdot (\delta \alpha \times \mathbf{r}) + \dot{\mathbf{r}} \cdot (\delta \alpha \times \mathbf{p}) = 0$. Beide Terme sind Spatprodukte. Nach Gleichung (2.0) können wir die Faktoren zyklisch permutieren, damit sich $\delta \alpha$ ausklammern lässt: $\delta E = \delta \alpha \cdot (-\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) = \delta \alpha \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p})$. In der Klammer steht die Ableitung des Drehimpulses $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, also $\delta E = \delta \alpha \cdot \dot{\mathbf{L}} = 0$. Damit dieses Produkt bei jeder beliebigen Wahl der Drehung $\delta \alpha$ verschwindet, muss $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$ sein, d. h. der Drehimpulssatz gelten.

Ganz allgemein kann man zeigen:

Wenn die Energiefunktion invariant gegen eine gewisse Transformation ist, d. h. die Naturgesetze symmetrisch gegen eine solche Transformation sind, entspricht das dem Erhaltungssatz für eine bestimmte Größe.

Dieser Satz von *Emmy Noether* spielt in der modernen theoretischen Physik eine grundlegende Rolle.

Wir haben bisher in cartesischen Koordinaten gerechnet. Für komplexe mechanische Systeme mit **Bindungen**, z. B. für Teilchen, die nur auf bestimmten Flächen oder Kurven laufen dürfen, oder die durch starre Stangen, Fäden usw. untereinander gekoppelt sind, ist die Beschreibung mit anderen Koordinaten oft einfacher. Wenn man fragt: Wie weit ist das Teilchen auf dieser Kurve schon gerutscht, genügt eine Zahlenangabe, während man in cartesischen Koordinaten immer drei braucht. Natürlich haben die Bewegungsgleichungen in diesen neuen Koordinaten nicht mehr die einfache Newton-Form. Wenn z. B. ein Schlitten auf einer gekrümmten Bahn gleitet und wir seine Lage durch die Bogenlänge s ausdrücken, die er schon zurückgelegt hat, sind nicht nur mit \ddot{s} Kräfte verbunden, sondern auch mit der Krümmung der Kurve. *Lagrange*, *Hamilton* u. A. haben Bewegungsgleichungen gefunden, die unabhängig von der speziellen Wahl des Koordinatensystems sind und die daher oft Vorteile bei der Behandlung mechanischer Systeme mit Bindungen bieten.



Kombiniertes Potential der Gravitation und der Zentrifugalkraft eines Doppelsterns im Bezugssystem, das mit beiden mitrotiert. Wir sprechen der Kürze halber von Erde E und Mond M , obwohl das Massenverhältnis hier ganz anders ist. Es gibt fünf kräftefreie Punkte oder Librationspunkte, von Lagrange entdeckt: L_1 zwischen E und M , L_2 jenseits von M , L_3 jenseits von E (alle sind Sattelpunkte). Auf der Mondbahn, 60 von diesem entfernt, liegen zwei flache Potentialgipfel L_4 und L_5 .

▲ Ausblick

Schon mit drei Körpern, die aufeinander Kräfte z. B. nach dem r^{-2} -Gesetz ausüben, wird die Mechanik nur in Spezialfällen fertig. *Newton* meinte, vielleicht müsse der Schöpfer von Zeit zu Zeit eingreifen, um das Sonnensystem in Ordnung zu halten, *Laplace* glaubte, ohne diese Hypothese die Stabilität dieses Systems nachweisen zu können, aber seit *Poincaré* ist man nicht mehr so sicher. Dass die Parameter der Erdbewegung (Exzentrizität, Schiefe der Achse) schwanken, ist bekannt, und viele führen mit *Milanković* die Eiszeiten darauf zurück. Seit kurzem meint man, die Achse würde viel mehr schwanken, wenn der Mond sie nicht stabilisierte. Wie wir zu unserem Mond gekommen sind – durch Abschleuderung, Einfang oder wie sonst – ist auch noch nicht ganz sicher. Die nichtlineare Dynamik (Kap. 20) hat hier einiges geklärt, aber gleichzeitig die Hoffnung auf eine durchgehende Beschreibung des ganzen Weltlaufs zunichte gemacht.

Mit sehr vielen Teilchen kann die Mechanik höchstens umgehen, wenn zwischen ihnen feste Lagebeziehungen bestehen wie im starren Körper (Kap. 2) oder wenigstens annähernd feste (Kap. 3, 4). Wenn diese Teilchen aber alle wild durcheinander sausen wie im Gas ▶

oder vielfach in strömenden Flüssigkeiten, kann und will kein Mensch jedes einzelne verfolgen, nicht nur, weil die Quantenmechanik (Kap. 13) das auch prinzipiell gar nicht zuließe. Hier sind statistische Gesetze, Aussagen über Mittelwert und mittlere Abweichungen davon, alles was man vernünftigerweise verlangen und verarbeiten kann (Kap. 5, 19): Wer wollte denn verfolgen, was jedes von 10^{30} Teilchen macht?

✓ Aufgaben ...

www. CD

● 1.1.1 Bogenmaß

Welchen Längen entsprechen 1° , $1'$, $1''$, 1 rad auf der Erdoberfläche? Welchen Flächen entsprechen 1 Quadratgrad , 1 Quadratminute , 1 Quadratssekunde , 1 sterad ? Wie viel sterad, Quadratgrad usw. hat die ganze Kugel; ein Halbraum; eine Kreisscheibe vom Radius r im Abstand a ; ein Rechteck mit den Seiten a und b im Abstand r (senkrecht bzw. unter einem Winkel betrachtet); die Sonne, von der Erde aus gesehen; Ihre Hand bei ausgestrecktem Arm von Ihrem Auge aus (hat Ihre Körpergröße einen Einfluss?); die Bundesrepublik vom Erdmittelpunkt aus? Welchen Anteil der Sonnenstrahlung fängt die ganze Erde auf? Wenn λ die geographische Länge, φ die Breite ist, wieso ist das Raumwinkelement der Erdoberfläche $\cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi$? In sphärischen Polarkoordinaten zählt die „Breite“ anders herum als auf der Erde ($\vartheta = 0$ am Pol, $\pi/2$ am Äquator). Wie sieht das Raumwinkelement aus? Wann spricht man bei einer Messung (z. B. Strahlungsmessung) von „ 4π -Geometrie“?

●● 1.1.2 Sonnen- und Sterntag

Wie kommt es zu dem Verhältnis $366,25/365,25$ zwischen Sonnen- und Sterntag?

● 1.1.3 Stroboskopeffekt

Warum sieht man im Kino oder Fernsehen oft Flugzeugpropeller, Panzerketten, Kutschenräder viel zu langsam oder rückwärts laufen? Was kann man schließen, wenn die Rückwärtsdrehung in eine Vorwärtsdrehung übergeht oder umgekehrt? Kann der

Effekt beim Anfahren öfter auftreten? Wie kann man den Effekt zur Drehzahlmessung an Motoren, Zentrifugen usw. ausnutzen? Braucht man dazu natürliche oder künstliche Beleuchtung?

●● 1.1.4 Tageslänge

Schätzen Sie, in welchem Maße folgende Ereignisse das Trägheitsmoment der Erde und damit die Winkelgeschwindigkeit ihrer Rotation beeinflussen: Die Krakatau-Katastrophe (mehrere km^3 Gestein einige km hoch geblasen); der Bau der chinesischen Mauer; die Sättigung der gesamten Troposphäre mit Wasserdampf; eine Abkühlung der Atmosphäre (Schrumpfung der Skalenhöhe); eine Eiszeit; die Bildung eines Hochgebirges wie des Himalaja (beachten Sie die Breitenlage); die gesamte tertiäre Gebirgs- und Hochlandbildung. Welcher dieser Effekte kann merkliche Veränderungen der Sonnensekunde bringen?

●●● 1.1.5 Pendeluhren

Wie beeinflussen die in Aufgabe 1.1.4 genannten Vorgänge die Periode von Präzisionspendeln, die am Ort des Geschehens oder anderswo aufgestellt sind? Man vergleiche mit der Periodenänderung infolge thermischer Ausdehnung des Pendelarmes (z. B. Temperaturschwankungen der Atmosphäre). Welche Präzision der Thermostatisierung lohnt sich angesichts dieser Einflüsse noch?

●● 1.1.6 Tageslänge

Die Totalitätszone der **Sonnenfinsternis** von 484 n. Chr. lief nach zeitgenössischen Berichten über Korfu, Rhodos und den Libanon. Rech-

net man mit der sehr genau bekannten Länge des Finsterniszyklus zurück, kommt man zwar auf das richtige Datum, aber auf eine Totalitätszone Lissabon–Karthago–Cypern. Diese Diskrepanz fiel schon *Halley* um 1700 auf. *Kant*, der durchaus nicht nur abstrakter Philosoph war, schlug **Gezeitenbremsung** der Erdrotation als Erklärung vor. An Schliffen von Korallenstöcken kann man mikroskopisch periodische Änderungen der Kalkablagerung als Jahres- und sogar Tagesringe feststellen. An devonischen ($3 \cdot 10^8$ Jahre alten) Korallen zählt man 400 ± 10 Tagesringe pro Jahresring. Heutige Atomuhren gestatten Direktmessung der Zunahme der **Tageslänge**: $5(20)\ \mu\text{s}/\text{Jahr}$. Vergleichen Sie die drei Angaben miteinander und mit der in Aufgabe 1.7.19 geschätzten Gezeitenreibung. Wie sind diese Schätzung und die Folgerungen über Vergangenheit und Zukunft des Erde-Mond-Systems abzuändern? Worauf könnte der Unterschied beruhen?

●●● 1.1.7 Standard-Abweichung

Vielfach definiert man die Standard-Abweichung anders als in (1.3), nämlich $\sigma' = \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)}$. Dies bezieht sich auf eine Stichprobe von endlich vielen Werten x_i . Gleichung (1.3) ist dagegen die „Standard-Abweichung der Grundgesamtheit“. Der Unterschied rührt daher, dass der Mittelwert (1.2) der Stichprobe etwas vom „wahren Mittel“ der Grundgesamtheit abweicht. Führen Sie das näher aus.

●● 1.1.8 Gauß-Fläche

Weisen Sie nach, dass die Gesamtfläche unter der **Gauß-Funktion** 1

ist (was bedeutet das?), und dass ihr Mittelwert tatsächlich \bar{x} , ihre Standard-Abweichung σ ist.

••• 1.1.9 Normalverteilung

Warum sind Zufallsabweichungen normalverteilt? Beachten Sie: Solche Abweichungen beruhen auf sehr vielen verschiedenen Ursachen, man kann sie auf viele verschiedene Weisen in Anteile zerlegen. Nach welchem Gesetz addieren sich diese Beiträge? Die Verteilungsfunktion für diese Abweichungen muss immer den gleichen Bau haben, ob es sich um irgendwelche Teilbeiträge oder die Gesamtabweichung handelt.

• 1.2.1 Wie schnell ist der Mensch?

Berechnen Sie aus den Weltrekordzeiten für einige Laufstrecken (Leichtathletik, Eisschnelllauf usw.) die mittleren Geschwindigkeiten. Treten während des Laufs irgendwann höhere Geschwindigkeiten auf?

• 1.2.2 Ein schneller Hund

Morgens um 6 Uhr bricht Jäger Bumke zu seiner 10 km entfernten Jagdhütte auf. Sein Hund läuft doppelt so schnell, kehrt an der Jagdhütte um, läuft wieder bis zum Herrn zurück und pendelt so ständig zwischen Jäger und Hütte hin und her. Welche Strecke ist der Hund gelaufen, wenn der Jäger um 8 Uhr an der Hütte anlangt?

•• 1.2.3 Wo ist der Hund?

Ein Junge, ein Mädchen und ein Hund setzen sich gleichzeitig vom gleichen Punkt einer schnurgeraden Straße aus in Marsch. Der Junge geht mit 6 km/h, das Mädchen mit 4 km/h, der Hund pendelt ständig mit 10 km/h zwischen beiden hin und her. Wo befinden sich der Junge, das Mädchen, der Hund nach genau einer Stunde, in welche Richtung läuft der Hund?

••• 1.2.4 Ein nasser Hund

Ein Hund entdeckt seinen Herrn am anderen Ufer eines Flusses, springt genau gegenüber ins Wasser und schwimmt immer genau in Richtung auf Herrchen, obwohl ihn die Strömung abtreibt. Der Fluss habe überall die gleiche Geschwindigkeit. Wo lan-

det der Hund, wie lange braucht er, welche Kurve beschreibt er?

••• 1.2.5 Der Lobatschewsky-Hund

Ein Hund, der sich abseits der Straße an einem Baum beschäftigt hatte, wird jetzt von seinem Herrn, der geradlinig und gleichförmig auf der Straße weitergeht, an strammer Leine mitgezerrt. Welche Kurve beschreibt der Hund?

•• 1.2.6 Un problema quadrato per teste quadrato

Ein junges Mädchen, ein Wanderer, ein Räuber und ein Polizist befinden sich auf einer Ebene in genau quadratischer Anordnung, als jeder den genau 1 km entfernten Gegenstand seines Interesses entdeckt – der Wanderer das Mädchen, der Räuber den Wanderer, der Polizist den Räuber, das Mädchen den Polizisten – und beginnt, mit 6 km/h auf ihn zuzugehen. Welche Kurven beschreiben die Leute, wann und wo treffen sie zusammen? Wie ist die Lage, wenn es nur drei, wenn es fünf, sechs usw. Personen sind, die sich entsprechend verhalten?

•• 1.2.7 Satyr und Nymphe

In einem exakt kreisförmigen, vom Ufer ab sehr tiefen See schwimmt ein junges Mädchen genau in der Mitte, als sie das Herannahen eines allem Anschein nach sehr starken, sehr intelligenten, aber sonst widerlichen Mannes mit offenbar sehr bösen Absichten bemerkt, der zum Glück nicht schwimmen und genau viermal so schnell am Ufer laufen kann wie sie schwimmt, aber nicht schneller als sie läuft. Was muss sie tun, um ihm zu entkommen?

••• 1.2.8 Ans Ende der Welt

In einer Science fiction-Story gerät der Held auf eine Art Fließband, auf dem er nur vorsichtig mit 1 m/s vorwärts kommt. Bald bemerkt er, dass von den beiden Enden A und B des Bandes eines (A) feststeht. Das andere (B) wird mit 10 m/s weggezogen. Zum Glück ist das Bandmaterial beliebig dehnbar. Kann der Held, der bei A auf das anfangs 1 km lange Band

geraten ist, jemals das Ende B erreichen, und wenn ja, wann? – Der „Rand des Weltalls“, der z. Z. etwa $2 \cdot 10^{10}$ Lichtjahre entfernt ist, rast mit Lichtgeschwindigkeit von uns weg. Wenn im Weltall als Ganzem die übliche Geometrie herrschte, wann würde eine Rakete, die mit $c/2$ fliegt, den Rand der Welt erreichen?

• 1.2.9 Hemmt Wind immer?

Ein Flugzeug fliegt mit der Reisegeschwindigkeit v eine Strecke d hin und zurück. Es weht ein Wind mit der Geschwindigkeit w genau in Flugrichtung bzw. beim Rückflug in Gegenrichtung. Gleicht der Gewinn an Flugzeit beim Hinflug den Verlust beim Rückflug aus?

•• 1.2.10 Michelson im Fluss

Ein Fluss hat überall die Strömungsgeschwindigkeit w . Ein Schwimmer überquert den Fluss zum genau gegenüberliegenden Punkt und kehrt zum Ausgangspunkt zurück. Ein anderer schwimmt genau die Flussbreite stromab und wieder zurück. Welcher der beiden gleich guten Schwimmer gewinnt?

•• 1.2.11 Wie kommt man rüber?

Ein Fluss hat überall die gleiche Strömungsgeschwindigkeit. Wie muss man sich verhalten, damit man beim Hinüberschwimmen

- eine möglichst kurze Strecke abgetrieben wird; wie lang ist die Überquerungszeit?
- in möglichst kurzer Zeit hinüberkommt; wie weit wird man abgetrieben?
- Der Fluss strömt schneller als man schwimmt. Am sehr unwegsamen Ufer kommt man zu Fuß auch nur langsam vorwärts. Man soll in möglichst kurzer Zeit ans jenseitige Ufer schwimmen und wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren.

• 1.3.1 Hier irrte Aristoteles

Aristoteles behauptete, ein schwerer Körper falle schneller als ein leichter (auch abgesehen vom Luftwiderstand). *Galilei* schlug vor, man solle

sich einen schweren und einen leichten Körper durch einen Faden verbunden denken und diesen immer dünner bzw. dicker machen. Was beweist das?

●● 1.3.2 Was ist Masse?

Newton definiert zu Beginn der „Principia“ die Masse (er sagt: „Quantity of matter“) wie folgt: „The quantity of matter is the measure of the same, arising from its density and its bulk conjunctly“. Er kommentiert dies: „Thus air of a double density, in a double space, is quadruple in quantity, ...“. Ist diese Definition logisch befriedigend?

●● 1.3.3 Wie viele Axiome braucht man?

Eine Betrachtung aus *Newtons* „Principia“: Angenommen, zwei Körper A und B ziehen einander an, aber entgegen dem Reaktionsprinzip so, dass B von A stärker gezogen wird als A von B . Jetzt verbinden wir A und B durch eine Stange. Sie wird nach Voraussetzung durch B stärker geschoben als durch A , erfährt also eine gegen A gerichtete resultierende Kraft, die sie auf A überträgt. Das ganze System müsste sich damit nach dem Aktionsprinzip selbständig beschleunigen, ohne äußeren Kräften ausgesetzt zu sein, im Widerspruch zum Trägheitsprinzip und zur Erfahrung. Ist das eine echte Herleitung des Reaktionsprinzips, die es als Axiom überflüssig macht?

●●● 1.3.4 Da kann man sich sehr täuschen

Ein Stein wird genau senkrecht hochgeworfen. Trifft er genau an der gleichen Stelle wieder auf? Man lässt einen Stein von einem Turm fallen. Kommt er genau senkrecht unter der Abwurfstelle an? (Beide Male Windstille.)

● 1.4.1 Brunnentiefe

Sie lassen einen Stein in einen Brunnen fallen und hören es nach der Zeit t platschen. Wie tief ist der Brunnen?

● 1.4.2 Tachoregel

Was halten Sie von der Kraftfahrregel: Um den Bremsweg (in m) zu

erhalten, teile man die Geschwindigkeit (in km/h) durch 10 und quadriere? Welcher Bremsverzögerung entspricht das (Vergleich mit der TÜV-Forderung von $6 m/s^2$)? Welchen Winkel gegen die Vertikale muss ein stehender Fahrgast in einem gebremsten Fahrzeug einnehmen, wenn er ohne Halt nicht umfallen will? Wie lauten die Werte von Beschleunigung und Einstellwinkel für einen PKW, der in 12 s auf $100 km/h$ beschleunigt?

● 1.4.3 Sicherheitsabstand

Welchen Sicherheitsabstand sollte man bei gegebener Geschwindigkeit halten, wenn man (a) die eigenen Bremsen für mindestens so gut hält wie die des Vordermannes und die eigene Reaktionszeit mit t veranschlagt (speziell etwa $t = 0,3; 1,0; 2,0 s$), (b) damit rechnen muss, dass die Bremsverzögerung des Vordermannes doppelt so groß ist wie die eigene (er hat z. B. bessere Bremsen, Sie bremsen nur entsprechend Aufgabe 1.4.2)? Was sagen Sie zu der Faustregel: In der Stadt fahre man halben, im Freien vollen Tachometerabstand (Tachometerabstand: so viele m , wie der Tacho km/h zeigt)?

● 1.4.4 Hier irrte Jules Verne

Jules Vernes Mondschuss: Eine Granate, als Passagierkabine eingerichtet, wird aus einem tiefen Felsschacht als Kanonenrohr abgeschossen und soll so auf die „parabolische Geschwindigkeit“ von $11,2 km/s$ gebracht werden, die ein Objekt (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) zum Entweichen von der Erde braucht. Diskutieren Sie die Möglichkeit des Projektes. Denken Sie daran, dass ein Mensch unter günstigsten Bedingungen (welche sind das?) $1 s$ lang $30 g$, $5 s$ lang $15 g$, $60 s$ lang $8 g$, $200 s$ lang $6 g$ aushält.

● 1.4.5 Wurfweite

Wie groß sind die fehlenden Werte (Anfangsgeschwindigkeit v_0 , Wurfweite w , Scheitelhöhe h) bei folgenden Problemen (Voraussetzung: kein

Luftwiderstand, Wurfwinkel so, dass w maximal): Weitsprung (Absprung als reine Umlenkung auffassen!); Speerwerfer wirft $90 m$. Wie schnell bewegt er die Wurfhand relativ zum Körper? Ferngeschütz schießt $100 km$ weit (warum so großes Kaliber?); Rakete fliegt $280 km$ weit. Satelliten-Rakete (letzte Stufe): $v_0 = 8 km/s$. Sind die Formeln des schiefen Wurfs in allen Fällen anwendbar?

●●● 1.4.6 Kugelstoß

Sollte ein Kugelstoßer auch unter 45° abstoßen wie ein Ballwerfer?

●● 1.4.7 Drehscheibe

Auf einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe vom Radius r ist längs eines Durchmessers ein Gleis montiert. Jemand schiebt einen Wagen der Masse m von außen bis ins Zentrum. Welche Arbeit leistet er dabei mindestens? Wie groß ist der Unterschied an potentieller Energie des Wagens zwischen Umfang und Zentrum? Wie schnell würde ein nahe dem Zentrum losgelassener Wagen am Umfang ankommen? Ist seine Bewegung gleichmäßig beschleunigt? (Reibung überall vernachlässigen!) Man koppelt zwei Wagen mit den Massen m_1 und m_2 durch ein Seil der Länge l zusammen. Wo müssen sie stehen, damit sie ohne Bremsvorrichtung nicht wegrollen? Ist das Gleichgewicht stabil?

●● 1.4.8 Kurvenfahrt

Kommt man auf der Innen- oder Außenspur schneller um eine nicht überhöhte Kurve, falls man nicht „schneiden“ kann oder darf, also seine Spur beibehält und so schnell fährt, dass man gerade nicht seitlich wegrutscht?

● 1.4.9 Überhöhung

Wie groß ist die richtige Überhöhung einer Kurve vom Krümmungsradius r , die mit der Geschwindigkeit v durchfahren werden soll? Sollte man die Kurve nach dem Prinzip bauen: gerades Stück – Kreisbogen – gerades Stück?

●● 1.4.10 Eisenbahnkurve

Wie schnell darf ein Zug um eine nicht überhöhte, bzw. um den Winkel α überhöhte Kurve fahren, damit die Wagen nicht kippen? Spurbreite 1,435 m, Höhe des Wagenschwerpunktes über der Schienenoberkante ca. 2 m.

● 1.4.11 Schwerelosigkeit

Berechnen Sie Bahngeschwindigkeit und Umlaufzeit eines Satelliten, der in geringer Höhe über dem Erdboden kreist. Wieso kann man sagen, dass in ihm Schwerelosigkeit herrscht?

●● 1.4.12 Zentrifuge

Diskutieren Sie die Zentrifugalbeschleunigungen und -kräfte in einer Wäscheschleuder (Trommeldurchmesser 30 cm, 3 000 U/min); in einer Astronauten-Testmaschine (Abstand Drehachse–Kabine 6 m); auf der Erde am Äquator und in München (48° N) infolge Achsdrehung; auf der Erde infolge der Bahnbewegung um die Sonne; auf dem Mond infolge der Bahnbewegung um die Erde.

●● 1.4.13 Kreispendel

Ein Pendel schwingt in x -Richtung. In einem bestimmten Moment stößt man es auch senkrecht oder schräg dazu an. Wie hängt die Bahn, die der Pendelkörper beschreibt, vom Zeitpunkt des Anstoßes (Phasendifferenz), von seiner Stärke (Amplitudenverhältnis) und seiner Richtung ab?

●● 1.4.14 Galileis Irrtum

Galilei hat vorübergehend gemeint, die Fallgeschwindigkeit v sei proportional zur durchfallenen Strecke s , denn er hatte beobachtet, „eine Ramme, die aus doppelter Höhe fällt, treibt den Pfahl doppelt so weit in die Erde“. Was sagen Sie zu dieser Begründung? Die Annahme $v \sim s$ lässt sich zu einem flagranten qualitativen Widerspruch mit der Erfahrung führen. Wie?

● 1.4.15 Der starke Floh

Sind die Muskeln eines Flohs (pro Querschnittseinheit) wirklich stärker als die des Menschen, weil er 500 seiner Körperlängen weit springen kann und der Mensch höchstens 5?

●●● 1.4.16 Captain Smolletts Uhr

Nur für sehr kleine Amplituden ist die Frequenz eines Pendels unabhängig von der Amplitude. Dies beschränkt die Ganggenauigkeit von Pendeluhrern, besonders auf Schiffen, wo die Amplitude schwer konstant zu halten ist. Welche Nachteile hat das für den Navigator? Wir behandeln jetzt die Pendelschwingung exakter, auch für größere Amplituden. Wie stark weicht die Pendelperiode vom üblichen Wert ab? Wie weit durfte die Pendeluhr der „Hispaniola“ ausschlagen, mit der man die Schatzinsel nach Captain Flints Koordinaten suchte?

●● 1.5.1 Bogenschießen

Warum ist ein guter Bogen an den Enden dünner als in der Mitte, im Gegensatz zum „Flitzbogen“ aus einem Ast einheitlicher Dicke?

● 1.5.2 Benzinverbrauch

Die typische Stadtfahrt bestehe aus Halten vor der Ampel (alle 100 m), Beschleunigen auf 50 km/h, Ampel, Gasgeben, Um wie viel erhöht das den Kraftstoffverbrauch auf 100 km? Wie viel „kostet“ im Vergleich ein kräftiger Pass?

● 1.5.3 Unfall

Ein Auto fährt mit der Geschwindigkeit v gegen eine feste Betonwand. Sein Kühler wird dabei um eine Strecke d zusammengeschoben. Welche Beschleunigung erfährt der Insasse? Kann er sich mit steifen Armen am Armaturenbrett abstützen? Vergleichen Sie die Zerstörungswirkung dieses Unfalls mit dem Frontalzusammenstoß zweier Autos gleicher Bauart und gleicher Geschwindigkeit.

●● 1.5.4 Hochsprung

Der Schwerpunkt eines Hochspringers liegt beim Absprung in der Höhe h_0 über der Absprungsfläche. Längs einer Strecke Δh_1 beschleunigt sich der Springer durch seine Beinkraft auf die Absprunggeschwindigkeit v_0 , die ausreicht, ihn über die Latte zu tragen. Mit vernünftigen Werten bestimmen Sie Beschleunigungen, Geschwindigkeiten, Höhen, Arbeiten, Leistungen.

●● 1.5.5 Veranschaulichung des Raketenprinzips

Zwei gleich schwere Körper A_1 und B_1 werden durch eine Sprengladung auseinandergeschleudert (Maximalgeschwindigkeiten s. Abschn. 1.5.9a). A_1 besteht seinerseits aus zwei gleich schweren Teilstücken, mit denen das Gleiche geschieht usw. Wie schnell bewegt sich A_1 nach der ersten Explosion relativ zur Erde, wenn das Ausgangssystem in Ruhe war? Wie viele Explosionen braucht man, um mit einem Teilstück die Kreisbahngeschwindigkeit zu erreichen? Wie groß ist das Verhältnis der Ausgangsmasse zur „Nutzlast“ (Masse des letzten Teilstücks)? Sind die Verhältnisse bei wirklichen Raketen günstiger oder ungünstiger?

●● 1.5.6 Spülmaschine

Ein Gefäß ist ganz voll mit praktisch reinem Alkohol. Man gießt unter ständigem gründlichen Umrühren sehr langsam Wasser dazu, wobei die gleiche Gemischmenge in eine Wanne überläuft. Wie viel Wasser muss man zugießen, damit noch 40%iger, 20%iger, allgemein Alkohol der Volumenkonzentration c im Gefäß bleibt? Welche Konzentration hat die übergelaufene Flüssigkeit in der Wanne? Suchen Sie formale Beziehungen zum Raketenantrieb (Aufgabe 1.5.5, Abschn. 1.5.9b).

● 1.5.7 Rakete

Ethanol (95%) hat den Brennwert $2,8 \cdot 10^7$ J/kg. Schätzen Sie die optimalen Flugdaten einer einstufigen Rakete (Ethanol plus Flüssigsauerstoff).

●● 1.5.8 Projekt für den Fall einer Abkühlung der Sonne

Man bohre ein Loch bis ins Magma und lasse das Meerwasser hineinlaufen. Mit dem entstehenden Dampfstrahl als Raketenantrieb bugsiere man die Erde näher an die Sonne heran oder im Notfall zu einem anderen Fixstern, wobei natürlich Atomheizung vorzusehen ist. Kritik?

●● 1.5.9 Elastischer Stoß

Eine elastische Kugel prallt zentral auf (a) eine gleich schwere ruhende

Kugel, (b) eine doppelt so schwere ruhende Kugel, (c) eine feste Wand, (d) eine gleich schwere Kugel, die ihr mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkommt, (e) eine sehr kleine Kugel. Alle diese Stoßpartner sind ebenfalls elastisch. Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten nach dem Stoß und die übertragenen Impulse und Energien.

●● 1.5.10 Zykloide

Welche Kurve beschreibt ein Punkt an der Lauffläche des Reifens eines fahrenden Autos? Stellen Sie zunächst die Koordinaten des Punktes als Funktionen des Drehwinkels des Rades dar (Parameterdarstellung). Bestimmen Sie die Neigung der Kurve. Gibt es Augenblicke, wo der Punkt doppelt so schnell läuft wie das Auto? Wann bewegt er sich genau senkrecht, wann genau waagrecht, wann überhaupt nicht? Diese Kurve spielt eine Rolle angefangen vom Zahnradprofil über die „Brachistochrone“ des *Johann Bernoulli* (Aufgabe 1.5.12), das Pendel konstanter Schwingungsdauer (Tautochrone), das Profil der Wasserwelle, den Raketenflug bis zur Expansion des Weltalls.

●●● 1.5.11 Pendeluhr

Die Schwingungsdauer eines Pendels sollte unabhängig von der Amplitude sein. Abweichungen von dieser „Tautochrone“ bei größeren Amplituden s. Aufgabe 1.4.16. Gilt das Gleiche auch für einen reibungsfreien Schlitten in einem zylinderförmigen U-Tal? Wie müsste das Talprofil aussehen, damit die Periode exakt amplitudenunabhängig ist? Begründen Sie *Huygens'* Antwort: Das Profil muss eine umgestülpte Zykloide sein. Wie kann man ein Zykloidenpendel praktisch realisieren? Warum hat man sich zu *Huygens'* Zeit so viel mehr für das Problem interessiert als jetzt?

●●● 1.5.12 Bruderzwist im Hause Bernoulli

1696 stellte *Johann Bernoulli* seinen Kollegen und besonders seinem Bruder *Jakob*, mit dem er sich nicht gut stand, eine Denkaufgabe: Zwei

Punkte *A* und *B*, die verschieden hoch, aber nicht direkt übereinander liegen, sollen so durch eine Rutschbahn verbunden werden, dass ein reibungsfreier Schlitten in möglichst kurzer Zeit von *A* nach *B* gleitet. Zur Lösung soll selbst *Newton* einen sehr anstrengenden Tag gebraucht haben. *Johann Bernoulli* soll dessen anonym veröffentlichte Lösung sofort als *Newtons* erkannt haben: „Ex ungue leonem“, sagte er. *Jakob* begründete mit seiner Lösung die Variationsrechnung, *Johann* machte es praktisch ohne Differentialrechnung: Er stellte die Bahn als Lichtweg in einem Medium veränderlicher Brechzahl dar und benutzte das Fermat-Prinzip der kürzesten Laufzeit. Außerdem brauchte er nur die Fallgesetze und die Eigenschaften der Zykloide (das ist die Lösung), soweit sie in Aufgabe 1.5.10 abgeleitet sind. Wenn Sie nicht darauf kommen, studieren Sie wenigstens zwei unvollkommene Lösungen: Die schiefe Ebene, die *A* und *B* geradlinig verbindet, und eine Bahn, die von *A* senkrecht abfällt und ganz kurz vor der Höhe von *B* in die Horizontale umlenkt. Wovon hängt es ab, welche dieser beiden Bahnen schneller ist?

●● 1.5.13 Kann Messner mehr?

Messen Sie Ihre körperliche Dauerleistung, z. B. beim **Bergsteigen**. Das Blut enthält 15,5% **Hämoglobin**. Ein Hb-Molekül (rel. Molekülmasse 65 000) kann vier Moleküle O_2 reversibel binden. Herzfrequenz bei Anstrengung bis 150 min^{-1} , Pumpvolumen $1 \text{ cm}^3/\text{kg}$ Körpergewicht. Zucker, Grundeinheit CH_2O , wird zu $CO_2 + H_2O$ abgebaut; 1 g Zucker liefert 17 kJ. Wirkungsgrad der Muskeln ca. 25%. Wird Ihre Dauerleistung durch die Zirkulation begrenzt?

● 1.6.1 Bremsweg

Einige Reibungskoeffizienten gegen Autoreifen: Gute trockene Straße 0,8, feuchte Straße 0,3, Schnee um 0,1, Glatteis $< 0,1$. Abgenutzte Reifen haben kaum mehr als die Hälfte (alle Werte ohne Gewähr). Diskutieren Sie Bremswege, zulässige Geschwindigkeiten in Kurven usw.

● 1.6.2 Richtiges Bremsen

Warum nutzt es nichts, zu stark „auf die Bremse zu steigen“? Wie sollte man bremsen, um den Ruck kurz vor dem Zum-Stehen-Kommen zu vermeiden?

●● 1.6.3 Anfahren

Der Haftreibungskoeffizient zwischen Reibung und Straße sei $\mu_0 = 0,6$. Das „Leistungsgewicht“ eines Autos sei 10 kg/PS . Wie groß ist die maximal mögliche Beschleunigung beim Anfahren auf ebener Strecke? Von welcher Geschwindigkeit ab wird die maximale Beschleunigung durch die Motorleistung begrenzt? Wie steil darf die Straße höchstens sein, damit das Auto hinaufkommt? Wie groß ist bei dieser maximalen Steigung die Geschwindigkeit bei voller Leistung? Das Auto fährt so schnell durch eine nicht überhöhte Kurve, dass es gerade nicht wegrutscht. Unter welchem Winkel zur Senkrechten stellt sich dabei ein im Wagen frei bewegliches Pendel ein? Wie groß ist die maximale Bremsverzögerung? Der Fahrer habe eine Reaktionszeit von 1 s. Welchen Weg (als Funktion der Geschwindigkeit) braucht er, um beim Auftauchen eines Hindernisses zum Halten zu kommen?

● 1.6.4 Super-Reibung

Gibt es Reibungskoeffizienten > 1 ?

●● 1.6.5 Zauberstab

Man legt einen langen Stab quer über die beiden parallel ausgestreckten Zeigefinger. Zunächst seien die Arme ausgebreitet. Was geschieht, wenn man die Finger einander nähert? Fällt der Stab herunter? Wo treffen sich die Finger?

● 1.6.6 Traktor

Warum hat ein Traktor so große Räder, wenigstens hinten? Hat das etwas mit seiner Motorleistung oder -drehzahl zu tun?

●● 1.6.7 Der starke Matrose

Ein Matrose kann ein großes Schiff an einem Seil festhalten, wenn er dieses mehrmals um einen Pfahl schlingt. Wie ist das möglich?

●● 1.6.8 Kartentrick

Auf einem Bierglas liegt eine Spielkarte, mitten darauf eine Münze. Wie schnell muss man die Karte wegziehen oder -schnipsen, damit die Münze ins Glas fällt? Geht es besser mit einem weiten oder einem engen Glas? Wie geht es mit einem weichen Radiergummi statt der Münze? – Wie schnell muss man die Tischdecke unter dem Geschirr wegreiben, ohne dass es Scherben gibt? Fällt ein hohes oder ein niedriges Glas dabei leichter um?

●● 1.6.9 Fallschirm

Wie groß muss ein Fallschirm sein, wenn ein Mann, Auto, Kleinkind den Fall unversehrt überstehen soll? Welche Aufschlaggeschwindigkeit übersteht man? Kommt es auf die Absprunghöhe an? Nach welcher Fallstrecke und -zeit wird die Endgeschwindigkeit erreicht? Wie groß ist die Endgeschwindigkeit für einen Menschen ohne Fallschirm? Beim Fallschirm kann mit einer effektiven Fläche gerechnet werden, die etwa zwei- bis dreimal so groß ist wie die geometrische Fläche ($c_w = 2$ bis 3).

●● 1.6.10 Brand im Transatlantik-Jet

Sie müssen raus! Dürfen Sie den Fallschirm sofort öffnen? Aus welcher Höhe kann man ohne Atemgerät lebend unten ankommen, und wie muss man sich verhalten? Diskutieren Sie den freien Fall auch für kleinere Lebewesen. Gibt es eine Größe, unterhalb der ein Tier sich überhaupt nicht mehr totfallen kann?

●● 1.6.11 Leistung beim Radeln

Ein Radler hat im Wesentlichen gegen folgende Kräfte anzukämpfen: Reibungskräfte, Luftwiderstand, Steigungskräfte Diskutieren Sie diese Kräfte und die entsprechenden Leistungen in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit. Arbeiten Sie teilweise empirisch, z. B.: Aus der Geschwindigkeit, mit der Sie bestimmte Steigungen fahren, folgt Ihre Leistung; die Geschwindigkeit in der Ebene bei gleicher Anstrengung ergibt Ihren

effektiven Querschnitt, usw. Welche Rolle spielt dabei die Übersetzung?

●●● 1.6.12 Bewegung mit Reibung

Untersuchen Sie eine Bewegung unter dem Einfluss einer Reibungskraft, deren Geschwindigkeitsabhängigkeit durch v^n mit beliebigem n gegeben ist, z. B. die Bremsung eines Objekts mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 durch eine solche Reibung. Bestimmen Sie den $v(t)$ - und den $x(t)$ -Verlauf. Welcher qualitative Unterschied besteht zwischen dem Verhalten bei $n < 1$, bei $1 \leq n < 2$ und bei $n \geq 2$? Betrachten Sie das Verhalten von v und x bei $t \rightarrow \infty$.

●● 1.6.13 Schwingung mit Reibung

Als gedämpfte Schwingung bezeichnet man i. Allg. eine, deren Amplitude mit der Zeit exponentiell abnimmt. Ist dieses Abklinggesetz allgemein gültig, oder hängt es von der Form des Reibungsgesetzes ab? Betrachten Sie eine Schwingung unter dem Einfluss einer elastischen Rückstellkraft und einer Reibungskraft, die proportional v^n ist (n beliebig). Untersuchen Sie nur die zeitliche Änderung der Amplitude $x_0(t)$. Wie hängt die Gesamtenergie W von der Geschwindigkeitsamplitude v_0 ab? Wie ändert sich W zeitlich unter der Annahme, dass v immer seinen Maximalwert v_0 hat? Ist diese Annahme berechtigt, oder wie kann man den Fehler korrigieren? Aus der Abhängigkeit $v_0(t)$ schließen Sie auf $x_0(t)$ zurück und beachten dabei Aufgabe 1.6.12.

●● 1.6.14 Reentry

Die Bahn eines Satelliten oder eines Meteoriten durch die Erdatmosphäre zerfällt in zwei qualitativ verschiedene Phasen: (1) die stationäre Phase, in der die ursprüngliche Kepler-Bahn praktisch beibehalten wird, in größeren Höhen, (2) die „reentry-Phase“ in geringer Höhe. Zeigen Sie, dass das stimmt. Beschreiben Sie das Verhalten des Satelliten in den beiden Phasen. Wo liegt die Grenze zwischen diesen

Phasen, und wie hängt ihre Lage von den Eigenschaften des Satelliten ab?

●● 1.6.15 Viel Lärm um nichts

Im März 1980 stürzte der Skylab-Satellit ab, der 1972 mit 85 t Masse und 60 m^2 Querschnitt auf eine Kreisbahn in 300 km Höhe über dem Erdboden gebracht worden war. Trotz des Geschreis katastrophensüchtiger Medien und ihrer Konsumenten verlief dieser Absturz viel harmloser als bei den meisten Starfighters. Welche Bahngeschwindigkeit und welche Umlaufzeit hatte Skylab auf dieser Kreisbahn? Skylab wurde von einer Trägerrakete gestartet, deren Triebwerk Verbrennungsgase mit etwa 2 km/s ausstößt. Falls dies eine Einstufenrakete war und unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes: Welche Startmasse hatte die Rakete, wie viel Treibstoff wurde verbraucht? Warum verwendet man in Wirklichkeit mehrstufige Trägerraketen? Wie groß ist die Luftdichte in der Höhe der Skylab-Bahn bei einer mittleren Skalenhöhe von 12 km? Welcher mittleren Lufttemperatur entspricht diese Skalenhöhe? Wie groß sind die Reibungskraft, die Skylab auf der ursprünglichen Bahn erfährt, und die entsprechende Leistung? Schätzen Sie die Lebensdauer von Skylab auf seiner Bahn. Der vorzeitige Absturz wurde so erklärt: Die Sonne hatte ihre Aktivität in den vorangegangenen zwei Jahren unerwartet gesteigert, insbesondere mehr Sonnenwind, d. h. mehr schnelle Elektronen und Protonen ausgesandt als erwartet. Diese bleiben in der Hochatmosphäre stecken und heizen sie auf. Wieso hat das die Lebensdauer von Skylab verkürzt? Wie schnell würde die Luftreibung die Energie des Satelliten aufzehren, wenn er plötzlich in Luft geriete, die dieselbe Dichte hat wie am Erdboden? Wie heiß würde das Material von Skylab, wenn es die ganze Reibungshitze aufnehmen müsste? Ist das der Fall, oder wo bleibt der Rest der Energie? Mit welcher Geschwindigkeit ist Skylab auf der Erde aufgeschlagen? Gesah es senkrecht oder schräg? Wenn ein Satellit völ-

lig wahllos irgendwo aufschlägt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mensch dabei getroffen wird?

● 1.7.1 Seilsicherung

Um Katastrophen bei evtl. Abschaltung der Gravitation vorzubeugen, will man die Erde mit der Sonne durch ein Stahlseil verbinden, das sie auf ihrer Bahn hält. Abgesehen vom Befestigungsproblem und von der Masse des Seils: Wie dick müsste das Seil sein?

● 1.7.2 Geostationärer Satellit

Der Syncom-Nachrichtensatellit soll antriebslos immer über demselben Punkt der Erdoberfläche stehen. Wie groß muss sein Abstand von der Erdoberfläche sein? Könnte er z. B. ständig über München stehen? Wie viele solcher Satelliten braucht man, um jeden Punkt am Äquator zu erreichen? (Ultrakurzwellen breiten sich geradlinig aus.) Welches ist der nördlichste Punkt, der gerade noch erreicht wird?

● 1.7.3 Sonnenmasse

Auch ohne Kenntnis der Gravitationskonstante kann man angeben, wie viel mal massereicher die Sonne ist als die Erde. Man braucht dazu außer allbekanntem Daten über Jahres- und Monatslänge nur das Verhältnis der Abstände von Sonne und Mond von der Erde (400 : 1), nicht aber die absoluten Abstände. Wie geht das zu?

●● 1.7.4 G-Messung

Projektieren Sie eine Messung der Gravitationskonstante nach *Cavendish-Eötvös*: Art der großen Kugeln (müssen es Kugeln sein?), Konstruktion des Drehbalkens, Material und Dicke des Torsionsdrahtes usw.

●● 1.7.5 Sirius B

Sirius führt um seine scheinbare geradlinige Bewegung am Himmel eine leichte Pendelung mit einer Periode von 48 Jahren aus, bei der seine Position insgesamt um $3,2''$ schwankt. Unter der Annahme, dass dieses Pendeln von einem (bis 1862 noch nicht optisch identifizierten) Begleiter herührt, der sehr geringe Leuchtkraft

hat, und dass die Bahnen kreisförmig sind (was nicht stimmt): Welche Masse hat dieser Begleiter? Sirius ist 8,8 Lichtjahre entfernt. (Parallaxe $0,372''$.) Benutzen Sie folgende, auch sonst sehr nützliche Überlegung: Welche Masse müsste im Schwerpunkt des Systems aus den Massen m_1 und m_2 angebracht sein, um in ihrer Gravitationswirkung auf m_1 die Masse m_2 zu ersetzen?

●● 1.7.6 Lotablenkung

In Bad Harzburg, 10 km nördlich des Brockens, weicht das Lot um $0,25'$ von der Richtung ab, die man nach Korrektur auf Zentrifugalkraft und Ellipsoidgestalt erwartet. Welchen Fehler würde man beim Kartenzeichnen machen, wenn man sich nur auf die Polhöhe verließ? Was kann man über das Material sagen, aus dem der Harz besteht? Am Fuß des Himalaja findet man nur wenige Bogensekunden Lotabweichung. Warum?

●● 1.7.7 Ziggurat

Angenommen, den Babyloniern wäre ihr Turmbau bis in den „Himmel“, sagen wir bis in 50 000 km Höhe gelungen. Man nehme ein genügend festes Seil der gleichen Länge, das zwei Kabinen verbindet, eine nahe der Erdoberfläche, die andere oben im Turm. Was geschieht? Was kann man damit anfangen? Braucht man überhaupt einen Turm?

● 1.7.8 Mondautobahn

Was ist bei der Anlage von Autobahnen auf dem Mond zu beachten (besonders Kurvenradien, Überhöhungen usw.)?

● 1.7.9 Olympiade 2000 in Selenopolis (Mare Imbrium)

Welche Rekorde besonders in den leichtathletischen Disziplinen sind zu erwarten? Welche anderen Sportarten versprechen Sensationen? Welche Änderungen in den Sportanlagen sind zu treffen?

●●● 1.7.10 Projekt Gravitrain

Man baut genau geradlinig, also nicht der Erdkrümmung folgend, einen Tun-

nel, der zwei Punkte A und B der Erdoberfläche verbindet. Darin kann ein Wagen reibungsfrei rollen. Wie bewegt er sich, wenn man ihn an einem Ende bei A loslässt? Wie lange dauert die Fahrt von A nach B ? Wie groß ist die dabei erreichte Höchstgeschwindigkeit? Wie hängen die obigen Werte von der Länge des Tunnels ab? Wie liegen die Dinge, wenn der Tunnel durch den Erdmittelpunkt geht? Erfahrungsgemäß ist der Reibungswiderstand bei gut gelagerten Wagen etwa 1% des Gewichts. Wie groß müsste die Tunnellänge mindestens sein, damit der Wagen nicht infolge Reibung gleich nach dem Start wieder zum Stehen kommt? Die Reibung bringt den Wagen natürlich vor dem Ende des Tunnels (B) zum Stehen. Wo geschieht das? Hinweis: Ein Körper im Innern der Erde in einem Abstand r vom Erdmittelpunkt wird von der Kugel mit dem Radius r angezogen. Die Wirkungen der Teile der äußeren Kugelschale heben sich gegenseitig auf. Man nehme konstante Dichte des Erdkörpers an.

●● 1.7.11 Isostasie

Über der Tiefsee ist die Schwerebeschleunigung nicht kleiner als über dem Flachland. Schätzen Sie den Unterschied, der eigentlich auftreten sollte, weil Wasser leichter ist als Stein. Wenn dieser Unterschied nicht existiert, wie ist er kompensiert worden? Granit, Gneis usw. („Sial“) haben Dichten um $2\,650\text{ kg/m}^3$, die Gesteine unter dem Meeresboden („Sima“) um $2\,850\text{ kg/m}^3$. Wie tief ragt die Sialscholle? Wie tiefe Wurzeln müssen die Gebirge haben, wenn sie keinen Einfluss auf die Schwerebeschleunigung haben?

●● 1.7.12 Ehrenrettung

Zu *Galileis* Zeiten fehlten empirische Beweise dafür, dass sich die Erde bewegt (welche gibt es jetzt?). Vom positivistischen Standpunkt aus war also die Ansicht berechtigt, *Copernicus* habe vor *Ptolemäus* nur den Vorzug größerer mathematischer Einfachheit. Indirekte Beweise

hatte *Galilei* zur Genüge (Jupitermonde, Venusphasen usw.). Mit seinem angeblichen direkten Beweis im „Dialog“, sagen die Historiker, habe er sich aber ins Unrecht gesetzt: Die Gezeiten sollten nach Galilei verursacht sein durch die Kombination von Jahresumlauf und Tagesrotation. Ist das wirklich so falsch?

● 1.7.13 Homogenes Feld

Wie müsste eine Massenverteilung aussehen, die für ein homogenes Schwerfeld verantwortlich wäre?

●● 1.7.14 Tidenhub I

Ein sehr langes, genau horizontal liegendes Rohr ist halb voll Wasser. (Genau horizontal heißt: sich der Erdkrümmung anschmiegend!) Kann man hoffen, die Gezeiten in diesem Rohr nachzuweisen? Wie hängt der Gezeitenhub von der Rohrlänge ab? Extrapolieren Sie auf einen weltweiten Ozean. Warum sind die Gezeiten in Wirklichkeit i. Allg. höher? Welche Hübe schätzen Sie für Mittelmeer, Ostsee, Oberen See, Bodensee?

●● 1.7.15 Tidenhub II

Wie kann die winzige Gezeitenbeschleunigung von $10^{-7} g$ die Flut 10 m hoch auftürmen?

●● 1.7.16 Gezeitenkraft

Ein elastischer Reifen wird so auf die Kreisbahn um die Erde gebracht, dass sein Durchmesser auf den Erdmittelpunkt hinzeigt. Bleibt er kreisförmig oder deformiert er sich? Was wird aus einem losen Trümmerhaufen, der um die Erde kreist? Hängt sein Schicksal vom Radius der Kreisbahn ab? Berücksichtigen Sie die eigene Gravitation des Haufens. Wirft das Ergebnis ein Licht auf die Entstehung der **Saturnringe**?

●● 1.7.17 Springflut

Wer erzeugt höhere Gezeiten: Sonne oder Mond? Erklären Sie Spring- und Nipptiden.

●● 1.7.18 Stationärer Mond

Warum muss die Gezeitenreibung Tag und Monat schließlich gleich lang machen? Welche Einflüsse könnten dem

entgegenarbeiten? Wie lang werden Tag und Monat sein, wenn sie sich treffen? Wie weit ist der Mond dann von der Erde entfernt?

●● 1.7.19 Mondentstehung

Schätzen Sie die Stärke der Gezeitenreibung in den Ozeanen, zunächst für einen „weltweiten Ozean“: Wie viel Wasser steckt im Flutberg? Wie schnell muss das Wasser durchschnittlich strömen? Wie groß sind die inneren Reibungskräfte auf dem Meeresboden mindestens? Wieso ist dies eine Mindestschätzung? Welche Größenordnung ergibt sich für die Tagesverlängerung und für die Zeit, bis Tag = Monat sein wird? Drehen Sie den Film zurück: Vor wie langer Zeit könnte der Mond ganz nahe der Erde gewesen sein? Reicht die Drehgeschwindigkeit des vereinigten Systems zum Abschleudern des Mondes? Welche Einflüsse könnten dabei geholfen haben?

●● 1.7.20 Hat die Bibel doch recht?

Welikowski machte Sensation mit seiner Behauptung, die Sonne oder vielmehr die Rotation der Erde habe verschiedentlich stillgestanden oder ihre Richtung umgekehrt (einmal, um Josua die völlige Abschichtung der Amalekiter zu erlauben), und zwar weil einmal Venus, ein andermal Mars sich der Erde sehr genähert haben. Kann er recht haben?

●● 1.7.21 Sind wir doch allein?

Nach *Jeffries-Jeans* soll das Sonnensystem entstanden sein, als ein anderer Fixstern der Sonne so nahe kam, dass er Material aus ihr riss und umgekehrt. Aus diesem Material sollen sich die Planeten kondensiert haben. Wie nahe müsste die Begegnung gewesen sein? Wie häufig kommt so etwas vor (z. B. in der ganzen Galaxis)? Hätte es Zweck, nach anderen bewohnten Welten zu suchen, wenn man noch, wie bis vor kurzem, an diese Theorie glaubte?

● 1.7.22 Schwere auf Jupiter

Welche Schwerebeschleunigungen herrschen auf den einzelnen Planeten

und an der Sonnenoberfläche? Stellen Sie sich die Auswirkungen vor.

●● 1.7.23 Mondmasse

Was braucht man, um die Masse des Mondes zu bestimmen?

● 1.7.24 7.1.1610

Galilei wusste, dass Jupiter etwa 12 Jahre zum Umlauf um die Sonne braucht, er sah den Mond Ganymed etwa $6''$ neben dem Planeten stehen und bestimmte seine Umlaufzeit zu 3,6 Tagen. (Wie viele von diesen Daten können Sie mit einem Feldstecher nachprüfen?) Wenn *Galilei* das Gravitationsgesetz gekannt hätte, was hätte er daraus über Jupiter aussagen können? (Masse? Abstand von der Sonne? Brauchte er noch weitere Informationen?)

●●● 1.7.25 Hohmann-Bahnen

Interplanetare Raketenbahnen erfordern minimalen Treibstoffaufwand, wenn sie Kepler-Ellipsen sind, die die Bahnen von Start- und Zielplanet innen bzw. außen tangieren (warum?). Berechnen Sie für solche Bahnen Flugzeiten, Start- und Landegeschwindigkeiten (unter Berücksichtigung des Gravitationsfeldes des Planeten), ungefähren Treibstoffbedarf usw.

●● 1.7.26 Rotation der Galaxis

Unsere Galaxis enthält 10^{11} Sterne. Der Durchschnittssterne ähnelt der Sonne. Die Sonne steht ziemlich am Rand der Galaxis, etwa 27 000 Lichtjahre von deren Zentrum. Mit welcher Geschwindigkeit und Periode muss die Sonne um das Zentrum umlaufen, um nicht hineinzufallen? Können Sie dieses „Großjahr“ in der Geologie wiedererkennen? Kann man die Rotation z. B. des Andromedanebels (M 31) direkt sehen? Welche Nachweismethoden gibt es sonst?

●● 1.7.27 Satelliten-Paradoxon

Ein Satellit in einem widerstehenden Medium wird immer *schneller*, seine Umlaufzeit nimmt *ab*. Wie kommt das?

●● 1.7.28 Mondfahrt

Die Bahn einer Mondrakete ist keine Parabel, sondern eine Ellipse, die

die Mondbahn tangiert oder schneidet. Wie viel spart man hierdurch an Treibstoff gegenüber der Parabelbahn, d. h. der „zweiten kosmischen Geschwindigkeitsstufe“?

● 1.8.1 Der brave Mann

Ein Mann beobachtet von einer Brücke aus, wie einem stromauf fahrenden Paddler gerade unter der Brücke eine fast volle Kognakflasche ins Wasser fällt und abwärts treibt. Da der Paddler auf Rufen nicht reagiert, rennt der Mann ihm nach und erreicht ihn nach $\frac{1}{2}$ h. Der Paddler kehrt auf die Nachricht sofort um und holt die Flasche. Der Paddler fährt 6,5 km/h relativ zum Wasser, das mit 3 km/h strömt. Wie lange war die Flasche im Wasser? Benutzen Sie das Bezugssystem des Ufers und das des Wassers. Was ist einfacher?

● 1.8.2 Wie verhütet man Tanker-Unfälle?

Eine Radaranlage ortet gleichzeitig zwei Schiffe und misst ihre momentanen Geschwindigkeiten, Kurse und Positionen. Beantworten Sie möglichst schnell folgende Fragen: Werden die Schiffe zusammenstoßen, wenn sie den Kurs beibehalten? Wenn ja, wo und wann? Wenn nein, wo und wann kommen sie einander am nächsten, nämlich auf welche Entfernung? Entwickeln Sie ein allgemeines Verfahren, das eine schnelle Antwort erlaubt und für Hafenbehörden brauchbar ist. Können Sie es auch an den Flugsicherungsdienst verkaufen?

● 1.8.3 Hubble-Effekt

Eine Granate explodiert, während sie sich noch auf ihrer (fast) parabolischen Bahn befindet. Was tut der Schwerpunkt nach der Explosion? Beschreiben Sie das Verhalten der Sprengstücke im Bezugssystem der Erde, des Schwerpunktes und eines beliebigen Sprengstückes. Achten Sie besonders auf den Zusammenhang zwischen Entfernung und Geschwindigkeit der Sprengstücke in den beiden letzten Systemen. Was hat das mit dem Hubble-Effekt zu tun?

●● 1.8.4 Vollziehen Sie Copernicus nach

Mars stand im Juni 1969 in Opposition zur Sonne (S–E–M in gerader Linie). Welche scheinbare Bewegung auf dem durch die Fixsterne definierten Hintergrund der „Himmelskugel“ beschrieb Mars, etwa bis 1980? Konstruieren Sie möglichst genau. Wie sieht die analoge Konstruktion für andere Planeten aus (bes. Venus, Jupiter)? Welchen Einfluss hat die Exzentrizität der Bahnen? Stellen Sie sich vor, Sie kennen nur diese scheinbare Bewegung; vergessen Sie alle Kenntnisse über die Eigenbewegung der Erde sowie die Bahndaten (Tabelle 1.2), die Sie bisher benützt haben.

●● 1.8.5 Straßenszene

Polizist: Was machen Sie denn da? Am hellen Tage betrunken herumzuliegen! Ich nehme Sie mit!

Betrunkener: Aber warum denn? Ich habe es doch lange genug geschafft!

P.: Was haben Sie geschafft?

B.: Auf dem verdammten Dings zu balancieren!

P.: Sie, ich warne Sie! Auf welchem Dings?

B.: Auf der Erde! Sie ist hinter mir her, beschleunigt noch dazu, und schließlich hat sie mich eingeholt. Schauen Sie meinen Kopf an! Machen Sie das mal und bleiben stehen!

P.: Mache ich ja, den ganzen Tag!

B.: Stimmt, Respekt! Sie sollten zum Zirkus gehen! Aber weil ich nicht ganz so geschickt bin, wollen Sie mich einsperren?

Sie sind der freundliche, logische, aber gesetztesbewusste Schupo. Was sagen Sie?

●● 1.8.6 Garten in Woolsthorpe

Newton, ein Apfel. Sehr schnell:

N.: Aha, da fällt er.

A.: Gar nichts mache ich, aber du saust auf mich los!

N.: Wart ab, bis du aufplumpst! Dann wirst du sehen, wer sich wirklich bewegt.

A.: Mein Lieber, das war unter deinem Niveau. Allerdings bin ich der Schwächere, wenn die Erde gegen

mich prallt. Das ist eine Größenfrage, keine Rechtsfrage. Übrigens: Warum sollte ich mich denn beschleunigt bewegen? Hast du nicht selbst mal verkündet, dass dazu eine Kraft nötig ist?

N.: Allerdings, und zwar in deinem Fall die Gravitation!

A.: Ich merke aber nichts von deiner Gravitation.

N.: Ich schon.

A.: Kein Wunder! Aber ich muss dir das wohl langsam explizieren, obwohl die Zeit knapp ist. Du musst doch selbst spüren, dass der Erdboden dich beschleunigt vor sich her schiebt. Das, nämlich der Schub des Bodens auf deine Füße, ist die einzige reale Kraft, die hier im Spiel ist.

N.: Ja, ja. Aber darin hat er recht: Wenn mich einer beschleunigt aufwärts schiebt, spüre ich eine Kraft nach unten. Hm. Wenn ich ihn frage, warum er bis vor kurzem nicht „frei und in Ruhe“ war, sagt er natürlich, der Zweig des Baumes, der mit der Erde paktiert, habe ihn mitgeschleppt, mit exakt messbarer Kraft, und erst als der Stiel dieser Kraft nicht mehr gewachsen war, ist er entkommen.

A.: Bravo, eins rauf! Aber jedenfalls 1 : 0 für mich, o.k.?

Können Sie *Newton* wenigstens zum Unentschieden verhelfen?

●●● 1.8.7 Windrichtung

Auf die atmosphärischen Luftmassen wirken in horizontaler Richtung Druckkräfte, Reibungskräfte und Coriolis-Kräfte. Stellen Sie die Bewegungsgleichung eines Luftvolumens auf (Annahme: Reibungskraft \sim Geschwindigkeit) und untersuchen Sie die stationäre Strömung. Beachten Sie die Breitenabhängigkeit. Wenn die Reibung keine große Rolle spielte, wie stünde die Windrichtung zum Druckgradienten? Was ändert der Reibungseinfluss an dem Ergebnis? Was sagt die Erfahrung (Hoch, Tief, Passate)? Kann man den Reibungskoeffizienten schätzen? Ein kräftiges Hoch liegt über Mittelrussland (1 030 mbar), ein Tief über Irland (990 mbar). Welche Windrichtungen und -stärken erwar-

ten Sie bei uns? Vergleichen Sie mit Wetterkarten.

●● 1.8.8 Wer irrte hier?

Stimmt es, dass die Coriolis-Kraft die Erdsatelliten trägt, wie in dem sonst vorzüglichen Fischer-Lexikon „Geophysik“, S. 22, behauptet wird? Wenn nein, welches ist dann die relative Rolle der verschiedenen Trägheitskräfte? Benutzen Sie die beiden in Frage kommenden Bezugssysteme.

●● 1.8.9 Raumstation

In einer Raumstation will man die Streiche vermeiden, die einem die Schwerelosigkeit spielen kann (z. B. welche?), indem man durch Rotation der Station ein „künstliches Schwerefeld“ erzeugt. Allerdings müssen dabei Coriolis-Kräfte in Kauf genommen werden. Stellen Sie sich deren Auswirkungen vor, z. B. für eine ringförmige Station und jemanden, der den Ringkorridor entlangläuft. Projektieren Sie die Station so, dass die Querkräfte in vernünftigen Grenzen bleiben.

●● 1.8.10 Berg- und Wiesenufer

Glauben Sie, dass die Bergrufer-Flachufer-Asymmetrie der russischen Flüsse oder die angeblich stärkere Abnutzung der rechten Schiene bei der Bahn auf die Coriolis-Kraft zurückzuführen ist?

●● 1.8.11 Foucault-Pendel

Eine sehr große Masse, aufgehängt an einem sehr langen Draht, die mehrere Tage fast ungedämpft schwingt, behält ihre Schwingungsebene nicht bei, sondern beschreibt eine Rosette (Abb. 1.62). Wie kommt das? Wie lange dauert ein vollständiger Umlauf um die Rosette? Wie hängt die Dauer von der geographischen Breite ab? Zur Behandlung benutzen Sie Abb. 1.63.

●● 1.8.12 Schuss auf der Scheibe

Stimmt es, dass die Kugel in Abb. 1.61 nach der Zeit $t = r/v$ in einen Baum B schlägt, der im Bild senkrecht unter A liegt? Wenn nicht, wo ist sie nach dieser Zeit? Was würde der rotierende Beobachter erwarten, wenn er von seiner Drehung nichts wüsste? Wie deutet er die Diskrepanz? Unter welcher Bedingung ist die entsprechende Abweichung gegen die im Text behandelte zu vernachlässigen?

●● 1.8.13 Trägheitskräfte

Es gibt eine allgemeine, mathematisch sehr elegante Ableitung der **Coriolis-Beschleunigung**, bei der die Zentrifugalbeschleunigung und ein weiterer, bisher von uns nicht behandelter Term automatisch mit herauskommen. Man betrachte ein Bezugssystem S' , das gegenüber einem Inertialsystem S mit einer nicht notwendig zeitlich konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Im betrachteten Zeitpunkt mögen Ursprung und Achsen der beiden Systeme gerade zusammenfallen. Drücken Sie Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung in S' durch die in S aus. Wie hängen also r und r' zusammen? Wie ist es mit \dot{r} und \dot{r}' ? Betrachten Sie erst $\dot{r}' \perp \omega$, dann den allgemeinen Fall. Welche Vektoroperation ist anwendbar? Was folgern Sie daraus über die zeitliche Ableitung eines *beliebigen* Vektors in S' , verglichen mit der in S ? Wenn nötig, unterscheiden Sie die beiden Operationen symbolisch. Aus \dot{r}' bilden Sie nun \ddot{r}' . Drücken Sie alles durch S' -Größen aus und deuten Sie die einzelnen Glieder.

●● 1.8.14 Kosmische Tankstellen

Pioneer 10 hatte beim Start von der Erde noch nicht die Geschwindigkeit, die zur Flucht aus dem Sonnensystem nötig ist (wie groß ist sie?).

Bei der engen Begegnung mit Jupiter (Dez. 1973) bekam die Rakete so viel Zusatzenergie, dass sie das Sonnensystem verlassen kann. Wie ist das möglich? Müsstest du nicht auch auf der Kepler-Hyperbel um Jupiter End- und Anfangsgeschwindigkeit gleich sein? Kann man den Vorgang als elastischen Stoß behandeln? Unter welchem Winkel muss die Rakete die Jupiterbahn anfliegen, damit sie mit einer möglichst kleinen Anfangsgeschwindigkeit auskommt? Wie genau muss sie gezielt sein? Genügt es, die Rakete auf eine Hohmann-Ellipse (Aufgabe 1.7.25) zu bringen? Ginge es bei Mars oder Saturn auch mit einer solchen Ellipse? In welcher Richtung muss man von der Erde abschießen? Wie muss Jupiter um diese Zeit am Himmel stehen?

●● 1.8.15 M. Cinglés Paradoxon

Monsieur Cinglé schießt aus dem TGV Paris–Lyon, der mit 360 km/h fährt, in Fahrtrichtung aus einer Luftpistole, deren Mündungsgeschwindigkeit 100 m/s beträgt, und trifft ein Kaninchen. Cinglé: „Pauvre petit lapin! Üblicherweise macht ihm das ja kaum was aus, aber hier hat das Geschoss die doppelte Geschwindigkeit, also die vierfache Energie wie gewöhnlich!“ Monsieur Malin, der im gleichen Abteil sitzt, protestiert: „Irgendwas stimmt da nicht. Bezeichnen wir mal $\frac{1}{2}mv^2$ als eine Energieeinheit, mit $v = 100$ m/s. Ich konzidiere: Schon im Lauf hatte Ihr Geschoss eine solche Einheit. Wenn Sie im Wald stehen und schießen, teilt das Pulver dem Geschoss offenbar ebenfalls eine solche Einheit mit. Warum sollte das anders sein, wenn Sie hier im Zug stehen? Das gibt zwei Energieeinheiten. Und Sie sagen, es sind vier. Wo sollen denn die anderen beiden herkommen?“ Na, wer hat recht?

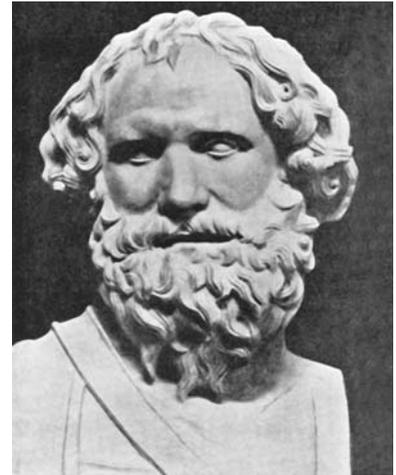
Mechanik des starren Körpers

■ Inhalt

2.1	Translation und Rotation	72
2.2	Dynamik des starren Körpers	74
2.3	Gleichgewicht und Bewegung eines starren Körpers	80
2.4	Der Kreisel	88

▼ Einleitung

Bisher durften die Dinge sich nur verhalten wie Massenpunkte, d. h. sich nur fortschreitend, translatorisch bewegen, gleichförmig oder beschleunigt. Jetzt erhalten sie eine Ausdehnung und können sich daher auch drehen. Zum Glück täuscht die Befürchtung, man müsse dafür eine ganz neue Mechanik lernen. Es genügt, sich ein einziges Wort dieser neuen Sprache klarzumachen; daraus kann man dann das ganze Wörterbuch herleiten, und die Grammatik ist auch dieselbe wie für den Massenpunkt – oder fast. Manche bilden sich ein, sie könnten Russisch, wenn sie einigermaßen „sdrastwuitje“ sagen können. Hier ist dieser Wunschtraum Wirklichkeit.



„Ungleiche Gewichte stehen im Gleichgewicht in Abständen, die sich umgekehrt verhalten wie die Gewichte.“

Archimedes, um 250 v. Chr.

Unentbehrlich für das Verständnis dieses Kapitels ist Sicherheit im Umgang mit dem **Vektorprodukt**. Wir rekapitulieren seine wichtigsten Eigenschaften:

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ist ein Vektor, der senkrecht auf \mathbf{a} und auf \mathbf{b} steht, und zwar so, dass \mathbf{a} , \mathbf{b} und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in dieser Reihenfolge wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand zeigen. Daher ist $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Der Betrag von $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ist $ab \sin(\alpha, \mathbf{b})$, die Fläche des Parallelogramms aus \mathbf{a} und \mathbf{b} . Bei $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ist $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. In Komponentenschreibweise lässt sich $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ am einfachsten als Determinante darstellen:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Dabei sind \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} die Basisvektoren, d. h. Vektoren der Länge 1 in x -, y - und z -Richtung.

Gelegentlich brauchen wir das **Spatprodukt** $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$. Es ist eine Zahl, die das Volumen des von \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} aufgespannten Parallelepipeds angibt: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|c \cos \alpha = \text{Grundfläche } |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \text{ mal Höhe } c \cos \alpha$. Falls man die Reihenfolge der Vektoren nur zyklisch vertauscht, kann man die Produktzeichen an Ort und Stelle lassen, das Spatprodukt, also das Volumen, ändert sich dabei nicht:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (2.0)$$

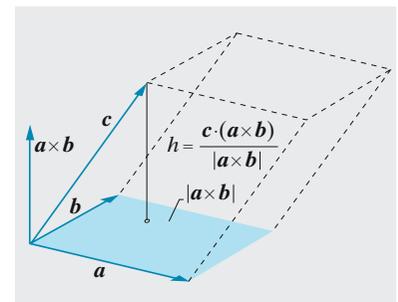


Abb. 2.1. Das Vektorprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ hat als Betrag die Fläche des Parallelogramms aus \mathbf{a} und \mathbf{b} , das Spatprodukt $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ ist gleich der Fläche mal der Höhe, also dem Volumen des Parallelepipeds aus \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c}

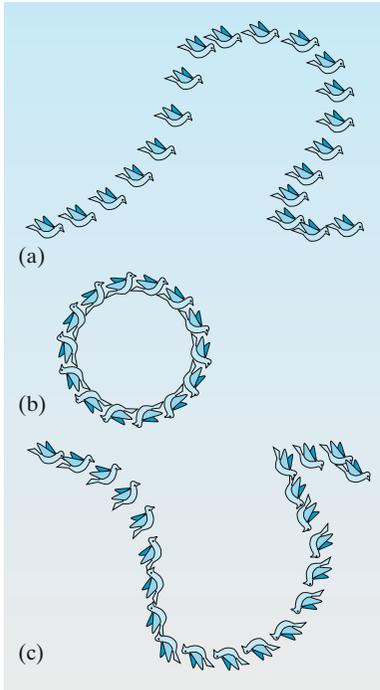


Abb. 2.2. (a) Translation: Die Richtung der Körperachsen bleibt trotz Kurvenbahn erhalten, (b) Reine Rotation, (c) Translation mit Rotation: Körperachsen ändern ihre Richtung

Andernfalls ändert sich das Vorzeichen:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} . \quad (2.0')$$

2.1 Translation und Rotation

Wir müssen uns zuerst einigen, wie wir den Ablauf einer Bewegung beschreiben, ohne uns zunächst um ihre Ursache zu kümmern.

2.1.1 Bewegungsmöglichkeiten eines starren Körpers

Wenn man von der Ausdehnung eines Körpers absehen kann, d. h. ihn als Massenpunkt betrachtet, wie wir das bisher getan haben, lässt sich seine Lage durch einen einzigen Ortsvektor \mathbf{r} darstellen, seine Bewegung durch die Zeitabhängigkeit $\mathbf{r}(t)$ dieses Ortsvektors. Für einen ausgedehnten Körper braucht man eigentlich unendlich viele Ortsvektoren, einen für jeden seiner Punkte. Zum Glück können sich diese Vektoren nicht alle unabhängig voneinander ändern, selbst dann nicht, wenn der Körper deformierbar ist. Wenn er das nicht ist, sondern *starr*, kann man jede seiner Bewegungen in eine **Translation** und eine **Rotation** zerlegen.

Eine Translation ist eine Bewegung, bei der alle Punkte des Körpers kongruente Bahnen beschreiben. Diese Bahnen dürfen durchaus gekrümmt sein. Bei einer *Rotation* beschreiben alle Punkte konzentrische Kreise um eine bestimmte Gerade, die **Drehachse**.

Die Gesetze der Translation unterscheiden sich nicht von denen, die wir vom Massenpunkt her kennen. Aus der Grundgleichung $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ und dem Reaktionsprinzip folgen der Impulssatz und alles übrige. Für die Rotation müssen wir einen neuen Satz von Begriffen entwickeln.

Ein System aus N Massenpunkten, die nicht miteinander gekoppelt sind, hat $3N$ **Freiheitsgrade**, d. h. seine Lage lässt sich durch $3N$ Zahlen angeben (drei Koordinaten für jeden Massenpunkt). Wenn man die Massenpunkte starr durch Stangen der Länge $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ zwischen jedem Paar i, j von Massenpunkten verbindet, werden die Bewegungsmöglichkeiten durch die Gleichungen $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \text{const}$ eingeschränkt. Es gibt $\binom{N}{2} = N(N-1)/2$ solche Gleichungen, aber sie sind nicht alle unabhängig. Um die Struktur des Systems festzulegen, genügt es ja, erstens die Lage von drei beliebigen Massenpunkten, die nicht in einer Geraden liegen, durch die drei Abstände zwischen ihnen anzugeben, zweitens die Abstände aller übrigen $N-3$ Punkte von diesen dreien anzugeben, d. h. $(N-3) \cdot 3$ Abstände. Nach dem Prinzip des dreibeinigen Tisches oder Statives ist dann alles festgelegt. Das gibt im Ganzen $(N-2) \cdot 3$ Bedingungen. Von den $3N$ Freiheitsgraden der freien Massenpunkte bleiben also immer 6 übrig, unabhängig von N . Man kann sie deuten als die drei Koordinaten eines beliebigen Punktes des starren Körpers, dazu Drehungsmöglichkeiten um die drei zueinander senkrechten Achsen, entsprechend der Unterscheidung zwischen Translation und Rotation.

2.1.2 Infinitesimale Drehungen

Ein starrer Körper drehe sich um einen sehr kleinen Winkel $d\varphi$ um eine gegebene Achse. Wir können beides – die Richtung der Achse und den Betrag der Drehung – durch einen *Vektor* $d\varphi$ kennzeichnen, der in Achsrichtung zeigt und den Betrag $d\varphi$ hat. Sein Richtungssinn sei wie der Daumen der rechten Hand, wenn deren gekrümmte Finger den Drehsinn andeuten. Mittels $d\varphi$ können wir sofort angeben, wie sich jeder Punkt des Körpers bei dieser Drehung verschiebt. Ein Punkt, dessen Lage durch den Ortsvektor \mathbf{r} mit dem Ursprung irgendwo auf der Drehachse gegeben ist, verschiebt sich nach Abb. 2.3 und 2.4 um

$$\boxed{d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r}} . \quad (2.1)$$

Diese Verschiebung ist ja senkrecht zur Achse $d\varphi$ und zu \mathbf{r} , ihr Betrag ist $r \sin \alpha d\varphi$. Alles das drückt das Vektorprodukt richtig aus.

Führt man zwei infinitesimale Drehungen um zwei verschiedene Achsen aus, die sich im Ursprung schneiden, ist die Verschiebung, die sie zusammen herbeiführen

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = (d\varphi_1 + d\varphi_2) \times \mathbf{r} .$$

Nur *sehr kleine* Drehungen addieren sich so einfach. Größere Drehungen tun das nicht, außer wenn beide Drehachsen parallel sind. Ihr Ergebnis hängt von der Reihenfolge der Drehungen ab, diese sind nichtkommutativ. Das liegt natürlich daran, dass wir von körpereigenen Drehachsen reden. Die erste Drehung ändert selbst die Lage der zweiten Drehachse.

2.1.3 Die Winkelgeschwindigkeit

Division von (2.1) durch die Zeit dt , die man für die Drehung benötigt, liefert die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte des Körpers:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{d\varphi}{dt} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} . \quad (2.2)$$

Die **Winkelgeschwindigkeit** $\boldsymbol{\omega}$ hat die Richtung der Drehachse, ebenso wie $d\varphi$, und den Betrag ω , den wir schon aus der Punktmechanik kennen. Man beachte aber, dass die Drehachse ihre Lage zeitlich ändern kann. Es ist nur eine momentane Drehachse. Wenn der Ursprung sich selbst noch mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 bewegt (Translation), hat der Punkt \mathbf{r} des Körpers die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (2.3)$$

Unsere Beschreibung der Rotation ist bisher völlig analog zu der der Translation. Wir wollen sehen, ob diese Analogie auch für die Dynamik tragfähig bleibt.

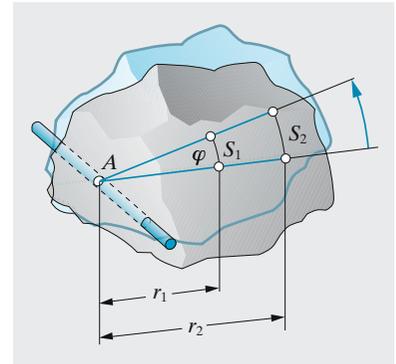


Abb. 2.3. Bei einer Drehung um den Winkel φ verschiebt sich jeder Punkt auf einem Kreisbogen der Länge $s = r\varphi$ (r : senkrechter Abstand von der Achse). Bei kleiner Drehung ist die Verschiebung $d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r}$

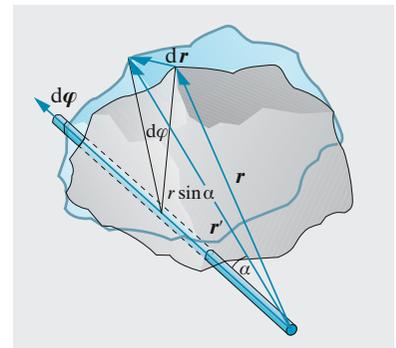


Abb. 2.4. Ein Punkt mit dem Ortsvektor \mathbf{r} , der unter dem Winkel α zur Drehachse steht, verschiebt sich um $d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r}$

Lage	Translation Ortsvektor \mathbf{r}	Rotation Drehachse + Drehwinkel φ
Geschwindigkeit	$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$	$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$	$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\varphi}$

2.2 Dynamik des starren Körpers

Jetzt geht es um die Ursachen von Bewegungen, besser von Änderungen des Bewegungszustandes. Dahinter stecken natürlich Kräfte. Wenn Rotation im Spiel ist, kommt es aber nicht auf Größe und Richtung der Kräfte allein an, sondern auch darauf, wo sie angreifen. Man kann sie jetzt nicht mehr parallel verschieben, ohne ihre Wirkung zu ändern.

2.2.1 Rotationsenergie

Wir betrachten einen starren Körper, der nur um eine Achse rotiert (keine Translation ausführt), und kennzeichnen seine einzelnen Punkte durch ihren senkrechten Abstand r'_i von der Achse, nicht mehr durch den vollständigen Ortsvektor r_i . Es gilt $r'_i = r_i \sin \alpha$ (α : Winkel zwischen r_i und der Achse). Dann hat der bei r'_i befindliche Massenteil dm_i die Geschwindigkeit $v_i = \omega r'_i$ und die kinetische Energie $\frac{1}{2} dm_i v_i^2$. Die Gesamtenergie des Körpers ist

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum dm_i v_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum dm_i r_i'^2. \quad (2.4)$$

Bei einem kontinuierlichen Körper ersetze man m_i durch ρdV und die Summe durch ein Integral über das ganze Volumen:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 \int \rho r'^2 dV. \quad (2.4')$$

Wir lassen ρ unter dem Integral, weil die Dichte von Ort zu Ort verschieden sein kann. Wenn das ω bei der Rotation das v der Translation ersetzt, scheint statt der Masse m hier der Ausdruck $\sum m_i r_i'^2$ zu stehen. Diese Analogie wird sich auch weiterhin bestätigen.

2.2.2 Das Trägheitsmoment

Zunächst untersuchen wir den in (2.4') auftretenden Ausdruck

$$J = \sum dm_i r_i'^2 = \int r'^2 \rho dV, \quad (2.5)$$

das **Trägheitsmoment** des Körpers. Er besagt, dass sich die einzelnen Massenteile in der Rotation um so mehr auswirken, je weiter sie von der Achse entfernt sind. Dementsprechend ist J verschieden groß, je nachdem, wie man die Drehachse durch den Körper legt. Wir bestimmen das Trägheitsmoment einiger einfacher Körper durch Integration, die Sie bitte selbst ausführen wollen:

- Kreisscheibe oder Zylinder, Achse = Symmetrieachse:

$$J = \frac{1}{2} MR^2. \quad (2.6)$$

- Kugel, Achse durchs Zentrum:

$$J = \frac{2}{5} MR^2. \quad (2.7)$$

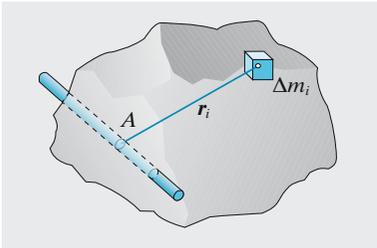


Abb. 2.5. Das Trägheitsmoment um eine Achse A setzt sich aus den Beiträgen $r^2 \Delta m$ der einzelnen Massenelemente zusammen

In beiden Fällen ist M die Gesamtmasse; R ist der Radius von Scheibe oder Kugel.

- Stab, Achse senkrecht zum Stab durch sein Ende:

$$J = \frac{1}{3}ML^2. \tag{2.8}$$

- Stab, Achse senkrecht zum Stab durch seine Mitte:

$$J = \frac{1}{12}ML^2. \tag{2.9}$$

M ist hier die Masse, L die Länge des Stabes.

Wenn man das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Achse A' kennt, liefert der **steinersche Satz** das Trägheitsmoment in Bezug auf eine andere dazu parallele Achse A :

$$J_A = J_{A'} + Ma^2. \tag{2.10}$$

a ist der Abstand der beiden Achsen. Das Trägheitsmoment um A ist gleich dem um A' , vermehrt um das Trägheitsmoment, das die ganze in A' vereinigte Masse haben würde. Der Beweis ist aus Abb. 2.6 abzulesen:

$$\begin{aligned} J_A &= \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (r_i'^2 + a^2 + 2a \cdot r_i') \\ &= \sum m_i r_i'^2 + a^2 \sum m_i + 2a \cdot \sum m_i r_i'. \end{aligned}$$

Da A' durch den Schwerpunkt geht, verschwindet die letzte Summe (vgl. (2.23)). So ergibt sich z. B. das Trägheitsmoment um das Stabende aus dem um die um $L/2$ entfernte Stabmitte entsprechend (2.8).

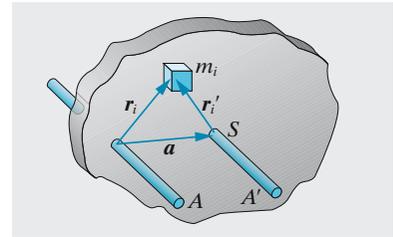


Abb. 2.6. Rückt man die Drehachse um a parallel aus dem Schwerpunkt weg, erhöht sich das Trägheitsmoment um Ma^2

× Beispiel...

Warum hat ein Hubschrauber hinten einen kleinen Propeller mit waagerechter Achse? Warum geht ein Auto beim scharfen Bremsen vorn „in die Knie“?

Der Motor übt gleich große, entgegengesetzte Drehmomente auf Luftschraube und Hubschrauberkörper aus. Ohne die mit großem „Kraftarm“ versehene direkte Gegenkraft des kleinen Propellers am Schwanz würde der Hubschrauber bald in heftige Rotation kommen. Die Bremsen üben ein kräftiges Drehmoment nach hinten auf die Räder aus. Das Gegenmoment dreht die Karosserie nach vorn. Entsprechend kippt das Gegenmoment zum Anfahrmoment, das der Motor auf die Räder ausübt, die Karosserie nach hinten: der Wagen „bäumt sich auf“.

2.2.3 Das Drehmoment

Wir betrachten einen rotierenden Körper und ändern seine Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$ um einen Betrag dE . Dazu ist offenbar mindestens *eine* Kraft F nötig, die an einem Punkt r außerhalb der Achse angreift und ihren Angriffspunkt um dr verschiebt. Der Energiesatz liefert dann nämlich

$$dE = F \cdot dr.$$

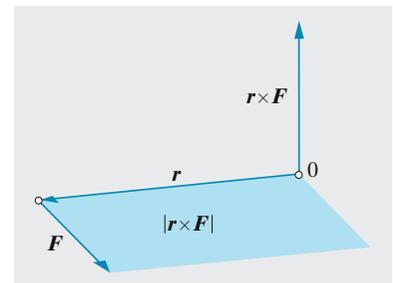


Abb. 2.7. Vektordarstellung des Drehmomentes

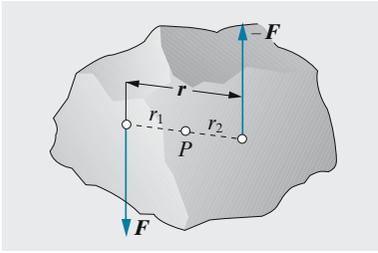


Abb. 2.8. Kräftepaar mit dem Drehmoment $T = r \times F$

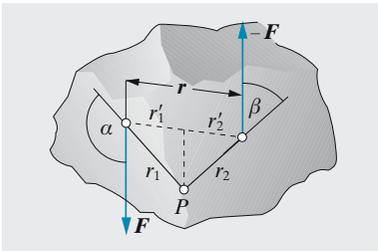


Abb. 2.9. Das vom Kräftepaar bewirkte Drehmoment ist unabhängig von der Lage des Punktes P , auf welchen die Drehmomente bezogen werden

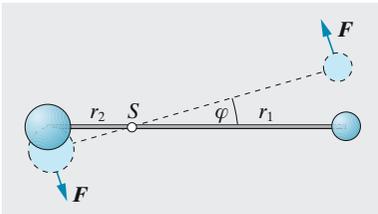


Abb. 2.10. Die Bewegung eines freien Körpers unter der Wirkung eines Kräftepaars ist eine beschleunigte Rotation um den Schwerpunkt

Wir können $d\mathbf{r}$ nach (2.1) durch eine kleine Drehung $d\boldsymbol{\varphi}$ ausdrücken:

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} .$$

Damit wird die Energieänderung

$$dE = \mathbf{F} \cdot (d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot d\boldsymbol{\varphi}$$

(vgl. (2.0)). Division durch die dazu benötigte Zeit dt ergibt die **Beschleunigungsleistung**:

$$P = \frac{dE}{dt} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\omega} . \tag{2.11}$$

Vergleich mit der Translationsleistung $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ lässt vermuten, dass für die Rotation nicht die Kraft \mathbf{F} als solche, sondern das **Drehmoment**

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{2.12}$$

maßgebend ist.

Das entspricht der Erfahrung: Um mit gegebener Kraft einen Körper möglichst effektiv in Drehung zu versetzen, ziehe man möglichst weit außen und natürlich tangential zur beabsichtigten Drehung.

Speziell betrachten wir zwei gleich große entgegengesetzte Kräfte \mathbf{F}_1 und $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ mit einem Abstand \mathbf{r} zwischen ihren Angriffspunkten. Ein solches **Kräftepaar** beschleunigt die Drehung um eine zur Ebene von \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 senkrechte Achse. Sie durchstoße die Ebene $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ im Punkt P . Das Drehmoment, das die beiden Kräfte erzeugen, hängt nicht von der Lage der Drehachse ab. Mit dem Punkt P als Ursprung ist das Drehmoment

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 .$$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ist der Abstand der Angriffspunkte. Die Lage von P ist herausgefallen.

2.2.4 Der Drehimpuls

Ein Massenpunkt, der am Ort \mathbf{r} mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} fliegt, hat nach Abschn. 1.5.8 den **Drehimpuls** $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Für ein System aus vielen Massenpunkten oder einen starren Körper verallgemeinert sich das zu

$$\mathbf{L} = \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i . \tag{2.13}$$

Nach (2.2) können wir das durch die Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers ausdrücken:

$$\mathbf{L} = \sum m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) . \tag{2.14}$$

Wir zerlegen den Ortsvektor \mathbf{r}_i in einen Vektor \mathbf{r}'_i senkrecht zur $\boldsymbol{\omega}$ -Achse und einen Vektor \mathbf{r}''_i parallel dazu. Dann zerfällt $\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$ nach Abb. 2.12 in die Vektoren $\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}''_i$ parallel zur Achse und $\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{r}'_i$ senkrecht dazu. Nun

nehmen wir an, der Körper habe eine Symmetrieachse und drehe sich auch um diese. Dann gibt es zu jedem Massenteil mit einem gewissen r'_i genau gegenüber auch eins mit $-r'_i$ und dem gleichen r''_i . Die Summe über $mr''_i r'_i$ verschwindet also. Es bleibt im Fall der Rotation um die Symmetrieachse

$$L = \omega \sum m_i r_i'^2 = J \omega . \tag{2.15}$$

2.2.5 Das Trägheitsmoment als Tensor

Die Parallelität zwischen Drehimpuls L und Winkelgeschwindigkeit ω gilt bei weitem nicht immer. Im allgemeinen Fall ist das Trägheitsmoment als **Tensor** aufzufassen. Ein Tensor (zweiten Grades) ist eine lineare Funktion zwischen Vektoren, die jedem Vektor einen anderen zuordnet. Man drückt das durch eine Multiplikation aus: Der Vektor a wird durch den Tensor J in den Vektor $b = J a$ übergeführt. In Komponentenschreibweise hat der Tensor J neun Komponenten $J_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), die mit den Vektorkomponenten nach den Regeln der Matrixmultiplikation verknüpft werden; im Fall des Drehimpulses

$$L_\alpha = \sum_\beta J_{\alpha\beta} \omega_\beta . \tag{2.16}$$

Wenn man die Ortskoordinaten sinngemäß durchnummeriert ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$), hat der Tensor des Trägheitsmoments die Komponenten

$$J_{\alpha\beta} = \sum_i \left[m(r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta) \right]_i \text{ mit } r^2 = \sum_\alpha x_\alpha^2 . \tag{2.17}$$

Das häufig verwendete Kroneckersymbol $\delta_{\alpha\beta}$ ist definiert durch

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{falls } \alpha = \beta \end{cases}$$

und erleichtert eine kompakte Schreibweise.

Nur gewisse Vektoren werden durch die Operation (2.16) in dazu parallele Vektoren verwandelt. Man nennt solche Vektoren **Eigenvektoren** der **Matrix** $J_{\alpha\beta}$. Sie spielen in der Quantenmechanik eine zentrale Rolle. Für einen symmetrischen Tensor, wie das Trägheitsmoment, gibt es drei zueinander senkrechte Richtungen, in denen Eigenvektoren liegen. Sie heißen **Hauptträgheitsachsen**. Nur um sie ist freie Rotation möglich (Abschn. 2.3.5). Eine Symmetrieachse ist immer Hauptträgheitsachse.

2.2.6 Der Drehimpulsatz

Wir untersuchen, wie und wann sich der Drehimpuls ändert, und bilden dazu die zeitliche Ableitung von (2.13):

$$\dot{L} = \sum m_i \dot{r}_i \times v_i + \sum m_i r_i \times \dot{v}_i . \tag{2.18}$$

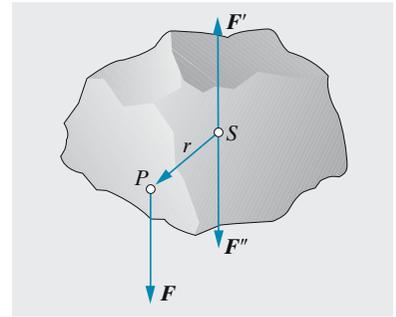


Abb. 2.11. Die in P angreifende Kraft F ist ersetzbar durch die gleiche Kraft F'' im Schwerpunkt und ein Kräftepaar $r \times F$

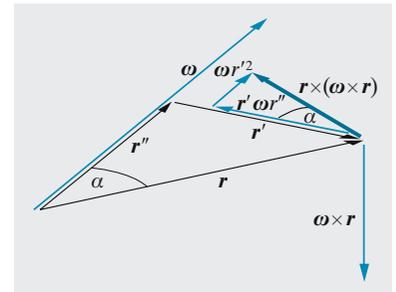


Abb. 2.12. Aufspaltung des Vektors $r \times \omega \times r$ in einen Anteil parallel und einen senkrecht zu ω

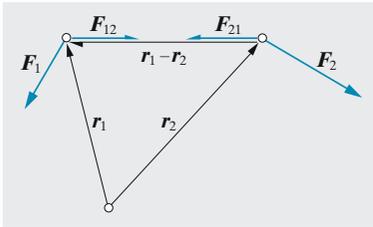


Abb. 2.13. Innere Kräfte geben keinen Beitrag zur Änderung des gesamten Drehimpulses eines Systems von Massenpunkten

Das erste Glied fällt weg, weil das Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren ($\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i$) verschwindet. Das zweite Glied, auch zu schreiben $\sum \mathbf{r}_i \times (m_i \dot{\mathbf{v}}_i)$, kann nur dann verschieden von 0 sein, wenn Kräfte $\mathbf{F}_i = m_i \dot{\mathbf{v}}_i$ auf die Massenteile wirken. Wir unterscheiden innere und äußere Kräfte. Innere Kräfte wirken zwischen den einzelnen Massenteilen. Wenn m_i auf m_k die Kraft \mathbf{F}_{ik} ausübt, muss nach dem Reaktionsprinzip m_k auf m_i mit $\mathbf{F}_{ki} = -\mathbf{F}_{ik}$ wirken. Insgesamt wird m_i beschleunigt durch die Summe aller Kräfte

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_k \mathbf{F}_{ki}$$

(hier nur die inneren Kräfte), und die Drehimpulsänderung wird

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i,k} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki} .$$

In der Summe tritt zu jedem Glied $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki}$, das auf m_i wirkt, ein Glied $\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ki}$ auf, das auf m_k wirkt. Die Summe $\dot{\mathbf{L}}$ besteht also aus lauter Gliedern der Form $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{ki}$. Da Kräfte zwischen Massenteilen nur die Richtung ihrer Verbindungslinie $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ haben können, verschwinden alle diese Vektorprodukte:

Innere Kräfte können den Drehimpuls nicht ändern. Wenn keine äußeren Kräfte wirken, bleibt er zeitlich konstant, und zwar betragsmäßig und richtungsmäßig.

Ein Diskus, dem beim Abwurf ein kräftiger Drehimpuls erteilt wird, behält seine Einstellung im Raum bei. Die dadurch bewirkte Tragflächenwirkung vergrößert die Wurfweite. Ein Eisläufer, Tänzer, Turner oder Turnspringer kann durch Anziehen der Arme und Beine oder Zusammenrollen des Körpers sein Trägheitsmoment verkleinern und damit bei konstantem Drehimpuls $L = J\omega$ seine Drehgeschwindigkeit erheblich vergrößern (Pirouette, Salto usw.). Eine Katze, die vom Baum oder vom Dach fällt, erhält bei diesem Kippvorgang immer einen gewissen Drehimpuls, den sie durch geschickte Körperkrümmungen so ausnutzt, dass sie auf die Füße fällt. Dies schafft sie aber auch, wenn man ihr jeden Drehimpuls vorenthält, indem man ihr die Unterstütsungsfläche plötzlich genau nach unten wegzieht. Die Katze macht dann besonders mit dem Schwanz Drehbewegungen, die durch eine entsprechende Drehung des Körpers um seine Längsachse kompensiert werden, bis die Füße unten sind. Ein Mensch auf einem Drehschemel kann sich ebenfalls selbst in Drehung versetzen, indem er z. B. ein Rad an der Achse parallel zur Drehschemelachse hält und in Rotationen versetzt. Der Gesamtdrehimpuls muss Null bleiben, die Person dreht sich also in entgegengesetzter Richtung. Stoppt sie die Rotation des Rades, wird auch die eigene Drehung wieder beendet. Dabei hat er ausgenutzt, dass die Drehachse des Schemels wegen der Zwangskräfte des Bodens nicht ausweichen kann, wenn er die Drehachse des Hammers ändert.

x Beispiel...

Wie stellt man am schnellsten zerstörungsfrei fest, ob ein Ei roh oder gekocht ist?

Man erteilt dem Ei eine kurze Drehung auf der Tischplatte. Das gekochte Ei rotiert als starrer Körper, im rohen wird das Innere nicht so schnell mitbeschleunigt und bremst durch innere Reibung die Rotation viel schneller ab.

Übergibt man einem Menschen, der ruhig auf dem Drehschemel sitzt, ein schnell rotierendes Rad mit der Achsrichtung senkrecht zur Drehschemelachse (Abb. 2.14), bleibt der Schemel bei diesem Vorgang in Ruhe. Wenn der Mensch die Radachse aufrichtet, parallel zur Schemelachse stellt, drehen sich Schemel und Mensch umgekehrt zur Raddrehung. Stellt

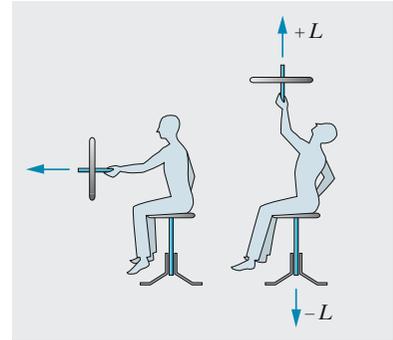


Abb. 2.14. Zum Nachweis des vektoriellen Charakters des Drehimpulses

Tabelle 2.1. Physikalische Größen von Rotation und Translation

Drehbewegung (Rotation)	Fortschreitende Bewegung (Translation)
Drehwinkel φ	Ortsvektor \mathbf{r}
Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ Betrag: $\omega = \dot{\varphi}$ Richtung: Drehachse Sinn: rechter Daumen	Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$
Beispiel: Gleichförmige Rotation $\omega = \text{const}, \varphi = \omega t$	Beispiel: Geradl.-gleichf. Bewegung $v = \text{const}, x = vt$
Drehbeschleunigung $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ Beispiel: $\dot{\boldsymbol{\omega}} \parallel \boldsymbol{\omega} \rightarrow \omega$ wächst $\dot{\boldsymbol{\omega}} \perp \boldsymbol{\omega} \rightarrow \boldsymbol{\omega}$ dreht sich	Beschleunigung $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ Beispiel: $\dot{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{v} \rightarrow v$ wächst $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}$ dreht sich
Rotationsenergie $E = \frac{1}{2} \int v^2 dm$ $v = \omega r \rightarrow E = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 J$	Translationsenergie $E = \frac{1}{2} mv^2$
Trägheitsmoment $J = \int r^2 dm$ Scheibe: $J = \frac{1}{2} mr^2$ Stab um Mitte: $J = \frac{1}{12} mL^2$ Stab um Ende: $J = \frac{1}{3} mL^2$ Kugel: $J = \frac{2}{5} m R^2$	Masse m
Beschleunigungsleistung $P = dE/dt = F dx/dt = Fr\omega = T\omega$ $P = d(\frac{1}{2} J\omega^2)/dt = J\omega\dot{\omega}$	$P = dE/dt = F dx/dt = Fv$ $P = d(\frac{1}{2} mv^2)/dt = m\dot{v}v$
Drehmoment \mathbf{T} Drehimpuls $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$ Bewegungsgleichung $\mathbf{T} = \dot{\mathbf{L}} = J\dot{\boldsymbol{\omega}}$	Kraft \mathbf{F} Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}}$
Erhaltungssatz: Im abgeschlossenen System bleibt der Drehimpuls \mathbf{L}	Impuls \mathbf{p} erhalten.

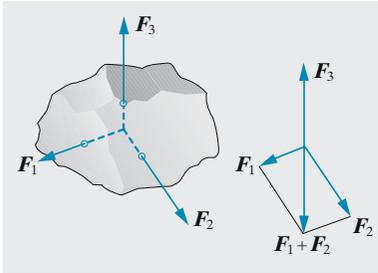


Abb. 2.15. Gleichgewichtsbedingung für den starren Körper, an dem drei in einer Ebene wirkende Kräfte angreifen

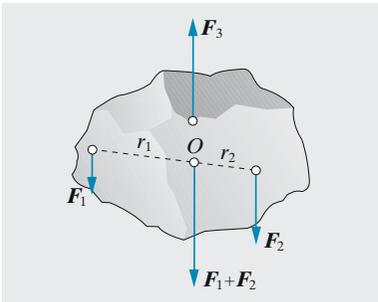


Abb. 2.16. Gleichgewichtsbedingung für die Wirkung von drei parallelen Kräften. Der Angriffspunkt von F_3 kann wegen der Linienflüchtigkeit ohne Störung des Gleichgewichts in den Punkt O verlegt werden

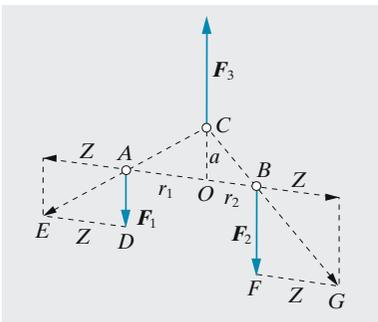


Abb. 2.17. Konstruktion zur Auffindung des Kräftegleichgewichtspunktes

der Mensch dann das Rad auf den Kopf (Achsschwenkung um 180°), dreht er selbst sich anders herum. Dieser Versuch demonstriert besonders schön den Vektorcharakter des Drehimpulses: Erst das Aufrichten des Rades erzeugt eine Drehimpulskomponente in Richtung der Schemelachse. Das Gesamtsystem hatte vorher keinen Drehimpuls und darf auch nachher keinen haben. Daher erhalten Mensch und Schemel einen Drehimpuls von gleichem Betrag und entgegengesetzter Richtung wie das Rad.

Die meisten Elementarteilchen und Atomkerne haben einen Drehimpuls oder **Spin**. Dieser bleibt zeitlich konstant, da an den Teilchen kein Drehmoment in Richtung des Spins angreifen kann. Der Spin ist daher neben Ladung und Masse ein wesentliches Kennzeichen der Teilchen. Für die klassische Physik unverständlich ist jedoch, warum der Spin nur ganz bestimmte diskrete Werte haben kann.

2.2.7 Die Bewegungsgleichung des starren Körpers

Nur *äußere* Kräfte F_i auf die Massenteile des Körpers können dessen Drehimpuls ändern. Nach (2.18) tun sie das gemäß

$$\dot{L} = \sum r_i \times F_i \quad (2.19)$$

Rechts steht das gesamte Drehmoment der äußeren Kräfte:

Bewegungsgleichung der Rotation

$$\dot{L} = T \quad (2.20)$$

Das Drehmoment ist die zeitliche Änderung des Drehimpulses, genau wie die Kraft die zeitliche Änderung des Impulses ist. $\dot{L} = T$ ist die Bewegungsgleichung der Rotation, ebenso wie $\dot{p} = F$ die der Translation.

Wir haben damit unser Wörterbuch zur Übersetzung der Gesetze der Translation in die der Rotation vervollständigt (Tabelle 2.1, S. 79).

2.3 Gleichgewicht und Bewegung eines starren Körpers

Wir wenden jetzt unsere Bewegungsgleichung $\dot{L} = T$ auf verschiedene praktisch wichtige Fälle an. Formal handelt es sich dabei tatsächlich nur um Übersetzungen aus der Sprache der Translation in die der Rotation – bis auf einige Feinheiten.

2.3.1 Gleichgewichtsbedingungen

Ein starrer Körper ist im Gleichgewicht, d. h. er erfährt weder Translations- noch Rotationsbeschleunigungen, wenn Kraft und Drehmoment ver-

schwinden:

$$\boxed{F = 0, \quad T = 0} \quad (2.21)$$

Dann kann er speziell auch in Ruhe sein und bleiben. Es dürfen Kräfte wirken, aber sie müssen sich alle zu Null addieren, außerdem müssen ihre Angriffspunkte so verteilt sein, dass auch das Drehmoment verschwindet.

Die Abb. 2.15–2.17 zeigen an Beispielen, wie diese Bedingungen sich auswirken. Es folgt speziell das **Hebelgesetz (Archimedes, um 250 v. Chr.)**: Zwei Kräfte, die an den Enden eines Hebels parallel zueinander angreifen, müssen sich umgekehrt verhalten wie die Abstände der Enden vom Drehpunkt, damit der Hebel im Gleichgewicht ist. Bei schrägen Krafrichtungen zählen entsprechend der Definition des Drehmoments nur die Kraftkomponenten senkrecht zum Hebel. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Drehachse die evtl. verbleibenden Komponenten parallel zum Hebel durch eine Reaktionskraft aufnehmen kann.

Wie muss man einen Körper unterstützen, der der Schwerkraft unterliegt, d. h. in dem auf jedes Massenteil m_i eine Kraft $F_i = m_i g$ wirkt? Die Summe der Kräfte $F_g = \sum m_i g = mg$, das Gesamtgewicht, muss durch eine äußere Haltekraft $-F_g$ kompensiert werden. Andererseits ist das Gesamtmoment der Schwerkraft

$$T_g = \sum m_i r_i \times g = -g \times \sum r_i m_i \quad (2.22)$$

Dieses Moment hängt wieder von der Lage des Ursprungs der Ortsvektoren ab. Es ist 0, wenn der Ursprung so liegt, dass

$$\boxed{\sum m_i r_i = 0} \quad (2.23)$$

Dieser Ursprung heißt **Schwerpunkt**. Für einen Körper aus zwei Massen m_1 und m_2 teilt der Schwerpunkt deren Abstand im umgekehrten Verhältnis der beiden Massen (Abb. 2.20). Für viele Massen m_i auf einer Geraden, jeweils an der Stelle x_i , ist die Schwerpunktskoordinate

$$x_S = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}.$$

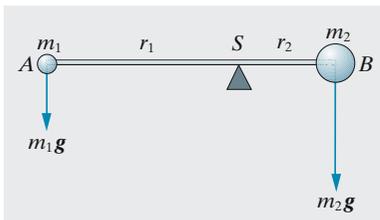


Abb. 2.20. Die Achse eines im Gleichgewicht befindlichen belasteten Hebels geht durch den Schwerpunkt

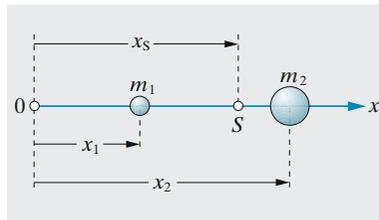


Abb. 2.21. Die Koordinate des Schwerpunktes aus den Koordinaten der Massen

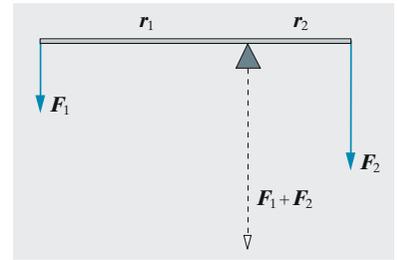


Abb. 2.18. Das Gleichgewicht am ungleicharmigen Hebel, an dem parallele Kräfte angreifen

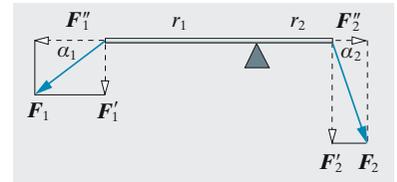


Abb. 2.19. Gleichheit der Drehmomente bei nicht parallelen Kräften (in Richtung der Hebelstange wirkt die Kraft $F'_1 - F'_2 = F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2$)

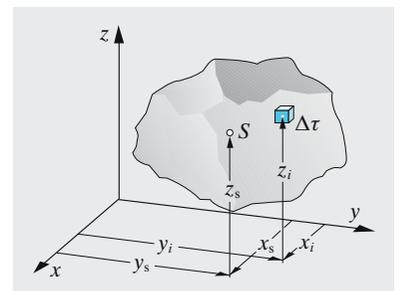


Abb. 2.22. Zur Definition des Schwerpunktes eines homogenen starren Körpers

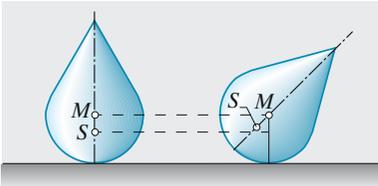


Abb. 2.23. Bei Unterstützung durch eine horizontale Ebene wirkt der Mittelpunkt des Krümmungskreises als Aufhängepunkt

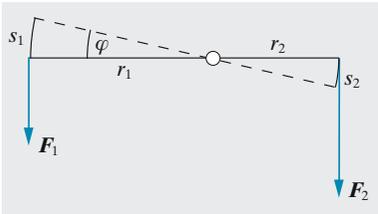


Abb. 2.24. Gleichgewicht herrscht am Hebel, wenn sich bei einer kleinen Drehung die Arbeiten auf beiden Seiten kompensieren (Minimum der Energie)

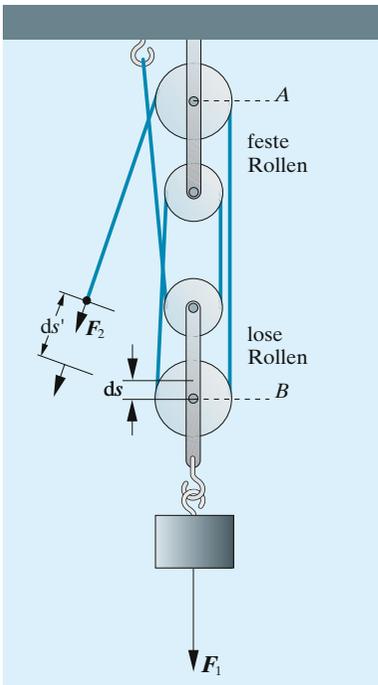


Abb. 2.25. Flaschenzug

Für die übrigen Koordinaten gilt im allgemeinen Fall Entsprechendes. Bei kontinuierlicher Massenverteilung liegt der Schwerpunkt bei

$$\mathbf{r}_s = \frac{\int \rho \mathbf{r} dV}{\int \rho dV} \quad (2.24)$$

Geht die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt S , dann ist der Körper, auf den nur die Schwerkraft wirkt, nur dann im Gleichgewicht, wenn S senkrecht unter der Achse liegt. Dann ist nach (2.22) das Drehmoment wieder 0. So kann man den Schwerpunkt eines beliebig komplizierten Körpers ermitteln: Man hängt ihn an zwei verschiedenen Punkten auf; die Verlängerungen der Aufhängefäden schneiden sich dann in S .

a) Arten des Gleichgewichts. Ein im Schwerpunkt S aufgehängter Körper ist in jeder Lage im Gleichgewicht (**indifferentes Gleichgewicht**). Liegt der Aufhängepunkt senkrecht über S , ist der Körper im **stabilen Gleichgewicht**; jedes kleine Herausdrehen aus dieser Lage erzeugt ein Drehmoment, das wieder zum Gleichgewicht hinführt. Liegt der Aufhängepunkt senkrecht *unter* S , herrscht **Labilität**; eine kleine Auslenkung löst ein Drehmoment aus, das weiter vom Gleichgewicht wegführt. Ruht ein Körper auf einer horizontalen Fläche, wirkt als Aufhängepunkt der Krümmungsmittelpunkt der Auflagefläche (Abb. 2.23); im dargestellten Fall ist das Gleichgewicht stabil (Stehaufmännchen).

Allgemein kann man das Gleichgewicht und seine Art kennzeichnen durch Angabe der potentiellen Energie U als Funktion aller Koordinaten x_i , einschließlich derer, die mögliche Drehungen oder auch Verschiebungen der Massenteile gegeneinander beschreiben. Gleichgewicht besteht in einer Lage x_i , für die die Ableitungen $\partial U/\partial x_i$ sämtlich verschwinden. Wenn dies nicht nur für *einen* Punkt im x_i -Raum zutrifft, sondern für ein zusammenhängendes Gebiet, ist das Gleichgewicht indifferent. Die zweiten Ableitungen entscheiden die Art des Gleichgewichts. Wenn z. B. in zwei Dimensionen $\partial^2 U/\partial x^2 > 0$ und $\partial^2 U/\partial y^2 > (\partial^2 U/(\partial x \partial y))^2$, ist U minimal und es herrscht Stabilität.

b) Einfache Maschinen. Die einfachen mechanischen Maschinen, wie **schiefe Ebene, Hebel, Rolle, Flaschenzug, Kurbel, Getriebe**, dienen zur Verrichtung von Arbeit. Meist ist Heraufsetzung der Kräfte erwünscht: Die geringe Kraft von Mensch oder Tier soll vergrößert werden. Nach dem Energiesatz verhalten sich die entsprechenden Verschiebungen im verlustfreien Fall genau umgekehrt wie die Kräfte, denn die aufgewandte Arbeit kann bestenfalls wiedergewonnen werden (**Goldene Regel der Mechanik**). So kann man das Hebelgesetz gewinnen (Abb. 2.24) oder die Kräfte am Flaschenzug (Abb. 2.25) aus n losen und n festen Rollen. Zieht man das Seilende um ds' , hebt sich die Last nur um $ds = ds'/2n$, denn ds' verteilt sich gleichmäßig auf $2n$ Seilabschnitte. Der Energiesatz verlangt $F_1 ds = F_2 ds'$, also muss man mit $F_2 = F_1/2n$ ziehen.

Durch ein **Zahnrad-** oder **Riemengetriebe** kann die Motorleistung P bestenfalls verlustfrei durch das ganze Getriebe übertragen werden. Nach (2.11) ist $P = T\omega$ (ω Kreisfrequenz der Welle, T Drehmoment).

Wenn ein Rad vom Radius r_1 in ein anderes mit r_2 eingreift, sind die Umfangsgeschwindigkeiten gleich: $v_1 = v_2$, also $\omega_1/\omega_2 = r_2/r_1$. Umgekehrt wie die ω verhalten sich die Drehmomente, denn $P = T\omega$ ist konstant. Dasselbe folgt aus der Gleichheit der Kräfte (actio = reactio), denn $F = T/r$. Anders bei zwei Rädern, die fest auf der gleichen Welle montiert sind. Sie haben $\omega_1 = \omega_2$, also $v_1/v_2 = r_1/r_2$, und $T_1 = T_2$, also $F_1/F_2 = r_2/r_1$.

In komplizierteren Fällen benutzt man den Energiesatz in Form des **Prinzips der virtuellen Verschiebungen**. Dabei geht man davon aus, dass eine Maschine unter normalen Betriebsbedingungen im Kräftegleichgewicht ist: Die Antriebskräfte werden durch die Lastkräfte plus den Reaktionskräften im Mechanismus selbst ausgeglichen. Sonst würden Energie verzehrende Beschleunigungen auftreten. Eine **virtuelle Verschiebung** ist eine Verschiebung, die mit den Führungsmechanismen vereinbar ist. Damit Gleichgewicht besteht, muss die Gesamtarbeit *aller* Kräfte bei einer solchen Verschiebung verschwinden. Das ist nichts weiter als der Energiesatz unter Einbeziehung der Zwangskräfte, die auf Achslager usw. wirken. Da diese Zwangskräfte aber normalerweise keine Verschiebung erzeugen, leisten sie auch keine Arbeit. Man kann das Prinzip der virtuellen Verschiebung auch aus der Gleichgewichtsbedingung $\partial U/\partial x_i$ herleiten:

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i$$

wäre ja die Arbeit bei den Verschiebungen δx_i .

Die **Kurbelwelle** (Abb. 2.26) hat zwei mögliche Verschiebungskoordinaten, die Lage des Kolbens und den Drehwinkel φ der Schwungscheibe. Ihre Änderungen sind aber nicht unabhängig. Wenn der Kolben sich um δx verschiebt, ändert sich der Abstand $x = \overline{KM}$ ebenfalls um δx . Nach dem Cosinussatz ist $l^2 = x^2 + r^2 + 2xr \cos \varphi$ (mit $l = \overline{KZ}$), d. h.

$$x = -r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

Differenzieren liefert

$$\delta x = r \sin \varphi \left(1 - r \cos \varphi / \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \right) \delta \varphi,$$

also

$$F_1 = F_2 \frac{\delta x}{r \delta \varphi} = F_2 \sin \varphi \left(1 - \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - (r/l)^2 \sin^2 \varphi}} \right).$$

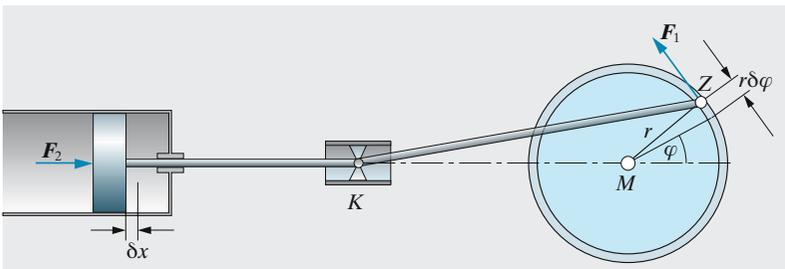


Abb. 2.26. Kurbelwelle einer Dampfmaschine

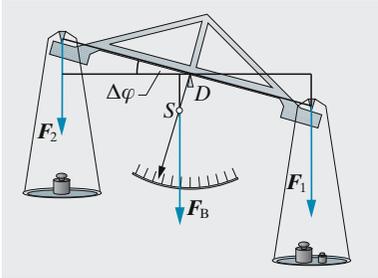


Abb. 2.27. Momentengleichgewicht am Waagbalken

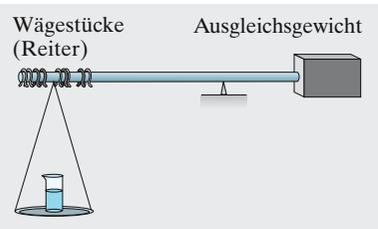


Abb. 2.28. Prinzip der Substitutionswaage

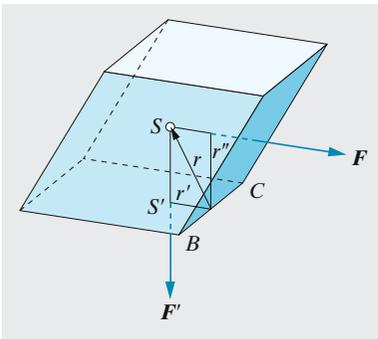


Abb. 2.29. Der Klotz kippt nicht, wenn sein Schwerpunkt noch über der Stützfläche liegt

Die komplizierten Reaktionskräfte in den Lagern K, Z, M braucht man nicht zu kennen, denn sie leisten keine Arbeit, weil dort keine Verschiebungen stattfinden. Für die maschinentechnische Anwendung kommt es darauf an, wie F_2 von der Zeit abhängt. (Einzylinder- oder Mehrzylinder-motor, einfach- oder doppeltwirkende Dampfmaschine.) Bei $r \ll l$ ergibt sich ein Sinusverlauf, anderenfalls kommen $\sin 2\varphi$ -Glieder usw. dazu.

c) Die Waage. Eine **Waage** ist ein Hebel, an dessen beiden Seiten die zu vergleichenden Kräfte (oder Massen im Schwerfeld) angebracht werden. Nur in Ausnahmefällen werden beide Kräfte exakt entgegengesetzte Drehmomente auf die Waage ausüben. Wenn das nicht so ist, soll der Waagebalken oder der daran befestigte Zeiger die Differenz ΔT oder ΔF oder Δm anzeigen. Er tut das nur, wenn der Balken im stabilen Gleichgewicht ist, d. h. die Auslenkung $\Delta\varphi$ ein Gegenmoment des Balkens auslöst, das das äußere Moment ΔT kompensiert.

Die entsprechende Auslenkung Δs , gemessen in Skalenteilen auf der Wägeskala, heißt **Empfindlichkeit** der Waage:

$$e = \frac{\Delta s}{\Delta m} . \quad (2.25)$$

Eine ähnliche Definition gilt auch für andere Messinstrumente.

Je weniger weit der Schwerpunkt S des Balkens unter dem Drehpunkt D liegt, desto empfindlicher ist die Waage. Der Übergang zu $S = D$ ($e = \infty$, indifferentes Gleichgewicht) zeigt aber, dass zu hohe Empfindlichkeit auch nicht gut ist. Bei einer Balkenwaage kann sich S mit zunehmender Belastung verschieben, i. Allg. abwärts. Dadurch nimmt die Empfindlichkeit meist mit der Belastung ab. Diesen Nachteil vermeiden die modernen **Substitutionswaagen**. Bei ihnen wird die Gesamtbelastung des Balkens konstant gehalten. Die zu wägende Masse wird durch **Abheben** entsprechend vieler „Reiter“ vom Balken kompensiert.

d) Standfestigkeit. Ein Körper steht auf einer waagerechten Ebene stabil, wenn die lotrechte Projektion S' seines Schwerpunktes S auf diese Ebene innerhalb seiner Grundfläche liegt. Zur **Kippung** um eine Kante BC (Abb. 2.29) muss mindestens ein Drehmoment

$$T'' = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = r'' F$$

angreifen, das entgegengesetzt gleich dem Moment der Schwerkraft um die gleiche Achse

$$T' = |\mathbf{r}' \times \mathbf{F}'| = r' F'$$

ist. Je größer T' , desto größer die **Standfestigkeit**. Zum Kippen braucht man mindestens die Kraft

$$F = \frac{r'}{r''} F' .$$

2.3.2 Gleichmäßig beschleunigte Rotation

Auf einen Körper mögen Kräfte wirken, die sich zu Null summieren, aber ein Drehmoment ergeben. Das einfachste Beispiel ist ein Kräftepaar $\mathbf{F}, -\mathbf{F}$ mit dem Abstand r der Angriffspunkte und dem Drehmoment $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Ein solches Drehmoment beschleunigt, wenn es konstant ist, den Körper nach der Bewegungsgleichung $\mathbf{T} = \dot{\mathbf{L}} = J\dot{\boldsymbol{\omega}}$ oder

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = J^{-1}\mathbf{T}$$

und erteilt ihm in der Zeit t von der Ruhe aus eine Winkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\omega} = J^{-1}\mathbf{T}t.$$

In der gleichen Zeit hat sich der Drehwinkel um

$$\varphi = \frac{1}{2}J^{-1}\mathbf{T}t^2$$

geändert. All dies ist genau analog zu den Fallgesetzen für die Translation.

Ein Zylinder rolle eine schiefe Ebene hinab (Abb. 2.30). Die Rotation erfolgt in jedem Augenblick um die Mantellinie, mit der der Zylinder die Ebene berührt, es sei denn, dass er rutscht. Nach dem **steinerschen Satz** (2.10) ist das Trägheitsmoment um diese Achse $J = J_S + Mr^2$, wenn J_S das Trägheitsmoment um die Symmetrieachse des Zylinders ist. Das Drehmoment der Schwerkraft ist $Mgr \sin \alpha$, also lautet die Bewegungsgleichung

$$Mgr \sin \alpha = (J_S + Mr^2)\dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Der Schwerpunkt dreht sich mit $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ um die momentane Achse A , hat also die Translationsbeschleunigung

$$a = \ddot{s} = r\dot{\boldsymbol{\omega}} = r \frac{Mgr \sin \alpha}{J_S + Mr^2} = \frac{1}{1 + J_S/Mr^2} g \sin \alpha.$$

Wenn der Zylinder reibungsfrei rutschte, ohne zu rotieren, täte er das mit der Beschleunigung $g \sin \alpha$, denn der **Hangabtrieb** ist $Mg \sin \alpha$. Das Rollen verringert also die Beschleunigung. Ein Teil der potentiellen Energie muss ja in Rotationsenergie investiert werden.

Von zwei Zylindern mit gleichen Außenmaßen und gleicher Masse, aber verschiedenem Trägheitsmoment (Vollzylinder und Hohlzylinder aus verschiedenem Material) rollt der Vollzylinder schneller. Ein Massivzylinder hat $J_S = \frac{1}{2}Mr^2$, also $a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$, der dünnwandige Hohlzylinder $J_S = Mr^2$, also $a = \frac{1}{2}g \sin \alpha$, eine Kugel $J_S = \frac{2}{5}Mr^2$, also $a = \frac{5}{7}g \sin \alpha$.

2.3.3 Drehschwingungen

Eine **Spiralfeder** (Abb. 2.31) übt ein Drehmoment aus, das dem Auslenkwinkel aus der Ruhelage proportional und entgegengerichtet ist:

$$\mathbf{T} = -k\boldsymbol{\varphi}.$$

k heißt **Winkelrichtgröße**. Unter der Wirkung eines solchen Moments führt ein Körper entsprechend der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{T} = -k\boldsymbol{\varphi} = \dot{\mathbf{L}} = J\dot{\boldsymbol{\omega}} = J\ddot{\boldsymbol{\varphi}}$$

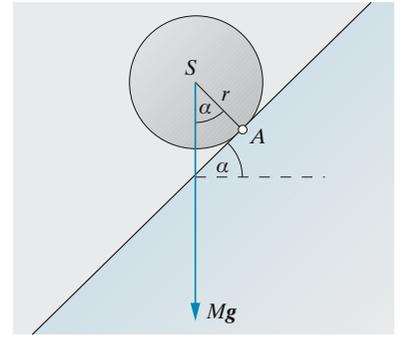


Abb. 2.30. Bewegung eines Zylinders, der auf einer schiefen Ebene rollt, ohne zu gleiten

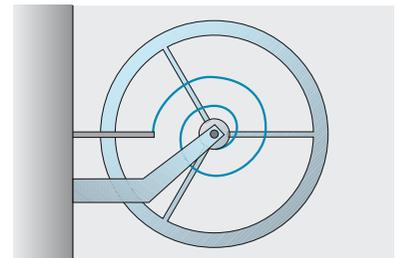


Abb. 2.31. Drehpendel

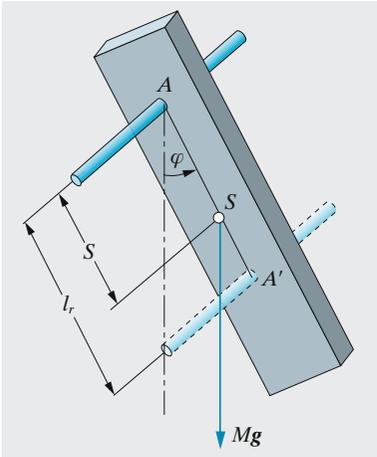


Abb. 2.32. Das physikalische Pendel (Reversionspendel)

Drehschwingungen aus, die formal genauso aussehen wie die Translationschwingungen unter der Wirkung einer elastischen Kraft:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega' t, \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{J}}. \quad (2.26)$$

Man beachte: ω' ist *nicht* die Winkelgeschwindigkeit der Rotation, sondern der Schwingungen, d. h. $\omega' = 2\pi/\tau$ (τ : Periode der Schwingungen). Die Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist $\omega = \dot{\varphi} = \varphi_0 \omega' \cos \omega' t$ und hat einen Maximalwert $\omega_m = \varphi_0 \omega'$, der von der Amplitude φ_0 abhängt.

Physikalisches Pendel. Ein homogener Stab sei an einem Punkt A aufgehängt (Abb. 2.32). Einer Auslenkung φ wirkt das Drehmoment $T = -mgs \sin \varphi$ entgegen (s : Abstand zwischen A und dem Schwerpunkt S). Für kleine Auslenkungen ist das proportional zu φ , nämlich $T \approx -mgs\varphi$. Der Stab schwingt mit $\omega = \sqrt{mgs/J}$. Das Trägheitsmoment um A ergibt sich nach dem steinerschen Satz als $J = J_S + ms^2$ (J_S : Trägheitsmoment um S). Wir vergleichen mit einem Fadenpendel, für das $\omega = \sqrt{g/l}$ gilt, und fragen, bei welcher Länge l_r es ebenso schnell schwingt wie der Stab. Offenbar ist diese *reduzierte Pendellänge*

$$l_r = \frac{J_S + ms^2}{ms}. \quad (2.27)$$

Der Punkt A', der auf der Verlängerung von AS im Abstand l_r von A liegt (Abb. 2.32), heißt **Schwingungsmittelpunkt**. In A' gelagert schwingt der Stab mit $\omega' = \sqrt{mg(l_r - s)/J'}$, wobei $J' = J_S + m(l_r - s)^2$. Setzt man hier l_r nach (2.27) ein, folgt $\omega' = \omega$: Das Pendel schwingt um A und A' genau gleich schnell. Da sich bei Lagerung auf scharfen Schneiden der Abstand $l_r = AA'$ exakter feststellen lässt als der Abstand Aufhängepunkt–Schwerpunkt für ein Fadenpendel, kann man mit einem solchen physikalischen **Reversionspendel** die Schwerebeschleunigung genauer messen.

Wenn ein homogener Stab der Länge L am Ende gelagert ist, wird nach (2.27) die reduzierte Länge $l_r = \frac{2}{3}L$. Genau so schnell schwingt er also auch um eine Achse, die um $\frac{1}{3}$ der Länge vom Ende entfernt ist. Um S dauert die Schwingung unendlich lange. Also muss es einen Punkt geben, um den die Schwingung am schnellsten ist. Er liegt um $L/2\sqrt{3} = 0,289L$ vom Ende entfernt.

2.3.4 Kippung

Wenn das Drehmoment auf einen Körper proportional zu seiner Auslenkung aus einer Ruhelage, aber dieser *gleichgerichtet* ist, kann diese Ruhelage nur labil sein. Die Bewegungsgleichung

$$\dot{L} = J\ddot{\varphi} = T = k\varphi$$

hat dann Lösungen $\varphi(t)$, die von einer Anfangsauslenkung φ_0 exponentiell zunehmen: $\varphi = \varphi_0 e^{\omega t}$ mit $\omega = \sqrt{k/J}$. Ebenso gut ist aber auch $\varphi = \varphi_0 e^{-\omega t}$ eine Lösung. Die allgemeine Lösung muss aus beiden linearkombiniert

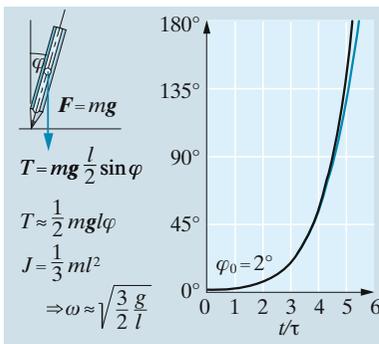


Abb. 2.33. Kippender Bleistift. Die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ (—) gilt recht gut; erst nahe 90° Kippung werden die Abweichungen von der exakten Kurve (—) merklich

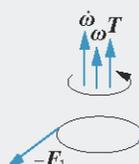
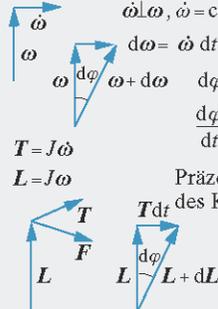
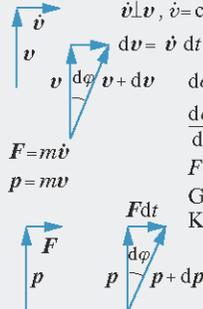
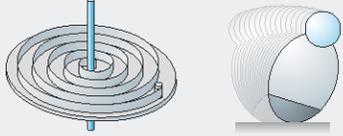
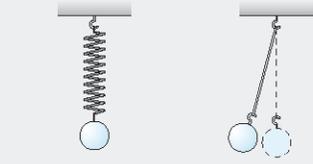
<p>Rotation $\dot{\omega} \parallel \omega, \dot{\omega} = \text{const}$ gleichmäßig beschleunigte Rotation $\omega = \dot{\omega}t, \varphi = \frac{1}{2} \dot{\omega}t^2$ $\dot{\omega} = F_1 2r/J = T/J$ Aufziehen eines Kreisels</p> 	<p>Translation $\dot{v} \parallel v, \dot{v} = \text{const}$ gleichmäßig beschleunigte Translation $v = at, x = \frac{1}{2} at^2$ $a = \dot{v} = F/m$ Freier Fall</p> 
<p>$\dot{\omega} \perp \omega, \dot{\omega} = \text{const}$ $d\omega = \dot{\omega} dt$ $d\varphi = \frac{\dot{\omega}}{\omega} dt$ $\frac{d\varphi}{dt} = \omega' = \frac{\dot{\omega}}{\omega} \frac{T}{L}$ $T = J\dot{\omega}$ $L = J\omega$ Präzession des Kreisels</p> 	<p>$\dot{v} \perp v, \dot{v} = \text{const}$ $dv = \dot{v} dt$ $d\varphi = \frac{\dot{v}}{v} dt$ $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{\dot{v}}{v} = \frac{F}{p} = \frac{F}{mv}$ $F = mv\omega = m\omega^2/r$ Gleichförmige Kreisbewegung</p> 
<p>Feder-Drehpendel Schwere-Drehpendel</p> <p>Elastisches Moment $T = -D^* \varphi = J \ddot{\varphi}$ $\varphi = \varphi_0 \sin \omega' t, \ddot{\varphi} = -\omega'^2 \varphi_0 \sin \omega' t$ $\omega' = \sqrt{D^*/J}$</p> 	<p>Federpendel Schwerependel</p> <p>Elastische Kraft $F = -Dx = m\ddot{x}$ $x = x_0 \sin \omega t, \ddot{x} = -\omega^2 x_0 \sin \omega t$ $\omega = \sqrt{D/m}$ $\omega = \sqrt{g/l}$</p> 

Abb. 2.34. Translation und Rotation

werden, und zwar so, dass am Anfang $\dot{\varphi} = 0$ ist (dann hat man den Körper ja gerade losgelassen). Das trifft nur zu für

$$\varphi = \frac{1}{2} \varphi_0 (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = \varphi_0 \cosh \omega t .$$

Der zeitliche Verlauf sieht genau aus wie die Hälfte der Kurve, in der ein beiderseits in gleicher Höhe eingespanntes Seil durchhängt (**Kettenlinie** oder **Catenoide**). Mit der Lösung $\varphi_0 e^{\omega t}$ wäre die Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(0) = 0$ nicht zu erfüllen. Von einer Schwingung $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$ um eine *stabile* Lage unterscheidet sich die **Kippung** mathematisch nur um ein i im Exponenten (Abschn. 4.1.1).

2.3.5 Drehung um freie Achsen

Zu den Kräften, die auf einen starren Körper wirken, sind auch die Zentrifugalkräfte seiner eigenen Massenteile zu rechnen. Wenn r' der Teil des Ortsvektors ist, der senkrecht zur Drehachse ω steht, ergibt sich die Summe aller dieser Kräfte als

$$F_Z = \sum m_i \omega^2 r'_i .$$

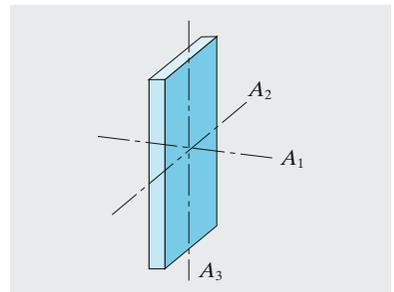


Abb. 2.35. Freie Achsen eines Quaders

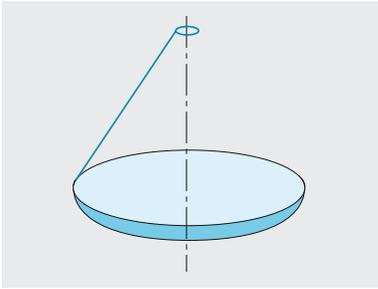


Abb. 2.36. Die Scheibe, am senkrecht herabhängenden Faden befestigt, rotiert zunächst um diesen. Sehr bald kippt sie aber von selbst so, dass sie sich um ihre Achse maximalen Trägheitsmoments dreht

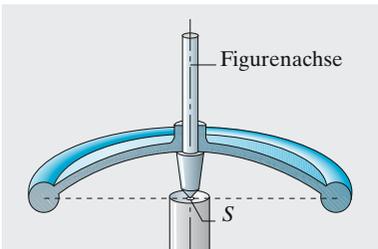


Abb. 2.37. Momentenfreier Kreisel

Sie verschwindet, wenn die Drehachse Symmetrieachse ist, allgemeiner wenn für jedes Massenteil mit r' auch eins mit $-r'$ vorhanden ist. Auf eine solche Achse wirkt keine Kraft, der Körper kann sich auch um sie drehen, wenn sie nicht gelagert ist. Man nennt sie **freie Achse**. Jeder Körper hat drei Hauptträgheitsachsen, auf die bei Drehung weder Kräfte noch Drehmomente wirken, also freie Achsen. Diese Hauptträgheitsachsen sind die Hauptachsen des **Tensorellipsoids** des Trägheitsmoments. Man erhält dieses Ellipsoid durch folgende Konstruktion: Durch den Schwerpunkt S lege man alle möglichen Achsen, messe für jede das Trägheitsmoment J und trage auf der Achse eine Länge $1/\sqrt{J}$ auf, angefangen von S . Die Endpunkte aller dieser Strahlen bilden ein Ellipsoid, das wie jedes Ellipsoid drei **Hauptachsen** hat. Die kürzeste davon entspricht nach der Konstruktion dem maximalen Trägheitsmoment und umgekehrt.

Zwar sind um alle diese drei Hauptachsen freie Rotationen möglich, aber nur um die mit dem größten und dem kleinsten Trägheitsmoment sind diese Rotationen stabil. Der Quader in Abb. 2.35 dreht sich um die Achse A_2 nur kurze Zeit, dann schlägt die Drehung in eine um A_1 oder A_3 um. Bei der Kreisscheibe ist die Symmetrieachse stabil.

Rotierende Maschinenteile, wie Räder, müssen **ausgewuchtet** werden, d. h. ihre Achse muss Hauptträgheitsachse werden. Sonst übertragen sie auf ihre Achse periodisch wechselnde Kräfte und Drehmomente, die Eigenschwingungen erregen und zu Resonanzkatastrophen führen können (Abschn. 4.1.3).

2.4 Der Kreisel

Kreisel, wie rotierende Himmelskörper oder technische rotierende Teile, verhalten sich ziemlich paradox: Wenn man sie z. B. zu kippen versucht, weichen sie seitlich aus. Hat man den Vektorcharakter von Drehmoment und Drehimpuls durchschaut, wird das alles klar.

2.4.1 Nutation des kräftefreien Kreisels

Ein symmetrischer Kreisel ist rotationssymmetrisch um eine **Figurenachse**, die natürlich durch den Schwerpunkt S geht. Unterstützt man einen Kreisel in S (Abb. 2.37), übt die Schwerkraft kein Drehmoment auf ihn aus, er ist **kräftefrei** (besser momentenfrei), und zwar in jeder Achsrichtung. Man zieht ihn richtig auf, indem man einige Zeit lang ein Drehmoment auf ihn ausübt, dessen Vektor mit der Figurenachse zusammenfällt (Kräftepaar an zwei Punkten des Ringes). Dann hat und behält der Drehimpuls L die Richtung der Figurenachse.

Wird der Kreisel schief aufgezogen oder erhält er nach dem Aufziehen noch ein Drehmoment, z. B. durch einen Schlag auf den Ring, fällt die Drehachse ω nicht mehr mit der Figurenachse zusammen. Dann wirken Zentrifugalmomente auf diese Achse, die keine freie Achse mehr ist. Sie bleibt nicht mehr raumfest, sondern beschreibt einen Kegelmantel mit der Spitze in S . Die jeweilige ω -Richtung heißt **momentane Drehachse**.

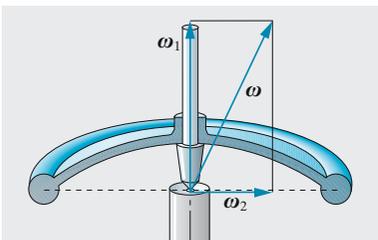


Abb. 2.38. Rotation eines Kreisels um eine Achse, die nicht mit einer Figurenachse zusammenfällt

Am einfachsten beschreibt man diese **Nutation** mit dem Tensorcharakter des Trägheitsmomentes. Da ω nicht mehr Hauptträgheitsachse ist, fallen auch die Richtungen von ω und L nicht mehr zusammen. Wir zerlegen ω in einen Vektor ω_1 parallel zur Figurenachse und ω_2 senkrecht dazu. Zu beiden Richtungen gehören i. Allg. verschiedene Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2 . Die entsprechenden Drehimpulse sind $L_1 = J_1\omega_1$ und $L_2 = J_2\omega_2$. Sie setzen sich zum Gesamtdrehimpuls $L = L_1 + L_2$ zusammen, der nach dem Erhaltungssatz raumfest bleibt. Um ihn rotieren, weil J_1 und J_2 verschieden sind, die Figurenachse und die momentane Drehachse ω auf Kegelmänteln (Abb. 2.39). Direkt sichtbar ist nur die Bewegung der Figurenachse. Sie beschreibt den **Nutationskegel**.

2.4.2 Präzession des Kreisels

Man halte einen symmetrischen Kreisel, z. B. das Rad eines Fahrrades, an den Enden der Achse und setze ihn in kräftige Rotation. Es ist klar, dass die Achse ihre Richtung beizubehalten sucht. Wie verhält sie sich aber, wenn man diese Richtung mit Gewalt schwenken will? Ganz überraschend: Die Achse drängt *senkrecht* zur beabsichtigten Schwenkrichtung davon. Man unterstütze z. B. nur *ein* Achsende und halte die Achse schräg. Dann übt die Schwerkraft ein konstantes kippendes Drehmoment auf den Kreisel aus. Die Achse weicht senkrecht zu dieser Kraft, also horizontal aus, falls man mit dem unterstützenden Finger entsprechend mitgeht. Durch dieses Ausweichen wird die Größe des Drehmoments der Schwerkraft natürlich nicht beeinflusst. So muss die Achse auf einem Kegelmantel rotieren, eine **Präzessionsbewegung** ausführen.

Hier zeigt sich besonders, wie gut der Formalismus von Drehimpuls und Drehmoment die Lage beschreibt. Das kippende Drehmoment T entsteht als Vektorprodukt einer vertikalen Kraft und eines schrägen, im Grenzfall horizontalen Kraftarms, der Drehachse. T steht also horizontal und senkrecht auf L , der Achse. Die Bewegungsgleichung sagt $T = \dot{L}$. Die Änderung des Drehimpulses steht also immer senkrecht auf der Achsrichtung, der Richtung von L , genauso wie \dot{v} bei der Kreisbewegung senkrecht auf v steht. Daher kann sich L der Größe nach nicht ändern, sondern muss sich nur gleichmäßig drehen. Die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung ist auch leicht anzugeben. In der Zeit dt kommt zu L eine senkrechte Änderung $dL = T dt$ hinzu. Der L -Vektor dreht sich dadurch um den Winkel $d\varphi = dL / (L \sin \alpha) = T dt / (L \sin \alpha)$, denn $L \sin \alpha$ ist der Radius des Kreises, auf dem sich die Spitze des L -Vektors bewegt (Abb. 2.41 und 2.42).

Die **Winkelgeschwindigkeit der Präzession** ist also

$$\omega' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{T}{L \sin \alpha}. \quad (2.28)$$

Ein Kreisel präzediert unter einem gegebenen Drehmoment umso langsamer, je schneller er rotiert, je größer also L ist. Wenn T das Moment der Schwerkraft ist, enthält es ebenfalls den Faktor $\sin \alpha$, und die

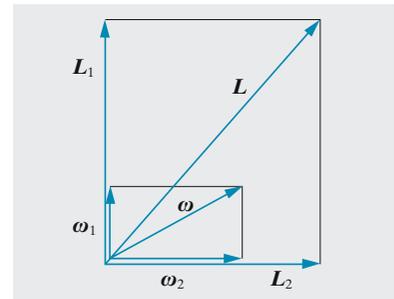


Abb. 2.39. Der Drehimpuls L ist nicht parallel zur Winkelgeschwindigkeit ω , weil das Trägheitsmoment ein Tensor ist

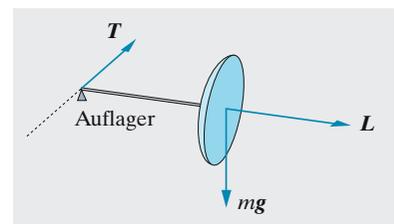


Abb. 2.40. Präzession eines Kreisels mit horizontaler Achse, der außerhalb des Schwerpunkts unterstützt wird

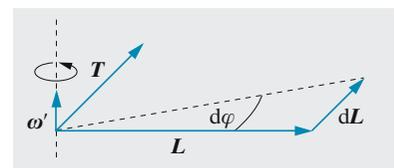


Abb. 2.41. Zur Präzession des Kreisels mit horizontaler Achse

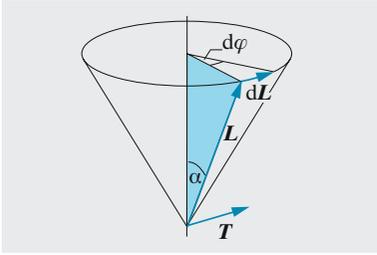
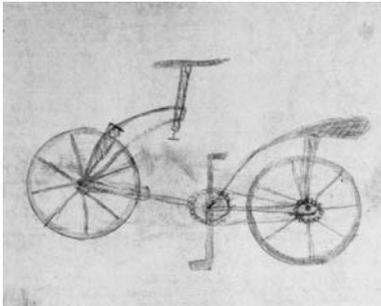


Abb. 2.42. Unabhängigkeit der Präzessionsgeschwindigkeit von der Neigung der Kreiselachse im Schwerfeld oder bei Einwirkung eines Magnetfeldes auf einen in der Kreiselachse angebrachten magnetischen Dipol



Diese Skizze entdeckte man auf der Rückseite einer Zeichnung von Leonardo da Vinci, die sein Schüler Pompeo Leoni in ein Album, später Codex Atlanticus genannt, klebte. Da man diese Blätter erst vor kurzem von ihrer Unterlage gelöst hat, scheint die offenbar von einem nicht sehr begabten Schüler stammende, mit Karikaturen und obszönem Gekritzeln umgebene, unbeholfene Skizze authentisch zu sein

Präzessionsfrequenz wird unabhängig von der Achsschiefe

$$\omega' = \frac{mgr}{J\omega} . \quad (2.29)$$

Man möchte aber auch gern anschaulich verstehen, wie dieses zunächst paradoxe Senkrechtausweichen des Kreisels zustandekommt. Betrachten wir die Lage kinematisch und reden zunächst nicht von den Kräften. Wir beobachten, dass ein Kreisel präzediert, z. B. mit horizontaler Achse wie in Abb. 2.40. Seine Achse und auch jeder Punkt des Kreiselkörpers beschreiben einen horizontal liegenden Kreis um das Auflager mit der Winkelgeschwindigkeit ω' , deren Vektor vertikal steht. Wir setzen uns jetzt ins Bezugssystem des Kreisels, z. B. auf dessen Achse, aber so, dass wir an der *Rotation* des Kreisels nicht teilnehmen, sondern nur an der *Präzession*. Dieses Bezugssystem rotiert mit ω' . Jeder Körper, der sich in ihm mit v bewegt, erfährt eine **Coriolis-Beschleunigung** $a = 2v \times \omega'$. Das betrifft besonders die Punkte des Kreisels ganz oben und ganz unten. Sie bewegen sich ja senkrecht zu ω' mit Geschwindigkeiten $v = \omega r$ (r : Abstand von der Kreisachse, ω : Rotationsfrequenz des Kreisels). Die entsprechenden Coriolis-Kräfte gehen senkrecht zu v und zu ω' , also oben an der Kreiselperipherie nach innen zum Auflagerpunkt hin, unten nach außen. Sie bilden ein Kräftepaar, das den Kreisel hochzudrücken versucht. Wenn er diesem Kräftepaar nicht folgt, sondern ruhig weiter in der Horizontalebene rotiert, gibt es dafür nur eine Erklärung: Es wirkt außerdem ein Drehmoment, das die Kreiselachse nach *unten* zu kippen sucht und das vom Coriolis-Moment genau kompensiert wird. Aus dieser Gleichheit ergibt sich wieder genau der Wert von ω' , der sich von selbst so einstellt. Im mitpräzedierenden System ist es also gar kein Wunder, dass der Kreisel nicht kippt.

▲ Ausblick

Irgendwann in den 40er Jahren las ich in einem technischen Buch, manche Dinge seien so ausgereift, dass offenbar keine Weiterentwicklung mehr möglich sei, z. B.. das Fahrrad. Damals gab es weder Nabennoch Kettenschaltung und kein Dutzend Typen vom Holländer zum Mountain-Bike, man war schon stolz auf Freilauf und Rücktrittbremse. Falls Sie nur eine Dreigang-Nabenschaltung haben – verstehen Sie wirklich, wie die funktioniert? Und wenn Sie auch gern freihändig fahren – wieso klappt das meistens?

✓ Aufgaben ...

www CD

●● 2.2.1 Die folgsame Garnrolle

Eine Garnrolle ist unter das Bett gerollt. Ein Fadenende schaut noch heraus. Je nachdem, wie man zieht, kommt die Rolle heraus oder rollt noch tiefer unter das Bett. Wieso?

●● 2.2.2 Wer dreht den Kerl?

Damit der Mann in Abb. 2.14 sich in Drehung setzt, müssen Kräfte auf ihn wirken. Weisen Sie diese experimentell und theoretisch nach. Wie wird dem Energiesatz Rechnung getragen? Rotiert der Kreisel in beiden Stellungen gleich schnell?

● 2.2.3 Motor-Drehmoment

Welches Drehmoment gibt ein Motor der Leistung P (in PS oder in W) bei der Drehzahl f (in U/min) her? Wie hängt das Drehmoment von der Drehzahl ab? Vergleichen Sie mit auto- und elektrotechnischen Daten. Wie ändern sich Drehmoment, Leistung, Drehzahl beim Durchgang durch ein Zahnrad- oder Riemengetriebe?

● 2.2.4 Luftauftrieb

Präzisionswägungen sollten den Auftrieb von Wägegut und Gewichten (meist Messing) berücksichtigen. Entwickeln Sie ein Korrekturverfahren (Formel, Diagramm oder Tabelle) zur schnellen Benutzung im Labor.

● 2.2.5 Schwungrad

Ein Schwungrad dient als Speicher für Rotationsenergie. Würden Sie es bei gegebener Masse aus Blei, Stahl oder Plastik herstellen?

●● 2.3.1 Standfeste Dose

Jemand bekommt bei einem Picknick eine geöffnete Bierdose gereicht und überlegt, bevor er sie auf den unebenen Boden stellt: „Jetzt ist der Schwerpunkt in der Mitte; trinke ich etwas ab, so sinkt der Schwerpunkt, also steht die Dose besser; wenn sie ganz leer ist, liegt der Schwerpunkt wieder in der Mitte. Bei irgendeiner Füllung muss er also am tiefsten liegen.“ Können Sie diese Füllung (a) mit, (b) ohne Differentialrechnung finden? (Ohne Differentialrechnung ist schwerer, aber

interessanter; gilt die wesentliche Erkenntnis der „ohne“-Lösung auch für unregelmäßig geformte Behälter, z. B. Flaschen?)

●●● 2.3.2 Kettenlinie

Ein Faden ohne jede Nachgiebigkeit und ohne jede Biegesteifigkeit ist an zwei gleich hoch gelegenen Punkten befestigt. Dazwischen hängt er unter seinem eigenen Gewicht durch. Welche Kurve beschreibt er?

●● 2.3.3 Hirtenunterschlupf

Wenn man Ziegel ganz ohne Mörtel übereinander schichtet – immer einen über den anderen – kann man trotzdem einen gewissen Überhang erreichen, indem man jeden Ziegel etwa über den Rand des darunterliegenden hinauschiebt. Ein weiterer Ziegel, auch wenn er selbst gar nicht übersteht, kann allerdings den ganzen Turm zum Umkippen bringen, wenn die unteren Ziegel zu weit überstehen. Wie groß kann der Überhang im Ganzen werden, und wie muss man vorgehen, damit er maximal wird? Wenn Sie in der Provence wandern, können Sie diese Bauweise empirisch studieren.

●● 2.3.4 Rutschen oder rollen?

Rutscht oder rollt ein Zylinder schneller hangabwärts? Leiten Sie das Verhältnis der Beschleunigungen, Geschwindigkeiten, Zeiten aus dem Energiesatz her. Stimmt das alles noch bei starker Reibung?

● 2.3.5 Hohlkugel

Von zwei äußerlich identischen gleich großen und gleich schweren Kugeln ist die eine hohl (dafür besteht der Mantel aus spezifisch schwererem Material). Wie findet man am einfachsten zerstörungsfrei die hohle Kugel heraus?

●● 2.3.6 Schwingende Tür

Bei einer Gartentür sind die Angeln nicht genau senkrecht übereinander, sondern ihre Verbindungslinie ist um einen Winkel α nach außen geneigt. Infolgedessen schwingt die geöffnete Tür. Wie und mit welcher Frequenz? Wählen Sie sich vernünftige Daten.

●● 2.3.7 Auswuchten von Rädern

Was ist der Unterschied zwischen statischer und dynamischer Unwucht? Ein Dutzend Steinchen von ca. 1 cm Durchmesser haben sich an einer Seite in Ihrem Reifen verklemmt. Welche Zentrifugalkräfte treten bei scharfem Fahren auf? Beeinträchtigt es die Auswuchtung, wenn sich ein Reifen wegen falschen „Radsturzes“ (X- oder O-Beinigkeit) ungleichmäßig abnutzt? Kommt man immer mit einem der kleinen Blei-Auswuchtgewichte aus, oder wie viele braucht man schlimmstenfalls?

●● 2.3.8 Sprungbrett

Ein Sprungbrett schwingt mit 1 s Periode und 20 cm Amplitude. Welchen Drehimpuls erteilt es dem Springer, der sich beim Absprung bei aufwärts schwingendem Brett um 30° vorneigt, aber nicht mit den Beinen nachdrückt? Was kann er mit diesem Impuls anfangen, z. B. wie viele Saltos drehen?

●●● 2.3.9 Kippende Mauer

Eine Mauer steht um den Winkel α gegen das Lot geneigt und hat sonst keine Stütze. Wovon hängt es ab, ob die Mauer umkippt, und wo wird sie zuerst brechen? Jetzt betrachten wir eine Mauer, die bereits im Kippen begriffen ist. Wird sie dabei noch weiter zerbrechen, wo und warum? Knickt sie, indem sie sich nach vorn oder nach hinten ausbuchtet? Formulieren Sie das zweite Problem am besten im Bezugssystem der als Ganzes kippenden Mauer.

●● 2.3.10 Flugzeuglandung

Kurz bevor ein Flugzeug auf der Landebahn aufsetzt, drehen sich die Fahrwerksräder i. Allg. noch nicht. Welche Kräfte und Momente versetzen die Räder beim Landen in Drehung? Sie können die gesamte Masse des Rades ganz außen konzentriert denken. Das Flugzeug rolle zunächst ungebremst, bis die Räder die richtige Geschwindigkeit angenommen haben. Wie lange nach der Landung ist das der Fall und nach wel-

chem Rollweg? Welche Gesamtarbeit verrichten die Kräfte, die die Räder beschleunigen? Wo bleibt diese Energie? Warum rauchen die Reifen und brennen sogar manchmal? Wie kann man das verhindern?

●● 2.4.1 Radl-Gleichgewicht

Weshalb fährt ein Radler umso sicherer, je schneller er fährt? Infolge einer Gleichgewichtsverlagerung liege der Schwerpunkt von Radler plus Fahrrad nicht mehr senkrecht über den Unterstützungspunkten, sondern um einen gewissen Winkel geneigt. Wie reagiert der Radler? Auf das Vorderrad oder die Lenkstange wirkt eine gewisse Kraft eine gewisse Zeit lang schwenkend ein. Wie reagiert das Vorderrad, was macht der Radler?

●●● 2.4.2 Nutation

Beschreiben Sie die Nutation eines Kreisels mittels des Begriffs der freien Achse. Wie schnell nutiert er? Welche Winkelgeschwindigkeit ist für die Rotation der momentanen Drehachse oder der Figurenachse maßgebend (vgl. Abb. 2.39)?

●● 2.4.3 Polschwankung

Wie liegen die Hauptträgheitsachsen einer Kugel, einer Kreisscheibe, eines Kreiszylinders, einer Hantel, des Systems Erde-Mond? Welche dieser Achsen sind stabile Drehachsen? Gibt es bei der Achsdrehung der Erde Nutationen oder Präzessionen? Wie würde die Erdrotation vermutlich auf den Aufschlag eines Planetoiden reagieren?

●● 2.4.4 Paradoxe Kreisel

Wenn der Kreisel steht, kippt ihn die Schwerkraft um, wenn er rotiert, weicht er ihr seitlich aus. Ist das ein Widerspruch? Wo liegt die Grenze zwischen den beiden Verhaltensweisen?

●● 2.4.5 Saros-Zyklus

Die Bahn des Mondes um die Erde ist um $5,15^\circ$ gegen die Bahn der Erde um die Sonne (die Ekliptik) gekippt. Die Sonne übt Gezeitenkräfte

auf diesen schiefstehenden Kreisel aus (warum nur Gezeitenkräfte?), die ihn in die Ekliptik zu kippen suchen. Wie reagiert der Kreisel? Welche Periode tritt auf? Wie äußert sich das für den Erdbeobachter (Finsternisse usw.)? Hinweis: Man kann die Masse des Mondes gleichmäßig über seine Bahn verschmiert denken.

●● 2.4.6 Präzession der Erdachse

Der Äquatorwulst der abgeplatteten Erde ($(a-b)/a = 1/300$, a , b Halbachsen des Erdellipsoids) ist den Gezeitenkräften seitens Sonne und Mond ausgesetzt. Wie reagiert der um $23,4^\circ$ schiefstehende Erdkreisel? Welche Periode ergibt sich? Wie macht sich das auf der Erde bemerkbar?

●● 2.4.7 Wer verhindert das Kippen?

Warum kippt ein schiefstehender Kreisel nicht um, wenn er präzediert? Die Schwerkraft übt doch das gleiche Kippmoment aus, ob der Kreisel rotiert oder nicht und ob er präzediert oder nicht. Gibt es ein anderes Drehmoment, das dieses Kippmoment kompensiert? Was geschieht, wenn man den Kreisel zwingt, zu langsam oder zu schnell zu präzedieren?

●● 2.4.8 Kreiselkompass

Ein schwerer Kreisel in cardanischer Aufhängung stellt seine Drehachse in die Meridianebene, d. h. in Nord-Süd-Richtung. Zeigen Sie, dass hierfür die Coriolis-Kräfte verantwortlich sind, die auf der Erdrotation beruhen. Welche Mißweisungen können auftreten, (a) wenn Schiff oder Flugzeug eine Kurve beschreiben, (b) bei unverändertem Kurs, (c) bei der Fahrt auf einem Großkreis?

●● 2.4.9 Geschossdrill

Ein gezogener Lauf zwingt dem Geschoss eine Rotation um seine Achse auf. Was ist der Vorteil? Die schraubenförmigen Züge in der Rohrwand, meist Rillen, in die entsprechende Vorsprünge des Geschosses eingreifen, bilden mit der Laufachse einen Winkel α ($10-20^\circ$). Die Ballistiker

ordnen dem Geschoss eine „fiktive Masse“ μ zu, die in die Bewegungsgleichung $F = \mu a$ eingeht und berücksichtigt, dass Translations- und Rotationsenergie investiert werden müssen. Um wie viel weicht μ von der wirklichen Masse ab (Modell: Zylinder homogener Dichte). Schätzen Sie Mündungsgeschwindigkeit, Rotationsfrequenz, Drehimpuls eines Geschosses (einfachster Weg: Abschn. 1.5.9, aber Verluste $> 50\%$). Wie verhält sich die Geschossachse, wenn die Bahn von der geraden Linie abweicht? Beachten Sie den Luftwiderstand; wie versucht er das Geschoss zu kippen, wie reagiert dieses darauf?

●●● 2.4.10 Sonnensystem

Eine Galaxie rotiert nicht als starrer Körper, sondern die einzelnen Schichten laufen gerade so schnell um das Zentrum, dass sie gegen die Gravitation im Gleichgewicht bleiben. Wie ändert sich ungefähr die Winkelgeschwindigkeit ω mit dem Abstand r vom Zentrum? Es gibt kugelförmige Galaxien, die meisten bilden aber wie unsere eine flache Scheibe ungefähr konstanter Dichte, deren Hauptmasse in einem zentralen Klumpen sitzt. Geben Sie die Größenordnung der „differentiellen Rotation“ $d\omega/dr$ für beide Grenzfälle an. Anfangs waren die Galaxien vermutlich ziemlich homogene Gashaufen, erst allmählich bildeten sich Verdichtungen, die späteren Sterne. Welchen Einfluss hatte die differentielle Rotation auf das Schicksal einer solchen Verdichtung, die sich in einem bestimmten Bereich bildet? Verfolgen Sie das Verhältnis von Gravitation und Zentrifugalkraft bis zur Kontraktion auf normale Sterngröße. Bedenken Sie: Massereiche Sterne sind größer, aber nicht gemäß $M \sim R^3$, sondern ungefähr $M \sim R$. Das folgt aus der Bedingung, dass alle Sterne im Zentrum etwa Fusionstemperatur (10^7 K) haben, und aus dem Gasgesetz unter Gravitationsdruck (Aufgabe 5.2.7). Werfen diese Überlegungen Licht auf die Entstehung des Sonnensystems?

Mechanik deformierbarer Körper

■ Inhalt

3.1	Ruhende Flüssigkeiten und Gase (Hydro- und Aerostatik)	93
3.2	Oberflächenspannung	100
3.3	Strömungen	104
3.4	Der deformierbare Festkörper	130

▼ Einleitung

Im täglichen Leben hat man es mit Systemen aus ungeheuer vielen Teilchen zu tun, die alle aufeinander Kräfte ausüben. Dazu kommen noch von außen wirkende Kräfte. Dass man so etwas überhaupt behandeln kann, ist vielen vereinfachenden Annahmen speziell über die inneren Kräfte zu danken. Manches ist auch immer noch nicht aus den Grundprinzipien vollständig ableitbar, z. B. das Verhalten turbulenter Strömungen.

3.1 Ruhende Flüssigkeiten und Gase (Hydro- und Aerostatik)

Wenn sich alle die vielen Kräfte ausgleichen, einschließlich der von den Gefäßwänden ausgeübten, bleibt ein Fluid in Ruhe.

3.1.1 Der feste, flüssige und gasförmige Zustand

Die einzelnen Teile eines makroskopischen Körpers sind gegeneinander verschiebbar. Je nach der Art des Körpers und der Deformation erfordert das verschieden große Kräfte. Wir unterscheiden Deformationen, die nur die Form des Körpers, aber nicht sein Volumen ändern (**Scherung, Biegung, Drillung**) und solche, die auch sein Volumen ändern (**Kompression, Dilatation**). **Feste Körper** wehren sich gegen beide Arten von Deformationen und kehren, wenn die Beanspruchung aufhört, in ihre ursprüngliche Gestalt zurück: Sie sind **form- und volumenelastisch**. Erst wenn die Beanspruchung gewisse Grenzen überschreitet, beginnt **plastisches Fließen**, das schließlich zum Bruch führt. **Flüssigkeiten** haben ein bestimmtes Volumen, aber keine bestimmte Form. Dementsprechend erfordert nur die Volumenänderung Kräfte. Es herrscht in weiten Grenzen **Volumenelastizität**: Bei Entlastung nach einer Kompression stellt sich wieder das Anfangsvolumen ein. Ein reine *Formänderung*, z. B. eine Scherung, erfordert nur dann Kräfte, wenn sie schnell ausgeführt werden soll (**innere Reibung**; vgl. Abschn. 3.3.2). **Gase** erfüllen jeden verfügbaren Raum, haben also keine Formelastizität, wohl aber eine gewisse Volumenelastizität, sind dabei aber viel kompressibler als feste und flüssige Körper.



„Welcher der Wasserausflüsse hat die größte Kraft, ein Rad zu drehen? Mir scheint, ihre Kraft muss gleich sein: Der Strom 1, obwohl er aus großer Höhe fällt, hat nichts hinter sich, was ihn treibt, wogegen 2 die ganze Höhe des Wassers über sich hat, das ihn fortdrängt.“ (s. Abb. 3.57).

Leonardo da Vinci, Codex Madrid I, 134

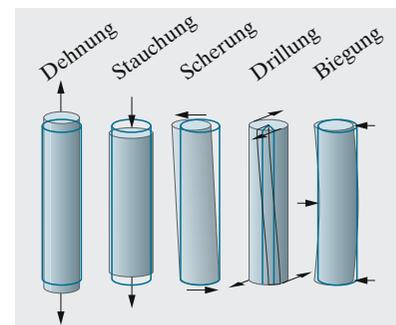


Abb. 3.1. Die Grundtypen der Deformation

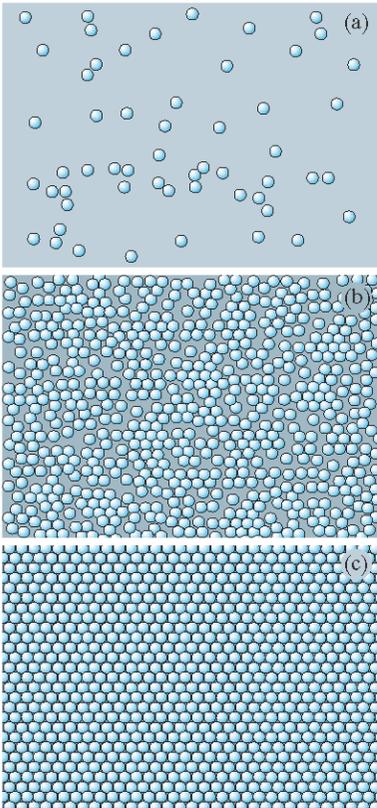


Abb. 3.2a–c. Gas, Flüssigkeit, Festkörper im atomaren Modell

Festkörper und Flüssigkeiten fasst man oft als **kondensierte**, Flüssigkeiten und Gase als **fluide Körper** zusammen. Bei den **amorphen Stoffen** verschwimmt die Grenze zwischen Festkörper und Flüssigkeit: Teer und Glas brechen unter hoher Beanspruchung, fließen aber schon unter dem Einfluss viel kleinerer Kräfte, wenn auch langsam.

Im atomistischen Bild werden diese Eigenschaften qualitativ und quantitativ durch die Kräfteverhältnisse zwischen den Molekülen oder Atomen erklärt. In erster grober Näherung kann man sich diese als undurchdringliche Kugeln vorstellen. Im festen Körper sind sie an Gleichgewichtslagen gebunden, die sich i. Allg. in geometrisch-periodischer Folge wiederholen (**Kristalle**). Seltener ist ein unperiodischer (**amorpher**) Aufbau. Die Bausteine wirken aufeinander mit Kräften geringer Reichweite über wenige Atom- bzw. Molekülabstände. Entfernung aus der Gleichgewichtslage erfordert Arbeitsleistung gegen diese Kräfte. Um die Gleichgewichtslagen können die Bausteine mehr oder weniger geordnete Schwingungen vollführen; unter dem Einfluss der Temperatur tun sie dies immer (**thermische Bewegung**).

Flüssigkeitsmoleküle sind nicht an Gleichgewichtslagen gebunden, sondern gegeneinander seitlich verschiebbar, allerdings nicht ganz frei: Ein Teilchen, an dem eine Kraft angreift, bewegt sich wegen der Reibung mit einer Geschwindigkeit, die i. Allg. der Kraft proportional ist. Jede *Abstandsänderung* (Kompression, Dilatation) von Teilchen erfordert dagegen Kräfte von ähnlicher Größe wie bei festen Körpern. Dementsprechend sind die Dichten oder die Anzahlen der Bausteine pro Volumeneinheit (Teilchendichten) bei Flüssigkeiten und Festkörpern nicht sehr verschieden. Auch die Flüssigkeit zeigt noch Reste des für Festkörper typischen Ordnungszustandes, allerdings auf sehr kleine Bereiche beschränkt (**Nahordnung**).

In Gasen bei nicht zu großer Dichte können die Kräfte zwischen den Bausteinen vernachlässigt werden, außer im Moment eines Zusammenstoßes. Dementsprechend bewegen sich die Bausteine völlig ungeordnet. Bei den „normalen“ Drücken und Temperaturen, wie sie auf der Erdoberfläche herrschen, haben die typischen Gase Dichten, die etwa 1 000mal kleiner sind als im kondensierten Zustand. Da die Temperatur für das mechanische Verhalten von Gasen entscheidend ist, behandeln wir dieses systematisch erst in der Wärmelehre (Kap. 5).

3.1.2 Die Gestalt von Flüssigkeitsoberflächen

Flüssigkeitsteilchen verschieben sich leicht tangential zur Oberfläche, sobald entsprechende Kräfte wirken. Gleichgewicht kann daher nur bestehen, wenn die Oberfläche überall senkrecht zu den Kräften steht. Im homogenen Schwerfeld ist die Oberfläche horizontal; kommt eine Zentrifugalkraft dazu (rotierende Flüssigkeit), so wird die Oberfläche ein **Rotationsparaboloid**, dessen Achse mit der Drehachse zusammenfällt.

Nach Abb. 3.3 sind nämlich die Neigung $\tan \alpha = \omega^2 x / g$ der resultierenden Kraft gegen das Lot und damit die Neigung $dy/dx = \tan \alpha$ der Oberfläche gegen die Waagerechte beide proportional zum Abstand x von der Achse. Wenn die Neigung einer Kurve proportional zu $+x$ ist, muss sie

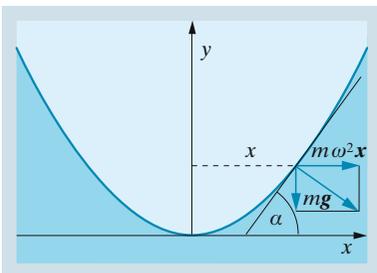


Abb. 3.3. **Rotationsparaboloid** als Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit

eine Parabel sein, natürlich mit dem Scheitel auf der Achse. Die Neigung stimmt, wenn man schreibt

$$y = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2 . \quad (3.1)$$

3.1.3 Druck

Greift an einem Flächenstück A senkrecht zu ihm die flächenhaft verteilte Kraft F an, dann heißt das Verhältnis der Kraft zur Fläche **Druck**

$$p = \frac{F}{A} . \quad (3.2)$$

Damit ergibt sich als Einheit für den Druck

$$1 \text{ N m}^{-2} = 1 \text{ Pa (1 Pascal)} = 10^{-5} \text{ bar} . \quad (3.3)$$

1 bar ist ungefähr der normale Atmosphärendruck: $1 \text{ atm} = 1\,013 \text{ mbar}$. In der Technik rechnet man manchmal noch mit $1 \text{ kp/cm}^2 = 9,81 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-2} = 1 \text{ at}$ (technische Atmosphäre).

a) Hydraulische Presse. Auf den Kolben mit der Fläche A in Abb. 3.4 wirkt die Kraft F , also herrscht in dem Fluid im Zylinder der Druck $p = F/A$. Sofern man vom Gewicht des Fluids absehen kann, ist p überall gleich, im Innern wie an der Wand, egal welche Form diese hat, auch wenn sie irgendwie ausgebuchtet ist: Der Druck ist auch in allen Richtungen gleich. In der **hydraulischen Presse** (Abb. 3.5) wirkt daher auf den großen Kolben (Fläche A_2) die Kraft $F_2 = pA_2$, während man auf den kleinen Kolben (Fläche A_1) nur die Kraft $F_1 = pA_1$ ausüben muss.

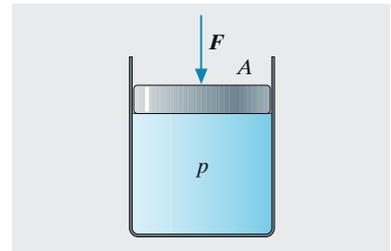


Abb. 3.4. Der Kolbendruck

× Beispiel ...

Projektieren Sie eine hydraulische Autohebebühne.

Ein PKW von 1 t soll maximal um 2 m gehoben werden. Der Stempel, der ihn hochdrückt, habe 15 cm Durchmesser, also 180 cm^2 Querschnitt. Das System muss dann mindestens $10\,000 \text{ N}/180 \text{ cm}^2 = 5,5 \text{ bar}$ aushalten. Bei Handbetrieb wird man z. B. kaum mehr als 200 N auf den Hebel ausüben wollen. Ist er 1 : 10 untersetzt, braucht man einen Primärkolben von 36 cm^2 Querschnitt. Wenn jeder Hebelweg 1 m beträgt, muss man 100mal pumpen, bis das Auto oben ist. Natürlich muss ein Ventil da sein, das den Rückfluss verhindert. Bei 50 bar Pressluft kommt man mit einem Primärkolben von 5 cm Durchmesser aus.

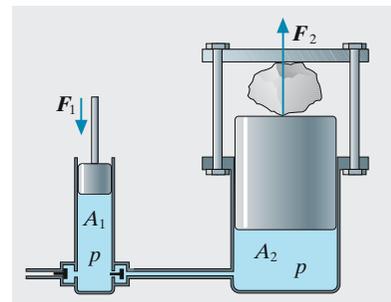


Abb. 3.5. Die hydraulische Presse

b) Druckerbeit. Die hydraulische Presse spart zwar Kraft, aber keine Arbeit. Wir schieben den kleinen Kolben um dx_1 vor, ohne dabei die Kraft F_1 wesentlich zu ändern, und leisten damit die Arbeit $dW = F_1 dx_1 = pA_1 dx_1 = p dV$, denn $A_1 dx_1 = dV$ ist das Fluidvolumen, das hinübergeschoben worden ist. Im großen Zylinder wird die

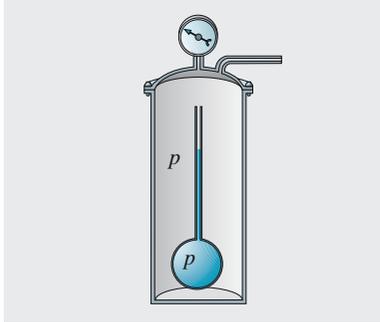


Abb. 3.6. Piezometer

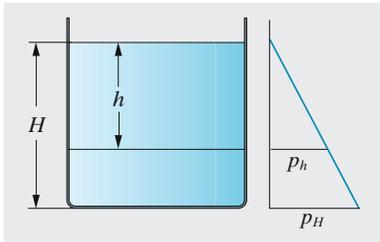


Abb. 3.7. Der Schweredruck in einer Flüssigkeit

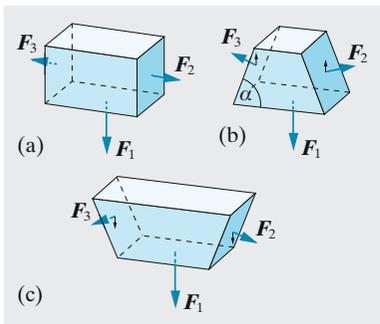


Abb. 3.8a–c. Der Druck auf den Boden eines Gefäßes hängt nur von der Tiefe der Flüssigkeit darin ab, nicht von seiner Form. Bei (c) tragen die Wände einen Teil des größeren Flüssigkeitsgewichtes, bei (b) vergrößert der Gegendruck der Wände noch den Bodendruck

gleiche Arbeit geleistet, denn der Eintritt dieses Volumens dV verschiebt den großen Kolben nur um $dx_2 = dV/A_2$.

Ganz allgemein erfordert eine Volumenabnahme $-dV$ unter einem konstanten oder so gut wie konstanten Druck p die Arbeit

$$dW = -p dV . \tag{3.4}$$

Kompressibilität. Eine Drucksteigerung um dp bewirkt eine Volumenabnahme $-dV$, die proportional zu dp und zum vorhandenen Volumen V ist: $dV = -\kappa V dp$.

Die **Kompressibilität**

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \tag{3.5}$$

hat die Dimension eines reziproken Drucks.

Sie hängt von der Temperatur ab. Bei einer endlichen Drucksteigerung von p_1 auf p_2 verrichtet man an einer Flüssigkeit die Arbeit

$$W = - \int p dV = \int \kappa V p dp = \frac{1}{2} \kappa V (p_2^2 - p_1^2) .$$

Hier haben wir V vor das Integral ziehen können, weil es sich nur wenig ändert. Wasser z. B. hat die Kompressibilität $\kappa = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$. Beim Gas ist das natürlich anders (Abschn. 3.1.5, 5.2.6). Diese Kompressionsarbeit würde die Probe erwärmen, wenn man nicht sehr langsam komprimierte und durch Wärmeabfuhr den Vorgang isotherm hielt. Genaue Volumenmessung erfolgt am einfachsten im **Piezometerkolben** anhand des Flüssigkeitsstandes h in der Kapillare vom lichten Querschnitt A : $dV = A dh$ (Abb. 3.6).

3.1.4 Der Schweredruck

Eine Flüssigkeitssäule mit der Höhe h und dem Querschnitt A hat das Gewicht $F = g \rho h A$ und übt daher auf ihren Boden den Druck

$$p = \frac{F}{A} = g \rho h \tag{3.6}$$

aus (Abb. 3.7).

Bei Wasser ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$) herrscht ziemlich genau 1 bar in 10 m Tiefe, wozu noch der Luftdruck kommt. Der Bodendruck ist unabhängig von der Form des Gefäßes: Wenn auf einem vollen Tank ein hauchdünnes Schauröhrchen sitzt, in dem das Wasser 10 m hoch steht, dann wirkt auf den ganzen riesigen Tankboden auch 1 bar (**Hydrostatisches Paradoxon**). Man versteht das aus Abb. 3.8. Hier sind die Bodenflächen und damit die Kräfte auf sie alle gleich, obwohl die Gefäße ganz verschiedene Flüssigkeitsgewichte enthalten. In (c) nehmen ja die Seitenflächen einen Teil dieser Gewichtskraft auf, in (b) helfen sie sogar noch mit abwärts drücken.

a) Kommunizierende Röhren. Zwei Flüssigkeiten mit den Dichten ρ_1 und ρ_2 stehen in den Schenkeln eines U-Rohres. An jedem Rohrquerschnitt, z. B. ganz unten, muss der Druck $p = \rho gh$ beiderseits gleich sein, damit Gleichgewicht herrscht. Bei $\rho_1 = \rho_2$ ist das der Fall, wenn beide Schenkel gleich hoch gefüllt sind, unabhängig von ihrer Form und ihrem Querschnitt (Abb. 3.9). Bei verschiedenen Dichten verhalten sich die Höhen umgekehrt wie diese (Ableseung der Höhen: Abb. 3.10). Das ergibt eine einfache relative Dichtemessung. Für Wasser und Quecksilber findet man $h_W/h_{Hg} = \rho_{Hg}/\rho_W = 13,6$ (Vorsicht: Wasser kriecht an der Wand am Quecksilber vorbei, weil dieses die Wand nicht benetzt).

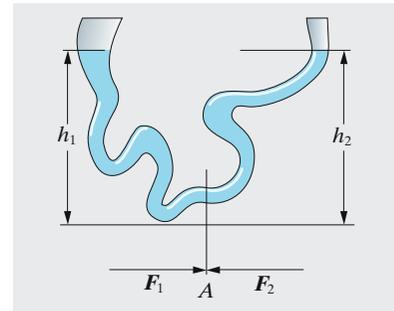


Abb. 3.9. Homogene Flüssigkeit in kommunizierenden Röhren

b) Auftrieb. Ein Zylinder oder Prisma, ganz in eine Flüssigkeit der Dichte ρ getaucht, erfährt auf seine Grundfläche eine Kraft $F_2 = \rho gh_2 A$, auf die obere Deckfläche die Kraft $F_1 = \rho gh_1 A$ (Abb. 3.11).

Die Differenz

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho g(h_2 - h_1)A = \rho gV, \quad (3.7)$$

die den Körper nach oben schiebt, der **Auftrieb**, ist also gerade das Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge (**Archimedes**).

Die Kräfte auf die Seitenflächen heben sich auf. (3.7) gilt auch für beliebige Formen des Körpers.

Mit der **hydraulischen Waage** bestimmt man das Gewicht eines Körpers in Luft ($F_L = g \cdot \rho_K V$) und in einer Flüssigkeit ($F_F = g \cdot (\rho_K - \rho_F) V$). Das Verhältnis $F_F/F_L = 1 - \rho_F/\rho_K$ gibt die Dichte ρ_K (oder ρ_F).

Eigentlich greift der Auftrieb über die Oberfläche verteilt an. Man kann ihn aber auch durch eine Einzelkraft ersetzen, die im Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit angreift. Zum Beweis denken wir uns einen homogenen Körper der gleichen Form, der die gleiche Dichte hat wie die Flüssigkeit (Abb. 3.12). Er ist, ganz eingetaucht, in jeder Lage im Gleichgewicht, also ist sein Auftrieb gleich seinem Gewicht (keine resultierende Kraft), und beide greifen im Schwerpunkt an (kein Drehmoment).

c) Schwimmen. Ein Körper vom Gewicht F_G , homogen oder nicht, erfahre ganz eingetaucht den Auftrieb F_A . Bei $F_A = F_G$ schwebt er im indiffe-

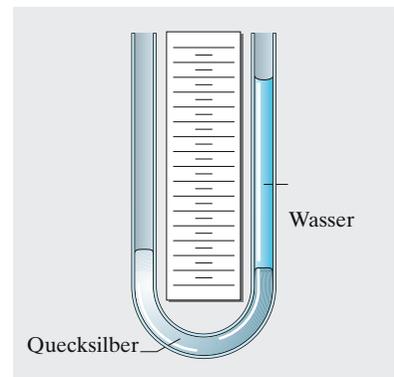


Abb. 3.10. Höhen von nicht mischbaren Flüssigkeiten mit verschiedener Dichte in kommunizierenden Röhren

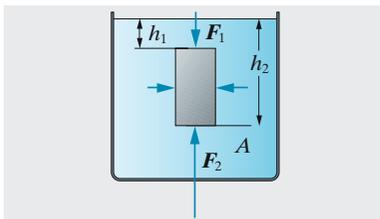


Abb. 3.11. Das Zustandekommen des Auftriebs

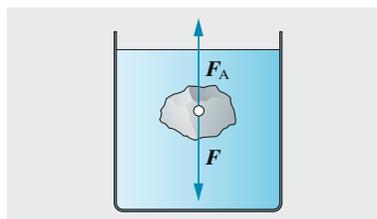


Abb. 3.12. Bedingung für das Schweben eines Körpers in einer Flüssigkeit

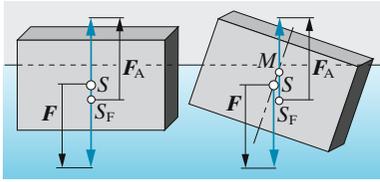


Abb. 3.13. Stabilität eines schwimmenden Körpers. Das Metazentrum M liegt oberhalb des Schwerpunktes S

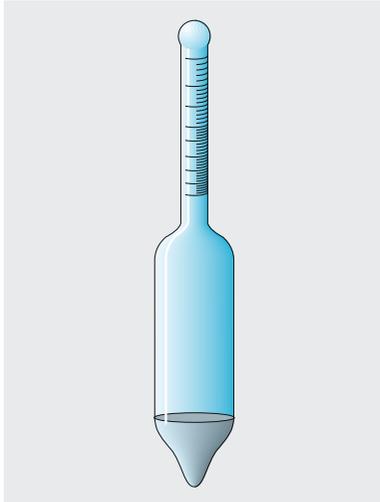


Abb. 3.14. Aräometer oder Tauchspindel zur Dichtemessung an Flüssigkeiten. Die Dichteskala ist offenbar nicht gleichmäßig eingeteilt. Warum nicht, und wie denn?

renten Gleichgewicht, bei $F_A < F_G$ sinkt er. Bei $F_A > F_G$ steigt er an die Oberfläche und schwimmt. Dabei ragt er genau soweit heraus, dass der restliche Auftrieb gerade gleich der Gewichtskraft wird, $F_A = F_G$.

Stabilitätsbedingung des Schwimmens. Der Angriffspunkt der Schwerkraft F am schwimmenden Körper ist sein Schwerpunkt S , der Angriffspunkt des Auftriebes F_A (der „Auhängepunkt“) ist der Schwerpunkt S_F der verdrängten Flüssigkeit. Wenn S unter S_F liegt (schwerer Kiel), ist die Schwimmlage immer stabil. Andernfalls (Abb. 3.13) liegt im Gleichgewicht S_F senkrecht unter S . Die Verbindung $\overline{SS_F}$, der Vektor r , liegt in der Richtung der Kräfte, also ist das Drehmoment des Kräftepaars Null. Jede Kippung ruft aber ein Kräftepaar mit einem Drehmoment $T = r \times F_A$ hervor, das den Körper wieder in die Gleichgewichtslage zurückdreht oder weiter aus ihr entfernt, je nachdem ob der Vektor F_A die Mittelebene des Körpers oberhalb oder unterhalb von S schneidet (Abb. 3.13). Dieser Schnittpunkt heißt **Metazentrum** M . Die Schwimmlage ist stabil, wenn das Metazentrum oberhalb des Schwerpunktes liegt.

d) Aräometer. Die Dichte ρ einer Flüssigkeit misst man sehr bequem mit der **Tauchspindel (Aräometer)**. Sie taucht umso tiefer ein, je kleiner ρ ist. Die Skala auf dem Röhrrchen ist aber nicht linear geteilt, wie aus der Schwimmbedingung folgt (Abb. 3.14):

$$m = \rho(V_0 + Ah), \quad \text{also} \quad h = \frac{m}{A\rho} - \frac{V_0}{A}.$$

3.1.5 Gasdruck

Bei einem nicht zu dichten oder zu kalten Gas sind Druck und Volumen umgekehrt proportional zueinander

$$V = \frac{c}{p} \quad \text{bzw.} \quad p \cdot V = c \quad \text{(Boyle-Mariotte)}. \quad (3.8)$$

Dieses Verhalten kennzeichnet das **ideale Gas** und ist unter Normalbedingungen am besten bei H_2 und He erfüllt. Die Konstante c hängt bei gegebener Temperatur nur davon ab, wie viele Moleküle das Volumen enthält, d. h. von der eingeschlossenen Gasmenge in mol (**Avogadro**). Das ideale Gas wird im Detail in Abschn. 5.2 behandelt. Bei $T = 0^\circ C$ gilt die Zahlenwertgleichung

$$V = 22,4 \frac{m}{M} \frac{1}{p} \quad (3.8')$$

(m : Masse des Gases, M : Molmasse, V in Liter, p in bar). Druck und Dichte $\rho = m/V$ eines Idealgases sind einander proportional. Durch Wägung eines Gefäßes vor und nach dem Evakuieren findet man eine Dichte der Luft von $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$ beim normalen Atmosphärendruck und $0^\circ C$.

Bei langsamer (isothermer) Kompression folgt aus (3.8) die **Kompressibilität**

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{V} \frac{c}{p^2} = \frac{1}{p},$$

die für alle Idealgase bei gleichem Druck den gleichen Wert hat.

Ein **Flüssigkeitsmanometer** ist ein U-Rohr, teilweise z. B. mit Quecksilber gefüllt (Abb. 3.15). Ist der eine Schenkel offen zur Außenluft, dann gibt h den Überdruck $p_1 - p_2$ im Gefäß an, oft direkt in mm Hg oder Torr gemessen. Wegen $\rho_{\text{Hg}} = 13\,593 \text{ kg/m}^3$ (Abschn. 3.1.4) ist

$$1 \text{ Torr} = \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot 1 \text{ mm} = 133,4 \text{ N/m}^2 .$$

Beim geschlossenen **Manometer** hatte man anfangs den ganzen rechten Schenkel mit Quecksilber gefüllt, das beim Absinken ein Vakuum über sich lässt. Hier braucht man also den Luftdruck p_2 nicht abzuziehen, die Höhe h gibt direkt den Gasdruck p im Gefäß an.

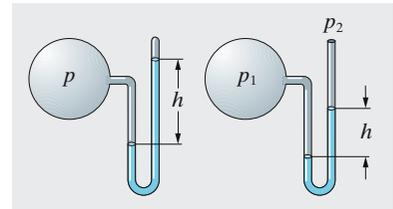


Abb. 3.15. Geschlossenes und offenes Flüssigkeitsmanometer

3.1.6 Der Atmosphärendruck

Der **Luftdruck** ist so allgegenwärtig, dass man ihn meist erst wahrnimmt, wenn er irgendwo fehlt, wie z. B. über der Quecksilbersäule in einem einseitig geschlossenen Rohr, das man erst mit Quecksilber füllt und dann umdreht. In ihm steht das Quecksilber in Meereshöhe normalerweise 760 mm hoch, der übliche **Atmosphärendruck** ist also

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr} = 1,013 \text{ bar} . \tag{3.9}$$

Dieser Druck kommt wie der Schweredruck in einer Flüssigkeit zustande als Gewicht/Fläche der gesamten Erdatmosphäre. Wäre die Luft überall so dicht wie in Meereshöhe, dann könnte die Atmosphäre nur bis zur Höhe

$$H = \frac{p}{g\rho} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,29 \text{ kg/m}^3} \approx 8 \text{ km}$$

reichen. Der Mount Everest-Gipfel ragte schon ins Leere. Bei 1 km Anstieg würde der Druck immer um 127 mbar abnehmen, während die Dichte konstant bliebe. Bei konstanter Temperatur muss aber nach *Boyle-Mariotte* die Dichte proportional zum Druck mit der Höhe abnehmen. Wir können also (3.6) nur auf eine dünne Schicht der Dicke dh anwenden (Abb. 3.16): Beim Anstieg um dh ändert sich der Druck um $dp = -\rho g dh$. Diese Differentialgleichung enthält zwei Variable, p und g ; eine davon, z. B. g , können wir nach *Boyle-Mariotte* beseitigen: $p/\rho = p_0/\rho_0$ (p_0, ρ_0 : Werte auf Meereshöhe). Also

$$\frac{dp}{dh} = -g \frac{\rho_0}{p_0} p .$$

Die Ableitung der Funktion $p(h)$ ist bis auf den Faktor $-g\rho_0/p_0$ gleich der Funktion selbst. Es handelt sich also um eine e-Funktion:

$$p(h) = p_0 e^{-g\rho_0 h/p_0} \tag{3.10}$$

(Abb. 3.17).

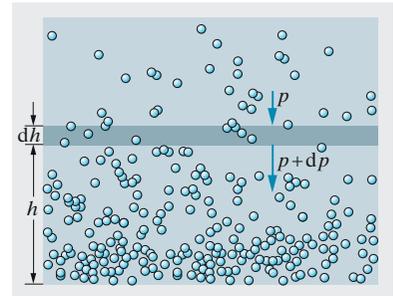


Abb. 3.16. Beim Aufstieg um dh ändert sich der Luftdruck um $g\rho dh$

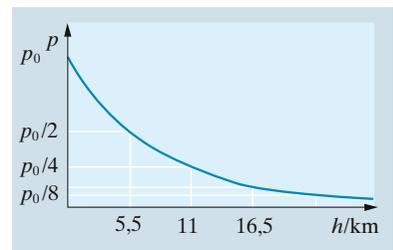


Abb. 3.17. Druckabfall in der Atmosphäre bei konstanter Temperatur als Funktion des Abstandes vom Erdboden ($p_0 = 1 \text{ bar}$)

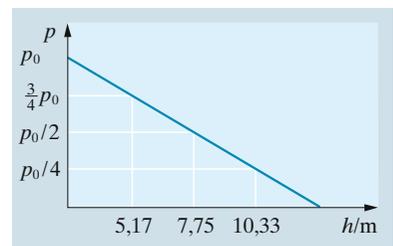


Abb. 3.18. Druckabfall in einer 10,33 m hohen Wassersäule (über der die Luft fortgepumpt ist) als Funktion des Abstandes vom Boden ($p_0 = 1 \text{ bar}$)

Mit der **Skalenhöhe** $H = p_0/(\rho_0 g)$, die sich für Luft bei 0°C zu $H = 8\,005 \text{ m}$ ergibt, vereinfacht sich das zu

$$p(h) = p_0 e^{-h/H} . \tag{3.10'}$$

Tabelle 3.1. Oberflächenspannung σ in N/m einiger Flüssigkeiten gegen Luft bei 18 °C

Quecksilber	0,471
Wasser	0,0729
Benzol	0,029
Ethylether	0,017

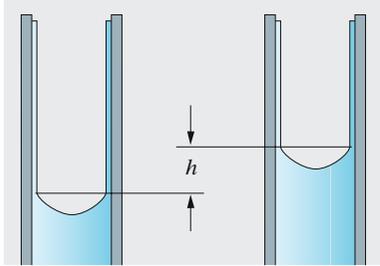


Abb. 3.19. Wenn eine benetzende Flüssigkeit in einem Rohr steigt, verkleinert sich Oberfläche und Oberflächenenergie

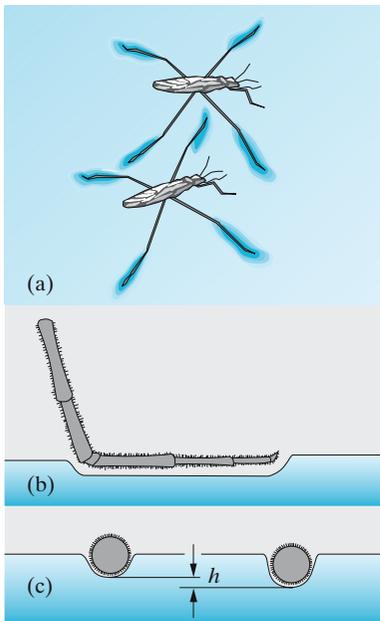


Abb. 3.20a–c. Der Wasserläufer (hier dargestellt die Art *Gerris lacustris*) wird von der Oberflächenspannung getragen

Bei 8 km Anstieg nehmen Druck und Dichte nicht auf 0 ab wie bei der „homogenen Atmosphäre“, sondern um den Faktor $e^{-1} = 0,386$. Eine scharfe obere Grenze der Atmosphäre gibt es nicht (Abb. 3.18).

In Wirklichkeit nimmt die Temperatur i. Allg. in der **Troposphäre** (bis 10–12 km Höhe) mit der Höhe ab. Die Troposphäre wird für trockene Luft besser durch die **adiabatisch-indifferente Schichtung** (Aufgaben zu Abschn. 5.2) beschrieben. Bei feuchter Luft ist noch der Einfluss der **Kondensationswärme** zu beachten

3.2 Oberflächenspannung

Tropfen, Blasen, Schäume, überhaupt das Verhalten von Flüssigkeiten in kleinen Bereichen, werden beherrscht durch nahe wirkende Anziehungskräfte zwischen den Molekülen.

Wenn ein Tropfen auf fettiger Unterlage Kugelform annimmt, wenn Wasser im Schwamm von selbst hochsteigt, wenn Wasserläufer (kleine Insekten) über den See huschen können, ohne einzusinken, wenn Enten im eiskalten Wasser nicht frieren, dann zeigt dies alles, dass eine Flüssigkeit eine Art Haut hat, deren Spannung in sehr kleinem Maßstab der Schwerkraft entgegenarbeiten kann. Jede gespannte Haut hat minimale Energie, wenn ihre Fläche minimal ist.

Die **Oberflächenenergie** ist proportional zur Oberfläche

$$E_{\text{Ob}} = \sigma A . \quad (3.11)$$

σ heißt **spezifische Oberflächenenergie** oder **Oberflächenspannung**.

Bei gegebenem Volumen hat eine Kugel die kleinste Oberfläche, deswegen sind Tröpfchen kugelig. Beim Schwamm muss man beachten, dass seine Oberflächen benetzbar sind, die Beine des Wasserläufers und die gut eingefetteten Entenfedern nicht. Ein Röhrchen im Schwamm ist mit einer Wasserhaut ausgekleidet, sobald man ihn befeuchtet hat. Diese Oberfläche *verkleinert* sich, wenn das Wasser hochsteigt (Abb. 3.19). Sie müsste sich als röhrenförmige Tasche *vergrößern*, wenn das Wasserläuferbein tiefer eintauchte (Abb. 3.20). Wasserläufer und Enten leiden unter waschpulverhaltigem Abwasser: Es senkt die Oberflächenspannung, macht also auch fettige Flächen besser benetzbar.

Oberflächenenergie ist ein Teil der Anziehungsenergie zwischen den Flüssigkeitsmolekülen. Ein Molekül tief in der Flüssigkeit wird von seinen Nachbarn allseitig angezogen, die Gesamtkraft ist Null. Solche Kräfte haben knapp 10^{-9} m Reichweite. Sitzt das Molekül sehr nahe der Oberfläche, dann werden die Kräfte einseitig, es bleibt eine Resultierende zur Flüssigkeit hin (Abb. 3.21). Um sie zu überwinden und das Molekül ganz an die Oberfläche zu bringen, brauchen wir eine Energie. Es ist die Oberflächenenergie, bezogen auf die Fläche, die etwa dem Molekülquerschnitt entspricht. Wenn die Molekularkräfte nur zwischen den nächsten Nachbarn wirken, betätigt das Molekül im Innern etwa 12 solche Bindungen,

an der Oberfläche nur etwa 9. Es fallen 3 weg. Die Oberflächenenergie pro Molekülfläche sollte also etwa $\frac{1}{4}$ der Energie sein, die nötig ist, um das Molekül ganz aus der Flüssigkeit zu befreien, d. h. $\frac{1}{4}$ der Verdampfungsenergie pro Molekül. Prüfen Sie dies für verschiedene Flüssigkeiten nach.

Die Oberflächenenergie führt zu einer Kraft auf den Bügel (Abb. 3.22), in dem eine Flüssigkeitslamelle (Seifenhaut) hängt. Zieht man den Bügel um Δs abwärts, dann vergrößert sich die Oberfläche um $2b \Delta s$ (sie hat zwei Seiten), die Oberflächenenergie nimmt um $\Delta E = \sigma 2b \Delta s$ zu. Diese Arbeit haben wir beim Verschieben aufbringen müssen, also hat dem eine Kraft F nach oben entgegengewirkt, sodass $\Delta E = F \Delta s$, d. h. $F = 2b\sigma$. An jeder Randlinie einer Flüssigkeitsoberfläche zieht eine Kraft nach innen, die gleich σ mal der Randlänge ist. Mit dem Bügel Abb. 3.23, durch den ein feiner Faden gespannt ist, kann man σ direkt über die Kraft messen, mit der man zusätzlich zur Schwerkraft die Flüssigkeitshaut hochziehen muss. Diese Kraft ist, anders als bei der elastischen Membran, unabhängig von der Verschiebung Δs : Es gibt keine „Ruhegröße“ der Oberfläche, sie will möglichst klein sein. Die Oberflächenspannung σ nimmt mit der Erwärmung ab; dabei lockert sich ja die Flüssigkeit auf, die stark abstandsbabhängigen Molekularkräfte werden kleiner. σ ist äußerst empfindlich gegen winzige Verunreinigungen, die sich an der Oberfläche sammeln (**oberflächenaktive Stoffe**).

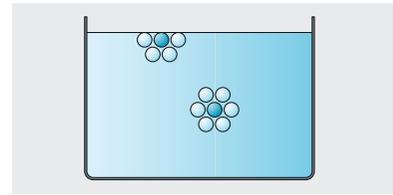


Abb. 3.21. Modell zur Deutung der Oberflächenenergie

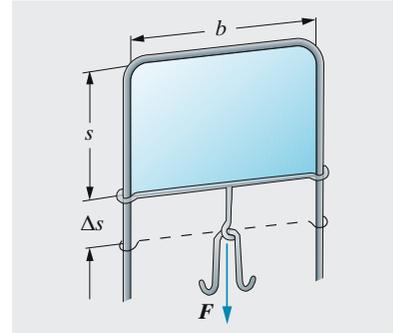


Abb. 3.22. Modellversuch zur Bestimmung der Oberflächenspannung

× Beispiel...

Müssen die Messungen der Oberflächenspannung mit dem Bügel (Abb. 3.23) hinsichtlich der Gewichte von Bügel und Flüssigkeitslamelle korrigiert werden? Wie?

Das Bügelgewicht lässt sich leicht herausheben: Man misst die Kraftdifferenz zwischen Bügel in Luft und Bügel beim Abreißen der Lamelle. Das Gewicht der Lamelle selbst, das zum Abreißen führt, entspricht gerade der Oberflächenkraft, die man messen will. Es wäre sinnlos, es wegeichen zu wollen. Bleibt der Auftrieb des teilweise eingetauchten Bügels. Bei einem dünnen Draht aus dichtem Material ist er klein (z. B. Stahldraht von 0,3 mm Durchmesser: Auftrieb $7 \cdot 10^{-4}$ N/m, d. h. kaum 0,5% der Oberflächenspannung).

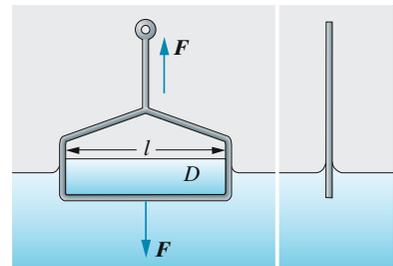


Abb. 3.23. Bügelmethode zur Messung der Oberflächenspannung

a) Tröpfchengröße. Ein **Tropfen** hängt an einem Rohr, aus dem Flüssigkeit nachdringt, bis der Tropfen unter seiner eigenen Schwere fast abreißt. In diesem Zustand hängt der Tropfen am Rohrumfang $2\pi r$ mit der Kraft $2\pi r\sigma$. Beim Abreißen ist dies gleich dem Gewicht $V\rho g$ des Tropfens (Abb. 3.24), also

$$V = \frac{2\pi r\sigma}{\rho g} \tag{3.12}$$

Ein dickes Rohr gibt größere Tropfen. Für Wasser und $r = 1$ mm folgt $V \approx 0,043$ cm³.

Je kleiner eine Flüssigkeitsmenge ist, desto mehr überwiegen die Oberflächenkräfte z. B. über die Schwerkraft, denn die Oberfläche nimmt

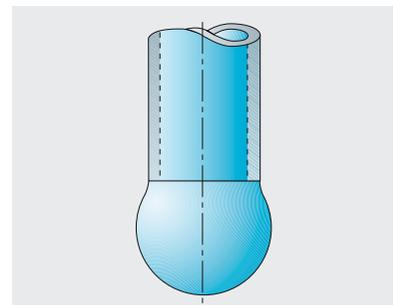


Abb. 3.24. Tröpfchen kurz vor dem Abreißen (schematisch)

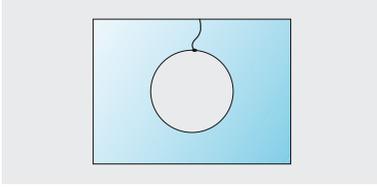


Abb. 3.25. Das durch einen Faden begrenzte Loch in einer Seifenlamelle hat Kreisform. (Flüssigkeitsoberflächen sind Minimalflächen)

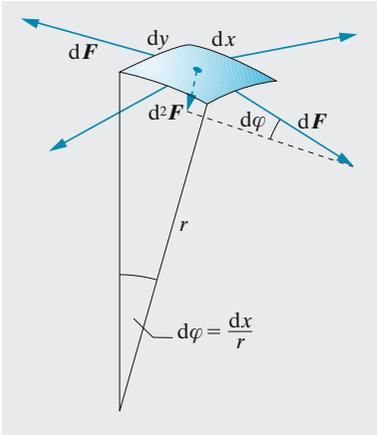


Abb. 3.26. Kräfte auf ein Stück einer gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche

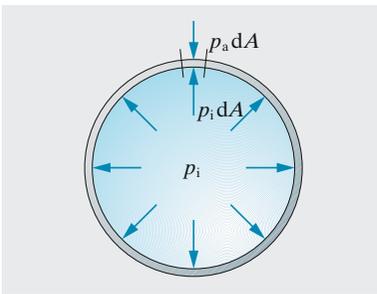


Abb. 3.27. Zur Abhängigkeit des Überdrucks in einer Seifenblase von der Oberflächenspannung und ihrem Radius

langsamer ab als das Volumen. Tröpfchen, freie Lamellen wie Seifenhäute, Trennwände der Bläschen im Schaum sind daher **Minimalflächen**. Ein Faden wird durch eine Seifenhaut zum Kreis gespannt (Abb. 3.25), wenn man die Haut, die anfangs innerhalb der Fadenschlinge war, zersticht. Der Kreis spart ja bei gegebener Fadenlänge *maximal* an der Oberfläche ein. Seifenhäute in krummen Drahtbügeln bilden raffinierte Minimalflächen, die kaum jemand berechnen könnte. So ein Seifenhautcomputer löst äußerst komplizierte Probleme aus der Potentialtheorie, wie wir gleich zeigen werden.

b) Überdruck in der Seifenblase. Verbindet man eine kleine **Seifenblase** durch einen Strohhalm mit einer großen, dann wird die große noch größer, die kleine schrumpft, bis sie ganz verschwindet. Offenbar herrscht in der kleineren ein höherer Druck, daher bläst sie die andere auf.

An den beiden Seiten dy eines gekrümmten Flächenstücks $dA = dx dy$ einer Seifenblase vom Radius r (Abb. 3.26) greift je eine Tangentialkraft vom Betrag $dF = 2\sigma dy$ an (die Seifenblase hat zwei Oberflächen, eine innere und eine äußere, daher die 2). Diese beiden Kräfte bilden den Winkel $d\varphi = dx/r$ zueinander, also ergibt sich eine Normalkraft vom Betrag $d^2F = dF d\varphi = 2\sigma dy dx/r$ nach innen. Die Kräfte, die an den Seiten dx ziehen, ergeben eine ebenso große Normalkraft. Damit diese Einwärtskräfte die Seifenblase nicht zusammenfallen lassen, muss darin ein Überdruck Δp vom Aufblasen her herrschen, sodass $d^2F = \Delta p dA$ ist (Abb. 3.27), d. h.

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{r}. \quad (3.13)$$

Entsprechend herrscht auch in jeder *einfachen*, nach außen gewölbten Flüssigkeitsoberfläche ein Überdruck

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}. \quad (3.13a)$$

Ähnliches gilt für elastische Membranen, Schalen und Gewölbe. Wir folgern: Eine frei gespannte Seifenhaut, auf die beiderseits der gleiche Druck wirkt, hat *keine* Krümmung. Entweder ist sie eben, oder, wenn das infolge der Berandungsform nicht geht, hat sie zwei Krümmungen, die einander aufheben: Eine konvexe, eine gleich starke konkave. Ein altmodischer Sattel sieht so aus. Freie Minimalflächen bestehen aus lauter Sattelpunkten. Wir spannen eine solche Fläche über der x, y -Ebene aus. Sie bildet ein Zelt mit der Höhe $z(x, y)$. Die konvexe Krümmung, die z. B. in x -Richtung liege, ist angenähert d^2z/dx^2 , in der y -Richtung ist die Krümmung d^2z/dy^2 . Beide müssen sich zu Null ergänzen:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0. \quad (3.14)$$

Dies ist die **Laplace-Gleichung**, der jedes (zweidimensionale) Potential im ladungsfreien Raum gehorcht (Abschn. 6.1.3).

c) Kapillarität. Eine Flüssigkeit steigt in einem engen Rohr um h an, wenn man die Innenfläche vorher gut benetzt hat (Abb. 3.28). Die zusätzliche Flüssigkeitssäule mit ihrem Gewicht $\pi r^2 h \rho g$ hängt an der Randlinie $2\pi r$ mit der Randkraft $\sigma 2\pi r$. Gleichgewicht herrscht bei

$$h = \frac{2\sigma}{r\rho g} \quad (3.15)$$

Man kann auch sagen: Der Schweredruck ρgh muss gleich dem Zug $2\sigma/r$ der halbkugeligen Hohlfläche sein (vgl. (3.13a)). Bei einer nicht-benetzenden Flüssigkeit wie Quecksilber im Glas ergibt sich eine **Kapillardepression** um den gleichen Betrag (Abb. 3.29).

Bisher war von der Oberfläche einer Flüssigkeit gegen Luft die Rede. Auch Grenzflächen zwischen beliebigen Stoffen i und k haben jeweils eine **Grenzflächenspannung** σ_{ik} . Sie kann auch negativ sein, wenn z. B. ein Festkörper die Moleküle einer Flüssigkeit stärker anzieht als diese einander. Dann tritt mindestens teilweise Benetzung ein. Negative Grenzflächenenergie zwischen zwei Flüssigkeiten führt zur Durchmischung.

Wo eine Flüssigkeitsoberfläche an eine Gefäßwand grenzt, wirken drei Randspannungen. In Abb. 3.30 ist σ_{23} (fest-flüssig) als negativ, d. h. aufwärts zeigend dargestellt. Gleichgewicht verlangt

$$\sigma_{23} - \sigma_{13} = -\sigma_{12} \cos \Theta \quad (3.16)$$

Wenn die **Haftspannung** $\sigma_{13} - \sigma_{23}$ größer ist als σ_{12} , gibt es kein Θ , das (3.16) befriedigt: Die Flüssigkeit kriecht ganz an der Wand hoch. Ist σ_{23} positiv und größer als σ_{13} , also die Haftspannung negativ, dann wird $\Theta > 90^\circ$ (bei Quecksilber-Glas $\Theta = 138^\circ$). Abbildung 3.31 stellt dasselbe nochmals anders dar, nämlich durch die **Kohäsions-** und **Adhäsionskräfte**, die auf ein Flüssigkeitsteilchen am Rand wirken.

Am Rand eines **Fettauges** auf Wasser greifen ebenfalls drei Spannungen tangential zur jeweiligen Oberfläche an. Gleichgewicht herrscht, wenn die Resultierende verschwindet, also nach dem Cosinussatz bei dem **Randwinkel** φ_3 mit

$$\cos \varphi_3 = \frac{\sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2}{2\sigma_{13}\sigma_{23}}$$

(Abb. 3.32, 3.33). Das ist nur möglich, wenn jedes der σ_{ik} kleiner ist als die Summe der beiden anderen. Bei $|\sigma_{12}| > |\sigma_{13}| + |\sigma_{23}|$ wird das Tröpfchen zu einer Schicht ausgezogen, die die ganze Oberfläche bedeckt. Reicht sein Volumen dazu nicht, dann geht die Ausbreitung nur bis zu einer zusammenhängenden **monomolekularen Schicht**, z. B. bei Maschinenöl auf Wasser.

Bei unvollständiger Benetzung (Abb. 3.34) ist die Steighöhe h vom Randwinkel Θ abhängig. r' sei der Krümmungsradius der Flüssigkeitsoberfläche. Dann liefert Gleichsetzung des hydrostatischen und des **Kapillardruckes** $p = 2\sigma/r' = 2\sigma \cos \Theta/r$ eine Steighöhe

$$h = \frac{2\sigma \cos \Theta}{\rho g r} \quad \text{oder mit (3.16)} \quad h = \frac{2(\sigma_{13} - \sigma_{23})}{\rho g r}$$

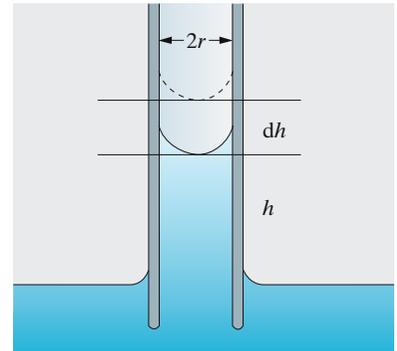


Abb. 3.28. Steighöhe einer benetzenden Flüssigkeit in einem engen Rohr

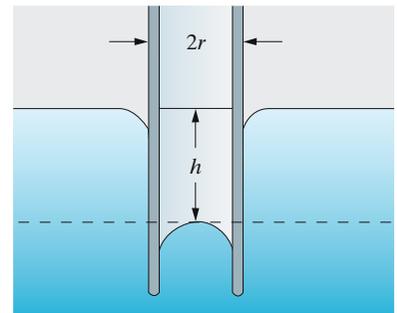


Abb. 3.29. Kapillardepression für eine nichtbenetzende Flüssigkeit

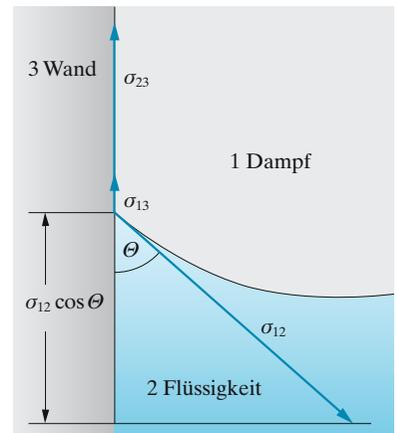


Abb. 3.30. Zusammenhang zwischen der Haftspannung und dem Randwinkel, $\sigma_{13} - \sigma_{23} = \sigma_{12} \cos \Theta$

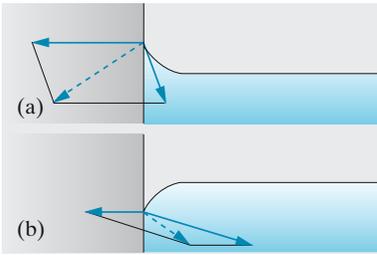


Abb. 3.31a,b. Randwinkel einer an eine Wand angrenzenden Flüssigkeitsoberfläche. Gleichgewicht herrscht, wenn die Resultierende senkrecht zur Oberfläche steht

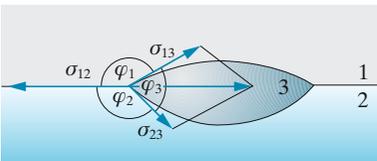


Abb. 3.32. Gestalt eines Fetttropfens auf Wasser

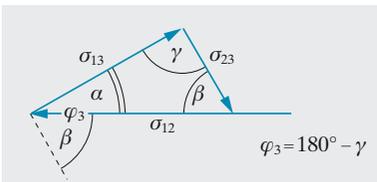


Abb. 3.33. Zur Berechnung des Randwinkels eines Fetttropfens auf einer Wasseroberfläche

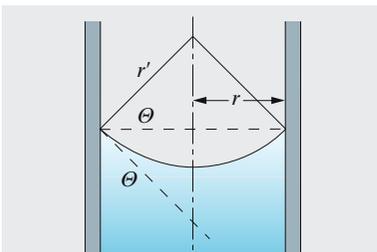


Abb. 3.34. Steighöhe einer unvollständig benetzenden Flüssigkeit in einem Rohr

Schreibt man dies als $2\pi r(\sigma_{13} - \sigma_{23}) = \pi \rho g r^2 h$, so sieht man deutlich, wie die Differenz der Randkräfte die Flüssigkeitssäule $\pi r^2 h$ hochzieht.

× Beispiel...

Vom Rand eines Glases mit sehr starkem Wein, besonders Portwein, perlen ständig Tropfen nieder. Wie kommt es dazu?

Ist der Glasrand einmal benetzt, dann verdampft aus der dünnen Flüssigkeitshaut vorzugsweise der Alkohol. Dadurch steigt die Oberflächenspannung in der Haut, und Flüssigkeit mit geringerer Oberflächenspannung wird aus dem Glas nachgezogen, bis die Haut so schwer geworden ist, dass sie sich in Tropfen aufspaltet, die allmählich hinuntergleiten. Außerdem wächst die Tendenz zur Tropfenbildung mit der Verarmung an Alkohol.

3.3 Strömungen

Dieser Abschnitt führt einige mathematische Begriffe ein, die für die Behandlung beliebiger Felder, also für alle Gebiete der Physik entscheidend wichtig sind und die später bei der Anwendung nur kurz rekapituliert werden.

3.3.1 Beschreibung von Strömungen

Wir schlämmen in einer strömenden Flüssigkeit Schwebeteilchen auf, möglichst glänzende oder farbige. Auf einer Momentphotographie (z. B. mit $\frac{1}{10}$ s Belichtungszeit) bei seitlicher Beleuchtung zeichnet jedes Teilchen einen kurzen Strich, der durch seine Länge und Richtung die dort herrschende Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{v} angibt (der Richtungssinn ist aus der Aufnahme nicht ohne weiteres abzulesen). Die ganze Strömung wird durch die Menge aller dieser Vektoren, das **Vektorfeld** $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ beschrieben. Der Vektor \mathbf{v} hat die rechtwinkligen Komponenten v_x , v_y , v_z . Wenn dieses Feld nicht von der Zeit abhängt, heißt die Strömung **stationär**.

Die Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v} , an hinreichend vielen Punkten gezeichnet, schließen sich zu **Stromlinien** zusammen, deren Tangentenvektoren sie sind. Davon zu unterscheiden sind die **Bahnl**inien. Man sieht sie auf einer *Zeitaufnahme* der Schwebeteilchen (z. B. 2 s Belichtungszeit). Stromlinien und Bahnl

inien sind zwar bei einer stationären Strömung identisch, werden aber verschieden, wenn das Feld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sich während der Zeitaufnahme ändert.

In strömenden *Flüssigkeiten* ist die Dichte ρ i. Allg. überall gleich, denn der Druck ist nirgends hoch genug, um sie wesentlich zu ändern. Strömungen mit konstantem ρ heißen **inkompressibel**. Auch *Gasströmungen* kann man oft als inkompressibel betrachten, außer bei Geschwindigkeiten, die der Schallgeschwindigkeit nahe kommen. In Schallwellen sind auch in Flüssigkeiten die Dichteschwankungen klein, aber wesentlich.

Wir stellen einen Rahmen, der eine Fläche A umspannt, senkrecht zur Strömungsrichtung in eine Flüssigkeit, die überall mit v fließt. In der

Zeit dt schiebt sich ein Flüssigkeitsvolumen $Av dt$ mit der Masse $\rho Av dt$ durch den Rahmen. Der **Fluss** durch die Fläche, d. h. die durchtretende Flüssigkeitsmasse pro Zeiteinheit, ist $\Phi = \rho v A$. Ändert sich v auf der Fläche, bleibt aber noch überall senkrecht dazu, dann muss man integrieren: $\Phi = \int_A \rho v dA$. Steht v schräg (unter einem Winkel α , Abb. 3.35) zu einem Flächenstück dA , dann zählt nur die Normalkomponente von v : $d\Phi = \rho v dA \cos \alpha$. Das lässt sich als Skalarprodukt ausdrücken, falls man vereinbart, Größe *und* Orientierung des Flächenstücks durch einen Normalvektor $d\mathbf{A}$ zu beschreiben, dessen Betrag die Größe des Flächenstücks angibt und der senkrecht auf ihm steht. Dann wird $d\Phi = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$.

Der Fluss durch eine beliebig geformte und orientierte, z. B. auch beliebig gekrümmte Fläche ist

$$\Phi = \int \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} . \quad (3.17)$$

Der Vektor $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ heißt auch **Stromdichte** der Strömung.

Wir betrachten jetzt eine *in sich geschlossene Fläche*, z. B. ein Netz, das über einen quaderförmigen Drahtrahmen gespannt ist. Bei einer solchen geschlossenen Fläche definiert man den *Richtungssinn* des Normalenvektors so, dass er überall nach außen zeigt. Der Gesamtfluss Φ durch eine solche Fläche ergibt sich dann als Differenz zwischen dem Abfluss an einigen Stellen und dem Zufluss an anderen. Wenn ein solcher Unterschied Φ besteht, heißt das, dass die eingeschlossene Masse ab- oder zunimmt, je nachdem ob Φ positiv oder negativ ist. In einer inkompressiblen Strömung ist das offenbar nicht möglich, es sei denn, dass jemand „von irgendwoher“ Masse dazutut oder wegnimmt. In vielen Strömungsproblemen ist es praktisch, solche **Quellen** oder **Senken** aus dem Strömungsbild herauszuschneiden, das sonst der Massenerhaltung entspricht. So behandelt man z. B. oft ein flaches Becken mit Zufluss durch senkrechte Rohre und Abfluss aus Löchern. Bei einer quellen- und senkenfreien inkompressiblen Strömung dagegen ist der Fluss durch jede geschlossene Fläche Null.

Als geschlossene Fläche nehmen wir jetzt die Wand eines sehr kleinen Quaders, der parallel zu den Koordinatenachsen orientiert sei und das Volumen $dV = dx dy dz$ habe (Abb. 3.36). Durch die vordere (der Strömung zugekehrte) Fläche $dy dz$ strömt ein Fluss

$$d\Phi_1 = -\rho v_x(x) dy dz$$

ein (das Minuszeichen deutet das *Einströmen* an; vgl. die Definition des Normalenvektors $d\mathbf{A}$). An der hinteren Fläche $dy dz$ kann v_x einen etwas anderen Wert $v_x(x + dx)$ haben. Der Ausstrom durch diese Fläche ist

$$d\Phi_2 = \rho v_x(x + dx) dy dz = \rho \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz .$$

Die Differenz zwischen Aus- und Einstrom durch die $dy dz$ -Flächen ist also

$$d\Phi_1 + d\Phi_2 = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dV .$$

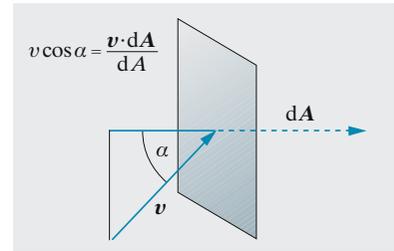


Abb. 3.35. Der Fluss $d\Phi$ durch ein Flächenstück dA ist gegeben durch die Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit: $d\Phi = \rho v \cos \alpha dA = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$

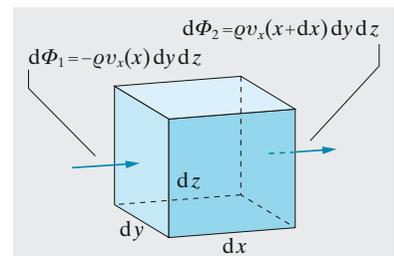


Abb. 3.36. Aus einem Volumenelement $dV = dx dy dz$ strömt in x -Richtung mehr Flüssigkeit aus als ein, wenn v_x nach rechts hin zunimmt: Ausstrom – Einstrom $= \rho dV \partial v_x / \partial x$; für alle drei Richtungen $\rho \operatorname{div} \mathbf{v} dV$

Die Flächen $dx dy$ und $dx dz$ liefern entsprechende Beiträge, die durch die Änderungen der beiden anderen v -Komponenten in den entsprechenden Richtungen bestimmt sind. Der Gesamtfluss durch den Quader ist

$$d\Phi = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV.$$

Das Symbol in Klammern, das für alle Vektorfelder eine entscheidende Rolle spielt, heißt **Divergenz** des Feldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (3.18)$$

Wenn $\operatorname{div} \mathbf{v}$ an einer Stelle von Null verschieden ist, muss sich die Dichte im dort gelegenen Volumenelement ändern:

$$d\Phi = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} dV = -\dot{\rho} dV$$

oder

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = -\dot{\rho}. \quad (3.19)$$

Das Minuszeichen stammt daher, dass die Divergenz als Überschuss des Ausstroms gegen den Einstrom definiert ist. Eine quellenfreie inkompressible Strömung hat offenbar überall $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Man nennt $\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{j}$ auch **Quelldichte**, unabhängig davon, ob es sich um eine Dichteänderung oder um Quellen im oben definierten Sinn handelt.

Wenn der Gesamtfluss durch die Oberfläche A eines Volumens V von Null verschieden ist, lässt sich die entsprechende Massenänderung durch Summierung über die Dichteänderungen in allen seinen Volumenelementen darstellen:

$$\Phi = \iint \rho \mathbf{v} dA = - \iiint_V \dot{\rho} dV = \iiint_V \rho \operatorname{div} \mathbf{v} dV. \quad (3.20)$$

Dieser Satz von **Gauß-Ostrogradski** gilt für beliebige Vektorfelder $\mathbf{v}(\mathbf{r})$.

In einer divergenzfreien Strömung verfolge man die **Stromlinien**, die durch die Berandung eines quer zur Strömung stehenden Flächenstücks gehen. Alle diese Stromlinien bilden einen Schlauch, eine **Stromröhre**. Da definitionsgemäß durch die Wände der Stromröhre keine Flüssigkeit ein- oder austritt, ist der Strom durch jeden Querschnitt der Stromröhre gleich. Wo die Röhre enger ist, muss die Strömung schneller sein. Aus Abb. 3.37 liest man ab

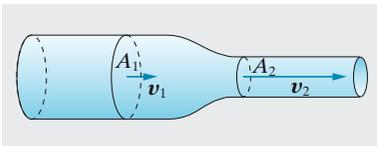


Abb. 3.37. Im engen Querschnitt strömt die Flüssigkeit schneller (Kontinuitätsgleichung)

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (\text{makroskopische Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömung}) \quad (3.21)$$

Umgekehrt: Wenn längs einer Stromlinie die Geschwindigkeit zunimmt, muss eine Verengung vorliegen. Wo die Stromlinien dichter liegen, strömt die Flüssigkeit schneller.

Unsere Schwebeteilchen, falls sie nicht zu klein sind, zeigen noch eine andere Eigenschaft der Strömung an, ihre **Rotation**. Wo die Teilchen sich drehen, hat die Strömung Rotation. Die Mitte des Teilchens treibt mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit v des Gebietes, das es einnimmt. Es gerät in Drehung, wenn v sich *quer* zu seiner eigenen Richtung ändert. Dies ist sogar in einem völlig geraden Bachbett mit parallelen Stromlinien der Fall, in dem das Wasser in der Mitte schneller strömt als am Rand (Abb. 3.39). Auch ein völlig eingetauchtes Wasserrad mit horizontaler Achse dreht sich, wenn der Bach nahe am Grund langsamer strömt als oben. Besser ist es natürlich in diesem Fall, zur Rückführung die Strömungsgeschwindigkeit Null mit praktisch fehlender Reibung in der Luft auszunutzen.

Wir betrachten einen kleinen Holzwürfel (Kantenlänge $2l$), der so auf dem Fluss treibt, dass zwei seiner Seitenflächen momentan parallel zur vorherrschenden Strömungsrichtung liegen (Abb. 3.40). Die Würfelmitte folgt translatorisch der Strömung. Wenn der Würfel sich nicht drehte, würde das Wasser rechts und links mit $\pm l dv/dx$ vorbeiströmen. Der Würfel rotiert gerade so schnell, dass dieses Vorbeiströmen und das Anströmen der Stirnflächen ausgeglichen werden, also mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = dv/dx$. Wenn die Strömung nicht in y -Richtung zeigt, ergibt sich die transversale v -Änderung, die ω bestimmt, als

$$\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{3.22}$$

Schwebende Teilchen können auch um nichtvertikale Drehachsen rotieren. Die Komponenten des Vektors der Kreisfrequenz, der in Richtung der Drehachse zeigt, ergeben sich analog zu (3.22) als

$$\omega = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \tag{3.23}$$

Formal ist dies das Vektorprodukt des Vektoroperators $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ (des **Nabla-Operators**) mit dem Vektor v . In ähnlicher Weise lässt sich $\text{div } v$ als Skalarprodukt $\text{div } v = \nabla \cdot v$, der Gradient im Skalarfeld $f(\mathbf{r})$ als Vektor ∇f darstellen.

Als Eigenschaft des Strömungsfeldes nennt man (3.23) die **Rotation**

$$\begin{aligned} \text{rot } v &= \nabla \times v \\ &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ein schwimmendes Teilchen rotiert so, dass die Relativgeschwindigkeit des Wassers längs seiner „Wasserlinie“ möglichst klein wird. Wenn es diese Geschwindigkeit nicht überall zum Verschwinden bringen kann, macht es wenigstens überall ihren Mittelwert zu Null, ausgedrückt durch das Linienintegral $\oint v \cdot ds$ über die geschlossene Berandungskurve. Hindert man das Teilchen am Rotieren und führt dieses Linienintegral im raumfesten Bezugssystem aus, dann erhält man einen nicht verschwindenden

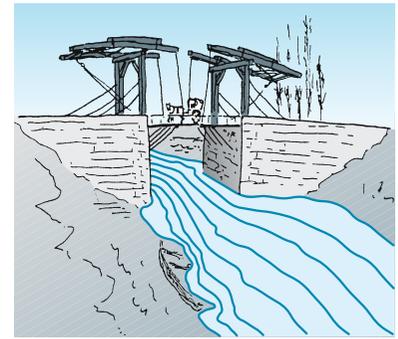


Abb. 3.38. Im engen Querschnitt drängen sich die Stromlinien zusammen. Das bedeutet auch höhere Strömungsgeschwindigkeit. Vorausgesetzt ist, dass der Fluss überall ungefähr gleich tief ist, damit die Oberflächenverteilung der Stromlinien den Vorgang beschreibt

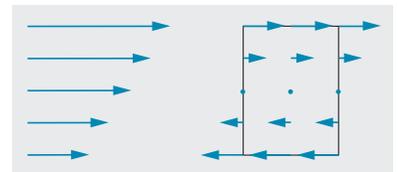


Abb. 3.39. Eine inhomogene Strömung enthält Wirbel. Rechts: Im mitbewegten Bezugssystem sieht man die Wirbel deutlicher. Der eingezeichnete Umlauf ergibt eine von Null verschiedene Zirkulation

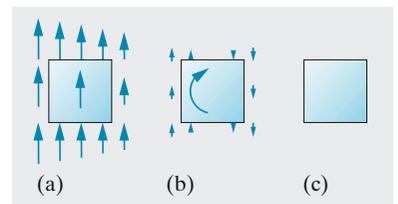


Abb. 3.40a–c. Strömungsverhältnisse um einen auf dem Fluss treibenden Holzklötz; (a) im Bezugssystem des Ufers, (b) in einem Bezugssystem, das mit dem Schwerpunkt des Klötzes mitreißt, aber nicht mitrotiert, (c) im mitrotierenden Bezugssystem

Wert. Dieses Integral heißt **Zirkulation**. In einem Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ stellt das Linienintegral $\int_C \mathbf{F} d\mathbf{s}$ genau die Arbeit bei einer Verschiebung längs der Kurve C dar. Wir wissen schon, dass sich durch diese Operation entscheiden lässt, ob ein Kraftfeld ein **Potential** hat. Dies ist der Fall, wenn dieses Linienintegral 0 ist. Nun gilt für jeden Vektor \mathbf{a} , dass sein Linienintegral über die geschlossene Kurve C gleich dem Flächenintegral von $\text{rot } \mathbf{a}$ über eine von C umrandete Fläche A ist:

$$\oint_C \mathbf{v} d\mathbf{s} = \iint_A \text{rot } \mathbf{v} dA \quad (\text{Satz von Stokes}) \quad (3.25)$$

Man kann also auch sagen: Ein Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ besitzt ein Potential $U(\mathbf{r})$, wenn $\text{rot } \mathbf{F}$ überall Null ist. Dann kann man die Kraft $\mathbf{F} = -\text{grad } U$ aus dem mathematisch einfacheren skalaren Potential ableiten. Entsprechend kann man auch das \mathbf{v} -Feld einer Strömung nach $\mathbf{v} = -\text{grad } U$ aus einem **Geschwindigkeitspotential** $U(\mathbf{r})$ ableiten, falls die Strömung rotationsfrei ist.

Ein großer Teil der klassischen Strömungslehre beschäftigt sich mit Potentialströmungen, besonders mit ebenen inkompressiblen Potentialströmungen. Die dabei vorauszusetzende Rotationsfreiheit ist durch die helmholtzschen Wirbelsätze (Abschn. 3.3.9), d. h. die Erhaltungstendenz der Wirbel gesichert. Wenn man weiß, dass eine Flüssigkeit einmal rotationsfrei war, bleibt sie es, sich selbst überlassen, immer und überall. Eine inkompressible Strömung ist außerdem divergenzfrei. Für das Geschwindigkeitspotential U ergibt sich dann

$$\text{div } \mathbf{v} = -\text{div grad } U = -\Delta U = 0 \quad .$$

Solche Strömungen gehorchen der Potentialgleichung für das Vakuum. Die mächtigen Mittel der Potentialtheorie werden damit verfügbar. Jedes Strömungsproblem dieser Art hat ein genau äquivalentes elektrostatisches oder Gravitationsproblem, das vielleicht schon längst gelöst ist.

Wir können hier nur auf die speziell für den Flugzeugbau sehr wichtige Methode der **konformen Abbildungen** hinweisen. Wenn man die Strömung um ein einfaches Profil P , z. B. einen Kreis kennt, den man sich in der komplexen z -Ebene gezeichnet denkt, kann man sofort auch die um ein beliebiges Profil P' bestimmen, falls man eine komplexe Funktion $f(z)$ findet, die P auf P' abbildet. Dieselbe Funktion bildet nämlich auch die beiden Strömungsbilder vollständig aufeinander ab. Mathematisch liegt das daran, dass eine Funktion $f(z)$, sofern sie **analytisch** ist, die Gültigkeit der Potentialgleichung $\Delta U = 0$ nicht beeinträchtigt.

Diese Methoden liefern der Wirklichkeit gut entsprechende Strömungsbilder, versagen aber vollkommen vor dem entscheidenden Problem des **Strömungswiderstandes**. Er ergibt sich für die wichtigsten umströmten Körper, z. B. eine Kugel oder einen Zylinder, als Null. Man sollte danach ein Boot ohne Kraftaufwand mit konstanter Geschwindigkeit durchs Wasser schieben können. Die Theorie der Potentialströmungen lehnt **Newtons** Ansatz für den Strömungswiderstand (Abschn. 1.5.9d und 1.6) ab. Zwar muss der bewegte Körper vorn das Wasser wegschieben, also beschleunigen, aber hinter im schließen sich die Stromlinien angeblich wieder so

glatt zusammen, dass die Bremsung vorn genau wieder ausgeglichen wird. Zur Lösung dieses Paradoxons braucht man zwei Begriffe: innere Reibung und Turbulenz. Damit ergibt sich in vielen praktischen Fällen wie durch ein Wunder eine Rechtfertigung des newtonschen Ansatzes (vgl. Abschn. 3.3.8).

3.3.2 Innere Reibung

Zwischen einer festen Wand (Abb. 3.41 links) und einer bewegten Platte (rechts) befinde sich eine dünne Flüssigkeitsschicht von der Dicke z . Um die Platte der Fläche A mit konstanter Geschwindigkeit v parallel zur Wand zu verschieben, braucht man eine Kraft

$$F = \eta A \frac{v}{z} \tag{3.26}$$

η , die Viskosität, beschreibt die Eigenschaften der Flüssigkeit. Dass A und v im Zähler stehen, ist klar, höchstens die Schichtdicke im Nenner überrascht. Es handelt sich ja aber nicht um eine Reibung zwischen Festkörper und Flüssigkeit – die an die Wände angrenzenden Schichten haften daran –, sondern um Reibung zwischen den einzelnen Flüssigkeitsschichten. Je kleiner z bei gegebenem v , desto schneller müssen die einzelnen Molekülschichten übereinander weggleiten.

In dem Spalt zwischen den ebenen Platten ändert sich die Strömungsgeschwindigkeit v linear mit der Koordinate z . Im allgemeinen Fall ist dieser Zusammenhang nicht linear. Dann kann man (3.26) nur jeweils auf eine sehr dünne Schicht dz anwenden. An ihr muss beiderseits die Kraft

$$F = \eta A \frac{dv}{dz} \tag{3.27}$$

angreifen, wobei A auch noch hinreichend klein sein muss, falls der Geschwindigkeitsgradient dv/dz sich senkrecht zur z -Richtung ändert. In diesem Fall reden wir besser von der **viskosen Schubspannung**

$$\sigma_\eta = \frac{dF}{dA} = \eta \frac{dv}{dz} \tag{3.28}$$

Nach (3.26) ist die Einheit der **Viskosität** $1 \text{ N s m}^{-2} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ (ältere CGS-Einheit: Poise = 1 P = $1 \text{ dyn s cm}^{-2} = 0,1 \text{ N s m}^{-2}$). Wasser hat bei 20°C $\eta = 10^{-3} \text{ N s m}^{-2}$. Manchmal benutzt man auch die **Fluidität** η^{-1} oder die **kinematische Zähigkeit** η/ρ (CGS-Einheit 1 Stokes = 1 St = $1 \text{ cm}^2/\text{s}$).

Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt mit steigender Temperatur sehr stark ab (vgl. Tabelle 3.2). Für viele Flüssigkeiten gilt in guter Näherung

$$\eta = \eta_\infty e^{b/T} \tag{3.29}$$

Man erklärt dies nach der Theorie der **Platzwechselvorgänge**. Die Scherung eines Flüssigkeitsvolumens, wie sie in der Anordnung von Abb. 3.41 verlangt wird, ist nur möglich, wenn Molekülschichten übereinander hinweggleiten. Flüssigkeitsmoleküle sind zwar nicht an Ruhelagen fixiert

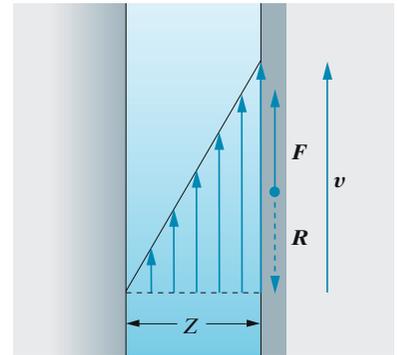


Abb. 3.41. Zwischen einer bewegten und einer ruhenden Platte bildet sich ein lineares Geschwindigkeitsprofil aus. Sein Gradient bestimmt die zum Verschieben nötige Kraft

Tabelle 3.2. Viskosität einiger Stoffe

	η N s m^{-2}	Temperatur $^\circ\text{C}$
Wasser	0,001 82	0
	0,001 025	20
	0,000 288	100
Ethylalkohol	0,001 21	20
Ethylether	0,000 248	20
Glyzerin	1,528	20
Luft (1 bar)	0,000 017 4	0
Wasserstoff (1 bar)	0,000 008 6	0

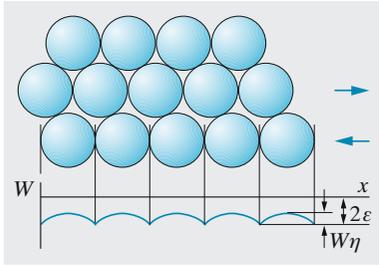


Abb. 3.42. Wenn eine Schicht von Kugeln über die darunterliegende gleitet, hat sie ein Potential der angegebenen Form zu überwinden. Die Höhe der Potentialbuckel W_η bestimmt die Viskosität der Flüssigkeit, die Energie 2ε der vollständigen Trennung ist die doppelte Oberflächenenergie

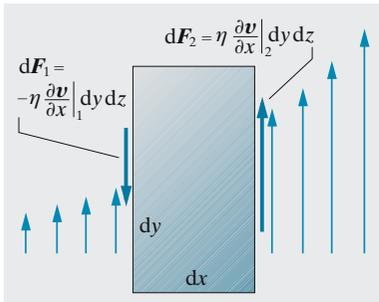


Abb. 3.43. Reibungskräfte auf ein Volumenelement in einer inhomogenen Strömung

wie die im Festkörper, aber die Verzahnung benachbarter Schichten bedingt Potentialwälle (Abb. 3.42), die nach **Boltzmann** umso leichter zu überspringen sind, je höher die Temperatur ist (vgl. Abschn. 5.2.9). b in (3.29) bedeutet im Wesentlichen die Höhe eines solchen Potentialwalls, die **Aktivierungsenergie** des Platzwechsels.

Die sehr viel geringere Viskosität der Gase nimmt dagegen mit steigender Temperatur zu (Begründung s. Abschn. 5.4.6).

3.3.3 Die laminare Strömung

Eine Strömung, deren Verhalten durch die innere Reibung bestimmt wird, heißt **laminare** oder **schlichte Strömung** (Gegensatz: turbulente Strömung). Strömungen wie Flüsse oder Wasser in der Wasserleitung sind i. Allg. turbulent; die Blutzirkulation ist normalerweise laminar. Bei laminaren Strömungen gleiten selbst sehr dünne Flüssigkeitsschichten glatt übereinander hin, bei turbulenten wirbeln sie ineinander. Mit Hilfe suspendierter Farbstoffteilchen sind beide Strömungsformen deutlich zu unterscheiden. Ein theoretisches Kriterium gibt die Reynolds-Zahl (Abschn. 3.3.5).

a) Reibungskräfte in strömenden Flüssigkeiten. Wir betrachten ein Volumenelement $dV = dx dy dz$ in einer Flüssigkeit, in der die Strömung in y -Richtung erfolgt und ein Geschwindigkeitsgefälle in x -Richtung hat. Auf die linke Stirnfläche wirkt eine Reibungskraft, die bestimmt ist durch das dort herrschende Geschwindigkeitsgefälle:

$$dF_1 = -\eta \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{\text{links}} dy dz .$$

Analog ist die Kraft entgegengesetzter Richtung auf die rechte Stirnfläche bestimmt durch das dortige Gefälle, das einen anderen Wert haben kann:

$$dF_2 = \eta \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{\text{rechts}} dy dz = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{\text{links}} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \right) dy dz .$$

Die Summe

$$dF_r = dF_2 + dF_1 = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dy dz = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dV$$

ist nur dann verschieden von Null, wenn das Geschwindigkeitsprofil gekrümmt ist (sonst gibt es zwar Drehmomente, aber keine translatorischen Kräfte). Für eine Strömung in z -Richtung gilt die gleiche Überlegung. Die Strömung in x -Richtung kann eine isolierte Reibungskomponente nur erfahren bei kompressiblen Flüssigkeiten, ansonsten wegen der Kontinuitätsgleichung nur bei gleichzeitiger Änderung in den anderen Richtungen. Also leistet jede Koordinate ihren Beitrag:

$$dF_r = \eta \Delta v dV = \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) dV . \quad (3.30)$$

Hier tritt wieder der **Laplace-Operator** $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ auf.

Die **Kraftdichte**, d. h. die Kraft/Volumen, ist für die innere Reibung

$$f_r = \eta \Delta v .$$

Dieser Ausdruck lässt sich auch vektoriell lesen, denn jede Komponente von v liefert, wenn man den Laplace-Operator auf sie anwendet, die entsprechende Kraftdichtekomponente.

b) Druckkraft. Wenn der Druck nicht überall gleich ist, sondern sich z. B. in x -Richtung ändert, wirkt auf das Volumenelement nach Abb. 3.44 eine Kraft

$$dF_p = p \, dy \, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \, dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dV .$$

Bei beliebiger Richtung des Druckgefälles folgt die Kraft dieser Richtung und hat die Komponenten $-dV \partial p / \partial x$, $-dV \partial p / \partial y$, $-dV \partial p / \partial z$, kurz zusammengefasst als

$$dF_p = - \text{grad } p \, dV . \tag{3.31}$$

Die Kraftdichte der Druckkraft ist einfach der Druckgradient

$$f_p = - \text{grad } p .$$

Durch diese beiden Kraftdichten f_r und f_p werden für laminare Strömungen Beschleunigung und Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen vollständig beschrieben. Äußere Volumenkräfte wie die Schwerkraft setzen sich nach Abschn. 3.1.4 in Druckkraft um.

c) Laminare Spaltströmung. Wenn eine Flüssigkeit zwischen ebenen ruhenden Platten mit zeitlich konstanter (stationärer) Geschwindigkeit v strömen soll, muss sie zur Überwindung der Reibung durch eine Kraft angetrieben werden, also durch ein Druckgefälle in Strömungsrichtung. An der Wand haftet die Flüssigkeit: $v = 0$; in der Mitte strömt sie am schnellsten mit $v = v_0$. An den Seitenflächen der herausgeschnittenen Schicht (Abb. 3.45), die symmetrisch zur Mittelebene liegt, herrscht beiderseits der Geschwindigkeitsgradient dv/dx , also wirkt auf die Schicht eine Reibungskraft $F_R = 2lb\eta \, dv/dx$. Sie muss gleich der Druckkraft auf die Stirnfläche, $F_p = 2xbl \, dp/dz$ sein, sonst würde die Flüssigkeit beschleunigt, d. h.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} x .$$

Das Profil $v(x)$, dessen Ableitung proportional zu x ist, muss eine Parabel mit dem Scheitel in der Mitte sein, wo die Flüssigkeit mit v_0 am schnellsten strömt:

$$v = v_0 - \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dz} x^2 = v_0 - \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} x^2 . \tag{3.32}$$

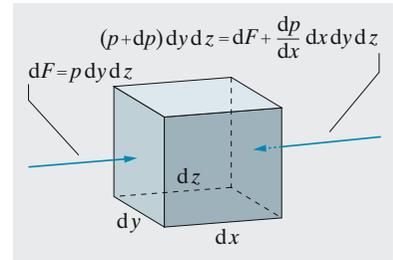


Abb. 3.44. Druckkräfte auf ein Volumenelement

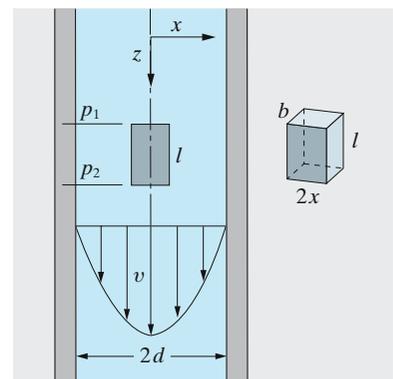


Abb. 3.45. Laminare Strömung zwischen ebenen, parallelen Platten

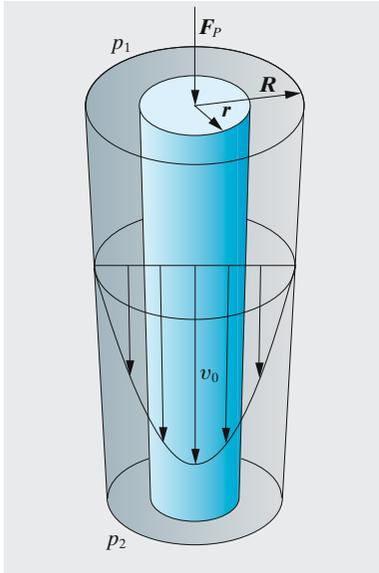


Abb. 3.46. Ein Flüssigkeitszylinder in einem Rohr wird von der Druckkraft angetrieben, von der Reibung zurückgehalten. Das Gleichgewicht beider liefert ein parabolisches v -Profil

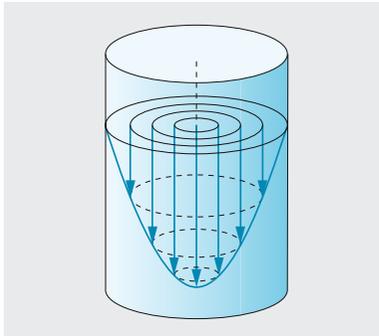


Abb. 3.47. Parabolisches v -Profil bei laminarer Strömung durch ein Rohr

Am Rand ($x = d$) muss $v = 0$ werden, also

$$v_0 = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} d^2. \quad (3.32')$$

d) Laminare Rohrströmung. Auch in einem Rohr haftet die Flüssigkeit am Rand und strömt in der Mitte am schnellsten. Das Geschwindigkeitsgefälle hat überall die Richtung des Rohrradius. Wir betrachten einen koaxialen Flüssigkeitszylinder vom Radius r und der Länge l (Abb. 3.46). An seiner Mantelfläche greift die Reibungskraft $F_R = 2\pi r l \eta \, dv/dr$ an, auf seine Deckfläche wirkt die Druckkraft $F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2)$. Im stationären Fall folgt aus $F_R = F_p$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r.$$

Wieder ergibt sich ein parabolisches Profil

$$v = v_0 - \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 \quad \text{mit} \quad v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (3.33)$$

Durch den Hohlzylinder zwischen r und $r + dr$ fließt der Volumenstrom $d\dot{V} = 2\pi r \, dr \, v(r)$, durch das ganze Rohr (Abb. 3.47)

$$\dot{V} = \int_0^R 2\pi r v(r) \, dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4 \quad (3.34)$$

(Gesetz von **Hagen-Poiseuille** oder ohmsches Gesetz für die laminare Rohrströmung).

Der **Strömungswiderstand** ist $8\eta l / \pi R^4$. Bei gleichem Druckgefälle fließt durch ein Rohr vom doppelten Radius 16mal so viel Flüssigkeit. Über das ganze Rohr gemittelt ist die Strömungsgeschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{\dot{V}}{\pi R^2} = \frac{1}{2} v_0.$$

Die Gesamtdruckkraft $F_p = \pi R^2 (p_1 - p_2)$ hängt mit dem Volumenstrom \dot{V} so zusammen:

$$F_p = \frac{8\eta l}{R^2} \dot{V}.$$

e) Laminare Strömung um Kugeln (Stokes). Zieht man eine Kugel vom Radius r mit der Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeit, so haften die unmittelbar benachbarten Flüssigkeitsschichten an der Kugel. In einiger Entfernung herrscht die Strömungsgeschwindigkeit Null. Diese Entfernung ist von der Größenordnung r , also ist das Geschwindigkeitsgefälle $dv/dz \approx v/r$. Auf der Oberfläche $4\pi r^2$ der Kugel greift also eine bremsende Kraft

$$F \approx \eta \frac{dv}{dz} 4\pi r^2 \approx -4\pi \eta v r$$

an. Mit dieser Kraft muss man ziehen, um die Geschwindigkeit v zu erzeugen. Die genauere (sehr aufwändige) Rechnung liefert

$$F = -6\pi\eta vr \quad (\text{Stokes-Gesetz}) \quad (3.35)$$

Die gleiche Kraft erfährt eine ruhende Kugel, die von einer Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v umströmt wird.

Das Gesetz von Hagen-Poiseuille – ebenso wie das von Stokes – können zur Messung von η dienen (**Kapillarviskosimeter, Kugelfallmethode**).

× Beispiel...

Wie schnell fällt der Regen? Studieren Sie das Fallen von Tröpfchen verschiedener Größe. Wie große Tropfen kann ein Aufwind noch hochtragen?

Ein Tropfen erreicht schon nach kurzer Fallstrecke die stationäre Geschwindigkeit, die durch Gleichheit von Gewicht und Luftwiderstand gegeben ist. Der Luftwiderstand ist $6\pi\eta vr$ oder $\pi r^2 v^2 \varrho_1$, je nachdem ob die Reynolds-Zahl $\varrho_1 vr / \eta$ klein oder groß ist. Die Grenze liegt etwa bei einem Tröpfchenradius $r_1 \approx \sqrt[3]{50\eta^2 / (\varrho_1 \varrho g)} \approx 0,1$ mm. Unterhalb gilt *Stokes*, also $v \approx 2g\varrho r^2 / (9\eta) \approx 10^8 r^2$, oberhalb *Newton*, also $v \approx \sqrt{g r \varrho / \varrho_1} \approx 100\sqrt{r}$ (r in m, v in m/s). Ein Aufwind von 10 m/s reißt noch Tropfen von 1 cm Durchmesser hoch.

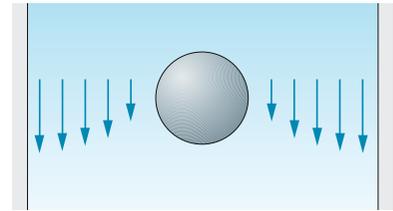


Abb. 3.48. Geschwindigkeitsprofil um eine Kugel, die von einer viskosen Flüssigkeit umströmt wird (schematisch)

f) Die Prandtl-Grenzschicht. An jedem durch die Flüssigkeit gezogenen Körper hängt eine laminare Schicht, die Grenzschicht. Das Geschwindigkeitsgefälle in ihr vermittelt den Übergang zwischen der Geschwindigkeit v des Körpers und der ruhenden Flüssigkeit in großem Abstand. Dieses Gefälle ist linear, wenn die Dicke D dieser Schicht klein gegen die Abmessungen l des Körpers ist. Dann „sieht“ die Flüssigkeit nur ein praktisch ebenes Wandstück.

Auf die umströmte Oberfläche A wirkt die Reibungskraft $F_R = \eta A v / D$. Wie dick ist die Grenzschicht? Wir verschieben den Körper z. B. um seine eigene Länge l und müssen dabei die Arbeit $W = F_R l = \eta A v l / D$ gegen die Reibung aufbringen. Mit Hilfe dieser Energie bauen wir eine neue Grenzschicht auf, d. h. eine neue Schicht der Fläche A mit der kinetischen Energie $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_0^D A \varrho dz (vz/D)^2 = \frac{1}{6} A \varrho v^2 D$. Aus $W = W_{\text{kin}}$ folgt

$$D = \sqrt{\frac{6\eta l}{\varrho v}} \quad (3.36)$$

Diese Grenzschicht ist dünn, $D \ll l$, wenn $\varrho v l / \eta \gg 1$. Andernfalls ist nach dem Reynolds-Kriterium (Abschn. 3.3.5) die Strömung als ganzes laminar, also der Begriff der Grenzschicht überflüssig. Bei $D \ll l$ wird der Strömungswiderstand

$$F_R \approx \eta A \frac{v}{D} \approx A \sqrt{\frac{v^3 \eta \varrho}{l}} \quad (3.37)$$

Wenn man $A \approx l^2$ setzt, sieht man, dass dieser Ausdruck das geometrische Mittel zwischen dem Stokes-Widerstand ($\approx \eta vl$) und dem Newton-Widerstand ($\approx l^2 \rho v^2$, Abschn. 1.5.9d und 1.6) bildet. Für Schiffe oder Flugzeuge liefert der Stokes-Ansatz nämlich einen zu kleinen Widerstand, weil er die Turbulenz ganz ausschließt, der newtonsche einen zu großen, weil er die Stromlinienform ungenügend berücksichtigt. Die Prandtl-Schicht begrenzt den Wärme- und Stoffaustausch zwischen Fluid und Wand, z. B. den Wärmeverlust an Mauern und Fenstern, den CO_2 - oder H_2O -Austausch an Pflanzenblättern, die Verdunstung an Flüssigkeitsoberflächen: Wärme fließt nur durch Leitung, Stoffe fließen nur infolge Diffusion durch die Grenzschicht, also viel langsamer, als wenn das Fluid sie konvektiv abführte.

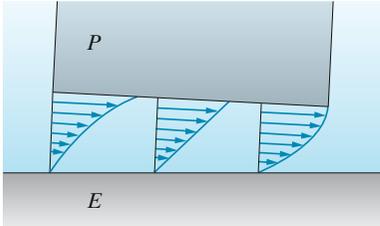


Abb. 3.49. Das v -Profil in einer zähen Flüssigkeit zwischen einer bewegten und einer ruhenden Platte wird recht kompliziert, wenn man das Gewicht der einen Platte oder ihren sonstigen Andruck berücksichtigt

g) Schmiermittelreibung. Warum setzt Öl die **Gleitreibung** herab? Wir behandeln (angenähert) den einfachsten Fall: Eine Platte P mit der Grundfläche $A = lb$, belastet durch die Normalkraft F , gleitet mit der Geschwindigkeit v auf einer Ebene E . Dazwischen befindet sich ein Ölfilm von der Dicke d , die wir ebenfalls bestimmen müssen. Hauptsächlich geht es um die bremsende Tangentialkraft F_R bzw. um ihr Verhältnis $\mu = F_R/F$ zur Normalkraft, um den Reibungskoeffizienten.

Wenn der Ölfilm nirgends verletzt ist, wird die Reibungskraft F_R nur durch die innere Reibung im mitfließenden Öl bedingt. Der Geschwindigkeitsgradient in der Ölschicht ist ungefähr v/d , also

$$F_R \approx A \eta \frac{v}{d}. \quad (3.38)$$

Andererseits muss der Ölfilm die Normalkraft F tragen, sonst würde er seitlich herausgequetscht. Im Ölfilm unter der Platte muss also im Durchschnitt der Druck $p = F/A$ herrschen (Abb. 3.49). In der Mitte ist der Druck natürlich höher als am Rand der Platte, wo er in den normalen Luftdruck p_0 übergeht. Unter einer solchen Druckdifferenz zwischen Mitte und außen würde sich zwischen ruhenden Platten eine Spaltströmung gemäß Abschn. 3.3.3c mit parabolisch gekrümmtem v -Profil ausbilden. Die Krümmung ist ebenso wie dort von der Größenordnung $d^2 v/dy^2 = v'' \approx v/d^2$. Diese Krümmung bleibt erhalten, wenn wir diese Strömung mit derjenigen überlagern, die durch die bewegte obere Wand mitgezogen wird. Nach (3.30) und (3.31) entspricht einer solchen Krümmung v'' ein Druckgradient

$$\text{grad } p = \frac{dp}{dx} \approx \eta \frac{v}{d^2} \quad (3.39)$$

längs des Spaltes. Dieser Gradient ist überall zur Mitte hin gerichtet. In der Mitte herrscht also ein Überdruck von der Größenordnung

$$p \approx l \text{ grad } p \approx \eta \frac{vl}{d^2}. \quad (3.40)$$

Der Ölfilm trägt also die Normalkraft

$$F = pA \approx \eta A \frac{vl}{d^2}.$$

Der Reibungskoeffizient ist $\mu = F_R/F \approx d/l$. Mit dieser Formel, so einfach sie ist, kann man nicht viel anfangen, da man i. Allg. die Ölfilmstärke d nicht kennt. Man kann sie aber nach (3.40) durch bekannte Größen ausdrücken: $d \approx \sqrt{\eta vl/p}$. So erhält man schließlich

$$\mu \approx \sqrt{\frac{\eta v}{pl}} \approx \sqrt{\frac{\eta vb}{F}}. \quad (3.41)$$

Ein leichtes Schmieröl mit $\mu = 0,1 \text{ N s m}^{-2}$ ergibt mit $v = 10 \text{ m s}^{-1}$, $b = 0,1 \text{ m}$ und $F = 10^3 \text{ N}$ eine Reibungskraft $F_R \approx 1 \text{ N}$, die mehrere hundertmal geringer ist als bei trockener Reibung. μ hängt hier im Gegensatz zur trockenen Reibung von der Geschwindigkeit, der Normalkraft und der Auflagefläche ab, wenn auch nur schwach.

Ein Wasserfilm zwischen Reifen und Straße kann die Bodenhaftung eines Fahrzeuges ebenfalls um Größenordnungen herabsetzen (*Aquaplaning*). Es gibt Gletscher, die von Zeit zu Zeit ruckartig zu Tal stürzen, weil sich an ihrer Sohle ein Schmierfilm aus Schmelzwasser gebildet hat (*surge glaciers*).

3.3.4 Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit

Auch in zusammenhängender Materie gilt für jedes Teilvolumen die newtonsche Bewegungsgleichung: Die Beschleunigung ist gleich der Summe der angreifenden Kräfte, dividiert durch die Masse des Teilvolumens. An Kräften kann man unterscheiden:

- Volumenkräfte, d. h. von außen angreifende Kräfte ($d\mathbf{F}_{\text{ext}} = \varrho \mathbf{a}_{\text{ext}} dV$), die dem Volumen bzw. der Masse proportional sind (z. B. die Schwerkraft, $d\mathbf{F}_{\text{ext}} = \varrho \mathbf{g} dV$);
- Kräfte, die auf Druckgefälle zurückzuführen sind, $d\mathbf{F}_p = -\text{grad } p dV$;
- Reibungskräfte $d\mathbf{F}_R = \eta \Delta \mathbf{v} dV$.

Wenn die Summe aller dieser Kräfte verschwindet, herrscht Gleichgewicht. Es treten dann keine Beschleunigungen von Flüssigkeitsteilchen auf. Wenn die Gesamtkraft nicht verschwindet, bewirkt sie eine Beschleunigung. In dieser Beschleunigung \mathbf{a} eines Teilvolumens sind zwei Anteile zu unterscheiden: Der eine (\mathbf{a}_1) stammt daher, dass die Geschwindigkeit am Ort, wo sich das Teilvolumen gerade befindet, zu- oder abnimmt, im stationären Fall also $\mathbf{a}_1 = 0$, der andere (\mathbf{a}_2) daher, dass das Teilvolumen an eine Stelle geführt wird, wo die Strömungsgeschwindigkeit anders ist. So ergibt sich aus der newtonschen Bewegungsgleichung die

$$\boxed{\text{Navier-Stokes-Gleichung}} \quad \varrho(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = -\text{grad } p + \varrho \mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (3.42)$$

Je nach Lage der Dinge kann man einige dieser Anteile vernachlässigen. Man unterscheidet

- Strömungen **idealer Flüssigkeiten**: Reibungskräfte sind zu vernachlässigen (Viskosität $\eta \approx 0$ in (3.42)). Auf diesen Fall lassen sich viele Gesetze der Potentialtheorie und der Theorie komplexer Funktionen übertragen. Mit einigen Zusatzannahmen reicht das für viele Probleme aus.
- **Laminare Strömungen**: Die inneren Reibungskräfte ($\eta \Delta \mathbf{v}$) sind entscheidend, wobei das Strömungsfeld durch die Druckkräfte bestimmt wird. Flüssigkeitsschichten gleiten übereinander, ohne sich zu mischen. Die Geschwindigkeitsänderungen (\mathbf{a}_2) sind so gering, dass sie keinen Einfluss auf das System haben.
- **Turbulente Strömungen**: Unter bestimmten Bedingungen, z. B. bei großen Änderungen der Geschwindigkeit entlang der Strömungslinien, wird die laminare Strömung instabil und geht über in die turbulente

Strömung, in der der Trägheitsterm ρa_2 nicht mehr vernachlässigt werden kann.

✘ Beispiel . . .

Sind folgende Strömungen laminar oder turbulent: Ein Bach, die Wasserleitung, der Luftstrom durch die Nase beim Atmen, der Blutstrom in der Aorta, in den Kapillaren?

Bach: $v = 1\text{--}10\text{ m/s}$, $d \approx 1\text{ m}$, $\rho = 10^3\text{ kg/m}^3$, $\eta = 10^{-3}\text{ N s/m}^2$, $Re \approx 10^6$ bis 10^7 : Immer turbulent. Wasserleitung: $v = 0,1\text{--}1\text{ m/s}$, $d \approx 1\text{ cm}$, $Re \approx 10^3$ bis 10^4 : Übergang laminar-turbulent. Aorta: $d = 1,5\text{ cm}$, $v = 0,1\text{ m/s}$ (Herzfrequenz $1,2\text{ Hz}$, Kammervolumen 50 cm^3), $\eta = 8 \cdot 10^{-3}\text{ N s m}^{-2}$, $Re = 200$: Laminar, außer bei krankhafter Gefäßverengung. Atemwege: $d \approx 0,5\text{ cm}$, $v \approx 15\text{ m/s}$ ($0,5\text{ l}$ Respirationsluft, normale Atemfrequenz $0,3\text{ Hz}$), $\rho = 1,3\text{ kg m}^{-3}$, $\eta = 2 \cdot 10^{-5}\text{ N s m}^{-2}$, $Re \approx 10^4$: Turbulent, besonders bei Erkältung.

3.3.5 Kriterien für die verschiedenen Strömungstypen

Welcher Strömungstyp (ideal, laminar, turbulent usw.) gilt unter gegebenen Bedingungen, d. h. bei gegebenen Abmessungen l von Gefäß oder umströmtem Körper und bei gegebener Strömungsgeschwindigkeit v , ferner bei gegebener Dichte ρ und Viskosität η der Flüssigkeit? Wir betrachten, wie das für die meisten praktischen Probleme ausreicht, **stationäre Strömungen**, d. h. solche, bei denen die Geschwindigkeit, die an den einzelnen Stellen des Strömungsfeldes herrscht, nicht von der Zeit abhängt. Damit ist in (3.42) $a_1 = 0$. Dagegen kann die Geschwindigkeit an den einzelnen Stellen verschieden sein. Wenn man mit einem gegebenen Flüssigkeitsteilchen mitreist, kann man also durchaus eine Beschleunigung a_2 erfahren. Diese Beschleunigung ist umso größer, je schneller sich die Geschwindigkeit räumlich ändert, je größer also ihr Gradient ist. l_1 sei die Strecke, auf der eine wesentliche Geschwindigkeitsänderung erfolgt. Ein Teilchen durchläuft sie in der Zeit $t \approx l_1/v$. In dieser Zeit ändert sich seine Geschwindigkeit etwa um v , also ergibt sich seine Beschleunigung zu $a_2 = v/t \approx v^2/l_1$. Ähnlich kann man die Größenordnung der übrigen Glieder in (3.42) abschätzen. Für die **Druckkraftdichte** $\text{grad } p$ ergibt sich etwa p/l_2 , für die **Reibungskraftdichte** $\eta \Delta v$ etwa $\eta v/l_3^2$. Allerdings können die drei auftretenden Abmessungen l_1, l_2, l_3 je nach der Geometrie der Anordnung ziemlich verschiedene Werte haben.

In der Navier-Stokes-Gleichung für stationäre Strömungen

$$\rho a_2 = -\text{grad } p + \eta \Delta v \quad (3.43)$$

oder formuliert als Beziehung zwischen den Größenordnungen von Trägheits-, Druck- und Reibungskraftdichte

$$\frac{\rho v^2}{l_1} \approx \frac{p}{l_2} + \frac{\eta v}{l_3^2}$$

kann jeweils ein Glied klein gegen die beiden anderen sein, die einander ausgleichen müssen:

1. Die Reibung ist zu vernachlässigen: $\eta v/l_3^2 \ll p/l_2 \approx \rho v^2/l_1$. Wenn $l_2 \approx l_1$, folgt $p \approx \frac{1}{2}\rho v^2$ (vgl. Abschn. 3.3.6). Dies beschreibt die ideale Strömung, bei der die Reibung ganz weggedacht werden kann, aber auch die turbulente Strömung, bei der die Reibung in der Erzeugung von Wirbelbewegungen kleinen Ausmaßes in statistischer Zeitabhängigkeit eine sekundäre Rolle spielt. In beiden Fällen ergeben sich in der strömenden Flüssigkeit Drücke oder Druckdifferenzen von der Größenordnung $\frac{1}{2}\rho v^2$. Sie führen zum Staudruck, zum statischen Druck (Abschn. 3.3.6), zum Strömungswiderstand und letzten Endes auch zum **dynamischen Auftrieb** (Abschn. 3.3.9).
2. Die Trägheitskraft ist zu vernachlässigen: $\rho v^2/l_1 \ll p/l_2 \approx \eta v/l_3^2$. In diesem Fall kommen wir mit grad $p = \eta \Delta v$ zur laminaren Strömung (Abschn. 3.3.3).
3. Der Fall $p/l_2 \ll \rho v^2/l_1 \approx \eta v/l_3^2$ ist praktisch von geringerer Bedeutung. Der Übergang zwischen (1) und (2) erfolgt bei

$$\frac{\eta v}{l_3^2} \approx \frac{p}{l_2} \approx \frac{\rho v^2}{l_1}, \quad \text{oder} \quad \frac{\rho v l_3^2}{\eta l_1} \approx 1 \quad \text{und} \quad \frac{p l_1}{\rho v^2 l_2} \approx 1. \quad (3.44)$$

Diese beiden Kriterien beherrschen die **hydrodynamische Ähnlichkeitstheorie**: Ein verkleinertes oder vergrößertes Modell eines Strömungsvorganges, z. B. im **Windkanal**, liefert nur dann ein physikalisch richtiges Abbild, wenn dabei die Zahlen $\rho v l_3^2/(\eta l_1)$ und $p l_1/(\rho v^2 l_2)$ den gleichen Wert haben wie im abzubildenden Vorgang. Da geometrische Ähnlichkeit garantiert ist, kann man die l „kürzen“ und Übereinstimmung nur von $\rho v l/\eta$ und $p/(\rho v^2)$ fordern.

$Re = \rho v l/\eta$ heisst **Reynolds-Zahl** des Strömungsvorganges. (3.45)

Die Strömung ist laminar für sehr kleine $\rho v l_3^2/(2\eta l_1)$, turbulent für große Werte dieses Ausdruckes. Da $l_3 \neq l_1$, kann man nicht erwarten, dass der Umschlag gerade bei einer Reynolds-Zahl $\rho v l/\eta \approx 1$ erfolgt, wo l die makroskopischen Abmessungen der um- oder durchströmten Objekte darstellt. Die Abmessungen l_3 der Turbulenzwirbel sind nämlich wesentlich kleiner als z. B. der Rohrradius $l_1 = r$. Dementsprechend findet man in Rohren den Umschlag bei $\rho v r/\eta \approx 1\,000 - 2\,000$. Die typischen Wirbelabmessungen betragen also nur etwa $\frac{1}{30}$ des Rohrradius.

Beim Umschlag von laminar zu turbulent wächst der Strömungswiderstand erheblich an. Er ist nicht mehr proportional zu v wie im laminaren Fall, sondern wird proportional zu v^2 . Für eine Kugel geht der Stokes-Widerstand $F = 6\pi\eta r v$ in einen newtonschen Widerstand $F = \frac{1}{2}\rho A v^2$ über. In einem Rohr tritt ein ähnlicher Knick in der Funktion $F(v)$ auf, aber erst bei einer höheren Reynolds-Zahl ($Re \approx 1\,000$; Abb. 3.50). Wo es auf einen minimalen Widerstand ankommt (Blutkreislauf), ist Turbulenz verderblich; bei Heizungs- oder Kühlrohren kann sie dagegen erwünscht sein.

Der laminare und der turbulente Zustand können mit zwei Aggregatzuständen verglichen werden, von denen jeder unter verschiedenen Bedingungen stabil ist. Der laminare Zustand kann aber „unterkühlt“ werden, da die Turbulenzentstehung eine Art Keimbildung fordert. Eine Flüssigkeit durchströme ein Rohr zunächst la-

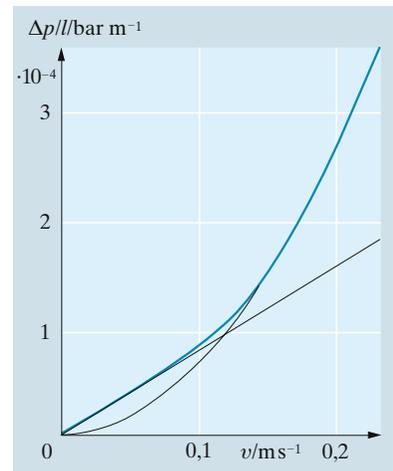


Abb. 3.50. Druckabfall in einem Rohr in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit (Zahlenwerte für Wasser in einem Rohr von 1 cm Radius; Genaueres in Abb. 3.68)

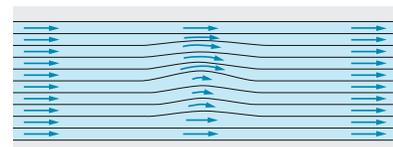


Abb. 3.51. Beschreibung einer Strömung durch Stromlinien, in der Mitte Turbulenzkeim

minar mit völlig parallelen Stromlinien. Irgendwo trete eine kleine Störung auf, die eine Stromlinie etwas nach oben verbiegt (Abb. 3.51). Dadurch wird die darüber liegende Stromröhre verengt, und die Flüssigkeit muss dort schneller fließen. Vergrößerung der Strömungsgeschwindigkeit v ist aber wegen des Trägheitsgesetzes stets mit Druckerniedrigung verbunden (vgl. (3.46): $p = \text{const} - \frac{1}{2}\rho v^2$). Aus dem gleichen Grunde wird der Druck unterhalb der gestörten Stromlinie vergrößert. Unter dem Einfluss der Trägheit allein, der proportional ρv^2 ist, würde sich also die Störung vergrößern, die Strömung „instabil“ und demzufolge turbulent werden. Dem wirkt aber die innere Reibung entgegen. Sie versucht, das Geschwindigkeitsgefälle in der Störung abzubauen. Ihr Einfluss ist proportional zu η und zum Geschwindigkeitsgefälle v/r , wobei für r eigentlich die Abmessung der Störung einzusetzen ist. Ob die Strömung laminar bleibt oder turbulent wird, hängt davon ab, ob der Trägheitseinfluss $\frac{1}{2}\rho v^2$ oder der Reibungseinfluss $\eta v/r$ überwiegt. Das Verhältnis beider ist die Reynolds-Zahl, wenn man für r den Rohrradius nimmt.

3.3.6 Strömung idealer Flüssigkeiten

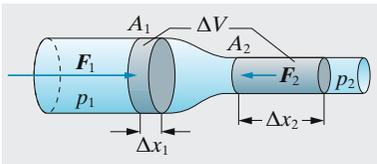


Abb. 3.52. Wo die Flüssigkeit schneller strömt, muss der Druck geringer sein, denn der Zuwachs an kinetischer Energie kann nur aus der Druckarbeit stammen

In **idealen Flüssigkeiten** wirken keine Reibungskräfte. Daher muss jede Druckarbeit, die man auf ein Volumen ausübt, als vermehrte kinetische Energie dieses Volumens wieder auftauchen. Wir wenden dies auf einen Stromfaden an, der sich z. B. verengt (Abb. 3.52), sodass nach der Kontinuitätsgleichung die Flüssigkeit im engeren Teil schneller strömt. Die zusätzliche kinetische Energie kann sie nur aus einer Druckarbeit haben (der Stromfaden liege horizontal, sodass sich Volumenkräfte wie die Schwerkraft nicht auswirken). Wenn das Flüssigkeitsvolumen $\Delta V = A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$ durch den Stromfaden geschoben wird, verrichtet der Druck p_1 von hinten die Arbeit $\Delta W_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V$. Sie dient z. T. dazu, den Gegendruck p_2 zu überwinden, also die Arbeit $\Delta W_2 = p_2 A_2 \Delta x_2 = p_2 \Delta V$ zu verrichten. Die Differenz $\Delta W_1 - \Delta W_2$ erscheint als Zuwachs zur kinetischen Energie

$$(p_1 - p_2) \Delta V = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2).$$

Längs des ganzen Stromfadens, allgemein auf jeder Potentialfläche der äußeren Volumenkräfte, im Fall der Schwerkraft also überall auf gleicher Höhe gilt die

Gleichung von **Daniel Bernoulli**

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + p_0 = \text{const}$$

(3.46)

p_0 ist der Druck, der in der ruhenden Flüssigkeit herrschen würde, z. B. der Luftdruck plus dem hydrostatischen Druck ρgh . Die Summe aus dem **statischen Druck** p und dem **Staudruck** $\frac{1}{2} \rho v^2$ hat in gegebener Tiefe überall den gleichen Wert.

✘ Beispiel...

Schätzen Sie die Antriebskraft, die der Crawlschwimmer aus seinem Armschlag bezieht (der Beinschlag ist hydrodynamisch viel komplizierter). Wie schnell dürfte ihn diese Kraft vorwärts bringen?

Effektive Fläche von Arm und Hand $A \approx 0,1 \text{ m}^2$, Schlagfrequenz 2 s^{-1} , also mittlere Geschwindigkeit von Hand und Arm $v \approx 1 \text{ m/s}$, ▶

newtonscher Strömungswiderstand $F \approx \rho A v^2 \approx 100 \text{ N}$ (ein Arm ist ständig im Wasser!). Schwimgeschwindigkeit $v \approx A/\text{effektiver Körperquerschnitt}$, also etwa $0,5 \text{ m/s}$, damit Leistung $\approx 50 \text{ W} \approx 0,07 \text{ PS}$. Die Beinarbeit leistet offenbar einen weit größeren Beitrag, was man auch ohne diese äußerst grobe Abschätzung wusste.

Man kann die Beschränkung auf konstante Tiefe fallen lassen, muss dann aber die potentielle Energie der Schwere, ebenfalls bezogen auf die Volumeneinheit, allgemein die *potentielle Energiedichte* e_{pot} der äußeren Kräfte, mitberücksichtigen. Schon in der ruhenden Flüssigkeit ist $p + \rho gh$ überall konstant, in der bewegten ist es die Größe $\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho gh$ oder allgemein

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + e_{\text{pot}} = \text{const} \quad (3.47)$$

Die Bernoulli-Gleichung ist der Energiesatz. Eigentlich gibt es auch Kompressionsenergie, aber bei Flüssigkeiten ist sie zu vernachlässigen, vielfach sogar bei Gasen. Unter extremen Bedingungen, z. B. in Stoßwellen, gehört auch die Kompressionsenergie in die Bernoulli-Gleichung (Abschn. 3.3.6, 4.3.7).

Der statische Druck p ist der Druck, den ein **Manometer** oder eine **Drucksonde** (Abb. 3.53) anzeigt, wenn die Flüssigkeit oder das Gas tangential an den seitlich angebrachten Messöffnungen vorbeiströmt. Der Gesamtdruck $p + \frac{1}{2}\rho v^2$ lässt sich ebenfalls direkt messen, wenn man dafür sorgt, dass an der Messöffnung $v = 0$ ist. Dies ist der Fall in der Symmetrieachse eines Stromlinienkörpers, in der sich die Strömung gerade teilt. Denkt man sich in Abb. 3.54 die seitlichen Öffnungen verschlossen und den linken U-Rohrschenkel frei an der Luft endend, so erhält man ein **Pitot-Rohr**, das den Gesamtdruck misst. Das **prandtlische Staurohr** (Abb. 3.54) bestimmt direkt die Differenz zwischen Gesamtdruck und statischem Druck, also den Staudruck $\frac{1}{2}\rho v^2$, liefert also ein direktes Maß für die Strömungsgeschwindigkeit.

a) Ausströmen aus einem Loch. Innerhalb eines kleinen Loches in einer Gefäßwand habe das Fluid den Druck p . Er kann ein hydrostatischer Druck $p = \rho gh$ sein, wenn das Loch um h unter der Oberfläche liegt, oder als Kolbenüberdruck zustandekommen. Weil das Loch klein ist, gerät das Fluid *innerhalb* davon noch nicht merklich ins Strömen: $v = 0$. *Draußen*, wo der Druck $p = 0$ ist, spritzt ein Strahl mit der Geschwindigkeit v hervor (Abb. 3.55). Nach *Bernoulli* ist aber $p + \frac{1}{2}\rho v^2$ beiderseits gleich, also

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}, \quad (3.48)$$

oder bei reinem Schweredruck (Abb. 3.56)

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3.49)$$

E. Torricelli leitete (3.49) aus dem Energiesatz her (1640): Die Lage ist so, als sei das ausgeströmte Volumen um die Höhe h gefallen; dass die

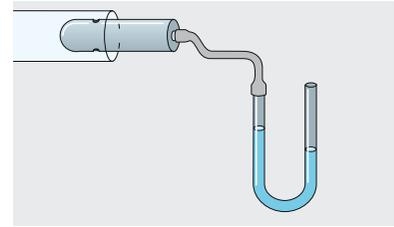


Abb. 3.53. Manometer zur Messung des statischen Druckes p in einem strömenden Gas

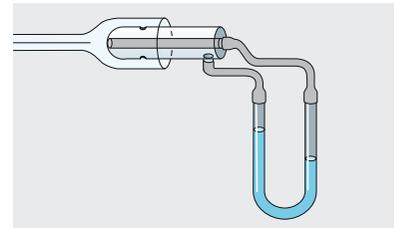


Abb. 3.54. Prandtl'sches Staurohr. $\frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 - p$ ist gleich der Druckdifferenz der Flüssigkeitssäulen im Manometer

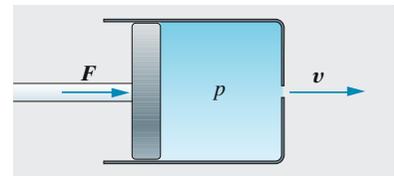


Abb. 3.55. Ausströmung unter der Wirkung eines Kolbendruckes

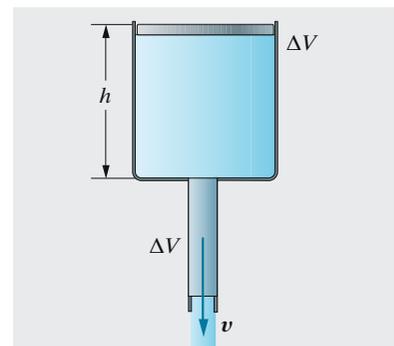


Abb. 3.56. Ausströmung aus enger Öffnung unter der Wirkung der Schwerkraft

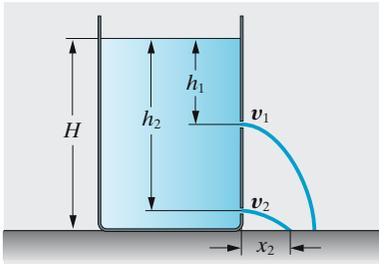


Abb. 3.57. Aus welcher Höhe kommt der Strahl am weitesten? $x = vt = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}$ ist maximal bei $h = \frac{1}{2}H$

www.

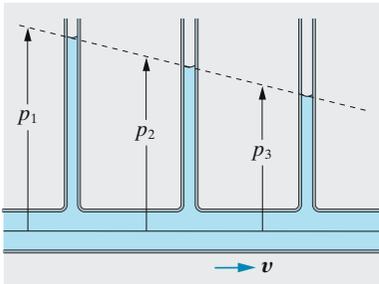


Abb. 3.58. Druckabfall in einem durchströmten Rohr mit überall gleichem Querschnitt

www.

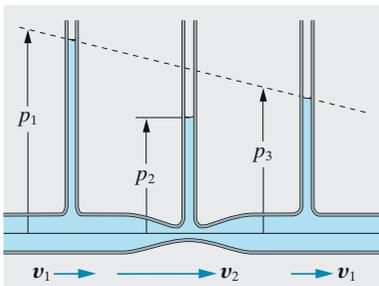


Abb. 3.59. Druckverteilung in einem durchströmten Rohr mit einer Einschnürung

Teilchen, die aus dem Loch kommen, nicht identisch sind mit denen, die oben den Spiegel sinken lassen, spielt energetisch keine Rolle.

Bei gleichem Überdruck verhalten sich die Ausströmgeschwindigkeiten zweier Fluide umgekehrt wie die Wurzeln aus ihren Dichten: $v_1/v_2 = \sqrt{\rho_2/\rho_1}$. Mit dem **Effusiometer** von **Bunsen** kann man so die Dichten und bei Gasen die Molmassen vergleichen.

b) Weitere Beispiele zur Bernoulli-Gleichung. In Abb. 3.58 und 3.59 zeigen die aufgesetzten Flüssigkeitsmanometer direkt den statischen Druck an. Bei ruhender Flüssigkeit im horizontalen Rohr stehen sie alle gleich hoch. Der lineare Druckabfall beim Strömen (Abb. 3.58) rührt von der inneren Reibung her; in idealen Flüssigkeiten müsste er verschwinden. An einer Einschnürung ist der Druck geringer (Abb. 3.59), weil die Flüssigkeit dort schneller strömt. Im **Bunsenbrenner** (Abb. 3.60) saugt der statische Unterdruck des einströmenden Gases selbst die Verbrennungsluft an. Die Saugwirkung der **Wasserstrahlpumpe** beruht auf dem gleichen Prinzip.

Aus einem Rohr (Abb. 3.61), das am Ende einen kreisförmigen Flansch P_1 trägt, strömt eine Flüssigkeit oder ein Gas gegen eine vor ihm parallel stehende Platte P_2 und strömt seitlich ab. Überraschenderweise wird P_2 i. Allg. nicht abgestoßen, sondern angezogen (**hydrodynamisches Paradoxon**). Im Zentrum der Platte ist die Strömungsgeschwindigkeit hoch, an den Rändern dagegen klein und der Druck muss dem Umgebungsdruck entsprechen. Nach Bernoulli entsteht im Zentrum ein Unterdruck, der für die Andruckkraft verantwortlich ist (Abb. 3.62).

c) Kavitation. Wenn die Strömungsgeschwindigkeit den Wert $v_K = \sqrt{2p_0/\rho}$ erreicht oder überschreitet, wird der statische Druck null oder negativ. Solche Geschwindigkeiten (im Wasser nur $v_K = 14$ m/s) werden an allen schnellen Wasserfahrzeugen, bei langsamen zumindest an den Schrauben, ferner an Turbinenschaufeln, in Flüssigkeitspumpen leicht erreicht. Schon etwas vorher sinkt der statische Druck unter den Dampfdruck der Flüssigkeit, der einige mbar beträgt. Es bilden sich Gasblasen, besonders wenn mikroskopische Luftbläschen als Keime bereits vorhanden sind, was schwer vermeidbar ist. Wo die Strömung wieder langsamer wird und p den Dampfdruck wieder überschreitet, brechen diese Gasblasen implosionsartig (praktisch mit Schallgeschwindigkeit) zusammen. Dabei können im zusammenstürzenden Hohlraum sehr hohe Drücke entstehen (u. U. Tausende von bar).

Der Ingenieur fürchtet die **Kavitation** wegen der Materialzerstörungen, die sie infolge der hohen Druckbelastung auslöst, besonders wenn sie sich in Seewasser mit elektrochemischer Korrosion kombiniert. Hinter schnell umströmten Körpern kann auch ein größerer stationärer Hohlraum auftreten (vollkavitierende Strömung). Von ähnlicher, aber meist erwünschter Auswirkung ist die **Ultraschallkavitation**: In der Unterdruckphase des Schallfeldes werden die Zerreißspannungen des Materials überschritten.

d) Gasdynamik. Auch die Bernoulli-Gleichung wird im allgemeinen Fall komplizierter. Für die kompressible (aber noch stationäre) Strömung muss man die

Flüssigkeit (oder meist das Gas) auf dem ganzen Weg verfolgen und seine Dichteänderungen mitregistrieren. Bei einer kleinen Verschiebung einer gegebenen Gasmasse m ändere sich der Druck von p auf $p + dp$, das Volumen von V auf $V + dV$. Die äußeren Kräfte leisten die Arbeit

$$pV - (p + dp)(V + dV) = -p dV - V dp$$

zum Durchschieben der Gasmasse (s. oben), wovon aber der Anteil $-p dV$ zur Kompression des Gases selbst, nur der Rest $-V dp$ zur Beschleunigung aufgewandt wird. Der Zuwachs an kinetischer Energie ist also $\frac{1}{2}m d(v^2) = \frac{1}{2}\rho V d(v^2) = -V dp$, oder

$$d(v^2) + 2 \frac{dp}{\rho} = 0.$$

Für den ganzen Weg von 1 nach 2 gilt also

$$2 \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + v_2^2 - v_1^2 = 0,$$

oder, bezogen auf einen Ort 0, wo das Gas ruht (Kesselzustand)

$$2 \int_{p_0} \frac{dp}{\rho} = -v^2.$$

Das ist die Bernoulli-Gleichung der Gasdynamik.

Beim isothermen Strömen ist $\rho = pM/(RT)$ (M : Masse eines Mols). Die Integration liefert

$$2 \frac{RT}{M} \left| \ln \frac{p_0}{p} \right| = v^2;$$

wo der Druck geringer ist, strömt das Gas schneller, allerdings nach einem ganz anderen Gesetz als (3.47).

Beim adiabatischen Strömen, das wesentlich häufiger ist, gilt $\rho = \rho_0(p/p_0)^{1/\gamma}$ (Abschn. 5.2.5); also nach Integration

$$\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} (p^{1-1/\gamma} - p_0^{1-1/\gamma}) = v^2,$$

und unter Benutzung der normalen Schallgeschwindigkeit $c_S = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ (Abschn. 4.2.3) und der anderen Adiabatenbeziehung $T \sim p^{1-1/\gamma}$ (Abschn. 5.2.5)

$$v^2 = \frac{2}{\gamma - 1} c_S^2 \frac{T - T_0}{T_0}.$$

Wo das Gas schneller strömt, ist es heißer: Ein Teil der Beschleunigungsarbeit musste in Wärme überführt werden. Überschallströmungen ($v > c_S$) sind mit sehr hohen Temperaturen verbunden (Abschn. 4.3.7).

3.3.7 Der hydrodynamische Impulssatz

Man kann das Verhalten einer Flüssigkeit an allen Stellen beschreiben, indem man für jedes kleine Volumenelement die newtonsche Bewegungsgleichung formuliert. So erhält man die Navier-Stokes-Gleichung. Oft sind aber die Einzelheiten der Bewegung viel zu kompliziert, und man braucht sie auch gar nicht, sondern erhält schon genügend Auskunft, wenn man die Verhältnisse an den Grenzflächen eines großen Flüssigkeitsvolumens kennt. Dies gilt besonders für stationäre Strömungen, wo man als Volumen ein Stück einer Stromröhre nehmen wird, abgeschnitten durch zwei Grenzflächen A_1 und A_2 . Für ein solches Stromröhrenstück haben wir bereits den Erhaltungssatz der Masse als Kontinuitätsgleichung $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$

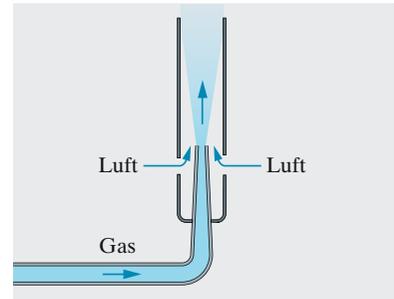


Abb. 3.60. Prinzip des Bunsenbrenners

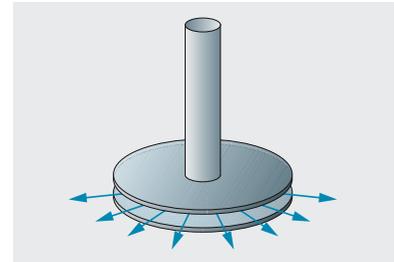


Abb. 3.61. Hydrodynamisches Paradoxon

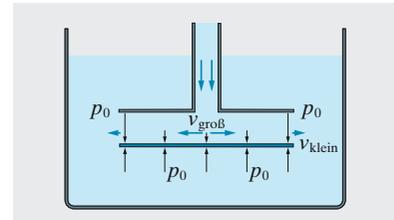


Abb. 3.62. Der Bernoulli-Unterdruck saugt die angeströmte Platte an. p_0 ist der Umgebungsdruck der ruhenden Flüssigkeit

und den Energiesatz als Bernoulli-Gleichung $p_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2$ formuliert. Vollständigere Auskunft erhält man, wenn man den Impulssatz dazunimmt: Die zeitliche Impulsänderung des Flüssigkeitsvolumens ist die Summe der angreifenden Kräfte, $\dot{I} = F$ (hier nennen wir den Impuls I , um Verwechslung mit dem Druck p zu vermeiden). Man kann dabei ein bestimmtes bewegtes Volumen der Flüssigkeit vom mitbewegten Bezugssystem aus betrachten oder ein raumfestes Volumen im ruhenden Bezugssystem. Im zweiten Fall ergibt sich die Impulsänderung in diesem Volumen durch Einströmen des Massenstromes $\rho_1 v_1 A_1$ an einem Ende zu $\dot{I}_1 = \rho_1 v_1 A_1 v_1$, am anderen Ende durch Ausströmen zu $\dot{I}_2 = -\rho_2 v_2 A_2 v_2$. Die Kontinuitätsgleichung verlangt $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dot{m}$. Die gesamte Impulsänderung muss gleich der äußeren Kraft auf das Volumen sein:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \dot{m}(v_1 - v_2) = F. \quad (3.50)$$

Auf die Außenwand einer Biegung in einem durchströmten Rohr (Knie, Krümmer) wirkt eine Kraft, die bei konstantem Querschnitt in Richtung der Winkelhalbierenden zeigt und bei einem 90° -Krümmer den Betrag $\sqrt{2}\dot{m}v$ hat. Jede Antriebskraft von Paddeln, Propellern, Turbinenrädern, Segeln beruht auf einer Umlenkung oder Beschleunigung von Luftmassen. Wir behandeln speziell den **Propeller** oder die **Schiffsschraube**. Auch hier brauchen wir uns um die viel zu komplizierten Einzelheiten der Strömung nahe der Schraube nicht zu kümmern. Wir betrachten die rotierende Schraube einfach als Kreisfläche, an der ein Drucksprung Δp auftritt. Er beschleunigt die Flüssigkeit in einem Strahl (Stromröhre) von ungefähr zylindrischer Form. Aus Kontinuitätsgründen muss sich der Zylinder allerdings in der Nähe der Schraube verengen, denn dort wird die Flüssigkeit schneller. Wir setzen uns ins Bezugssystem des Flugzeuges oder Schiffes, das nach links fährt. Dann strömt am linken Ende der Stromröhre die Flüssigkeit mit der Fahrzeuggeschwindigkeit v zu, am rechten mit der erhöhten Geschwindigkeit w ab. Der Zylinder sei so lang, dass an seinem Ende der normale Luftdruck p_0 herrscht. Für die beiden Hälften des Strahles liefert die Bernoulli-Gleichung

$$\begin{aligned} p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 &= p' + \frac{1}{2}\rho v'^2 \\ p_0 + \frac{1}{2}\rho w^2 &= p' + \Delta p + \frac{1}{2}\rho v'^2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\text{Differenz } \frac{1}{2}\rho(w^2 - v^2) = \Delta p.$$

Bei der Anwendung des Impulssatzes muss man die Schubkraft F berücksichtigen, die die Schraube auf unser Flüssigkeitsvolumen ausübt. Wir formulieren den Impulssatz zuerst für eine flache Trommel, die den Schraubenkreis so eng umschließt, dass längs ihrer Höhe noch keine Beschleunigungen auftreten können. Dann sind die Geschwindigkeiten beiderseits gleich v' und liefern keinen Beitrag zur Impulsänderung. Daher ist nur der Druckunterschied zu berücksichtigen: $F = A \Delta p$, woraus sich mit (3.51) ergibt

$$F = \frac{1}{2}A\rho(w^2 - v^2). \quad (3.52)$$

Zweitens wenden wir den Impulssatz auf den ganzen Strahlzylinder an. Hier entfällt der Druckbeitrag (zwar sind die Stirnflächen verschieden groß, aber an der Verjüngung des Zylinders ergibt sich eine genau kompensierende Kraft, ähnlich wie beim hydrostatischen „Paradoxon“). Es bleibt nach (3.52) der Betrag $F = \rho \dot{V}(w - v)$. Für den Volumenstrom können wir $V = Av'$ setzen, also

$$F = \rho Av'(w - v).$$

Der Vergleich mit (3.52) zeigt, dass v' genau in der Mitte zwischen v und w liegt:

$$v' = \frac{1}{2}(v + w).$$

Der Motor, der die Schraube dreht, muss auf die Flüssigkeit die Leistung

$$P' = \frac{1}{2}\rho\dot{V}(w^2 - v^2) = \frac{1}{2}\rho\dot{V}(w+v)(w-v) = \rho\dot{V}v'(w-v) = Fv'$$

übertragen. Dem Fahrzeug kommt davon nur die Leistung

$$P_0 = Fv$$

zugute. Der Wirkungsgrad bei verlustfreiem Betrieb ist also

$$\eta = \frac{P_0}{P'} = \frac{v}{v'} = \frac{2v}{v+w}. \quad (3.53)$$

Mit (3.52) kann man w durch die besser zugänglichen Größen F , A , ρ , v ausdrücken:

$w = v\sqrt{1 + 2F/(\rho Av^2)}$, also

$$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 2F/(\rho Av^2)}}. \quad (3.54)$$

Um η zu optimieren, muss man $F/(\rho Av^2)$ möglichst klein machen.

3.3.8 Strömungswiderstand

Die Stromlinien einer idealen Flüssigkeit um eine Kugel weichen symmetrisch zur Äquatorebene aus (Abb. 3.63). An den Polen P und P' sind Staugebiete ($v = 0$), am schnellsten strömt die Flüssigkeit am Äquator. Nach der Bernoulli-Gleichung nimmt daher der statische Druck vom Pol zum Äquator hin ab und dann genau symmetrisch zum anderen Pol hin wieder zu. Diese symmetrische Druckverteilung kann keine resultierende Kraft auf die Kugel ausüben: Eine Kugel böte einer idealen (reibungsfreien) Flüssigkeit keinen Widerstand. Um sie mit konstanter Geschwindigkeit durch die ruhende Flüssigkeit zu ziehen, brauchte man keine Kraft. Ähnliches gilt für die Umströmung von Körpern anderer Form durch ideale Flüssigkeiten.

Dieser Widerspruch zur Erfahrung löst sich folgendermaßen: Im ersten Anlaufen der Strömung sieht das Stromlinienbild tatsächlich wie in Abb. 3.63 aus. Nach kurzer Zeit aber ändert die unvermeidliche Reibung in der Grenzschicht um die Kugel und beim Wiederzusammenlaufen der Flüssigkeit hinter der Kugel das Strömungsbild (**Totwasser** im Lee); es treten **Wirbel** hinter dem Hindernis auf, die Stromlinien und damit auch die statischen Drücke sind nicht mehr symmetrisch verteilt. Der Strömungswiderstand lässt sich nach **Newton** durch die kinetische Energie ausdrücken, die in die Geschwindigkeitsänderung von Flüssigkeitsteilchen investiert werden muss (Abschn. 1.5.9d). In Abb. 3.63 würde die vorn aufzuwendende Energie hinten wieder zurückerstattet werden. In Wirklichkeit, in der nichtidealen Flüssigkeit, geht sie aber in Wirbel über und kommt dem umströmten Körper nicht wieder zugute. Damit ergibt sich der bekannte Ausdruck für die Kraft, die ein Körper vom Querschnitt A erfährt, der mit der Geschwindigkeit v turbulent umströmt wird:

$$F = \frac{1}{2}c_w\rho Av^2. \quad (3.55)$$

Der **Widerstandsbeiwert** c_w hängt von der Gestalt und Oberflächenrauigkeit des Körpers ab, ferner von der Reynolds-Zahl, der Mach-Zahl und dem Turbulenzgrad der Strömung.

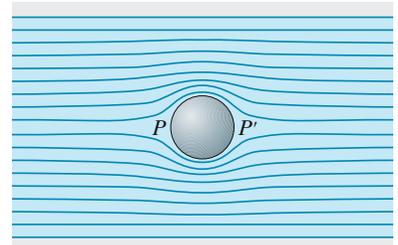


Abb. 3.63. Stromlinien in einer idealen Flüssigkeit um eine Kugel (oder einen Zylinder)

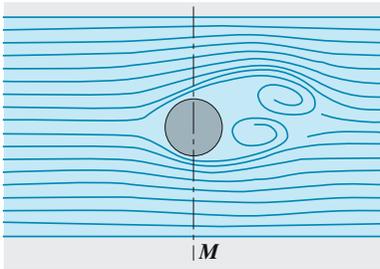


Abb. 3.64. Kármán-Wirbelstraße. Bildung von Wirbeln in einer realen Flüssigkeit bei der Umströmung eines Zylinders (von links nach rechts)

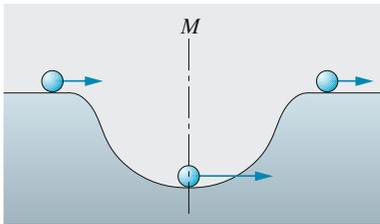


Abb. 3.65. Modellvorstellung zur Geschwindigkeitsverteilung in einer Potentialströmung um einen Zylinder

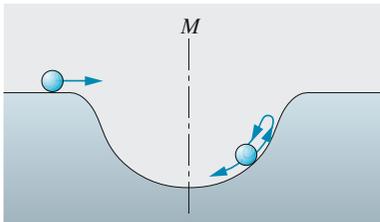


Abb. 3.66. Modellvorstellung zur Wirbelbildung infolge der Grenzschichtreibung

An der Oberfläche eines Körpers, der von einer Flüssigkeit umströmt wird, bildet sich wegen des Haftens eine **Grenzschicht** (Abschn. 3.3.3f). In ihr besteht senkrecht zur Oberfläche ein Geschwindigkeitsgefälle dv/dz , welches umso steiler ist, je dünner die Grenzschicht ist, also besonders groß in Flüssigkeiten von sehr kleiner Viskosität. In dieser Grenzschicht wirken Reibungskräfte, die wir bei der Untersuchung der Kräfte, welche in idealen Flüssigkeiten wirken, vernachlässigt haben. Sie sind aber von wesentlichem Einfluss auf die Strömungserscheinungen. Ihre Berücksichtigung bedeutet den Übergang von den idealen zu den *realen* Flüssigkeiten. Sie bedingen das Auftreten von Wirbeln bei der Umströmung von Körpern durch reale Flüssigkeiten.

Bei der idealen Potentialströmung um einen Zylinder nimmt die Geschwindigkeit bei Annäherung an die Mittelebene M (Abb. 3.64) zu. Die Flüssigkeitsteilchen werden durch das Druckgefälle beschleunigt; hinter der Mittelebene können sie aufgrund ihrer vermehrten kinetischen Energie gegen das Druckgefälle anlaufen und verlieren hier infolgedessen wieder an Geschwindigkeit, bis sie (bei fehlender Reibung) weit hinter dem Hindernis die gleiche Geschwindigkeit besitzen wie davor. Die Teilchen verhalten sich wie Kugeln, die von einer reibungsfreien, horizontalen Ebene in eine Höhlung rollen, an ihrem Boden eine höhere Geschwindigkeit haben, sie aber nach Hinaufrollen der Böschung wieder einbüßen, um auf die horizontale Ebene mit der Anfangsgeschwindigkeit auszutreten (Abb. 3.65). Ist aber Reibung zu überwinden, so muss die Kugel beim Hinaufrollen zur Umkehr kommen, wenn die Reibungsarbeit größer ist als die vor dem Hineinrollen vorhandene kinetische Energie (Abb. 3.66). Ähnlich ist es bei der strömenden realen Flüssigkeit: Die Flüssigkeitsteilchen können infolge der Grenzschichtreibung hinter der Mittelebene M zur Umkehr kommen. Dadurch wird eine Drehung eingeleitet, und es bildet sich hinter dem Zylinder ein **Wirbelpaar** mit entgegengesetztem Drehsinn (Abb. 3.64). Die an den Wirbeln vorbeiströmende Flüssigkeit nimmt abwechselnd den einen und dann den anderen dieser Wirbel mit. Nach Ablösung der Wirbel bilden sich wieder neue, die auch abgelöst werden, hinter dem Zylinder entsteht eine **Wirbelstraße**.

Die Mittelebene M ist nicht mehr Symmetrieebene; nun wird auf den Zylinder eine Kraft übertragen, die man nach *Bernoulli* berechnen kann, wenn man das Strömungsfeld kennt. Dass eine Kraft übertragen wird, folgt aber auch daraus, dass in die Wirbel Energie gesteckt werden muss. Um die Strömung stationär zu halten, muss man Arbeit leisten. Das ist die eigentliche Ursache des Strömungswiderstandes.

Wir betrachten vier praktisch wichtige Fälle etwas genauer, ohne sie theoretisch ganz erklären zu können.

Kugelumströmung. Abbildung 3.67 zeigt die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwerts von der Reynolds-Zahl Re . Im laminaren Bereich ($Re \ll 100$) gilt das Stokes-Gesetz (3.35), und c_w wird proportional Re^{-1} , genauer $c_w \approx 12/Re$, wie aus dem Vergleich von (3.55) und (3.35) folgt. Für $100 < Re < 3 \cdot 10^5$ ist $c_w \approx 0,4$. Die laminare Grenzschicht löst sich hinter der Kugel ab, im Totwasser bildet sich eine Kármán-Wirbelstraße aus. Der entsprechende leeseitige Unterdruck zusammen mit dem luvsei-

tigen Staudruck bedingt Gültigkeit des Newton-Ansatzes (3.55) mit fast konstantem c_w . Bei überkritischer Strömung ($Re > 3 \cdot 10^5$) löst sich die Grenzschicht turbulent ab. Unter diesen Umständen haftet sie länger an der Kugel, der Totwasserschlauch mit seiner Unterdruckzone wird enger, c_w sinkt noch etwas ab.

Profil mit Abreißkante. Bei Tragflächenprofilen oder Autos mit stumpf abgeschnittenem Heck legt die **Abreißkante** den Ort der **Grenzschichtablösung** und damit den Querschnitt des Totwassers fest. c_w wird damit praktisch unabhängig von Re .

Rohrströmung. Für die Strömung durch ein Rohr vom Durchmesser d und der Länge l , an dem ein Druckunterschied Δp liegt, definiert man meist $Re = \rho \bar{v} d / \eta$ und $c_w = d \Delta p / (\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 l) = 8F / (\pi \rho \bar{v}^2 dl)$, als ob der angeströmte Querschnitt nicht $\frac{1}{4} \pi d^2$, sondern $\frac{1}{4} \pi dl$ wäre. Diese Definition bewährt sich für rauwandige Rohre, die turbulent durchströmt sind ($Re > 2000$). Bei glatten Rohren nimmt c_w langsam mit Re ab ($\sim Re^{-1/4}$). Die Rohrwand ist als rau anzusehen, wenn die Unebenheiten die Prandtl-Grenzschicht durchstoßen. Für $Re < 2000$ gilt das laminare Hagen-Poiseuille-Gesetz (3.34), was als $c_w = 64/Re$ zu lesen ist (Abb. 3.68). Diese Beziehungen gelten für die „ausgebildete“ Rohrströmung. Wenn das Rohr zu kurz ist ($l \ll d$), gilt einfach das Torricelli-Ausflussgesetz.

Schräge Platte. Wenn auch eine *ideale* Strömung i. Allg. keine resultierende translatorische Kraft auf einen umströmten Körper ausübt, so können doch Drehmomente auftreten. Bei einer schräg zur Strömung stehenden Platte (Abb. 3.69) liegen die Staugebiete P und P' , in denen die größten statischen Drücke herrschen, nicht wie bei der Kugel einander gegenüber. Die asymmetrische Druckverteilung bewirkt ein Drehmoment, das die Platte senkrecht zur Strömungsrichtung zu stellen sucht. In dieser Lage sind die Stromlinien wieder symmetrisch verteilt, und das Drehmoment verschwindet. Dies ist auch der Fall, wenn die Plattenebene in Strömungsrichtung liegt; aber diese Lage ist labil: Jede Abweichung von ihr erzeugt ein Drehmoment, das die Auslenkung zu vergrößern sucht. Mit einer solchen **Rayleigh-Scheibe** kann man die Teilchengeschwindigkeit in einer Schallwelle (die **Schallschnelle**) messen.

3.3.9 Wirbel

Im einfachsten Fall eines Wirbels sind die Stromlinien in sich geschlossen. Aber auch in einem Strömungsfeld, wie Abb. 3.39, sind Wirbel anzusetzen, wie überall da, wo sich die Strömungsgeschwindigkeit quer zu ihrer eigenen Richtung ändert, z. B. an der Grenze zwischen zwei parallelen Strömungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Von einem **Wirbel** spricht man nämlich immer dann, wenn z. B. ein Boot auf einem geschlossenen Weg insgesamt durch die Strömung mehr angetrieben wird als behindert oder umgekehrt, d. h. wenn das Linienintegral $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ längs dieses geschlossenen Weges von Null verschieden ist. Dieses Linienintegral, die **Zirkulation**, ist ein Maß für die **Wirbelstärke**. Wenn man es für eine

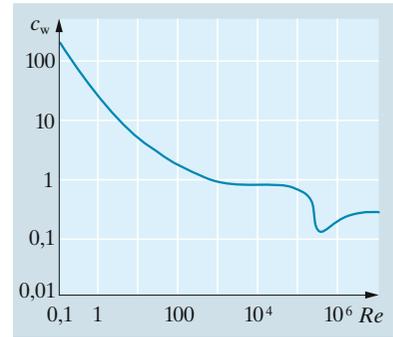


Abb. 3.67. Widerstandsbeiwert der umströmten Kugel als Funktion der Reynolds-Zahl. $c_w = F / (\frac{1}{2} \rho v^2 \pi r^2)$, F Kraft auf die Kugel

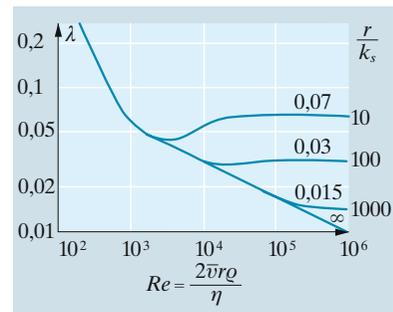


Abb. 3.68. Widerstandsbeiwert der Rohrströmung in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl. $\lambda = 2rc_w/l$. Die Kurven unterscheiden sich durch das Verhältnis von Rohrradius und Rauigkeitsabmessungen k_s . Für ganz glatte Rohre gilt die Blasius-Formel $\lambda \sim Re^{-1/4}$. Das Abbiegen von diesem Verlauf tritt ein, wenn die laminare Grenzschicht dünner wird als die Rauigkeiten

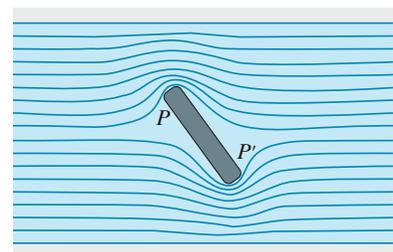


Abb. 3.69. Umströmung einer schräg zur Parallelströmung gestellten Platte

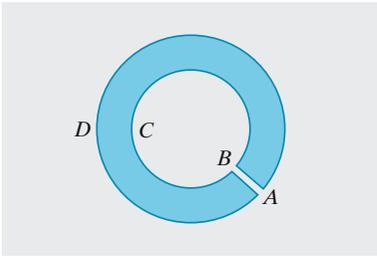


Abb. 3.70. Diese Art des Umlaufs um einen Wirbel ergibt keine Zirkulation

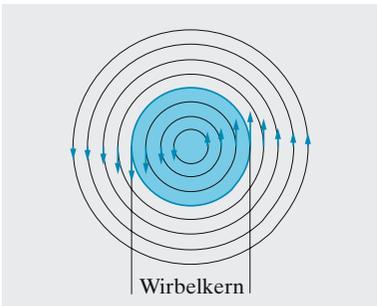


Abb. 3.71. Geschwindigkeitsverteilung in einem Wirbel

sehr kleine umlaufene Fläche bildet und das Ergebnis durch diese Fläche teilt, kommt man zur vektoranalytischen Operation $\text{rot } \mathbf{v}$ (Abschn. 3.3.1), der **Wirbeldichte**. Eine Strömung, bei der $\text{rot } \mathbf{v}$ überall verschwindet, heißt wirbelfrei oder **Potentialströmung**. Jedes Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, das sich als Gradient einer Skalarfunktion $u(\mathbf{r})$ darstellen lässt, also als $\mathbf{v} = \text{grad } u$, ist nämlich rotationsfrei; es gilt ganz allgemein $\text{rot grad } u = 0$, wie Sie in Komponentenschreibweise leicht bestätigen können.

Wenn man rings um einen Wasserwirbel fährt, treibt die Strömung das Boot ständig an. Für einen solchen Weg ist also die Zirkulation $Z = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$. Anders auf einem geschlossenen Weg, der den Wirbel *nicht* umschließt. Dort herrscht eine Potentialströmung, d. h. auf einem solchen Weg ist $Z = 0$. Legt man diesen Weg wie in Abb. 3.70 und lässt das Verbindungsstück AB weg, das wegen $\mathbf{v} \perp d\mathbf{s}$ keinen Beitrag zur Zirkulation leistet, dann sieht man: Auf den Rundwegen C und D ist die Zirkulation gleich groß, sie ist allgemein für jeden Weg dieselbe, der den Wirbel umschließt. Ein kreisförmiger Weg um einen rotationssymmetrischen Wirbel liefert $Z = 2\pi r v$. Wenn das unabhängig von r sein soll, muss v nach außen abnehmen wie $v \sim 1/r$. Ganz im Innern des Wirbels kann das nicht so sein, schon weil dort schließlich $v = \infty$ würde. Längs der Wirbelachse zieht sich entweder ein **Wirbelkern** hin, der als starrer Körper rotiert, d. h. mit $v = \omega r$, oder bei *Hohlwirbeln* ein Luftschlauch, wie oft am Ausfluss der Badewanne (Abb. 3.71). Ein Wirbelkern vom Querschnitt A , der mit ω rotiert, hat eine Wirbelstärke $Z = 2\pi R \omega R = 2A\omega$.

Helmholtz fand zwei bemerkenswerte Sätze über Wirbel: Sie können in der Flüssigkeit nirgends beginnen oder enden. Ein solches Ende wäre eine Quelle oder Senke für Wirbellinien, d. h. für die Feldlinien des Feldes $\text{rot } \mathbf{v}$. Quellen und Senken eines Feldes findet man mathematisch durch die Operation div . Für jedes Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ gilt aber die Identität $\text{div rot } \mathbf{v} = 0$, wie Sie sie ebenfalls in Komponentendarstellung bestätigen können. Wirbel müssen also immer geschlossene Ringe bilden wie Rauchringe, oder sie müssen an der Flüssigkeitsoberfläche beginnen und enden, wie das Paar von Wirbelenden, das man jedes Mal erzeugt, wenn man die Ruder aus dem Wasser hebt, und das durch einen Wirbelschlauch unter dem Boot hindurch verbunden ist. Schöne Rauchringe kann auch der Nichtraucher leicht erzeugen, wenn er kurz und scharf auf die Rückseite eines rauchgefüllten Kartons schlägt, der in der Vorderseite ein Loch hat. Fast noch bessere Ringe geben Tintentropfen, die man aus einer Pipette ins Wasser fallen lässt.

Der zweite Satz von *Helmholtz* besagt, dass Wirbel auch *zeitlich* keinen Anfang und kein Ende haben. Dies gilt allerdings nur für ideale Flüssigkeiten und wenn die äußeren Kräfte ein Potential haben. In realen Flüssigkeiten entstehen Wirbel infolge der Reibung beim Umströmen jeder Kante, ob dies eine Tragflächen-Hinterkante ist oder die Lippe eines pfeifenden oder rauchenden Menschen. Von der Kante aus zieht sich eine **Trennfläche** in die Strömung hinein, beiderseits mit verschiedener Geschwindigkeit, und das bedeutet immer Wirbel. Ebenso vergehen Wirbel wieder; ihre Energie wird durch Reibung aufgezehrt. Das Geschwindigkeitsgefälle im Wirbel mit dem Radius r und der Maximalgeschwindigkeit v ist ja etwa v/r , also wirkt längs einer Außenfläche $2\pi r l$

eine Kraft $F \approx \eta 2\pi r l v / r$, die eine Bremsleistung $P \approx Fv \approx \eta 2\pi l v^2$ aufbringt. Im Wirbel steckt die kinetische Energie $W \approx \frac{1}{8} \rho \pi r^2 l v^2$ ($\frac{1}{4}$ stammt von der Integration über r). Diese Energie wird durch die Leistung P aufgezehrt in der Zeit

$$\tau \approx \frac{\rho r^2}{16\eta}, \quad (3.56)$$

die unabhängig von v ist (Ähnliches werden wir bei der thermischen Relaxationszeit finden, (5.53)). In einem Wassereimer sollte ein Wirbel danach etwa 5 min leben; das ist etwas zu lange: Die Strömung ist im Kleinen nicht laminar, die Turbulenz steigert effektiv den Wert von η erheblich. Bei atmosphärischen Wirbeln (Tiefs, Taifunen, Tornados) ist die Reibung an der Erdoberfläche zu berücksichtigen. Jedenfalls ist es nicht verwunderlich, dass sie wochenlang existieren und besonders bei Einschnürung unter Zunahme der Drehgeschwindigkeit (Erhaltung der Wirbelstärke) Verheerungen anrichten. Der große rote Fleck auf dem Jupiter ist, ent-

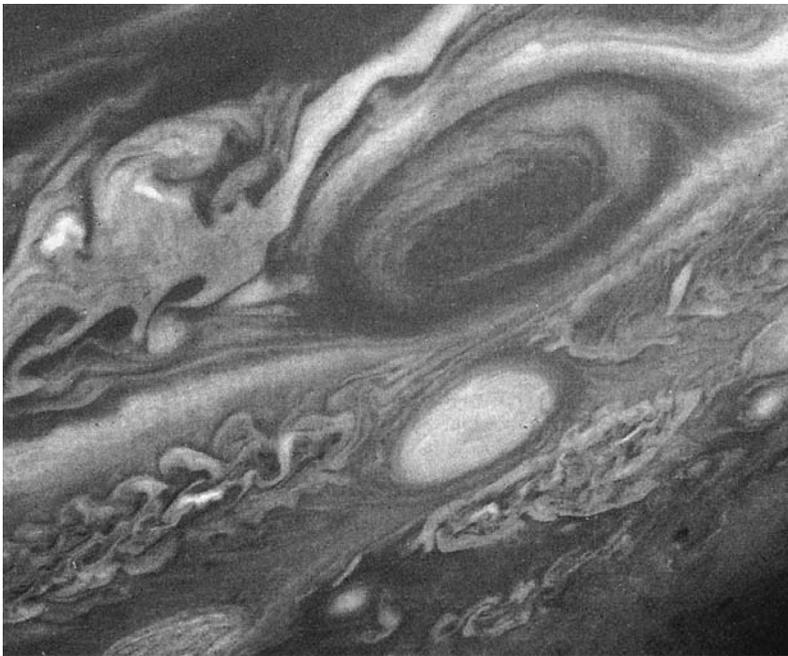


Abb. 3.72. Jupiter, bis fast zur Mitte bestehend aus Sonnengas (H und He), ist ein Gewirr von Wirbelstürmen mit bis zu 400 km/h. Ihre Lebensdauer τ hängt von ihrem Durchmesser d ab ($\tau \approx \rho d^2 / \eta$, vgl. (3.56)). Der große rote Fleck, in dessen Fläche die Erde mehrmals Platz hätte, erscheint schon vor seiner offiziellen Entdeckung auf einem Gemälde von Donato Creti (1673–1749) im Vatikan; allerdings verändert dieser Fleck häufig seine Farbe und Deutlichkeit. Das weiße Oval darunter ist seit 40 Jahren bekannt, die kleinen Wirbel, die erst Voyager 2 i. J. 1979 entdeckte, leben nur Stunden; auch die „drohende Braue“ über dem großen roten Auge ist erst einige Jahre alt

gegen manchem abenteuerlichen Deutungsversuch, vermutlich nichts als ein Wirbelsturm von mehr als Erdradius, der ohne weiteres Jahrtausende überdauern kann (Abb. 3.72).

Viele Eigenschaften von Wirbeln werden wir im Magnetfeld wiederfinden: Das Magnetfeld um einen Strom gleicht dem Strömungsfeld in einem Wirbel. Die Wirbel selbst haben keine Quellen und Senken, wie die Magnetfeldlinien. Solche Analogien haben viele Physiker, darunter *Maxwell* verleitet, die elektromagnetischen Erscheinungen als Strömungen im Äther deuten zu wollen.

Die Bedeutung des Zirkulationsbegriffes liegt vor allem darin, dass er die Kräfte quer zur Strömungsrichtung beschreibt, die den für das Fliegen entscheidenden dynamischen Auftrieb ergeben.

Die langgezogene Tropfenform des Tragflächenprofils (Abb. 3.73) setzt den Anströmwiderstand stark herab. Gleichzeitig aber behindert die Wölbung der Tragfläche mit der scharfen Hinterkante den „links herum“ laufenden Wirbel des Wirbelpaares erheblich stärker als den anderen und nötigt ihn zum Abreißen. Der Rechtswirbel bleibt hängen und überlagert sich der anströmenden Potentialströmung. Ein solches Strömungsfeld ähnelt der Strömung um einen Körper, z. B. einen Zylinder, der „rechts herum“ rotiert und dabei die angrenzende Flüssigkeit mitnimmt. Wird der Zylinder mit v_0 angeströmt und rotiert er mit der Winkelgeschwindigkeit ω , so strömt die Flüssigkeit an seiner Oberseite mit $v' = v_0 + \omega r$, unten mit $v'' = v_0 - \omega r$. Das bedeutet nach *Bernoulli* ein Überwiegen des statischen Druckes auf der Unterseite um

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho(v'^2 - v''^2) \approx 2\rho\omega r v_0 \quad (\text{falls } \omega r \ll v_0).$$

Ein Zylinder der Länge l erfährt also eine Querkraft (einen Auftrieb) von der Größenordnung

$$F \approx \rho\omega r v_0 l$$

oder vektoriell

$$\mathbf{F} \approx \rho r^2 l \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

(**Magnus-Effekt**). In dem Faktor $2\pi\omega r^2$ erkennt man die Zirkulation Z wieder. Man kann also auch sagen

$$F \approx \rho v_0 l Z \quad (\text{Kutta-Shukowski-Formel}) \quad (3.57)$$

Ganz analog ergibt sich der Auftrieb der Tragfläche aus der Fluggeschwindigkeit v_0 und der durch Z gemessenen Stärke des Wirbels, die ebenfalls mit v_0 wächst.

3.3.10 Turbulenz

„Wenn ich in den Himmel kommen sollte“, sagte im Jahre 1932 *Horace Lamb*, Altmeister der Hydrodynamik und Autor eines klassischen Werkes darüber, „erhoffe ich Aufklärung über zwei Dinge: Quantenelektrodynamik und Turbulenz. Was den ersten Wunsch betrifft, bin ich ziemlich zuversichtlich.“ Tatsächlich verstehen wir viel besser, wie sich ein schwarzes Loch bildet, als wie schnell das Wasser aus einem Hahn strömt. Es gibt hier nur empirische Formeln, die sich nicht ohne Zwang

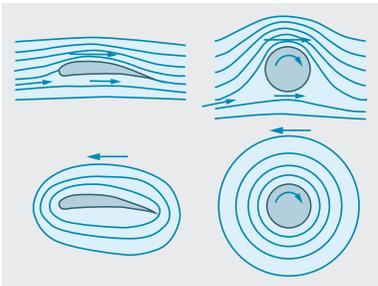


Abb. 3.73. *Oben*: Umströmung von Tragfläche und rotierendem Zylinder. *Unten*: Das Bezugssystem bewegt sich mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit mit

auf die Grundgesetze zurückführen lassen. Schuld ist bestimmt nicht der Mangel an Interesse für dieses praktisch so wichtige Gebiet, auf dem Leute wie *Reynolds*, *Prandtl*, *Heisenberg*, *Landau* gearbeitet haben. Erst in letzter Zeit scheint einiges Licht aus einer ganz unerwarteten Ecke zu kommen, nämlich der Spielerei mit Computern, bei der jeder auch ohne große Vorkenntnisse fundamental Neues entdecken kann, falls er genügend Spürsinn und Geduld hat.

Die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit wird beschrieben durch die newtonsche Bewegungsgleichung in Form der Navier-Stokes-Gleichung (3.42), zusammen mit der Kontinuitätsgleichung und den Randbedingungen (Flüssigkeit ruht an den Wänden). Nach diesen Gleichungen entwickelt sich aus einem Anfangs-Stömungsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}; 0)$ im Lauf der Zeit ein anderes Feld $\mathbf{v}(\mathbf{r}; t)$. Man unterteile nun den \mathbf{r} -Raum hinreichend fein in ein Punktgitter aus N Punkten. Dann ist das \mathbf{v} -Feld gegeben durch $3N$ Zahlen (drei \mathbf{v} -Komponenten für jeden Punkt) und lässt sich demnach auch durch *einen* Punkt in einem $3N$ -dimensionalen **Phasenraum**, ähnlich dem Phasenraum der statistischen Mechanik oder dem Hilbert-Raum der Quantenmechanik darstellen. Mit der Zeit beschreibt dieser Punkt eine Kurve im Phasenraum. Hierbei wird der Unterschied laminar-turbulent besonders augenfällig: Bei laminarer Strömung bleiben die Phasenbahnen zweier nah benachbarter Ausgangspunkte immer nah beisammen, bei turbulenter Strömung können sie scheinbar chaotisch weit auseinander laufen. So wird das Turbulenzproblem zum Stabilitätsproblem. Wenn die Bewegung des Phasenpunktes durch *lineare* Gleichungen beherrscht wird, ist das Stabilitätsproblem ein simples Eigenwertproblem einer Transformationsmatrix (Aufgaben zu Abschn. 20.1). Bei nichtlinearen Gleichungen wie der von Navier-Stokes muss man auf Überraschungen gefasst sein. Die Nichtlinearität steckt hier in dem Glied $\mathbf{a}_2 = \mathbf{v} \text{ grad } \mathbf{v}$ von (3.42). Das Interessante ist nun, wie aus dem scheinbaren **Chaos** der Instabilität doch eine klare Ordnung herauswächst.

Zerlegt man auch die Zeitachse in diskrete Intervalle, begnügt sich also mit einem Film des Vorgangs statt des stetigen Ablaufs, dann folgt jedes Teilbild aus dem vorigen durch Anwendung eines Operators, einer verallgemeinerten Funktion, auf dieses Bild. Das Ergebnis muss wieder mit dem gleichen Operator behandelt werden und liefert das nächste Teilbild, usw. Solche **iterativen Verfahren** sind meist die einzige gangbare Möglichkeit zur Lösung simultaner Differentialgleichungssysteme (z. B. Runge-Kutta-Verfahren) und lassen sich sehr leicht programmieren.

In Aufgabe 3.3.27 können Sie den Übergang von der glatten Ordnung zum scheinbaren Chaos und umgekehrt bei kleineren Änderungen eines Parameters an einer eindimensionalen Iteration selbst durchspielen. Dabei tauchen immer wieder die gleichen Zahlenwerte auf, die fast unabhängig von der speziellen Art des Problems diesen Übergang kennzeichnen. Eine davon, die **Feigenbaum-Zahl** $4,6692\dots$, könnte eines Tages fast bis zum Rang der Zahlen π und e auf-rücken, besonders, wenn es gelänge, mit ihrer Hilfe kritische Reynolds-Zahlen und andere Übergangskriterien erstmals zu berechnen. Noch suggestiver für die strömungstechnische Anwendung sind Muster wie Abb. 3.74. Sie entstehen aus einer zunächst völlig erratisch anmutenden Punktfolge, im Beispiel aus der Iteration $x_{n+1} = 1 + y_n - 1,4x_n^2$, $y_{n+1} = 0,3x_n$. Solche **seltsamen Attraktoren** sind allerdings noch merkwürdiger als die von *Poincaré* entdeckten **Grenzyklen** und gehören zu den Überraschungen beim Studium nichtlinearer Gleichungen, die von der chemischen Kinetik bis zur Demographie und Volkswirtschaft eine immer größere Rolle spielen. Sie bieten den ersten Hoffnungsschimmer, dass man Muster wie das in Abb. 3.72 eines Tages wird beherrschen können (s. Kap. 20).

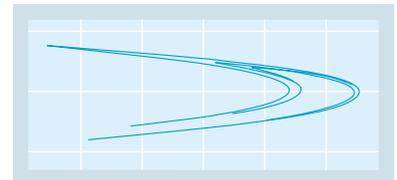


Abb. 3.74. 10 000 Punkte, die nach den Gleichungen $x_{n+1} = 1 + y_n - 1,4x_n^2$, $y_{n+1} = 0,3x_n$ auseinander hervorgehen, bilden den „attracteur étrange“ von *Hénon*

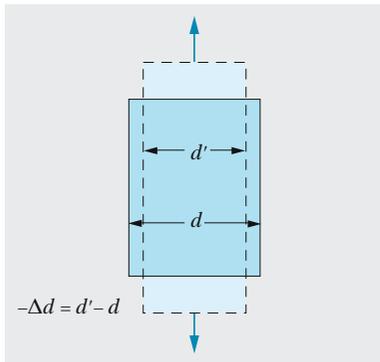


Abb. 3.75. Querkontraktion bei elastischer Dehnung

3.4 Der deformierbare Festkörper

Festkörper, selbst von ganz regelmäßigem kristallinen Bau, verhalten sich viel komplizierter als Flüssigkeiten. Ihre mechanischen Eigenschaften, seit jeher von so vitaler Bedeutung für den Menschen, können hier nur noch knapper angedeutet werden als alles Übrige. Etwas mehr erfahren Sie in Kap. 17.

3.4.1 Dehnung und Kompression

Eine Kraft F , die an einem Draht vom Querschnitt A zieht, verlängert ihn um ein Stück Δl , das (bei nicht zu großem F) proportional zu F , zur Drahtlänge l und zu $1/A$ ist:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{lF}{A} \quad \text{oder} \quad (3.58)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad (\text{Hooke-Gesetz}).$$

Die relative Dehnung $\varepsilon = \Delta l/l$ ist proportional zur Spannung $\sigma = F/A$. Die Definition gilt nur für hinreichend kleine Kräfte, deshalb schreibt man genauer $\sigma = dF/dA$.

Da ε dimensionslos ist, hat die Materialkonstante E , der **Dehnungs- oder Elastizitätsmodul**, die Einheit N/m^2 .

Ein Draht, an dem man zieht, wird nicht nur länger, sondern auch dünner. Sein Durchmesser d nehme um $-\Delta d = d' - d$ ab. Das Verhältnis der beiden relativen Deformationen

$$\frac{-\Delta d}{d} \frac{l}{\Delta l} = \mu \quad (3.59)$$

heißt **Poisson-Zahl** oder **Querkontraktionszahl**. Wir grenzen ihren Wert dadurch ein, dass das Volumen $V = \pi d^2 l/4$ des Drahtes sicher nicht kleiner wird, wenn man daran zieht. Die relative Volumenänderung infolge der Deformation Δl und Δd ist (Abschn. 1.1.7)

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta d}{d} = \varepsilon(1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu) \quad (3.60)$$

(Δd ist negativ!). Da $\Delta V > 0$, ist $\mu < 0,5$. Man misst für μ Werte zwischen 0,2 und 0,5.

✘ Beispiel...

Wie lang kann ein Stahldrahtseil höchstens sein, bevor es unter seinem eigenen Gewicht zerreißt? Durch welche Kunstgriffe könnte man es im Prinzip unendlich lang machen?

Ein frei herabhängendes Stahlseil von der Länge L ist am oberen Ende mit $\sigma = \rho g L$ belastet. Bei der Zugfestigkeit σ_F kann man ihm die Maximallänge $L_m = \sigma_F/\rho g$ geben, also bei Qualitatsstahl von 700 N/mm^2 etwa $L = 9 \text{ km}$. In der Praxis führt die leichteste Einkerbung lange ▶

vorher zum Bruch. Könnte man den Querschnitt nach unten zu wie $A = A_0 e^{-x/L_m}$ abnehmen lassen, trüge er überall das daranhängende Gewicht. Allerdings wäre ein Stahlseil nach 90 km von 15 cm auf 1 mm Durchmesser geschrumpft.

Ein allseitiger Druck Δp verringert das Volumen in allen drei Richtungen so stark, wie die Spannung $\sigma = -\Delta p$ in (3.60) es in einer tut, also um

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3 \Delta p}{E} (1 - 2\mu) . \tag{3.61}$$

Vergleich mit (3.5) liefert die **Kompressibilität**

$$\kappa = \frac{3}{E} (1 - 2\mu) \tag{3.62}$$

3.4.2 Scherung

Eine Kraft F , die tangential zu einer Fläche A wirkt (Scherkraft oder Schubkraft), also eine Schubspannung $\tau = F/A$, kippt alle zu A senkrechten Kanten eines Quaders um den Winkel α , der proportional zu τ ist:

$$\tau = G \alpha , \tag{3.63}$$

wenigstens für kleine Deformationen (Abb. 3.76). G heißt **Torsions-** oder **Schubmodul**.

Drillung. Zwei entgegengesetzte Drehmomente T verdrehen die Endflächen eines Drahtes um den Winkel φ . Wir denken den Draht in viele Hohlzylinder zerlegt. Der Hohlzylinder in Abb. 3.77 ist ringsherum um den Winkel $\alpha = r\varphi/l$ verschert, was nach (3.63) eine Schubspannung $\tau = G\alpha$ und eine Scherkraft $dF = \text{Spannung} \cdot \text{Querschnitt} = \tau 2\pi r dr$, also ein Drehmoment

$$dT = dFr = \frac{2\pi G \varphi}{l} r^3 dr$$

erfordert. Alle Hohlzylinder zusammen, d.h. der ganze Draht vom Radius R , benötigen ein Drehmoment

$$T = \int_0^R \frac{2\pi G \varphi}{l} r^3 dr = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{l} \varphi . \tag{3.64}$$

Der Draht hat also die Richtgröße

$$D_R = \frac{T}{\varphi} = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{l} \tag{3.65}$$

die äußerst stark vom Drahtradius abhängt. Sehr kleine Drehmomente an der Gravitationswaage oder am Spiegelgalvanometer kann man durch den Winkel φ messen, um den sie einen feinen Faden verdrillen. Ein an diesem Faden aufgehängter Körper, der um die Fadenachse das Trägheitsmoment J hat, vollführt Drehschwingungen mit der Periode

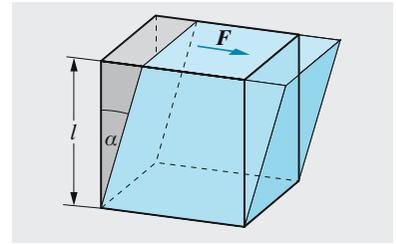


Abb. 3.76. Deformation eines Würfels durch Scherungskräfte (zur Definition des Torsionsmoduls). Durch die Befestigung auf der Unterseite werden die Kräfte auf den Schwerpunkt und das Drehmoment kompensiert

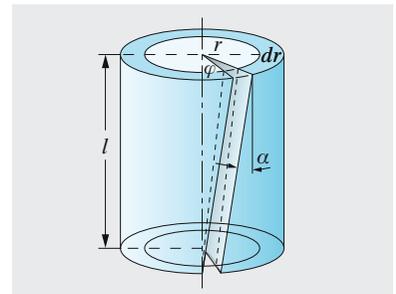


Abb. 3.77. Aufteilung eines Zylinders durch koaxiale Zylinderschnitte und ebene Schnitte durch die Achse in prismatische Teile. Zurückführung der Drillung auf angreifende Schubkräfte

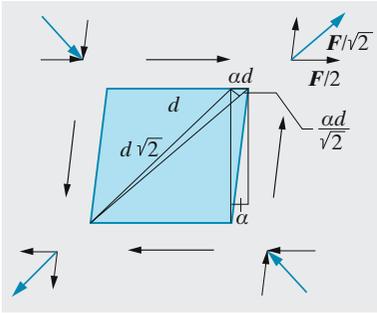


Abb. 3.78. Dieser Würfel lässt sich durch Scherkräfte, aber auch durch diagonale Schub- und Zugkräfte deformiert denken. Der Vergleich ergibt den Zusammenhang zwischen E - und G -Modul

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D_R}} = \sqrt{\frac{8\pi J l}{G R^2}} \cdot 1 \quad (3.66)$$

So kann man Trägheitsmomente sehr genau vergleichen.

3.4.3 Zusammenhang zwischen E -Modul und G -Modul

Einen Würfel der Kantenlänge d scheren wir durch die in Abb. 3.78 schwarz gekennzeichneten vier Kräfte F um den Winkel α . Aus dieser Deformation ergibt sich der Schermodul des Materials zu $G = 2F/(\alpha d^2)$, wobei je zwei gegenüberliegende Kräftepaare der Definition (3.63) entsprechen. Man kann dieselben Kräfte F aber auch zu den blauen Pfeilen zusammensetzen, indem man an jeder der beiden betroffenen Kanten $F/2$ ziehen lässt. So verteilt man jede der vier Kräfte. Die blauen Resultierenden müssen die gleiche Wirkung haben wie die schwarzen Kräfte, nur als Dehnung oder Stauchung ausgedrückt: Sie dehnen die eine Diagonale um $\alpha d/\sqrt{2}$ und stauchen die andere um ebenso viel (Abb. 3.78; das kleine Dreieck oben rechts in der Ecke hat immer noch annähernd zwei 45° -Winkel). Dabei verteilen sich diese Kräfte über die mittlere Fläche $d^2\sqrt{2}/2$ (Mittelwert zwischen der Kante mit der Fläche 0 und der vollen Schnittfläche in Diagonalrichtung, $d^2\sqrt{2}$). Jede der Kräfte $F/\sqrt{2}$, also jede Spannung F/d^2 , erzeugt eine relative Dehnung oder Stauchung $F/(Ed^2)$ in ihrer Richtung und die Querkontraktion oder Querdilatation $\mu F/(Ed^2)$ senkrecht dazu, beide Kräftepaare insgesamt also $2F(1 + \mu)/(Ed^2) = \Delta l/l = \alpha d/(\sqrt{2}d\sqrt{2}) = \alpha/2$, woraus $E = 4F(1 + \mu)/(\alpha d^2)$ folgt. Der Vergleich liefert

$$E = 2G(1 + \mu) \quad (3.67)$$

Mit den Grenzen $0 < \mu < 0,5$ für die Poisson-Zahl erhalten wir

$$\frac{E}{2} > G > \frac{E}{3} \quad (3.68)$$

Die Werte in Tabelle 3.3 bestätigen dies.

3.4.4 Anelastisches Verhalten

Das Hooke-Gesetz gilt nur bis zu einer bestimmten Grenze, der **Proportionalitätsgrenze** P . Bei höherer Belastung wächst die Dehnung stärker, die $\sigma(\varepsilon)$ -Kurve krümmt sich nach rechts (Abb. 3.79). Auch darüber aber kehren viele Körper nach langsamer Entlastung wieder zur ursprünglichen Gestalt zurück; bei ab- und zunehmender Spannung durchläuft die Dehnung praktisch die gleichen Werte. Erst oberhalb der **Elastizitätsgrenze** σ_E lassen innere Umlagerungen und Gefügeänderungen auch nach der Entspannung dauernde Formänderungen zurück. An der **Streckgrenze** σ_S beginnt, meist schubweise, starke plastische Verformung, die jedes Mal zu einer Wiederverfestigung führt. Überschreitet man schließlich die **Festigkeitsgrenze** σ_F , die höchste Spannung, die das Material aushält, indem man immer weiter zieht, dann führt starke Einschnürung zur Abnahme der Festigkeit und zum Bruch bei der **Bruchdehnung** ε_B . Schon von σ_S ab, hauptsächlich aber hinter σ_F tritt **Fließen** ein, d. h. die Dehnung nimmt selbst bei Entlastung weiter zu.

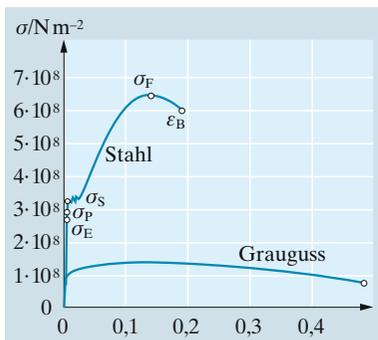


Abb. 3.79. Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines harten Stahls und des Gusseisens (Grauguss)

Tabelle 3.3. Elastische Konstanten einiger Stoffe (E, G, K : Elastizitäts-, Torsions-, Kompressionsmodul in 10^9 N/m^2 ; σ_F : Zug- bzw. Druckfestigkeit in 10^9 N/m^2 ; μ : Poisson-Zahl; ε_B : Bruchdehnung)

Material	E	G	$K = 1/\kappa$	μ	σ_F	ε_B
Al, rein, weich	72	27	75	0,34	0,013	0,5
Duraluminium	77	27	75	0,34	0,50	0,04
α -Eisen	218	84	172	0,28	0,10	0,5
V2A-Stahl (Cr, Ni)	195	80	170	0,28	0,70	0,45
CrV-Federstahl	212	80	170	0,28	1,55	0,05
Grauguss	110				0,15	0,005
Gold	81	28	180	0,42	0,14	0,5
Iridium	530	210	370	0,26		
Thallium	8,1	2,8	30	0,45		
Cu, weich	120	40	140	0,35	0,20	0,4
Cu, kaltgezogen	126	47	140	0,35	0,45	0,02
Blei	17	6	44	0,44	0,014	
α -Messing, kaltgezogen	100	36	125	0,38	0,55	0,05
Silizium	100	34	320	0,45		
Quarzglas	76	33	38	0,17	0,09	
Marmor	73	28	62	0,30		
Beton	40				0,05	
Hartporzellan					0,5	
Eis ($-4 \text{ }^\circ\text{C}$)	9,9	3,7	10	0,33		
Hanf					0,44	
Holz (Buche, längs)	15				0,14	
Nylon					$\leq 0,6$	

Die technisch wichtige Festigkeitsgrenze hängt von der Art der Belastung ab (Zug oder Druck, kurz- oder langzeitige, einmalige oder wiederholte Belastung). Die Werte in Tabelle 3.3 sind daher nur Richtwerte.

Manchmal geht auch im Elastizitätsbereich nach der Entlastung die Verformung erst nach einiger Zeit zurück. Man nennt das **elastische Nachwirkung**. Das wirkt sich besonders bei schneller periodischer Belastung aus. In Abb. 3.80 bei C ganz entlastet, hat der Körper noch die Dehnung OC, die erst durch eine gewisse Gegenspannung rückgängig gemacht wird. So durchläuft das Material periodisch die **Hysteresis-Schleife** ACBD. Auch statisch, d. h. bei sehr langsamer Verformung, geschieht Ähnliches zwischen der Elastizitäts- und der Fließgrenze.

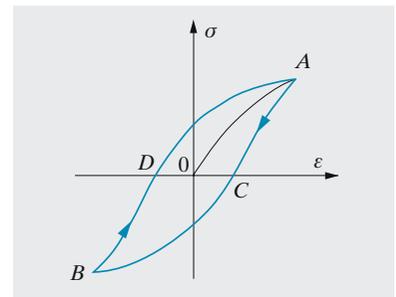


Abb. 3.80. Elastische Hysteresis. Der etwas widersprüchliche Begriff – elastisches Verhalten sollte gerade nicht von der Vorgeschichte abhängen – wird verwendet, wenn in einem Stoff langsame reversible Prozesse auftreten, z. B. die Bewegung von Versetzungen

x Beispiel ...

Prüfen Sie die Beziehungen (3.62) und (3.68) an den Werten der Tabelle 3.3 nach. Wie groß ist die Dehnung kurz vor dem Zerreißen? Vergleichen Sie mit thermischen Längenänderungen.

Bei den Metallen, besonders den weichen, liegt G näher der unteren Grenze $E/3$. Das Volumen ändert sich dann unter einseitigem Zug nur sehr wenig: μ ist nur wenig kleiner als 0,5. Am größten ist $3G/E$ bei Quarzglas entsprechend seinem kleinen μ . Nach (3.62) muss $K > E$ sein, wenn $\mu < \frac{1}{3}$, und umgekehrt.

3.4.5 Elastische Energie

Ein Draht vom Querschnitt A und der Länge l dehnt sich unter der Kraft F um $\Delta l = lF/(EA)$. Man kann ihm also die **Federkonstante** $D = F/\Delta l = AE/l$ zuschreiben (Abschn. 1.5.9f). Diese Kraft hat bei der Dehnung die Arbeit

$$W = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} D \Delta l^2 = \frac{1}{2} EA l \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} EV \varepsilon^2$$

verrichtet, also pro Volumeneinheit die Energiedichte

$$e = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad (3.69)$$

deponiert. Auch bei der Scherung geht die Energie mit dem Quadrat der Deformation:

$$e = \frac{1}{2} G \alpha^2 .$$

Bei Entlastung wird im elastischen Bereich diese ganze Energie wieder frei, auch wenn die Kurve $\sigma(\varepsilon)$ nicht mehr ganz gerade ist. Dann ist w , die Fläche unter der $\sigma(\varepsilon)$ -Kurve bis zur Abszisse der Endverformung, kein exaktes Dreieck mehr, und (3.69) gilt nicht mehr genau. Auch bei elastischer Hysterese (Abb. 3.80) ist die **elastische Energiedichte** gleich der Fläche unter der Kurve. Beim Hin- und Rückgang BA bzw. AB sind aber diese Flächen verschieden; sie unterscheiden sich um die Fläche *innerhalb* der Schleife. Diese stellt also die Energie pro m^3 dar, die in jeder Periode der Verformung in Wärme übergeht. Dieser Verlust bestimmt z. B. die Dämpfung einer elastischen Schwingung.

3.4.6 Wie biegen sich die Balken?

Um ein Stück der Länge l eines ursprünglich geraden Stabes oder Balkens, der die Dicke d und die Breite b hat, so zu biegen, dass er einen Krümmungsradius r annimmt, muss man nach Abb. 3.81 seine oberen Schichten relativ um $\frac{1}{2}d/r$ dehnen, die unteren um ebenso viel stauchen. Die Mittelschicht, die „**neutrale Faser**“, behält ihre Länge. Die ganze untere Querschnittshälfte von der Fläche $\frac{1}{2}db$ wird im Durchschnitt um $\frac{1}{4}d/r$ gestaucht, die obere um ebenso viel gedehnt. Jede dieser Deformationen erfordert eine Kraft $E \cdot \frac{1}{4} d/r \cdot \frac{1}{2} db$, beide zusammen bilden ein Kräftepaar, das auf den Querschnitt ein Drehmoment

$$T = F \frac{d}{2} \approx \frac{Ed^3b}{16r} \approx \alpha \frac{Ed^3b}{r} \quad (3.70)$$

ausübt (der Faktor α , der hier zu $\frac{1}{16}$ abgeschätzt wurde, hängt von der Form des Querschnitts ab und kann im Einzelfall leicht berechnet werden; beim rechteckigen Querschnitt ist er $\frac{1}{12}$, beim kreisrunden etwa $\frac{1}{20}$).

Ein Balken der Länge L , der an einem Ende fest eingespannt, am anderen durch die Kraft F belastet ist, erfährt durch diese Kraft im Abstand x vom belasteten Ende das Drehmoment Fx . Es biegt den Balken so weit, bis es durch das Biegemoment T kompensiert wird:

www.

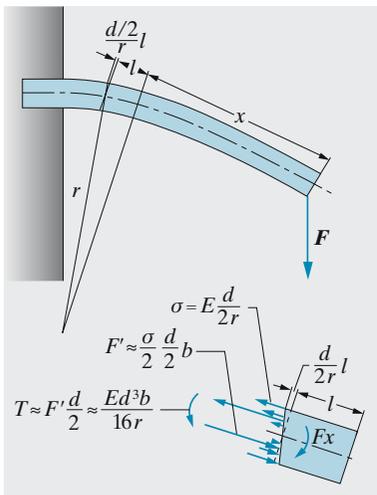


Abb. 3.81. Oben: **Balkenbiegung**. Unten: Kräfte an einer gedachten Trennfläche

$$F_x = T = \frac{\alpha E d^3 b}{r} \quad \text{oder} \quad r = \frac{\alpha E d^3 b}{F_x} \quad (3.71)$$

Die Krümmung $1/r$ ist am größten, wo x am größten ist, also an der Einspannstelle. Dort ist die Spannung ganz oben oder ganz unten

$$\sigma = E \frac{d}{2r} = \frac{E d}{2} \frac{F L}{\alpha E d^3 b} = \frac{F L}{2 \alpha d^2 b} \quad (3.72)$$

Wenn dieser Wert die Festigkeitsgrenze überschreitet, bricht der Balken (Kerbwirkung beachten!). Seine Tragfähigkeit ist also proportional bd^2/L .

3.4.7 Knickung

Eine tragende Säule, die nur in ihrer Achsrichtung belastet ist, also zunächst keine Biegebeanspruchung erfährt, knickt trotzdem in sich zusammen, wenn die Last zu groß wird. Vielfach erfolgt der Zusammenbruch nicht sofort nach Überschreiten der Knicklast, sondern wird erst durch eine Störung ausgelöst, z. B. einen Windstoß, der seitlich, also auf Biegung wirkt, aber selbst viel zu klein wäre, um die Säule merklich zu verbiegen. Offenbar ist die gerade Form der Säule instabil, sobald die Last größer ist als die Knicklast.

Wir bestimmen die **Knicklast** F_{Kn} . Dazu nehmen wir an, die Säule sei nicht genau gerade, sondern aus irgendeinem Grund ganz leicht durchgebogen (Krümmungsradius R). Dann drückt die Last F oben unter einem kleinen Winkel $\varphi \approx \frac{1}{2}l/R$ gegen die Säulenachse (l : Höhe der Säule). Die Kraft F zerlegt sich also in eine axiale Komponente, die praktisch gleich F ist, und eine kleine Komponente $F_{\perp} = \frac{1}{2}lF/R$ senkrecht dazu. An der Säulenbasis zerlegt sich die Gegenkraft ähnlich. Es wirkt also jetzt ein Biegemoment $T = F_{\perp}l/2 = \frac{1}{4}l^2 F/R$. Andererseits übt ein Balken, der mit dem Krümmungsradius R gebogen ist, nach (3.71) ein Rückstellmoment $T' = \alpha E d^3 b/R$ aus. Wenn das größer ist als T , bildet sich die Biegung wieder zurück, bei $T' < T$ dagegen wird sie immer stärker bis zum Zusammenbruch. Der Übergang liegt bei $T' = T$, woraus sich die Knicklast zu

$$F_{Kn} \approx \frac{4\alpha E d^3 b}{l^2} \quad (3.73)$$

ergibt. Eine genauere Betrachtung liefert

$$F_{Kn} = \frac{\pi^2 E d^3 b}{12l^2} \quad (3.74)$$

(Leonhard Euler, 1744).

3.4.8 Härte

Man nennt einen Stoff A härter als einen anderen Stoff B , wenn B von A leichter geritzt wird als umgekehrt. Die qualitative Härteskala nach **Mohs** unterscheidet 10 Stufen, gekennzeichnet durch nebenstehende Mineralien.

Zur quantitativen Härtemessung wird eine Stahlkugel (Durchmesser $D = 5$ bis 20 mm) mit der Kraft F gegen eine ebene Fläche des Werkstoffs gepresst, sodass darin ein kugelkalottenförmiger Eindruck mit dem Durchmesser d und der Fläche

$$A = \frac{1}{2}\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})$$

entsteht. Der Werkstoff hat dann die **Brinell-Härte** $H_B = F/A$.

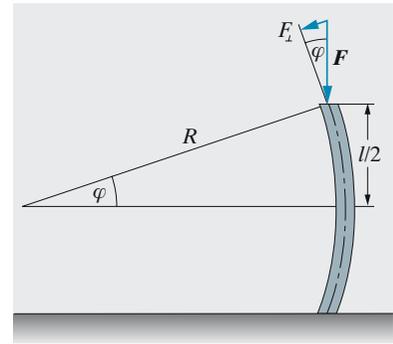


Abb. 3.82. Ein Pfeiler oder eine Wand knickt, wenn die Lastkomponente $\frac{1}{2}Fl/R$ größer ist als das Rückstellmoment $\alpha E d^3 b/R$

Tabelle 3.4.

Mohs-Härteklassen	
1. Talk	6. Feldspat
2. Gips	7. Quarz
3. Kalkspat	8. Topas
4. Flussspat	9. Korund
5. Apatit	10. Diamant



Otto v. Guericke (1602–1686), Jurist, Stadtrat und ab 1648 Bürgermeister von Magdeburg, demonstrierte 1654 auf dem Regensburger Reichstag die enorme Größe des Luftdrucks mit seinen Halbkugeln von 35,5 cm Durchmesser, evakuiert mit einer selbstentwickelten Pumpe; 2×8 Pferde wären allerdings nicht nötig gewesen, um die Halbkugeln zu trennen

▲ Ausblick

Wir haben makroskopische Körper, also Systeme aus ungeheuer vielen Teilchen einigermaßen behandeln können, indem wir sie als deformierbare Kontinua betrachteten, deren Eigenschaften durch eine Reihe von Materialkonstanten beschrieben werden: Dichte, Oberflächenspannung, Viskosität, Elastizitätsmodul usw. Warum diese Konstanten genau diese Werte haben, möchte man gern aus dem molekularen Aufbau verstehen. Für die Oberflächenspannung haben wir dies angedeutet, die Viskosität und viele thermische Eigenschaften werden in Abschn. 5.4 untersucht, wenigstens für Gase; über die elastischen und andere Eigenschaften von Festkörpern erfahren Sie einiges in Abschn. 17.1.4.

✓ Aufgaben ...

www. CD

● 3.1.1 Seemannsgarn?

Ist es wahr, dass untergegangene Schiffe in einer gewissen Tiefe schweben bleiben, weil das Wasser in der Tiefe viel dichter ist?

● 3.1.2 Aufstieg

Um wie viel ändert sich die Temperatur des Wassers, das sehr schnell vom Tiefseegrund aufsteigt?

●● 3.1.3 Schwingende Säule

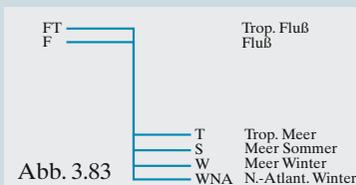
In einem U-Rohr, lichter Querschnitt A , steht eine Flüssigkeitssäule, Dichte ρ , Gesamtlänge L . Schwingt die Säule harmonisch (Reibungsfreiheit vorausgesetzt), wenn man sie aus der Ruhelage bringt? Mit welcher Frequenz?

● 3.1.4 Wasserverdrängung

Ein Schiff schwimmt in einem geschlossenen Seebecken. Plötzlich wird es leck und sinkt. Wie verändert sich dabei der Wasserspiegel im See?

● 3.1.5 Tiefgang

An der Bordwand von Frachtschiffen findet man eine „Freibordmarke“



(Abb. 3.83). Welche Abstände haben die Marken in Wirklichkeit? Wie viel könnte ein 10 000 t-Frachter, der aus Hamburg kommt, in Cuxhaven zu laden? Was müsste er in Gibraltar, Istanbul, Kertsch machen, wenn er nach Rostow/Don will?

●● 3.1.6 Ballspiel

Um einen Ball im Mittel auf gleicher Höhe schwebend zu halten, gibt man ihm alle τ Sekunden einen Stoß nach oben. Wie groß müssen ein solcher Impuls und die entsprechende Geschwindigkeitsänderung sein? Welchen Impuls muss der Ball pro Sekunde erhalten? Zeichnen Sie die Zeitabhängigkeit der Höhe des Balles. Wie sieht der Vorgang aus (kinematisch und dynamisch), wenn τ sehr klein wird?

●● 3.1.7 Gasdruck

Machen Sie anschaulich, wie der Druck eines Gases auf einen Kolben sich aus den Stößen der Einzelmoleküle zusammensetzt. Macht es etwas aus, dass die Stöße nicht in regelmäßiger Folge kommen?

● 3.1.8 Magdeburger Halbkugeln

Otto von Guericke ließ zwei mit Flanschen versehene, durch einen Lederriemen abgedichtete hohle Halbkugeln aus Kupfer mit 42 cm Durchmesser herstellen und mit der von ihm erfundenen Luftpumpe evakuieren. Welche Kraft war zur Trennung nötig?

●● 3.1.9 Reifendruck

Welchen Druck übt ein Autoreifen auf die glatte Straße aus? Vielleicht ist dieser Druck gleich dem Überdruck, der drinnen herrscht? Mit welcher Fläche liegt ein Reifen auf der Straße auf? Stimmt die Tankwarts-Regel: Bei einem PKW muss diese Fläche etwa der Schuhsohle eines kleinen Männerschuhs entsprechen? Auf welchen

Druck muss ein Fahrradreifen aufgepumpt werden, damit er auf glatter Straße nicht „durchschlägt“? Zeichnen Sie den Reifen in Seitenansicht und lesen Sie die wesentlichen Größen ab. Wie viel Luft muss man in einen Fahrradreifen pumpen, der ganz platt war? Welche Arbeit leistet man dabei? Wie heiß kann die Luft dabei werden?

●● 3.2.1 Spritzer

Weshalb sind Spritzer kleiner als Tropfen? Welche Rolle spielt die Beschleunigung beim Abschleudern? Wie kann man sehr kleine Tropfen machen? Sind Quecksilber-, Ether-, Benzol-Tropfen größer oder kleiner als Wassertropfen?

●● 3.2.2 Ballonrakete

Ein aufgeblasener, aber nicht zugebundener Kinderluftballon schießt in der Luft umher. Schätzen Sie Beschleunigungen und Geschwindigkeiten. Wie hängen sie von der Zeit ab? Warum ist das Aufblasen am Anfang am schwersten?

●● 3.2.3 Tropfenbildung

Warum zerfällt ein Wasserstrahl sehr bald nach dem Austritt in Tropfen?

● 3.2.4 Wasserkurve

Zwei Glasplatten werden an einer Seite etwa durch ein dazwischengeklemmtes Streichholz auf ca. 1 mm Abstand gebracht, an der anderen Seite berühren sie einander. Das Ganze wird so in ein Wassergefäß gestellt, dass das Streichholz senkrecht steht. Die Oberfläche des zwischen den Platten aufgestiegenen Wassers bildet eine Kurve. Welche?

● 3.2.5 Saftsteigen

Ist es möglich, dass der Saft allein durch Kapillarität bis in die Krone eines Baumes steigt (Eukalyptusbäume können bis 150 m hoch werden)? Was hätte der Baum davon?

● 3.2.6 Blasendruck

Leiten Sie den Überdruck in der Seifenblase nach dem Prinzip der virtuellen Verrückung her: Gleichgewicht herrscht, wenn bei einer virtuellen Radienänderung die Arbeit

gegen die Oberflächenkräfte durch die Druckerarbeit kompensiert wird.

● 3.2.7 Tauziehen

Man gießt etwas Wasser in eine flache Schale, sodass es überall einige mm tief steht. In die Mitte der Schale tropft man etwas reinen Alkohol. Um die Mitte bildet sich eine trockene Stelle. Warum?

●● 3.2.8 Fleckentferner

Tut man Benzin auf einen Fettfleck im Anzug und wäscht dann nochmals mit sauberem Benzin nach, so bleibt regelmäßig ein Schmutzrand zurück. Wieso? Wie geht man besser vor?

●● 3.2.9 Molekularkräfte

Oberflächenenergien sind zwar nicht sehr groß, entsprechen aber doch gewaltigen Molekularkräften. Schätzen Sie diese Kräfte z. B. zwischen zwei Flächen von je 1 cm^2 ab, indem Sie bedenken, dass Molekularkräfte Nahwirkungskräfte sind, die nur über wenig mehr als einen Atomabstand wirken. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Zerreißeigenschaften fester Stoffe. Wie erklärt sich die Diskrepanz?

●●● 3.2.10 Catenoid

Man ziehe eine Seifenhaut zwischen zwei parallelen Kreisringen. Sie nimmt „Sanduhrform“ (seitlich eingebeulter Zylinder) an. Warum? Was muss man machen, um einen „ordentlichen“ geraden Zylinder zu erhalten?

●● 3.3.1 Nachtverkehr

Machen Sie Moment- und Zeitaufnahmen des nächtlichen Fahrzeugstroms auf einer verkehrsreichen Kreuzung. Was sind Stromröhren? Unter welchen Umständen sind Strom- und Bahnlinien verschieden? Ist die Strömung immer inkompressibel, divergenzfrei, rotationsfrei? Hat sie ein Geschwindigkeitspotential? Gibt es Quellen oder Senken? Wie misst man den Fluss? Wie wirkt sich die Kontinuitätsgleichung aus?

●● 3.3.2 Gezeitenstrom

In einem flachen Meeresteil mit ebenem Boden habe der Gezeitenstrom

überall die gleiche Richtung. Welche Strömungsfelder sind möglich (zunächst ohne, dann mit Berücksichtigung der inneren Reibung). Wie ist die Lage, wenn der Boden zum Ufer hin allmählich ansteigt?

●● 3.3.3 Feldeigenschaften

Beweisen Sie, dass für jedes vernünftige Skalarfeld $u(r)$ bzw. für jedes Vektorfeld $v(r)$ gilt $\text{rot grad } u = 0$ und $\text{div rot } v = 0$. „Vernünftig“ heißt, dass die Ableitungen nach verschiedenen Koordinaten vertauschbar sind, d. h. dass die Reihenfolge ihrer Anwendung keine Rolle spielt.

●● 3.3.4 Aufrahmung

Die Dichte von Butter ist 920 kg/m^3 . In Milch ist Fett in Tröpfchen von einigen μm Durchmesser emulgiert. Wie lange dauert es etwa, bis sich der Rahm auf stehender Milch absetzt (experimentell und theoretisch). Geben Sie Konstruktionsvorschriften für eine Milchzentrifuge, die die Trennung in viel kürzerer Zeit durchführen soll.

●● 3.3.5 Stokes-Rotation

Welches Drehmoment ist nötig, um einen Körper im viskosen Medium mit der Winkelgeschwindigkeit ω zu drehen? Schätzung: Man ersetze den einigermaßen runden Körper durch eine kurze Hantel, deren zwei Kugeln dem Stokes-Gesetz gehorchen sollen. Wie wirkt sich die Form des Körpers auf den Drehwiderstand aus?

●● 3.3.6 Hovercraft

Ein Luftkissenboot ist 17 m lang und 8 m breit und wiegt beladen 15 t. Bei der Fahrt bleibt zwischen der das Boot rings umgebenden Gummimanschette und der Wasseroberfläche ein Schlitz von ca. 5 cm Breite, durch den die Luft abströmt. Welcher Überdruck ist nötig, um das Boot zu tragen? Wie schnell strömt die Luft am Rand aus, wie viel geht pro Sekunde verloren? Welche Leistung müssen die Kompressoren aufbringen? Könnte der Schlitz breiter oder enger sein, wovon hängt das ab, welche Folgen hat es? Welchen Einfluss hat die Fahrgeschwindigkeit auf das

Schwebeverhalten? Welche Höchstgeschwindigkeit ist vernünftigerweise zu erreichen?

●● 3.3.7 Wasserleitung

Projektieren Sie die Wasserleitungen für ein Haus, ein Dorf, einen Stadtteil. Geben Sie sinnvolle Werte für Personenzahlen, Verbrauch (Durchschnitt und Spitze), Entfernungen, Reservoirhöhen vor und sorgen Sie dafür, dass der Druckabfall nicht zu groß wird. Beachten Sie die Synchronisierung der Verbrauchsspitzen durch äußere Einflüsse wie Fernsehpausen o. Ä.

●● 3.3.8 Flugdaten

Bei der DC-8 strömt die Luft 10% schneller an der Oberseite der Tragflächen vorbei als an der Unterseite. Welche Startgeschwindigkeit braucht die Maschine? Startgewicht 130 t, Spannweite 42,5 m, mittlere Tragflächenbreite 7 m. Wie lang muss die Startbahn sein, wenn eine Beschleunigung von 3 m/s^2 nicht wesentlich überschritten werden soll? Wie hoch ist der Treibstoffverbrauch während der Startperiode und während der Reise, wo der Schub etwa 10% vom Startschub beträgt? Schätzen Sie die Reichweite der Maschine.

●● 3.3.9 Seltsamer Antrieb

Am Bug eines Ruderbootes ist ein Seil befestigt. Ein Mann steht im Boot und lässt sich abwechselnd langsam nach hinten fallen bzw. reißt sich am Seil wieder möglichst heftig in die aufrechte Stellung. Bringt er das Boot in Gang, und wenn ja wie? Funktioniert das Verfahren auch für einen Schlitten- oder einen Weltraumfahrer?

●● 3.3.10 Herbstlaub

Ein Blatt fällt nicht senkrecht vom Baum, gleitet auch nicht auf „schiefer Ebene“ ab wie ein Segelflugzeug, sondern pendelt mehrmals beim Fallen hin und her. Warum? Probieren Sie mit Papier- und Kartonblättern verschiedener Größe und Stärke. Wie hängen Pendelamplitude und -periode von den Blatteigenschaften und dem Anfangseinstellwinkel ab? Verhalten sich die

Samen von Ahorn, Linde und Ulme anders? Wenn ja, warum und wozu?

●● 3.3.11 Whirlpool

Wenn man in der Teetasse rührt, sammeln sich die Blätter in der Mitte des Bodens. Dass sie am Boden sind, heißt doch, dass sie schwerer sind als die Flüssigkeit. Müsste sie dann die Zentrifugalkraft nicht eher nach außen treiben?

●● 3.3.12 Wasserrakete

Eine Spielzeugrakete wird teilweise mit Wasser gefüllt. Die darüberstehende Luft wird mit einer Pumpe, die gleichzeitig die Düse fest verschließt, komprimiert. Entfernt man den Pumpstutzen aus der Düse, so schießt ein Wassertreibstrahl heraus. Messen Sie an einer solchen Rakete (ca. 10 DM) die wesentlichen Größen nach (Steighöhe, Schub, Überdruck), indem Sie die Betriebsdaten variieren. Wie hängen diese Größen zusammen? Startet die Rakete auch ohne Wasser? Warum kommt dann ein Dampfwölkchen aus der Düse?

●● 3.3.13 Überlebt er's?

Bei *H. Dominik* fällt einmal ein Mann in ein über 10 km langes Rohr, das bis zum Grund des Philippinengrabens reicht. Die Todesangst lässt nach, als er merkt, dass sich ein Luftpolster bildet, das ihn trägt und nur noch ganz sanft fallen lässt. Wie lange hat seine Angst gedauert? Kann er die Fallgeschwindigkeit regeln? Kann die Sache überhaupt stimmen?

●● 3.3.14 Turbine

Diskutieren Sie die Bewegung eines Mühlrades, wenn es sich frei dreht (auch praktisch reibungsfrei) und wenn es Arbeit zu leisten hat (z. B. Hochwinden einer Last). Was kann man qualitativ sagen? Für die quantitative Näherung nehmen Sie einen newtonschen Strömungswiderstand der Radschaufeln an (warum nicht einen Stokesschen?). Schätzen Sie Kräfte und Leistungen bei vernünftigen Annahmen über Schaufelabmessungen und Strömungsgeschwindigkeit. Gibt

es eine Drehzahl, bei der die Leistung maximal wird? Was passiert bei Überlastung? Kann man Analogien zum Verbrennungs- und Elektromotor aufstellen?

●●● 3.3.15 Rohrströmung

Das Druckgefälle $\Delta p/l$ in einer glatten geraden Rohrleitung der Länge l und des Radius r treibt eine Flüssigkeit, Dichte ρ , Viskosität η , mit der mittleren Geschwindigkeit v . $\Delta p/l$ kann nur von v , r , ρ , η abhängen. Am einfachsten wäre ein Potenzgesetz $\Delta p/l \sim \rho^\alpha \eta^\beta r^\gamma v^\delta$. Wenn nötig, muss man die Exponenten für die verschiedenen v -Bereiche verschieden wählen. Leiten Sie aus Dimensionsbetrachtungen Beziehungen zwischen den Exponenten ab. Kann man alle durch δ ausdrücken? Jetzt untersuchen Sie vier Spezialfälle: (a) Reibungsbeherrschte Strömung: ρ tritt nicht auf; (b) Trägheitsbeherrschte Strömung: η tritt nicht auf; (c) ρ und η gehen gleich stark ein; (d) ρ geht dreimal so stark ein wie η : $\alpha = 3\beta$. Die Annahme (d) führt auf das Gesetz von *Blasius*, das den turbulenten Widerstand im glatten Rohr besser beschreibt als der Newton-Widerstand, der für raue Wände gilt. Warum? Diskutieren Sie Abb. 3.68.

●● 3.3.16 Aquaplaning

Bei starkem Regen kann sich unter den Reifen eines schnellfahrenden Autos eine zusammenhängende Wasserschicht bilden. Dieses „Aquaplaning“ ist gefürchtet, denn es setzt den Reibungskoeffizienten der Reifen auf sehr kleine Werte herab. Auf wie kleine? Helfen breite Reifen gegen diesen Effekt? Wer fährt sicherer, gleichen Reifendruck vorausgesetzt: Ein LKW, ein PKW, ein Motorrad? Ist der Rat vernünftig, unter solchen Bedingungen die Reifen nicht zu hart aufzupumpen?

●● 3.3.17 Magnus-Effekt

Wir betrachten einen Zylinder (oder eine Kugel), der in einer strömenden Flüssigkeit rotiert, speziell mit der Drehachse senkrecht zur Strömungsrichtung. Die rotierende Oberfläche

nimmt die angrenzende Flüssigkeit mit und erzeugt um sich einen Wirbel, der sich dem normalen Anströmvorgang überlagert. Skizzieren Sie das Stromlinienbild, das sich aus dieser Überlagerung ergibt. Wohin verlagern sich die Staupunkte, wo verdichten sich die Stromlinien, wo werden sie dünner? Welche Strömungsgeschwindigkeit herrscht dicht an der Zylinderwand, speziell dort, wo sich der Zylinder mit der Strömung bzw. gegen sie bewegt? Welche Druckdifferenz muss zwischen diesen Stellen herrschen? Welche Kraft wirkt auf den Zylinder und in welcher Richtung? Stellen Sie diese Kraft für beliebige Achsrichtung dar. Welche Chance sehen Sie für einen „Segelantrieb“ durch einen solchen Rotor (Flettner-Rotor)?

●●● 3.3.18 Kollisionsgefahr

Zwei nahe beieinander vor Anker liegende Schiffe haben die Tendenz zusammenzutreiben. Ähnlich treibt ein Schiff gegen die Kaimauer. Gilt das auch für zwei Boote, die einen Fluss hinabtreiben? Wenn ein LKW oder Bus Ihr Wohnwagengespann überholt, wird dieses kräftig nach links gezogen. Warum?

●●● 3.3.19 Viskosität von Suspensionen

Man kann Makromoleküle (künstliche Hochpolymere, Proteine) und andere suspendierte Teilchen durch ihren Beitrag zur Viskosität der Suspension kennzeichnen und ihre Strukturänderungen anhand der Viskositätsänderungen verfolgen. Wie beeinflussen feste suspendierte Teilchen die effektive Viskosität? Denken Sie zunächst an plattenförmige Teilchen. Wie werden sie sich in der Strömung einstellen? Wie beeinflusst ihr Vorhandensein den v -Gradienten? Drücken Sie diesen Einfluss durch den Anteil α am Gesamtvolumen aus, den die Teilchen einnehmen. Wird der Einfluss, ausgedrückt durch α , für kugelförmige Teilchen größer oder kleiner sein? Einstein fand $\eta = \eta_0(1 + 2,5\alpha)$. Was finden Sie? Wenn das Teilchen von

einer kompakten Kugel in ein lockeres Knäuel übergeht, wie wird sich das auswirken?

●● 3.3.20 Zerstäubung

Regentropfen überschreiten eine gewisse Größe nicht, weil sie sonst zu schnell fielen und der Luftwiderstand sie zerblies. Dieses Zerblasen oder Zerstäuben in kleinere Tröpfchen ist technisch erwünscht beim Vergaser oder bei der Diesel- oder Einspritzpumpe. Behandeln Sie den Zerfall eines Tropfens als Wettstreit zwischen Oberflächenspannung und Luftwiderstand. Wie groß können Regentropfen werden und wie schnell fallen die größten; wie klein werden die Tröpfchen bei einem bestimmten Einspritzdruck? Beachten Sie, dass beim Dieselmotor in vorkomprimierte Luft eingespritzt wird.

●●● 3.3.21 Strömen und Schießen

Wasser kommt mit einem bestimmten Volumenstrom \dot{V} und einer bestimmten spezifischen Energie (Energie/kg) w aus dem Oberlauf eines Flusses, von einem Wasserfall oder Wehr, aus einer Stromschnelle. Die Frage ist, wie diese Menge \dot{V} weiter abfließt und was das Wasser mit dieser Energie w anfängt. Es kann w in potentieller Energie anlegen (sich zu großer Tiefe auftürmen) oder in kinetischer Energie (schnell fließen). Setzen Sie diese Aufteilung an und zeichnen Sie w als Funktion der Tiefe H bei gegebenem \dot{V} . Zeigen Sie, dass es bei gegebenen w und \dot{V} i. Allg. zwei völlig verschiedene Abflusszustände gibt (genannt Schießen und Strömen). Wenn im ruhigen Fluss ein Pfahl steht, bildet der Spiegel oft *stromauf* eine leichte Furche. Beim Wildbach liegt eine (viel tiefere) Furche immer *unterhalb* des Steinblocks. Wie kommt das? Wovon hängt es ab, ob ein gegebener Fluss strömt oder schießt? Hat das Begriffspaar Strömen-Schießen etwas mit laminar-turbulent zu tun?

●● 3.3.22 Sind Flüsse laminar?

Die Isar hat zwischen Sylvenstein-Speicher (750 m) und München

(500 m) eine Lauflänge von 100 km und ist im Mittel 50 m breit und 1 m tief. Wie schnell müsste sie fließen und welche Abflussmenge ergäbe sich, wenn sie laminar über glatten Grund ströme? Andererseits: Die mittlere Abflussmenge ist $60 \text{ m}^3/\text{s}$. Wie tief wäre die Isar, wenn sie laminar ströme? Gibt es überhaupt laminare Flüsse oder Bäche? Kommen bei vernünftigeren Annahmen die richtigen Werte heraus? Stellen Sie eine Faustregel mit vernünftigem empirischen Koeffizienten auf.

●● 3.3.23 Hubschrauber I

Wir betrachten einen auf der Stelle schwebenden Hubschrauber mit der Masse m . Geben Sie sinnvolle Kombinationen von Luftschaubenfläche und Motorleistung an. Kann man hier einen Wirkungsgrad formulieren? Wie muss die minimale Motorleistung von der Masse und der Schraubenfläche allgemein abhängen?

●● 3.3.24 Hubschrauber II

Wenn ein Hubschrauber eine völlig starre Luftschaube hätte, könnte er zwar stabil auf der Stelle schweben, aber beim Vorwärtsflug würde er sofort nach einer Seite kippen. Warum? Untersuchen Sie den Auftrieb der Schraubenflügel auf den beiden Seiten des Hubschraubers. Wie vermeidet man dieses Umkippen?

●● 3.3.25 Bootsparadoxon

Wenn ein Boot antriebslos auf dem Fluss treibt, gehorcht es trotzdem dem Steuerruder. Das wäre nicht möglich, wenn es genau ebenso schnell triebe, wie das Wasser fließt. Beobachtung zeigt, dass das Boot tatsächlich schneller treibt. Wie ist das möglich?

●● 3.3.26 Widderstoß

Wenn man einen Absperrhahn in einer Wasserleitung, hinter dem noch ein längeres Rohrstück folgt, zu plötzlich schließt, kracht es oft fürchterlich in der Leitung, die heftig wackeln und sogar brechen kann. Wie kommt solch ein „Wasserschlag“ oder „Widderstoß“ zustande? Wie verhält sich das Wasser im Rohr hinter dem

Absperrhahn, kurz nachdem dieser geschlossen wird? Welche Drücke können bei diesem Stoß auftreten?

●●● 3.3.27 Iteration

Stellen Sie Ihren Taschenrechner auf Bogenmaß (RAD), geben Sie eine Zahl < 1 ein und tippen Sie COS, so oft Sie wollen. Das Ergebnis konvergiert gegen 0,739 085... . Sie haben die transzendente Gleichung $x = \cos(x)$ gelöst. Überlegen Sie, wieso. Tun Sie dies auch graphisch. Ähnlich lassen sich beliebig komplizierte Gleichungen, von algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten bis hin zu Matrixgleichungen (Aufgabe 20.1.4) durch **Iteration** lösen. Manchmal passiert allerdings Seltsames, z. B. bei $\lambda \cos(x) = x$ mit $\lambda > 1,319 18$ (warum gerade da?). Man weiß (z. B. aus der Graphik), dass eine Lösung existiert, aber das Verfahren divergiert. Oder es gibt mehrere Lösungen (bei $\lambda \cos(x) = x$ für $\lambda > 2,971 69$; warum?), und man erhält doch nur eine davon, egal welche Zahl man anfangs eingibt. Einige Lösungen wirken als **Attraktoren** für das Verfahren, andere als **Replussoren**. Finden Sie ein Unterscheidungskriterium? Wie kann man eine solche Gleichung lösen, auch wenn das Verfahren divergiert?

●● 3.4.1 Torsion

Dimensionieren Sie Torsionsdrähte für eine Gravitations-Drehwaage, für ein Ultraschallradiometer, die Messung der Boltzmann-Konstante (vgl. Abschn. 5.2.8).

●● 3.4.2 Zerreißgefahr

Wie schnell darf man einen Drehkörper aus einem Material gegebener Festigkeit (z. B. Stahl) rotieren lassen, damit er nicht zerreißt? Hinweis: Untersuchen Sie alle möglichen potentiellen Bruchlinien und schätzen Sie die Spannungen, die daran auftreten. Welche Bruchlinie liefert die größte Spannung?

● 3.4.3 Härte und Sprödigkeit

Wie unterscheiden sich (qualitativ) die Spannungs-Dehnungs-Diagramme für harte und weiche, spröde und duktile Materialien? Kann man diese Eigenschaften beliebig kombinieren?

●● 3.4.4 Elastische Dämpfung

Die Elastizitätsgrenze σ_E (Abb. 3.79; genauer die Spannung $\sigma_{0,005}$) ist nach DIN definiert als die Belastung, die bei ihrer Aufhebung eine bleibende Dehnung von 0,005% zurücklässt. Wie sieht die Hysteresiskurve für eine Belastung bis σ_E aus? Schätzen Sie die Dämpfung einer elastischen Schwingung des Stahles von Abb. 3.79 Anwendungen?

●● 3.4.5 Balkenbiegung

Um wie viel senkt sich das Balkenende unter der Last F ?

●● 3.4.6 Fernsehturm

Warum ist ein Rohr fast so biegesteif wie ein Stab vom gleichen Durchmesser? Hat das Rohr Vorteile, die auch noch den verbleibenden kleinen Unterschied ausgleichen können?

●● 3.4.7 Brücke

Um wie viel mehr kann man einen beiderseits eingespannten Balken (Brücke) in der Mitte belasten als einen halb so langen einseitig eingespannten Balken am Ende?

●● 3.4.8 Sägewerk

Aus einem kreisrunden Baumstamm soll (a) ein Rechteckbalken von möglichst großer Tragkraft, (b) ein Balken, der sich möglichst wenig durchbiegt, geschnitten werden. Offenbar zählt die Dicke mehr als die Breite, also ist der quadratische Querschnitt nicht der beste. Wie sieht der günstigste Querschnitt aus, wie viel mehr trägt er als der quadratische? Wie stellt man ihn im Sägewerk her?

●●● 3.4.9 Flächen-trägheitsmoment

Die Baustatiker kennzeichnen die Biegesteifigkeit eines Balkens durch das

Flächenträgheitsmoment seines Querschnitts $I = \iint x^2 dx dy$ (x : Abstand von der neutralen Faser). Warum heißt diese Größe Trägheitsmoment? Zeigen Sie, dass es genau auf sie ankommt; berechnen Sie sie für rechteckigen, quadratischen, kreisförmigen, kreisringförmigen, I-förmigen Querschnitt. Wie heißt der Faktor α in (3.71)? Füllen Sie die numerischen Lücken in Abschn. 3.4.6 und in den einschlägigen Aufgaben aus. Der I-Träger habe überall die gleiche Materialstärke d . Bei welcher Form trägt er bei gegebenem Querschnitt und gegebenem d am meisten?

●● 3.4.10 Ein teurer Fehler

Kessel aus Edelstahl für Milch oder Bier werden durch Einleiten von heißem Wasserdampf gereinigt. Sie haben zwei Ventile (oben oder unten?). Bei Fehlbedienung (welcher Art?) kann der Kessel hinterher aussehen wie eine Osterinselstatue. Wie stark wurde das Material der Kesselwand belastet? Zeichnen Sie dazu ein kleines Wandstück und tragen Sie die wirkenden Kräfte ein. Wovon hängt es ab, ob der Zusammenbruch auf Knickung oder auf einer Spannung oberhalb der Druckfestigkeit beruht? Wie dick müsste die Wand sein, damit sie diese Behandlung aushält?

●● 3.4.11 Tiefseeboot

Wie stark müssen die Wände eines zylinder- oder kugelförmigen Tauchboots sein, das Menschen bis in den Grund der Tiefseegräben bringen soll? Solche Boote baut man lieber aus Titan als aus Stahl. Warum?

● 3.4.12 Das stabile Ei

Wenn Sie ein rohes Ei mit der Längsachse zwischen die Höhlungen der gefalteten Hände nehmen, können Sie erstaunlich stark zudrücken, ehe es vielleicht doch kaputtgeht. Bevor Sie eine Schweinerei anrichten, schätzen Sie die Kraft, die Sie anwenden dürfen.

Schwingungen und Wellen

■ Inhalt

4.1	Schwingungen	141
4.2	Wellen	160
4.3	Wellenausbreitung	171
4.4	Eigenschwingungen	181
4.5	Schallwellen	189
4.6	Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten	197

▼ Einleitung

„Alles schwingt“, hätte Heraklit mit fast ebenso viel Berechtigung sagen können. Teilchen, die an eine Gleichgewichtslage gebunden sind, sitzen in einem Potentialminimum. Die Umgebung des Minimums lässt sich aber bei einer glatten Funktion immer durch eine Parabel annähern: $E = E_0 + ax^2$, was einer elastischen Kraft $F = -dE/dx = -2ax$ entspricht, und unter einer solchen Kraft schwingt ein Teilchen sogar harmonisch, sinusförmig. Deswegen sind **harmonische Schwingungen** physikalisch so wichtig. Auch mathematisch bilden sie die Grundbausteine, aus denen sich kompliziertere Schwingungsformen aufbauen lassen.

Teilchen beeinflussen einander, ihre Schwingungen übertragen sich mit einer gewissen Phasenverschiebung auf Nachbarpartikel. Daher sind auch **Wellen** allgegenwärtig: Mechanische Wellen, wo Teilchen von der Schwerkraft in die Ruhelage zurückgezogen werden (Wasserwellen) oder von Kapillarkräften (sehr kurze Wasserwellen), oder wo Teilchen durch elastische Kräfte gekoppelt sind (Schall und Ultraschall, Erdbebenwellen usw.); elektromagnetische Wellen, aus deren Riesenspektrum Radio, Licht, Röntgenstrahlung nur einige Abschnitte bezeichnen; schließlich weiß man seit einem guten halben Jahrhundert, dass jedes Teilchen gleichzeitig auch als Welle aufzufassen ist; selbst wenn es ganz allein ist, kann man sein Verhalten nur wellentheoretisch beschreiben.



„Daher kommt es auch ..., dass von zwei Personen jede zu gleicher Zeit die Augen der anderen sieht ... denn zwei Lichtwellen heben sich weder auf noch unterbrechen sie einander, wenn sie sich kreuzen ...“

Christiaan Huygens,
Traité de la lumière, 1690

4.1 Schwingungen

Einer abstandsproportionalen Kraft unterworfen, schwingt ein Massenpunkt sinusförmig. Was geschieht aber bei anderen Kraftgesetzen, oder wenn mehrere Kräfte eingreifen, oder wenn mehrere Schwingungen mit verschiedenen Parametern gleichzeitig erfolgen? Wie kann man das alles übertragen, wenn nicht eine mechanische Größe wie die Auslenkung eines Massenpunktes, sondern eine ganz andere Größe ähnlichen Einflüssen ausgesetzt ist?

Abb. 4.1. Überlagerung von zueinander senkrechten harmonischen Schwingungen gleicher Frequenz. Phasendifferenz 0

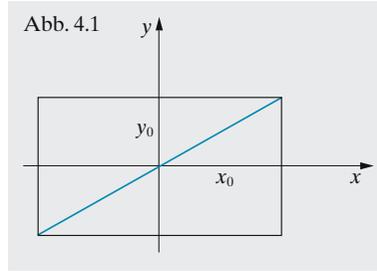
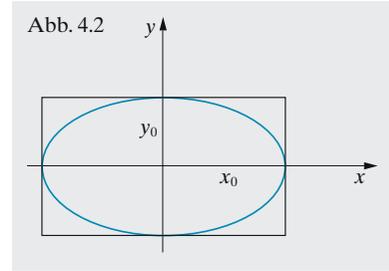


Abb. 4.2. Überlagerung von zueinander senkrechten harmonischen Schwingungen gleicher Frequenz. Phasendifferenz $\pi/2$



4.1.1 Überlagerung von Schwingungen

Selten führen Teilchen nur *eine* Schwingung aus, meist mehrere gleichzeitig, die sich durch Richtung, Amplitude, Phase und Frequenz unterscheiden können. Jeder dieser Fälle liefert neue Erkenntnisse und Behandlungsmethoden.

a) Schwingungen verschiedener Richtung. Eine kleine Stahlkugel rollt in einer Mulde mit konstanter Krümmung, z. B. einer halben Hohlkugel. Bei geringer Auslenkung aus der tiefsten Lage kann man die Mulde als Paraboloid annähern, und die Schwingungen werden sinusförmig. Aber auch im Kreis oder in Ellipsen kann die Kugel laufen. Wie wir die harmonische Schwingung als eine Komponente einer gleichförmigen Kreisbewegung definiert haben, kann man umgekehrt diese Kreisbewegung aus zwei zueinander senkrechten Schwingungen zusammensetzen. Sie müssen um $\pi/2$ in der Phase auseinander liegen und gleiche Amplituden haben. Sind die Amplituden verschieden und bleibt die Phasendifferenz $\pi/2$, ergibt sich eine Ellipse, die zu den beiden Schwingungsrichtungen symmetrisch liegt. Ist die Phasenverschiebung verschieden von $\pi/2$, liegt die Ellipse schief. Bei Phasengleichheit entartet sie natürlich zu einer schrägen Linie (Abb. 4.1, 4.2).

Bei der Phasenverschiebung $\pi/2$ kann man aus $x = x_0 \cos(\omega t)$ und $y = y_0 \sin(\omega t)$ sofort die Ellipsengleichung $x^2/x_0^2 + y^2/y_0^2 = 1$ machen. Im allgemeinen Fall $x = x_0 \cos(\omega t)$, $y = y_0 \cos(\omega t + \varphi)$ ist die Ellipse ebenfalls im Rechteck mit den Seiten $2x_0$, $2y_0$ eingeschrieben. Der Winkel ωt ihrer Achsenneigung ergibt sich am einfachsten aus den Extremwerten des Abstandskquadrates $r^2 = x^2 + y^2$, nämlich $dr^2/dt = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2\omega(x_0^2 \sin(2\omega t) + y_0^2 \sin(2\omega t + 2\varphi)) = 0$, also $\tan(2\omega t) = \tan(2\varphi) - x_0^2/y_0^2 \sin(2\varphi)$.

Wenn die Mulde nicht Kreise, sondern Ellipsen als Höhenlinien hat, schwingt unser Teilchen in Richtung der größeren Krümmung schneller. Es beschreibt dann auch noch annähernd Ellipsenbahnen, aber deren Achsenrichtung dreht sich im Laufe der Zeit. Die Ellipse wird zur Rosette oder **Lissajous-Schleife** (Abb. 4.3). Die y-Schwingung habe eine nur wenig andere Frequenz als die x-Schwingung: $x = x_0 \sin(\omega t)$, $y = y_0 \sin(\omega + \varepsilon)t$. Schreibt man einfach $y = y_0 \sin(\omega t + \varepsilon t)$, dann sieht man: Die Phasendifferenz εt zwischen y und x durchläuft mit der Zeit alle Werte, also durchläuft die Ellipse alle möglichen Lagen innerhalb des Rechtecks $2x_0$, $2y_0$. Wenn die beiden Krümmungen der Mulde, d. h. die Frequenzen der

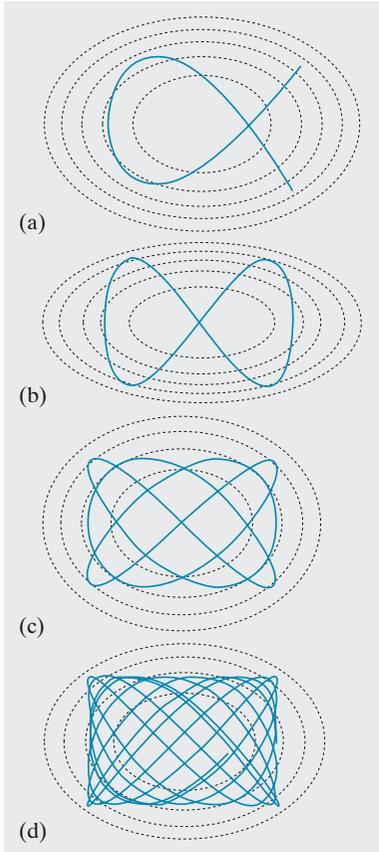


Abb. 4.3a–d. In einer elliptischen Mulde (Höhenlinien punktiert) beschreibt eine reibungsfreie Kugel eine Lissajous-Schleife. Bei rationalem Verhältnis der Achsen und damit der Frequenzen schließt sich diese Schleife. Bei irrationalem (oder sehr „krummem“) Verhältnis überstreicht sie schließlich ein Rechteck vollständig. Mit einem Oszilloskop und zwei Sinusgeneratoren kann man das sehr einfach darstellen (vgl. Abb. 8.15–8.17)

Teilschwingungen stark voneinander abweichen, dreht sich die Ellipse so schnell, dass man sie nicht mehr als Ellipse erkennt, sondern die Schleife kann die Form einer 8, eines α usw. annehmen.

b) Schwingungen gleicher Frequenz und Richtung: Zeigerdiagramm, komplexe Rechnung. Dies ist eines der Grundprobleme der Schwingungs- und besonders der Wechselstromlehre: Wie addiert man zwei sinusförmige Vorgänge $\xi_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $\xi_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, wenn sie verschiedene Amplituden und Phasen haben? Kommt wieder ein Sinus heraus, und welche Amplitude und Phase hat er? Man könnte die beiden verschobenen Sinuskurven graphisch addieren, aber unsere bisherigen Betrachtungen weisen einen viel eleganteren und schnelleren Weg (Abb. 4.5).

Jeder der beiden Vorgänge, z. B. $\xi_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$, ist eine Komponente einer gleichförmigen Kreisbewegung. Ein Punkt mit dem Abstand ξ_1 vom Mittelpunkt einer Scheibe und auf dem Strahl mit dem Winkel φ_1 gegen die rechte waagerechte Halbachse beschreibt mit seiner Vertikalkomponente genau diesen Verlauf, wenn man die Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht (beschriebene Stellung bei $t = 0$). Der andere Vorgang wird entsprechend durch einen Punkt bei ξ_2, φ_2 auf der Drehscheibe beschrieben. Wie Abb. 4.5 zeigt, liefert die geometrische Summe der beiden Zeiger (Diagonale des Parallelogramms) immer die richtige Summe, z. B. für die Vertikalkomponenten, d. h. sie beschreibt genau die Summe der beiden Schwingungen. Daraus sieht man:

- Die Summe zweier verschobener Sinus ist immer wieder ein Sinus: $\xi_1 \sin(\omega t) + \xi_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \xi \sin(\omega t + \varphi)$.
- Wenn ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varphi_1 = 0$ ist, ergibt sich die Summenamplitude aus dem Cosinussatz als $\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 \cos \varphi_2}$.
- Ebenfalls bei $\varphi_1 = 0$ liefert der Sinussatz für die Phase des Summenvorgangs $\sin \varphi = \xi_2/\xi \sin(\varphi_2)$.

Besonders wichtig ist der Spezialfall $\varphi_2 = \pi/2$. Dann wird $\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ und $\tan \varphi = \xi_2/\xi_1$, wie man sofort abliest.

Wenn wir vom Mittelpunkt unserer Scheibe zu jedem der drei Punkte einen Pfeil ziehen und eine Momentaufnahme bei $t = 0$ machen, stellt sie das **Zeigerdiagramm** der drei Vorgänge dar. Genauso gut kann man die Scheibe auch als Gauß-Ebene der **komplexen Zahlen** auffassen. Die allgemeinste komplexe Zahl $z = a + ib$ lässt sich ja in ein x, y -Achsenkreuz als Punkt mit den Koordinaten x, y einzeichnen. Andererseits kann man sie auch durch den Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und den Winkel φ mit $\tan \varphi = y/x$ darstellen. Sind r und φ gegeben, erhält man x und y als $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Die komplexe Zahl lässt sich also auch schreiben $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. *L. Euler* fand die wohl wichtigste Formel der ganzen Mathematik und Physik:

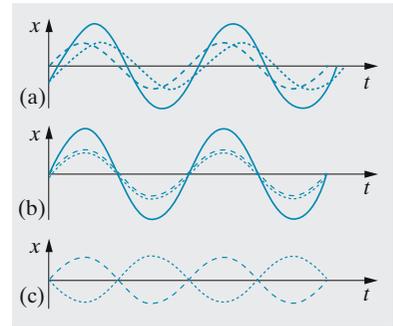


Abb. 4.4a–c. Superposition von gleichgerichteten Schwingungen mit gleicher Amplitude und Frequenz bei verschiedenen Phasendifferenzen, (a) $\alpha = 0, 4\pi$, (b) $\alpha = 0$, (c) $\alpha = \pi$

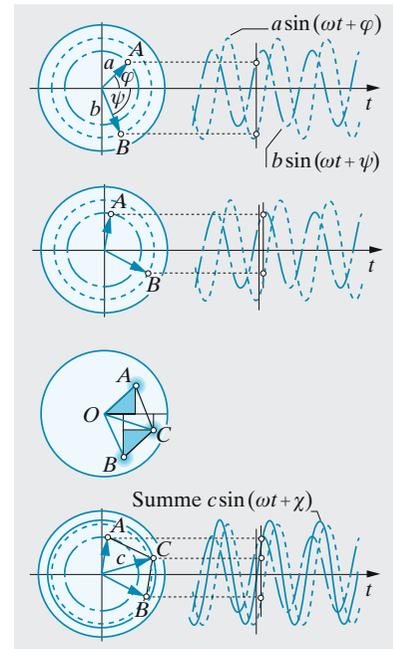


Abb. 4.5. Die Überlagerung zweier Sinusschwingungen gibt immer wieder eine Sinusschwingung, deren Amplitude und Phase am einfachsten aus dem Zeigerdiagramm folgen

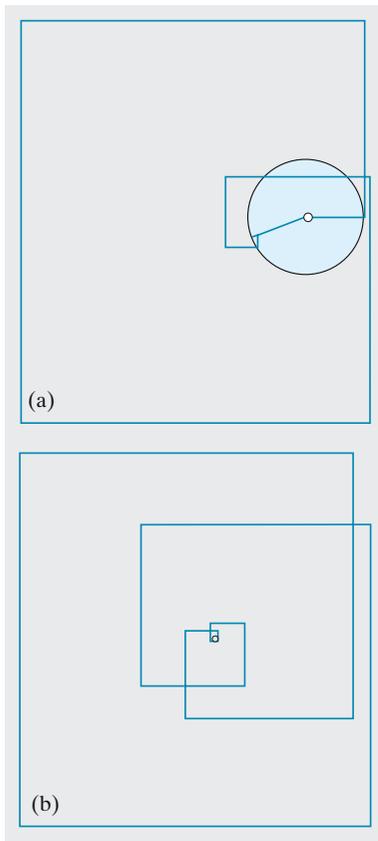


Abb. 4.6a,b. Die Partialsummen der e^{ix} -Reihe in der komplexen Ebene, (a) für $x = 3,6$, (b) für $x = 7,7$. Der Einheitskreis ist unten kaum noch zu sehen, bei $x = 30$ würde die Odyssee in diesem Maßstab bis zur Sonne führen, und trotzdem landet der „göttliche Dulder“ exakt am Strand des winzigen Ithaka

Euler-Formel

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \quad (4.1)$$

Wir begründen sie auf zwei Arten:

1. Die Reihenentwicklungen von $\sin x$, $\cos x$ und e^x lauten

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - + \dots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

Setzt man in der e-Reihe $x = i\varphi$ und multipliziert die sin-Reihe mit i , dann ergibt sich sofort die Behauptung (4.1).

2. Was ist e^{ix} ? Wir wählen zuerst $|x| \ll 1$. Nach der Grundeigenschaft der Zahl e ist dann $e^{ix} \approx 1 + ix$, d. h.: 1 nach rechts, x nach oben, was ein schmales Dreieck mit dem spitzen Winkel x liefert. Jedes e^{iy} mit beliebig großem y können wir erzeugen, indem wir e^{ix} oft genug (y/x -mal) potenzieren, d. h. viele solcher schmalen Dreiecke aneinander setzen. Dabei entfernen wir uns nie vom Einheitskreis, und die Winkel addieren sich zu y (Abb. 4.7). Dass e^{iy} immer noch auf dem Einheitskreis liegt, bestätigen wir zusätzlich durch Betragsbildung, d. h. Multiplikation mit dem Konjugiert-Komplexen, das e^{-iy} heißt, und Wurzelziehen: $|e^{iy}| = 1$. (Verfolgen Sie, wie die weiteren Glieder der e-Reihe in jedem Fall die Abweichung vom Einheitskreis korrigieren).

× Beispiel . . .

Wie weit gehen die Partialsummen der e^{ix} -Reihe nach draußen?

Das größte Glied $x^n/n!$ der Reihe liegt da, wo $x^{n+1}/(n+1)!$ geteilt durch $x^n/n!$ etwa 1 ist, d. h. bei $n \approx x$, und hat nach *Stirling* den Wert $x^n/n! \approx e^x/\sqrt{2\pi x}$.

Zu den **harmonischen Schwingungen** kommen wir sofort, wenn wir $x = \omega t$ setzen: Die Zahl $x_0 e^{i\omega t}$ läuft mit der Kreisfrequenz ω auf dem Kreis mit dem Radius x_0 um, ihr Realteil stellt die Schwingung $x_0 \cos(\omega t)$ dar. In diesem Zusammenhang ist die komplexe Darstellung völlig identisch mit dem Zeigerdiagramm. Sie ist aber viel umfassender, besonders in Fällen, wo die Frequenzen der Einzelschwingungen verschieden sind oder wo sich die Amplitude zeitlich ändert.

Wie rechnet man mit dieser Darstellung? Eine harmonische Schwingung wird durch einen Pfeil $\xi = \xi_0 e^{i\omega t}$ dargestellt, der in der komplexen Ebene auf einem Kreis vom Radius ξ_0 mit der Kreisfrequenz ω umläuft. Die Projektion auf die reelle Achse (der Realteil) ist eine cos-Schwingung. Bei einer anderen Schwingung mit gleicher Frequenz und Amplitude, aber anderer Phase ist der Pfeil um einen gewissen Winkel δ verdreht: $\xi_0 e^{i(\omega t + \delta)}$. Beide Schwingungen lassen sich graphisch einfach überlagern, indem man die Pfeile addiert. Man erhält einen neuen Pfeil der Länge $\xi'_0 = 2\xi_0 \cos(\delta/2)$, der mit der gleichen Kreisfrequenz umläuft und in der Phase zwischen den beiden Teilschwingungen liegt. Die Schwingung bleibt harmonisch mit dem gleichen ω . Bei $\delta = 0$ ist $\xi'_0 = 2\xi_0$, bei $\delta = \pi$ ist $\xi'_0 = 0$. Für diese Überlegung ist es offenbar gleichgültig, in welcher momentanen Lage man die Pfeile erpapt. Es kommt nur auf die

relative Phasenlage an. Man kann aus beiden Amplitudenausdrücken den gleichen willkürlichen Faktor herausziehen, wenn die Überlegung dadurch einfacher wird.

Mehrere Teilschwingungen lassen sich ebenfalls graphisch oder rechnerisch überlagern, z. B. N Schwingungen, die untereinander je die Phasendifferenz δ haben. Bei großem N füllen die vielen Pfeile alle Richtungen gleichmäßig auf, unabhängig von δ , außer wenn $\delta = 2\pi$ oder ein Vielfaches davon ist. Dann addieren sich alle Teilschwingungen. Die Rechnung zeigt das auch, aber genauer: Die Gesamtamplitude ist

$$\xi = \xi_0(1 + e^{i\delta} + e^{2i\delta} + \dots + e^{(N-1)i\delta})$$

(für die erste Schwingung ist die Amplitude willkürlich auf 1 gedreht). Das ist eine geometrische Reihe mit dem Faktor $e^{i\delta}$, also der Summe $(e^{Ni\delta} - 1)/(e^{i\delta} - 1)$. Wir können hier den Faktor $e^{Ni\delta/2}/e^{i\delta/2}$ herausziehen und erhalten $(e^{Ni\delta/2} - e^{-Ni\delta/2})/(e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2})$ (zurückdrehen, bis die Pfeile symmetrisch zur reellen Achse liegen). Nach der Euler-Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{oder} \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

vereinfacht sich das zu dem reellen Ausdruck

$$\xi = \xi_0 \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

Bei $\delta = m2\pi$ (m ganzzahlig) werden Zähler und Nenner Null. Nach der Regel von *de l'Hôpital* hat der Bruch dann den Wert:

$$\frac{\text{Ableitung des Zählers}}{\text{Ableitung des Nenners}} = \frac{N \cos(N\delta/2)}{\cos(\delta/2)} = N$$

(Entwicklung des Sinus liefert dasselbe). Alle N Teilamplituden addieren sich. Für andere Werte von δ , z. B. während δ von 0 bis 2π zunimmt, oszilliert die Amplitude im Ganzen N -mal zwischen allmählich kleiner werdenden Maxima und Minima der Höhe $1/\delta$ hin und her. Diese Überlegungen sind die Grundlage der Beugungstheorie.

x Beispiel...

Es heißt, Männer singen am liebsten in der Badewanne. Frauen auf der Toilette. Kann das einen physikalischen Grund haben?

Die Frequenzbereiche von Bass, Tenor, Alt, Sopran sind ungefähr 66–350, 100–520, 130–700, 200–1 050 Hz. Das entspricht Grundschwingungen einer beiderseits eingespannten Luftsäule von 2,5–0,5, 1,7–0,3, 1,3–0,24, 0,8–0,16 m Länge. Räume mit entsprechenden Abmessungen werden vom Sänger in maximale Resonanz versetzt, was gesangstechnisch nicht immer wünschenswert ist, aber den Stimmklang angenehm verstärkt.

c) Schwingungen mit wenig verschiedenen Frequenzen: Schwebungen, Amplitudenmodulation. Wenn zwei Instrumente oder Stimmen den

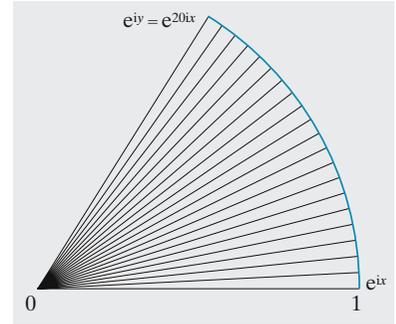


Abb. 4.7. Für $x \ll 1$ liegt der Punkt $e^{ix} \approx 1 + ix$ auf dem Einheitskreis beim Winkel x . Das bleibt auch richtig für größere x , wo die Näherung $e^{ix} \approx 1 + ix$ nicht mehr gilt

www.

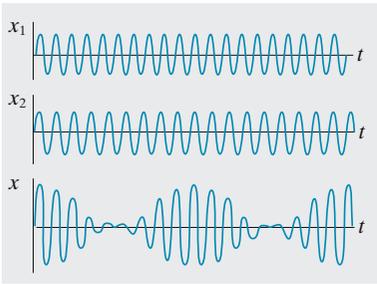


Abb. 4.8. Durch Überlagerung zweier Schwingungen mit gleicher Amplitude und geringem Frequenzunterschied entsteht eine Schwebung

www.

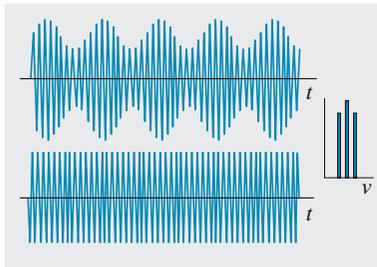


Abb. 4.9. *Oben:* Trägerwelle mit der Frequenz ν , amplitudenmoduliert mit einem Sinuston der Frequenz $\nu/10$. *Darunter* dasselbe Signal frequenzmoduliert (phasenmoduliert). *Rechts* das Spektrum beider Vorgänge

gleichen Ton zu geben versuchen, ohne ihn ganz zu treffen, flackert die Lautstärke unangenehm auf und ab. Die beiden Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω und $\omega + \varepsilon$ seien, komplex dargestellt, $\xi_1 e^{i\omega t}$ und $\xi_2 e^{i(\omega+\varepsilon)t}$. Die Summe

$$\xi = \xi_1 e^{i\omega t} + \xi_2 e^{i(\omega+\varepsilon)t} = e^{i\omega t} (\xi_1 + \xi_2 e^{i\varepsilon t}) \tag{4.2}$$

lässt sich deuten als eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω und zeitlich *veränderlicher* Amplitude $\xi_1 + \xi_2 e^{i\varepsilon t}$ (reell geschrieben: $\xi_1 + \xi_2 \cos(\varepsilon t)$), die mit der Kreisfrequenz ε um den Mittelwert ξ_1 schwankt, manchmal das Maximum $\xi_1 + \xi_2$ annimmt (wenn beide Vorgänge in gleicher Phase schwingen), dazwischen das Minimum $\xi_1 - \xi_2$ (wenn beide entgegengesetzte Phase haben). Die **Schwebungsfrequenz** ε ist die Differenz der Frequenzen der Teilschwingungen.

Wie Abb. 4.8 sieht das Signal aus, das ein Mittelwellensender mit der Frequenz $2\pi\omega$ (Trägerfrequenz) abstrahlt, wenn er einen Ton der Frequenz $2\pi\varepsilon$ sendet: Die Tonfrequenz ε ist der Trägerwelle durch **Amplitudenmodulation** aufgeprägt. Wir ziehen den Umkehrschluss: Sowie ein Sender ein Signal überträgt, hat er nicht mehr nur seine Trägerfrequenz $2\pi\omega$, sondern sein Frequenzspektrum spaltet auf: Es entstehen zwei Seitenlinien im Abstand $\pm 2\pi\varepsilon$, wenn ein Sinuston gesendet wird, ein kontinuierliches Band der Breite ν' , wenn die Sendung alle Frequenzen bis ν' enthält. Deshalb braucht jeder Sender sein Frequenzband, damit er von den anderen nicht gestört wird (Abschn. 4.1.4).

Außer durch seinen zeitlichen Verlauf, z. B. $\xi = (\xi_1 + \xi_2 e^{i\varepsilon t}) e^{i\omega t}$ lässt sich ein Schwingungsvorgang also auch durch sein **Frequenzspektrum** kennzeichnen. Es besteht in unserem Fall aus den **Spektrallinien** $2\pi\omega$ und $2\pi(\omega \pm \varepsilon)$ (Abb. 4.9). Zur vollständigen Beschreibung des Vorgangs gehört dann allerdings noch ein Phasenspektrum.

d) Schwingungen mit stark unterschiedlicher Frequenz: Fourier-Analyse. Wir betrachten einen Vorgang $\xi(t)$ *beliebiger Form*, der sich nach der Periode T wiederholt, also $\xi(t+T) = \xi(t)$. *J. B. Fourier* zeigte 1822 in seiner „Théorie analytique de la chaleur“, dass sich ein solcher Vorgang aus harmonischen Schwingungen aufbauen lässt. Die erste, die **Grundschwingung**, hat die Frequenz $\nu = 1/T$, die anderen, die **Oberschwingungen**, haben ganzzahlige Vielfache davon: $\nu_2 = 2\nu$, $\nu_3 = 3\nu$ usw. Die Amplituden und Phasen dieser Schwingungen sind allerdings noch zu bestimmen. Grund- und Oberschwingungen heißen zusammengefasst Fourier-Komponenten. Die ganze **Fourier-Reihe**, die den Vorgang $\xi(t)$ darstellt, lautet

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 + \xi_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \xi_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \cos(n\omega t + \varphi_n) . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die Amplituden ξ_n und Phasen φ_n der Fourier-Komponenten bestimmen eindeutig die Form des Gesamtvorganges. Das Glied mit $n = 0$, d. h. die Konstante ξ_0 sichert, dass auch Vorgänge, die nicht gleichmäßig beiderseits

um die t -Achse schwingen, darstellbar sind. Wir können die Reihe auch komplex schreiben, müssen dann aber von $-\infty$ bis $+\infty$ summieren, denn jeder \cos liefert auch Glieder mit negativem Exponenten: $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$:

$$\xi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_n e^{i(n\omega t + \varphi_n)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_n e^{in\omega t} e^{i\varphi_n}. \tag{4.4}$$

Manchmal zieht man den Phasenfaktor mit in die Amplitude hinein, die dann auch komplex wird: $\tilde{\xi}_n = \xi_n e^{i\varphi_n}$:

$$\xi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}_n e^{in\omega t}. \tag{4.5}$$

Jetzt müssen wir die Amplituden und Phasen bestimmen, was in der Form (4.5) am einfachsten ist. Um das für die m -te Fourier-Komponente zu tun, multiplizieren wir die Funktion $\xi(t)$ mit $e^{-im\omega t}$ und integrieren über die ganze Periode:

$$\int_0^T \xi(t) e^{-im\omega t} dt = \int_0^T \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}_n e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt. \tag{4.6}$$

Da $\omega = 2\pi/T$, haben die Integrale den Wert

$$\int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt = \frac{1}{i(n-m)\omega} (e^{i(n-m)\omega T} - 1) = \frac{e^{2\pi i(n-m)} - 1}{i(n-m)\omega}.$$

Das ist 0 für $n \neq m$, denn $e^{2\pi i} = 1$. Für $n = m$ folgt durch Grenzübergang (oder nach *de l'Hôpital*) als Wert des Integrals $2\pi/\omega = T$. Somit bleibt von dem ganzen Integral (4.6) nur die Amplitude der m -ten Komponente übrig: $\tilde{\xi}_m T$, oder

$$\tilde{\xi}_m = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) e^{-im\omega t} dt. \tag{4.7}$$

Mit dem komplexen $\tilde{\xi}_m = \xi_m e^{i\varphi_m}$ haben wir die Amplitude ξ_m und die Phase φ_m der m -ten Komponente.

Das Spektrum eines *periodischen* Vorganges beliebiger Form ist ein **Li-nienspektrum**: Bei den ganzzahligen Vielfachen $m\nu$ der Grundfrequenz $\nu = 1/T$ sind scharfe Linien der Höhe ξ_m errichtet. Einige davon können auch Null sein. Prinzipiell sind unendlich viele nötig, doch erreicht man häufig schon mit wenigen eine gute Annäherung an die darzustellende Funktion. Die Dreiecksschwingung in Abb. 4.10 liefert z. B. für die Spitzenamplitude A

$$\xi(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\omega t) + - \dots \right). \tag{4.8}$$

Wenn ein Vorgang unperiodisch ist, aber nur ein begrenztes Intervall umfasst (Abb. 4.11), kann man ihn ständig wiederholt denken und ebenfalls fourier-analysieren. Außerhalb dieses Intervalls, wo vielleicht gar

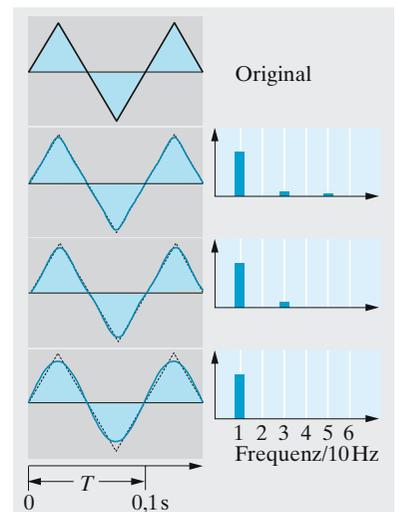


Abb. 4.10. Links: Das Original wird mit 1, 3 und 5 Teilwellen approximiert (von unten nach oben). Rechts: Relative Größe der Amplituden der Teilwellen

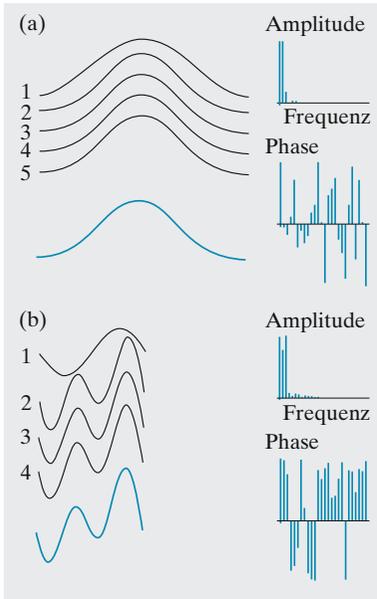


Abb. 4.11a,b. Fourier-Analyse verschiedener Vorgänge. *Blau* der Original-Vorgang, darüber die Partialsummen seiner Fourier-Reihe (z. B. 3: Summe der ersten drei Fourier-Komponenten). *Rechts* das Amplituden- und das **Phasenspektrum**. (a) Bewegung des Kolbens, der durch eine Pleuelstange mit der gleichförmig rotierenden **Kurbelwelle** verbunden ist. Wundern Sie sich nicht, wenn Ihr Auto bei einer gewissen Geschwindigkeit „scheppert“ und bei der doppelten nochmal. (b) Jahreszeitliche Änderung der **Zeitgleichung**, d. h. der Differenz zwischen Sonnenzeit und Uhrzeit. Man erkennt eine jährliche und eine (etwas größere) halbjährliche Schwankung. Überlegen Sie, woher beide kommen

nichts oder etwas ganz anderes passiert, stimmt diese Darstellung natürlich nicht, denn sie wiederholt dort den Vorgang unentwegt. Um einen *unperiodischen* Vorgang zu zerlegen, der bis ins Unendliche reicht (wenn auch vielleicht mit der Amplitude Null), muss man anders verfahren. Bei unendlich langer Periode T rücken ja die Oberfrequenzen sehr dicht zusammen (ihr Abstand ist $1/T$) und werden zum **kontinuierlichen Spektrum**. Die Fourier-Summe (4.5) verwandelt sich in ein **Fourier-Integral** über eine stetige Amplitudenfunktion $F(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega . \quad (4.9)$$

Diese Amplitude oder das Spektrum erhält man analog zu (4.7) durch Integration über die gegebene Zeitabhängigkeit $f(t)$:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt . \quad (4.10)$$

Der Faktor 2π ist aufgeteilt, damit „Original“ $f(t)$ und „Bildfunktion“ (Fourier-Transformierte) $F(\omega)$ in völlig symmetrischer Weise zusammenhängen.

Jeder Spektralapparat, gleichgültig ob optischer oder mechanisch-akustischer Art, ist ein Fourier-Analysator, der aus dem beliebigen, auch unperiodischen Vorgang die harmonischen Komponenten herausfischt oder erzeugt. Überhaupt ist *jedes* Messgerät zu Schwingungen befähigt, wenn diese auch vielleicht so stark gedämpft sind, dass es nur zum „Kriechen“ kommt. Wenn der zu messende Vorgang, sei er periodisch oder nicht, getreu wiedergegeben werden soll, müssen alle in seinem Fourier-Spektrum vorkommenden Schwingungen getreu aufgezeichnet werden, d. h. die Amplitude des Gerätes muss, unabhängig von der Frequenz, immer proportional der zu messenden Amplitude sein; ferner muss die Phase des Gerätes entweder gleich der des Vorganges sein oder um einen festen (frequenzunabhängigen) Betrag von ihr abweichen. Dies zeigt die prinzipielle Bedeutung der Fourier-Analyse für die Mess- und Regeltechnik.

In der Praxis handelt es sich meist darum, eine empirisch gegebene, d. h. durch Messungen definierte Funktion $f(t)$ nach *Fourier* zu analysieren. Solche Funktionen $f(t)$ lassen sich nie exakt durch einen analytischen Ausdruck beschreiben, und daher kann man auch die Integrale, die zur Amplitudenberechnung nötig sind, nur näherungsweise bestimmen. Man muss bei einer Summe hinreichend vieler Glieder Halt machen und kann nicht zum Grenzwert, dem Riemann-Integral vorstoßen. Dies führt zur **diskreten Fourier-Transformation**, die in allen Elektronenrechnern als Standardprogramm vorliegt. Wir betrachten eine Funktion $f(t)$, die durch n Messwerte $f_j = f(t_j)$ an äquidistanten Stellen $t_j = jT/n$ empirisch gegeben ist. Es hat dann keinen Sinn, unendlich viele Oberfrequenzen zur Entwicklung zu benutzen, sondern man bricht bei der $n-1$ -ten Oberschwingung ab und erreicht trotzdem eine vollständige und exakte Darstellung der Messwerte. Die Entwicklung lautet

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{i\omega_k t_j} , \quad \omega_k = k \frac{2\pi}{T} .$$

Die Amplituden der Teilschwingungen ergeben sich aus den Messwerten f_j nach einer ganz analog gebauten Summe:

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-i\omega_k t_j} .$$

Die Amplituden a_k sind komplex, drücken also die reellen Amplituden $|a_k|$ aus und gleichzeitig die Phasen

$$\varphi_k = \arctan \frac{\text{Im}(a_k)}{\text{Re}(a_k)} .$$

Abbildung 4.11 gibt Beispiele einer Analyse von je 100 Messpunkten. In komplizierteren Fällen braucht man zur Kennzeichnung des Verlaufs viel mehr Punkte. Dann werden sogar moderne Computer zu langsam. Mit einem mathematischen Trick gelingt es der schnellen Fourier-Transformation (**Fast Fourier Transform, FFT**), die Rechenzeit um zwei bis drei Größenordnungen zu verkürzen.

Mathematisch ist die Fourier-Transformation nur ein Spezialfall der Entwicklung einer gegebenen Funktion nach einem System von Basisfunktionen. Diese Entwicklungen liegen dem Apparat der Quantenmechanik zugrunde. Eine solche Entwicklung ist immer möglich, wenn die Basisfunktionen ein **vollständiges** System bilden, sie wird besonders einfach, wenn die Basisfunktionen **orthogonal** sind. In den Aufgaben zu Abschn.13.6 werden diese Begriffe erklärt, und es wird gezeigt, dass diese Entwicklungen formal dasselbe sind wie die Komponentenaufspaltung eines Vektors.

e) Schwingungen mit unbestimmter Phasendifferenz (inkohärente Schwingungen). Zwei Schwingungen gleicher Frequenz können einander verstärken oder schwächen, je nachdem ob ihre Phasen übereinstimmen oder um φ verschieden sind. Ein Boot kann von zwei Wellen stärker geschaukelt werden als von einer oder auch schwächer. Beim Schall tritt eine solche Schwächung praktisch nie ein: Zwei Flugzeuge machen immer mehr Lärm als eines im gleichen Abstand. Schallschwingungen aus verschiedenen Quellen haben nämlich keine feste Phasenbeziehung, sie sind **inkohärent**.

Zwei Schwingungen mit den Amplituden x_1 und x_2 und der Phasendifferenz φ Gesamtamplitude $\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 \cos \varphi}$ Cosinussatz die dritte Seite des Dreiecks aus den Zeigern der beiden Teilschwingungen. (Beachten Sie, wo der Winkel φ in diesem Dreieck sitzt!) Die Energie der Schwingung ist proportional zum Quadrat der Amplitude; für eine elastische Schwingung ist das nach (1.66) klar, es gilt aber auch für Schwingungen anderer Art. Daher überlagern sich die Energien der beiden Teilschwingungen zu

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos \varphi .$$

Bei gleichen Amplituden z.B. kann alles zwischen Vervierfachung der Energie (bei $\varphi = 0$) und völliger Auslöschung (bei $\varphi = \pi$) vorkommen. Wenn aber alle Phasendifferenzen zu berücksichtigen sind, und zwar alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit, muss man über φ mitteln.

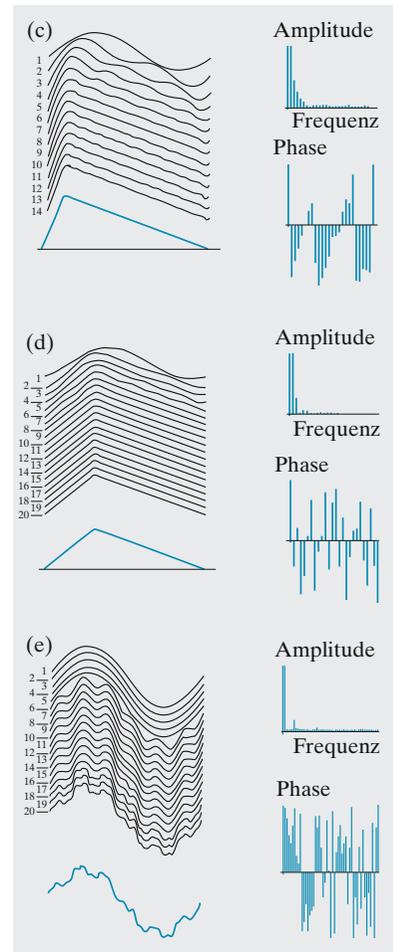


Abb. 4.11c–e. Fourier-Analyse verschiedener Vorgänge. *Blau* der Original-Vorgang, darüber die Partialsummen seiner Fourier-Reihe (z. B. 3: Summe der ersten drei Fourier-Komponenten). *Rechts* das Amplituden- und das **Phasenspektrum**. (c, d) Der Rahmen eines **Klaviers** ist so gebaut, dass alle Saiten auf 1 : 9 ihrer Länge vom Hammer angeschlagen werden. Im erzeugten Ton sind alle Obertöne bis zum 8. in abnehmender Stärke drin, der 9., die stark dissonante große Sekund (9 : 8) ist unterdrückt. (e) Auch die Ökonomen erkennen Zyklen in der Zeitabhängigkeit der Gesamtproduktion der Volkswirtschaft: Einen etwa 56jährigen Kondratjew-Zyklus, einen 9–10jährigen Juglar-Zyklus, einen 3–3,5jährigen Kitchin-Zyklus

$\cos \varphi$ hat den Mittelwert 0, also fällt das **Interferenzglied** $2\sqrt{E_1 E_2} \cos \varphi$ ganz weg. Bei inkohärenten Schwingungen addieren sich die Amplituden nach Pythagoras: $\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, die Energien addieren sich algebraisch: $E = E_1 + E_2$.

4.1.2 Gedämpfte Schwingungen

Wenn auf einen Körper nur eine Kraft wirkt, die der Auslenkung aus der Ruhelage proportional und ihrer Richtung entgegengesetzt ist, schwingt der Körper harmonisch, wie wir schon wissen:

$$F = m\ddot{x} = -Dx \Rightarrow x = x_0 \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (4.11)$$

Die Energie bleibt dabei erhalten, pendelt nur zwischen kinetischer und potentieller Form hin und her. In Wirklichkeit hat man es immer auch mit Energie verzehrenden Reibungskräften zu tun. Wir betrachten eine Reibung, die proportional zur Geschwindigkeit ist, also z. B. eine Stokes-Reibung in zähem Öl (andere Abhängigkeiten werden in Aufgabe 1.6.13 untersucht):

$$F = m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} \quad \text{oder} \quad m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0. \quad (4.12)$$

Wir machen den Lösungsansatz $x = x_0 e^{\lambda t}$, der alle solche linearen homogenen Gleichungen löst, auch wenn sie höher als 2. Ordnung sind. Denn beim Differenzieren tritt einfach λ vor die Exponentialfunktion, und diese lässt sich überall wegstreichen, da sie ja nirgends Null wird. So entsteht die **charakteristische Gleichung**

$$m\lambda^2 + k\lambda + D = 0. \quad (4.13)$$

Als quadratische Gleichung hat sie zwei Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{D}{m}}. \quad (4.14)$$

Hier müssen wir drei Fälle unterscheiden, in denen sich das System ganz verschieden verhält (Abb. 4.12). Vor komplexen Lösungen fürchten wir uns ja nicht mehr.

1. Bei $k < 2\sqrt{mD}$ (schwache **Dämpfung**) wird der Radikand negativ. Mit den Abkürzungen

$$\delta = \frac{k}{2m} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}} \quad (4.15)$$

erhalten wir mit der Wurzel λ_1 :

$$x = x_0 e^{-\delta t} e^{i\omega t}. \quad (4.16)$$

Ihr Realteil

$$x = x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t) \quad (4.17)$$

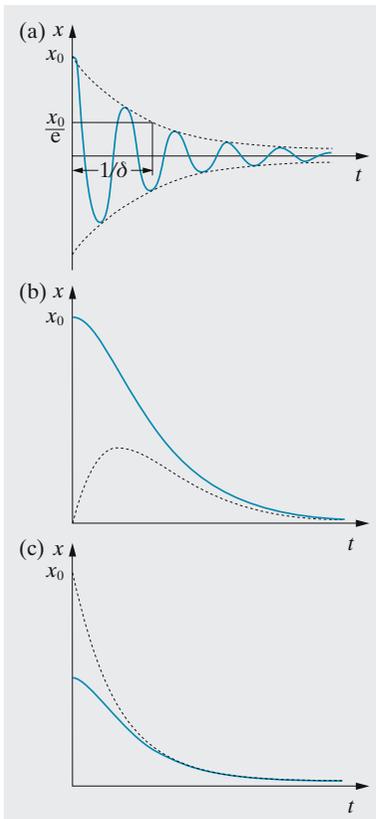


Abb. 4.12a–c. In allen drei Bildern beginnt die Bewegung bei $x = x_0$ mit $dx/dt = v = 0$. (a) Auslenkung als Funktion der Zeit bei einer gedämpften Schwingung. *Gestrichelt*: Einhüllende Exponentialfunktion $\pm e^{-\delta t}$. (b) Auslenkung beim Kriechfall. *Gestrichelt*: Asymptote $\delta t e^{-\delta t}$. (c) Auslenkung bei starker Dämpfung mit $\delta_1 = 2\delta_2$. *Gestrichelt*: Langsamer zerfallende Komponente $e^{-\delta_2 t}$

stellt den wirklichen Vorgang dar: Eine Sinusschwingung einbeschrieben zwischen zwei abklingende e-Funktionen als Einhüllende. Die Kreisfrequenz hat nicht mehr den „freien“ Wert $\omega_0 = \sqrt{D/m}$, sondern ist umso mehr herabgesetzt, je stärker die Dämpfung ist. Wir müssen ja aber nicht wie in (4.17) mit maximaler Auslenkung starten, sondern mit irgendeinem $x(0)$ und $\dot{x}(0)$. Die allgemeine Lösung muss also, wie immer bei Gleichungen 2. Ordnung, zwei Konstanten enthalten, nicht nur x_0 . Wir fügen also in (4.16) noch eine Phase φ hinzu:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 e^{-\delta t} e^{i(\omega t + \varphi)} \quad \text{oder reell} \\ x &= x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) . \end{aligned}} \quad (4.18)$$

Dann wird

$$x(0) = x_0 \cos \varphi , \quad \dot{x}(0) = -x_0(\delta \cos \varphi + \omega \sin \varphi) .$$

2. Bei $k = 2\sqrt{mD}$ (*mittlere Dämpfung*) verschwindet die Wurzel in (4.14); dann ist auch $te^{-\delta t}$ eine Lösung:

$$\boxed{x = x_0(1 + \delta t)e^{-\delta t} \quad \text{(aperiodischer Grenzfall)}} , \quad (4.19)$$

falls wir den Schwinger ohne Anfangsgeschwindigkeit loslassen.

3. Bei $k > 2\sqrt{mD}$ (*starke Dämpfung*) wird die Wurzel in (4.14) reell und trägt selbst zur Dämpfung bei:

$$\boxed{x = x_0 e^{-\delta' t} , \quad \delta'_{1,2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} . \quad (4.20)$$

Die allgemeine Lösung in diesem **Kriechfall** muss aus zwei Anteilen aufgebaut werden, einer mit δ'_1 , der andere mit δ'_2 .

Die Energie des Schwingers pendelt zwischen kinetischer und potentieller Form hin und her: $E = \frac{1}{2} D x_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$, wobei sie allmählich abnimmt, und zwar wegen $E \sim x_0^2$ doppelt so schnell wie die Amplitude, z. B. im Schwingfall $E = E_0 e^{-2\delta t}$. Die Reibung verrichtet die Leistung $\dot{E} = -2\delta E$. Das Verhältnis

$$Q = \frac{2\pi \cdot \text{Energie}}{\text{Energieverlust in der Periode}} = \frac{E\omega}{-\dot{E}} = \frac{\omega}{2\delta} \approx \frac{\sqrt{Dm}}{k} , \quad (4.21)$$

der **Gütefaktor**, ist ein bequemes Maß für viele Eigenschaften des schwingenden Systems.

Für freie Drehschwingungen lautet die Bewegungsgleichung ganz analog zu (4.12)

$$J\ddot{\varphi} + k^*\dot{\varphi} + D^*\varphi = 0 . \quad (4.22)$$

φ ist der Ausschlagwinkel aus der Ruhelage, D^* das „Richtmoment“, J das Trägheitsmoment um die Drehachse und k^* die Reibungskonstante.

Bei vielen **Messinstrumenten** (z. B. beim Drehspulgalvanometer) übt die zu messende Größe ein bestimmtes Drehmoment M auf das dreh-

schwingungsfähige Anzeigesystem aus. Für den Zeigerausschlag φ gilt dann

$$J\ddot{\varphi} + k^*\dot{\varphi} + D^*\varphi = M. \quad (4.23)$$

Führt man als neue Variable $\varphi' = \varphi - M/D^*$ ein, so gilt für φ' genau wieder (4.22). Die Lösung für den Schwingfall ist demnach auch wieder (4.17)

$$\varphi' = \varphi'_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t). \quad (4.24)$$

Wir betrachten den konkreten Fall, dass die Messgröße (z. B. ein Strom) zur Zeit $t = 0$ von 0 auf einen gewissen Wert springt; das Drehmoment auf den Zeiger springt dementsprechend von 0 auf M . Der Ausschlag vor $t = 0$ war $\varphi_0 = 0$, d. h. $\varphi'_0 = -M/D^*$. Damit wird aus (4.24)

$$\varphi = \frac{M}{D^*} (1 - e^{-\delta t} \cos(\omega t)). \quad (4.25)$$

δ und ω ergeben sich aus (4.15) mit sinngemäßen Bezeichnungsänderungen.

Wie muss bei gegebenen J und D^* der Reibungsfaktor k^* gewählt werden, damit der Zeiger sich möglichst schnell seinem Endstand $\varphi = M/D^*$ annähert? Offensichtlich muss der Dämpfungsfaktor maximal sein. Im Schwingfall steigt δ mit wachsendem k^* , im Kriechfall fällt δ mit wachsendem k^* . Das Optimum liegt also im aperiodischen Grenzfall $k^{*2} = 4D^*J$, der bei Messinstrumenten mit drehbaren Anzeigesystemen angestrebt wird. In diesem Fall gilt

$$\varphi = \frac{M}{D^*} (1 - e^{-\frac{1}{2}k^*t/J}) = \frac{M}{D^*} (1 - e^{-2\pi t/T}), \quad (4.26)$$

wo T die Schwingungsdauer des ungedämpften Systems ist. Für $t = T$ ist die Abweichung vom Endausschlag nur noch $(1 + 2\pi)e^{-2\pi} = 1,4\%$.

Da Reibungskräfte nie ganz vermeidbar sind, ist jede Schwingung mehr oder weniger stark gedämpft. Um eine ungedämpfte Schwingung zu erhalten, muss man der schwingenden Masse während einer Periode gerade die Energie zuführen, die sie in einer Periode durch Reibung verliert. Man erreicht das durch **Selbststeuerung** oder **Rückkopplung**; durch das schwingende System werden in geeigneter Phase Kräfte ausgelöst, die den Energieverlust bei jeder Periode wieder wettmachen. Diese Energie wird einem anderen Energievorrat entnommen. Das Pendel einer Pendeluhr z. B. wird in der geeigneten Schwingungsphase über den Anker durch die Zähne des Steigrades beschleunigt (Abb. 4.13); die ihm dadurch zugeführte Energie entstammt dem Energievorrat der gespannten Feder oder des gehobenen Gewichtes der Uhr.

Eine reine Sinusschwingung ist eine mathematische Abstraktion; sie müsste nämlich definitionsgemäß unendlich lange weiterschwingen. Jede wirkliche freie Schwingung hört auf, entweder allmählich infolge Dämpfung, wie ein Glocken- oder Klavierton, den man nachschwingen lässt, oder plötzlich (Abb. 4.14, 4.15). Solche Schwingungen können daher auch keine absolut scharfe Linie in ihrem Spektrum haben. Um dieses Spektrum zu bestimmen, brauchen wir das Fourier-Integral, da der Vorgang nicht periodisch ist. Komplex ist die Rechnung wieder sehr einfach:

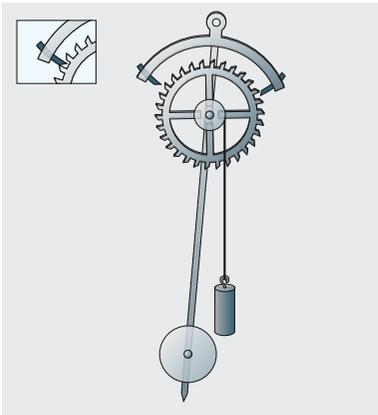


Abb. 4.13. Selbststeuerung des Pendels einer Pendeluhr über Steigrad und Anker. Das sich im Uhrzeigersinn drehende Steigrad drückt mit seinem Zahn auf die Klaue des Ankers und beschleunigt das Pendel nach rechts. In der entgegengesetzten Phase wird durch den Druck des Steigrades auf die linke Ankerklaue das Pendel nach links beschleunigt

Fourier-Spektrum $F(\omega)$ der gedämpften Schwingung $x(t) = x_0 e^{-\delta t} e^{i\omega_0 t}$:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(\delta - i(\omega_0 - \omega))t} dt$$

$$= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\delta - i(\omega_0 - \omega)}.$$

Das physikalische Spektrum ist der Realteil hiervon:

$$f(\omega) = \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta}{\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2}. \tag{4.27}$$

Aus der scharfen Linie ist eine Glockenkurve geworden (Abb. 4.14), deren Maximum bei ω_0 liegt und deren Halbwertsbreite gleich der Dämpfungskonstante ist: $\Delta\omega = \delta$.

Wir analysieren auch eine Schwingung, die eine Zeit τ andauert und dann plötzlich abbricht. Für die Rechnung ist es bequem, dies Intervall symmetrisch zu $t = 0$ zu legen:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{i\omega_0 t} & \text{für } -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{außerhalb dieses Intervalls.} \end{cases}$$

Die Fourier-Transformierte ist

$$F(\omega) = \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt$$

$$= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi} i(\omega_0 - \omega)} (e^{i(\omega_0 - \omega)\tau/2} - e^{-i(\omega_0 - \omega)\tau/2})$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x_0}{(\omega_0 - \omega)} \sin(\omega_0 - \omega) \frac{\tau}{2} \tag{4.28}$$

Dieser Funktion werden wir mehrfach wieder begegnen, z.B. als Beugungsbild eines Spaltes. Die Halbwertsbreite des Hauptmaximums ist umso größer, je kürzer die Schwingung andauert: $\Delta\omega = 3,79/\tau$. Die Nebenmaxima liegen bei

$$\frac{1}{2} \Delta\omega \tau = (k + \frac{1}{2})\pi, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

und sind um den Faktor $2/[\pi(2k + 1)]$ niedriger als das Hauptmaximum.

Dies ist die **Unbestimmtheitsrelation** (s. Abschn. 13.6.6) zwischen Zeit und Frequenz: Je kürzere Zeit τ ein Vorgang dauert, desto unschärfer ist seine Frequenz, und zwar so, dass

$$\tau \Delta\nu \approx 1. \tag{4.29}$$

Wenn man weiß, dass einer Schwingung der Frequenz ν die Energie $E = h\nu$ zugeordnet ist, ergibt sich daraus die Unbestimmtheitsrelation zwischen Energie und Zeit:

$$\tau \Delta E \approx h. \tag{4.30}$$

Auch die Gleichung (4.27), die Ähnliches aussagt, ist sehr wichtig: In der Atomphysik heißt sie **Breit-Wigner-Formel** und beschreibt Vorgänge,

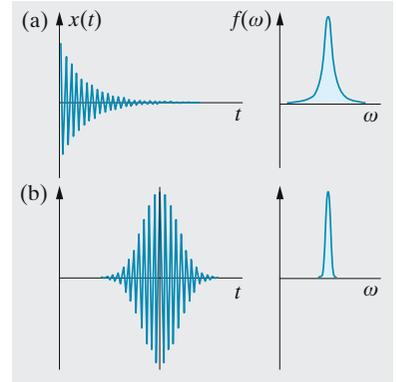


Abb. 4.14. (a) Eine exponentiell gedämpfte Schwingung oder Welle hat als Fourier-Spektrum ein Band, dessen Breite der Dämpfungskonstante entspricht. (b) Eine durch eine Gauß-Kurve modulierte Sinusschwingung hat ebenfalls eine Gauß-Kurve als Frequenzspektrum. Die Breiten beider Kurven gehorchen der Unbestimmtheitsrelation $\Delta t \cdot \Delta\nu \approx 1$, ebenso wie in Abb. 4.15a, b

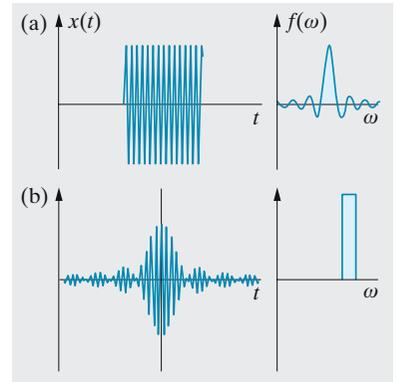


Abb. 4.15. (a) Das Frequenzspektrum einer Sinusschwingung, die nur eine Zeit t lang anhält, sieht aus wie das Beugungsbild eines Spaltes. (b) Welche Schwingung hat ein rechteckiges Frequenzspektrum? Sie sieht aus wie das Beugungsbild eines Spaltes

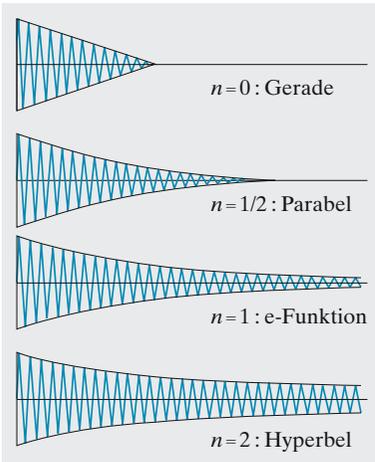


Abb. 4.16. Ein Reibungsgesetz $F \sim v^0$ (Coulomb-Reibung) liefert eine linear abklingende Schwingung, $F \sim v^{1/2}$ (Schmiermittelreibung) eine parabolische, $F \sim v$ (Stokes-Reibung) eine exponentielle, $F \sim v^2$ (Newton-Reibung) eine hyperbolische Dämpfung

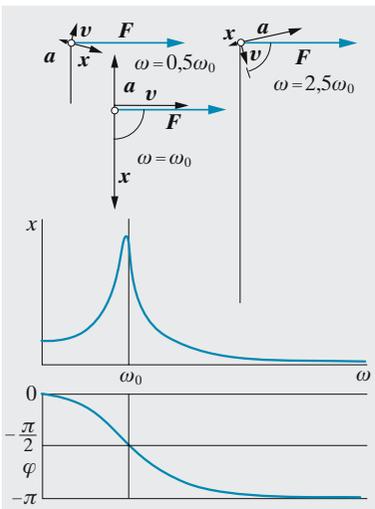


Abb. 4.17. *Oben*: Zeigerdiagramme für erregende Kraft, Auslenkung, Geschwindigkeit, Beschleunigung bei drei verschiedenen Frequenzen. *Unten*: Resultierende Frequenzabhängigkeiten von Amplitude und Phase

bei denen Teilchen vernichtet oder erzeugt werden. ω ist dabei nach der Planck-Formel $E = \hbar\omega$ durch die Energie E zu ersetzen, δ beschreibt die reziproke Lebensdauer des „Resonanzzustandes“.

Andere Reibungsgesetze als $F \sim v$ ergeben ein z. T. qualitativ anderes Dämpfungsverhalten. Bei $F \sim v^0$ (Coulomb-Reibung) nimmt die Amplitude linear ab, bei $F \sim v^2$ (Newton-Reibung) ist die Einhüllende eine Hyperbel (Abb. 4.16, Aufgabe 1.6.13). Bei Newton-Reibung gibt es keinen Kriechfall: Auch bei starker Dämpfung erfolgt noch ein Durchschwingen durch die Ruhelage, kein monoton Herankriechen.

4.1.3 Erzwungene Sinusschwingungen

Gegeben sei ein zu Sinusschwingungen befähigtes System, z. B. ein quasielastisch aufgehängter Körper mit der Masse m , der Federkonstante D und der Reibungskonstante k . Er würde, sich selbst überlassen, gedämpfte Schwingungen mit der Eigenfrequenz $\omega_e = \sqrt{D/m - k^2/4m^2}$ ausführen. Dieses System sei einer periodischen, speziell einer harmonisch veränderlichen Kraft ausgesetzt, deren Kreisfrequenz ω ist. Man stellt fest, dass das System nach einer gewissen **Einschwingzeit** mit der Frequenz ω der äußeren Kraft schwingt, nicht mit seiner Eigenfrequenz ω_e . Die Amplitude dieser Schwingungen ist allerdings stark von der relativen Lage von Eigenfrequenz ω_e und erzwungener Frequenz ω abhängig. Am größten ist sie bei $\omega \approx \omega_e$ (**Resonanz**). Man bemerkt ferner eine Phasendifferenz zwischen der Auslenkung des Systems und der äußeren Kraft, die ebenfalls entscheidend von der relativen Lage von ω und ω_e abhängt.

Man versteht diese Verhältnisse sehr schnell durch eine überschlägige Diskussion der Bewegungsgleichung. Die äußere Kraft sei $F = F_0 \cos(\omega t)$. Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + Dx = F_0 \cos(\omega t) \quad (4.31)$$

Trägheitskraft
Reibungskraft
Rückstellkraft
äußere Kraft

Die Erfahrung zeigt, dass die Auslenkung x nach Ablauf der Einschwingzeit ebenfalls eine harmonische Zeitfunktion mit der Kreisfrequenz ω wird, allerdings mit einer Phasenverschiebung α gegen die äußere Kraft:

$$x = x_0 \cos(\omega t - \alpha) \quad (4.32)$$

Eine solche Funktion zeitlich abzuleiten, bedeutet im Wesentlichen, sie mit ω zu multiplizieren:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin(\omega t - \alpha), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t - \alpha).$$

Abgesehen von sin- und cos-Funktionen, die alle die Größenordnung 1 haben, stehen also auf der linken Seite der Bewegungsgleichung die Glieder $m\omega^2, k\omega, D$ zur Verfügung, um alle zusammen die Kraft F_0 auszugleichen.

Für sehr kleine ω (genauer für $\omega \ll \sqrt{D/m}$ und $\omega \ll D/k$) überwiegt bestimmt das Glied D . Dann vereinfacht sich (4.31) zu $Dx = F_0 \cos(\omega t)$,

also

$$x = \frac{F_0}{D} \cos(\omega t) \quad (4.33)$$

Das System wird von der äußeren Kraft **quasistatisch** hin- und hergezerrt, ohne Rücksicht auf Masse und Reibung. Trägheits- und Reibungseffekte sind klein, weil die auftretenden Beschleunigungen bzw. Geschwindigkeiten klein sind. Zwischen x und F herrscht keine Phasendifferenz: $\alpha = 0$. Wir betrachten die Leistungsaufnahme des Systems: Die äußere Kraft F führt dem Körper nur dann Leistung zu, wenn er sich in ihrer Richtung mit der Geschwindigkeit dx/dt bewegt. Die Leistung ist dann $F dx/dt$ (Abschn. 1.5.7). In der zweiten und vierten Viertelperiode nimmt das System Energie auf, aber in der ersten und dritten, wo Kraft und Geschwindigkeit antiparallel sind, gibt es ebenso viel wieder ab (vgl. Abb. 7.45 mit der Übersetzung $U \rightarrow F, I \rightarrow v$). Die Gesamtleistungsaufnahme im quasistatischen Fall ist also Null.

Für sehr große ω (genauer für $\omega \gg \sqrt{D/m}$ und $\omega \gg D/k$) überwiegt das Trägheitsglied, das proportional $m\omega^2$ ist. Reibung und Rückstellkraft spielen keine Rolle: Das System verhält sich **quasifrei**. Beschleunigung und Kraft sind in Phase, daher ist die Auslenkung x um $\alpha = \pi$ voraus (oder hinterher). All dies folgt auch aus der Bewegungsgleichung, die sich zu $m d^2x/dt^2 = -m\omega^2 x_0 \cos(\omega t - \alpha) = F_0 \cos(\omega t)$ vereinfacht. Das Minuszeichen erfordert $\alpha = \pi$, und es wird

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t) \quad (4.34)$$

Leistungsaufnahme: In der zweiten und vierten Viertelperiode sind Kraft und Geschwindigkeit antiparallel, das System gibt Energie ab; ebenso viel nimmt es in der ersten und dritten Viertelperiode auf. Der Gesamteffekt ist wieder Null.

Wenn mit wachsendem ω die Phasenverschiebung von 0 auf π steigen soll, muss sie bei irgendeinem ω den Wert $\frac{\pi}{2}$ passieren. Dann ist die Geschwindigkeit in Phase mit der Kraft, und das System nimmt ständig Leistung auf. Ihr Wert ergibt sich zu $F dx/dt = F_0 \omega x_0 \cos^2(\omega t)$. Würde diese Energiezufuhr nicht durch Reibung verzehrt, so würde die Amplitude bis ins Unendliche anschwellen. Die Leistung der Reibungskraft ist $k(dx/dt)^2 = k\omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t)$. Gleichgewicht herrscht, wenn Gewinn und Verlust im Mittel gleich sind, d. h. wenn

$$x_0 = \frac{F_0}{k\omega} \quad (4.35)$$

Vergleich mit der Bewegungsgleichung zeigt, dass in diesem Fall die äußere Kraft genau durch das Reibungsglied kompensiert wird. Trägheits- und Rückstellglied müssen daher links einander wegheben. Das ist nur möglich, wenn $\omega = \sqrt{D/m}$, also gleich der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems ist. Hier also liegt die Stelle mit der Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$. Benutzt man diesen Wert ω , so folgt aus (4.35) die Amplitude $x_0 = F_0/(k\sqrt{D/m})$.

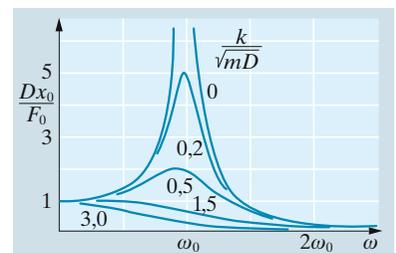


Abb. 4.18. Amplitude einer erzwungenen Schwingung als Funktion der Frequenz der erregenden Kraft für verschiedene Werte der relativen Dämpfung k/\sqrt{mD}

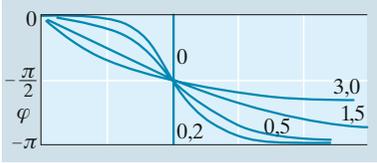


Abb. 4.19. Phasenverschiebung einer erzwungenen Schwingung gegen die erregende Kraft als Funktion von deren Frequenz bei verschiedenen Werten der relativen Dämpfung k/\sqrt{mD}

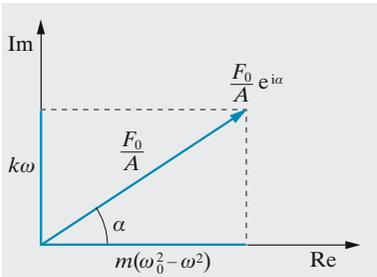


Abb. 4.20. Zur Berechnung der Amplitude und der Phase einer erzwungenen Schwingung

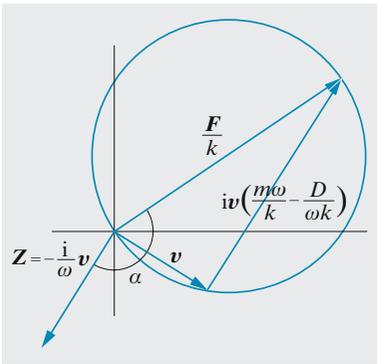


Abb. 4.21. Vektordiagramm der erzwungenen Schwingung. Der Endpunkt des v -Vektors liegt immer auf dem Kreis mit dem Durchmesser F/k

Dies ist nahezu die maximale Amplitude; bei etwas kleinerem ω ist zwar die Phasenbeziehung nicht ganz so günstig für die Leistungszufuhr, aber dafür das Reibungsglied $k\omega$ etwas kleiner.

Die komplexe Rechnung oder das quantitativ ausgewertete Zeigerdiagramm liefert alle diese Aussagen auch sehr elegant. Die Bewegungsgleichung für die ins Komplexe erweiterte Auslenkung z heißt

$$m\ddot{z} + k\dot{z} + Dz = F_0 e^{i\omega t} \tag{4.36}$$

Die stationäre Lösung muss auch $e^{i\omega t}$ enthalten:

$$z = \hat{z}_0 e^{i\omega t} \tag{4.37}$$

Hier ist \hat{z}_0 eine **komplexe Amplitude**, $\hat{z}_0 = z_0 e^{i\varphi}$, ihr Betrag z_0 ist die wirkliche Amplitude, ihr Winkel φ gibt die Phasenverschiebung zwischen Kraft und Auslenkung. Einsetzen von (4.37) in (4.36) liefert

$$\hat{z}_0(-m\omega^2 + i\omega k + D) = F_0 \text{ oder } \hat{z}_0 = \frac{F_0}{-m\omega^2 + D + i\omega k} \tag{4.38}$$

Der Betrag ist die physikalische Amplitude:

$$z_0 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k^2\omega^2}} \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}\right) \tag{4.39}$$

der Tangens des Phasenwinkels ist Imaginärteil/Realteil von \hat{z}_0 :

$$\tan \varphi = \frac{k\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{4.40}$$

Besonders übersichtlich ist ein Zeigerdiagramm für die Geschwindigkeit $v = i\omega z$ (**Argand-Diagramm**). Nach (4.36) gilt $i\omega m v + kv + Dv/i\omega = F_0$ oder

$$v + iv \left(\frac{m\omega}{k} - \frac{D}{\omega k} \right) = \frac{F_0}{k}$$

Die beiden Glieder links stehen, als Vektoren in der z -Ebene betrachtet, senkrecht aufeinander (Multiplikation mit i bedeutet Drehung um 90°). Mit F/k bilden sie ein rechtwinkliges Dreieck, das sich mit ω in der z -Ebene dreht. Ebenso dreht sich der umschriebene Thales-Kreis, der den Durchmesser F/k hat. Die Spitze des v -Vektors liegt immer auf seiner Peripherie. Die Phasenverschiebung zwischen F und v ist als Winkel der beiden Vektoren ablesbar. z ist nochmals um $\frac{\pi}{2}$ gegen v verdreht. Man sieht sofort: Bei $\omega = \omega_0$ ist v maximal, nämlich gleich dem Kreisdurchmesser F_0/k . Außerdem sind v und F dort genau in Phase. Aus beiden Gründen nimmt das System dort maximal Leistung auf. Bei $\omega \gg \omega_0$ dagegen ist das Glied mit iv viel größer als v selbst; daher zeigt v als kurzer Pfeil senkrecht zu qF : Keine Leistungsaufnahme.

Mit der Abkürzung $x = \omega/\omega_0$ und dem Gütefaktor $Q = \sqrt{Dm}/k$ lautet (4.39)

$$z_0 = \frac{F_0}{D} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}}.$$

nach x :

$$\boxed{x_{\max}^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}, \quad z_{0\max} = \frac{F_0 Q}{D\sqrt{1 - \frac{1}{4}Q^{-2}}}. \quad (4.41)}$$

Ein Maximum existiert nur für $Q^2 > \frac{1}{2}$. Es liegt um den Faktor $Q/\sqrt{1 - \frac{1}{4}Q^{-2}}$ höher als das quasistatische Plateau. Die Maximalfrequenz ist gegen ω_0 um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{1}{2}Q^{-2}}$ verschoben. Auch die Breite des Maximums lässt sich durch Q ausdrücken. Wenn $Q \gg 1$, liegt das Maximum bei $x \approx 1$. Halb so hoch wie dort ist die Kurve, wenn

$$(1-x^2)^2 + \frac{1}{Q^2} = (1+x)^2(1-x)^2 + \frac{1}{Q^2} \approx 4(1-x)^2 + \frac{1}{Q^2} \approx \frac{4}{Q^2},$$

d. h. bei einer Abweichung

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1-x \approx \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{Q}.$$

Formel (4.37) ist, mathematisch gesprochen, nur eine partikuläre Lösung von (4.36). Sie beschreibt die Schwingung nach länger andauernder Einwirkung der erregenden Kraft $F_0 \cos(\omega t)$. Um den **Einschwingvorgang** mitzubeschreiben, benötigt man die allgemeine Lösung von (4.36). Sie setzt sich additiv zusammen aus der partikulären Lösung (4.37) und der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung (4.12). Die Schwingung setzt sich aus zwei Teilschwingungen zusammen, von denen die eine mit der Eigenfrequenz (4.15) des schwingenden Systems erfolgt. Diese Schwingung klingt aber ab, sodass nach hinreichend langer Zeit nur die erzwungene Schwingung (4.37) übrigbleibt, die mit der Frequenz der erregenden Kraft erfolgt.

Amplitude und Phasendifferenz für ein nicht zu stark gedämpftes System haben also die in Abb. 4.18 und 4.19 dargestellte Abhängigkeit von der Frequenz ω der äußeren Kraft. Wenn die Dämpfung, dargestellt durch die Reibungskonstante k , zunimmt, werden beide Kurven flacher. Man macht sich dies am besten am Grenzfall $k \rightarrow 0$ klar: Hier ist das Resonanzmaximum unendlich groß, die Phasendifferenz springt bei $\omega = \omega_0$ schlagartig von 0 auf π . Bei wachsender Dämpfung muss nach (4.41) ein Wert von Q bzw. k erreicht werden, bei dem kein „Resonanzmaximum“ mehr existiert. Offenbar tritt dies ein bei

$$Q = \frac{1}{2}, \quad \text{d. h.} \quad k = 2\sqrt{mD} \quad (\text{Aperiodischer Grenzfall}).$$

Für diese und noch stärkere Dämpfungen tritt kein Resonanzmaximum mehr auf, sondern die Amplitude nimmt monoton mit ω ab (Abb. 4.19).

Anwendung auf den Messvorgang. Jede physikalische Messung besteht darin, dass man eine Schwingung oder einen beliebigen anderen Vorgang auf ein Messsystem einwirken lässt und dessen zeitliches Verhalten, speziell dessen Schwingungen registriert. Häufig handelt es sich um Hebelsysteme, die Schreibvorrichtungen betätigen, oder Kapseln, die durch Membranen abgeschlossen sind. Die Kapsel ist mit Luft oder Flüssigkeit gefüllt, deren Druckschwankungen Schwingungen der Membran verursachen. Sie dreht ein Spiegelchen, das auf einem Schirm (z. B. lichtempfindlichem Papier) die Schwingungen der Membran aufzeichnet. Bei elektromagnetischer Aufzeichnung sind die Verhältnisse im Prinzip ähnlich. Immer handelt es sich um schwingungsfähige (wenn auch vielleicht überdämpfte) Systeme, die durch den zu messenden Vorgang, falls er periodisch ist, zu erzwungenen Schwingungen erregt werden. Ein unperiodischer Vorgang übt Wirkungen aus, die durch sein Fourier-Spektrum, also durch Überlagerung mehrerer Schwingungen, beschrieben werden.

Die Grundforderung an das Messgerät ist, dass es die zu messenden Vorgänge möglichst formgetreu ohne Verzerrung aufzeichnet. Das lässt sich im Rahmen der Theorie der erzwungenen Schwingungen so ausdrücken, dass für den ganzen in Frage kommenden Frequenzbereich die *Amplitude* des Messsystems proportional der erregenden Amplitude sein muss, und dass die *Phase* des Messsystems höchstens um einen konstanten, d. h. frequenzunabhängigen Betrag von der Phase des Vorganges abweichen darf (die zweite Forderung ist für einige Messungen, z. B. Klangfarbenanalysen, unwesentlich). Aus Abb. 4.18 und 4.19 ergibt sich dann sofort: Das Messsystem darf keine Eigenfrequenzen im Frequenzspektrum des zu messenden Vorganges haben. In der Nähe einer Eigenfrequenz ist nämlich die Frequenzabhängigkeit, also die Verzerrung von Amplitude und Phase am größten. Man könnte so die aufzuzeichnende Kurvenform völlig entstellen. Am besten arbeitet man auf dem quasistatischen Plateau der Resonanzkurve, wählt also die kleinste Eigenfrequenz des Messgerätes sehr viel höher als alle im zu messenden Vorgang enthaltenen Frequenzen. Wenn möglich, macht man auch von einer geeigneten Dämpfung Gebrauch, die die Resonanzkurven erheblich ausglättet (Abb. 4.18, 4.19).

Was hier für die Wechselwirkung zwischen Vorgang und Messgerät gesagt wurde, gilt allgemein für jede physikalische Wechselwirkung: Ihre Übertragungseigenschaften lassen sich durch die Fourier-Spektren der beteiligten Partner beschreiben. Darauf beruht die ungeheure Bedeutung der Fourierschen Methoden für die moderne theoretische Physik und Technik.

4.1.4 Amplituden- und Phasenmodulation

In der älteren Radiotechnik prägt man einer **Trägerwelle** der Kreisfrequenz ω_0 eine akustische Information (Sprache, Musik) auf, indem man ihre Amplitude im Rhythmus des akustischen Signals ändert: **Amplitudenmodulation** (AM, Abb. 4.9). Das akustische Signal habe den zeitlichen Verlauf $a(t)$. Die übertragene Schwingung ist dann

$$V(t) = V_0(A + a(t)) \cos(\omega_0 t) ,$$

wobei $a(t) < A$, d. h. man „moduliert nicht ganz durch“. Das akustische Signal sei z. B. ein reiner Sinuston der Frequenz ω_1 : $a(t) = a_1 \cos(\omega_1 t)$, also

$$V(t) = V_0 A \cos(\omega_0 t) + V_0 a_1 \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_1 t) .$$

Nach dem Additionstheorem des \cos ($\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$) kann man das darstellen als

$$V(t) = V_0 A \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} V_0 a_1 (\cos(\omega_0 + \omega_1)t + \cos(\omega_0 - \omega_1)t) .$$

Im Fourier-Spektrum des Vorgangs gibt es jetzt nicht nur die Trägerfrequenz ω_0 , sondern sie ist begleitet von den schwächeren „Seitenbändern“ $\omega_0 + \omega_1$ und $\omega_0 - \omega_1$. Ein akustischer Vorgang, der aus allen Frequenzen des Hörbereichs von praktisch $\omega = 0$ bis ω_m besteht, erzeugt und benötigt das ganze Frequenzband zwischen $\omega_0 - \omega_m$ und $\omega_0 + \omega_m$. Für **HiFi-Empfang** muss $\omega_m \approx 20$ kHz sein. Wenn die Trägerfrequenzen zweier Radiosender einander näherliegen als 40 kHz, „knabbern“ sie einander die Höhen ab. Jeder Elektromotor und jede atmosphärische Entladung prägen der Empfangsantenne ebenfalls Amplitudenänderungen auf und stören daher den Empfang von AM-Sendungen (Lang-, Mittel- und Kurzwelle). Die Phase der Trägerwelle beeinflussen sie i. Allg. nicht. Daher ist der Empfang phasenmodulierter Sendungen viel reiner. Um auch den vollen Hörfrequenzbereich auszunutzen, muss man die Trägerfrequenzen sehr hoch legen (**UKW**) und nimmt dann lieber die begrenzte Senderreichweite in Kauf.

Ein phasenmodulierter Vorgang sieht so aus:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + a(t)) .$$

$a(t)$ ist wieder das akustische Signal. Da es sich langsam gegen $\cos(\omega_0 t)$ ändert, kann man für ein Zeitintervall, das einige Trägerperioden umfasst, schreiben $a(t) = a_0 + t \, da/dt = a_0 + \dot{a}t$, also

$$V(t) \approx V_0 \cos(a_0 + \omega_0 t + \dot{a}t) .$$

Die momentane Frequenz ist also nicht ω_0 , sondern $\omega_0 + \dot{a}$. Daher ist die **Phasenmodulation** gleichwertig einer **Frequenzmodulation** (FM).

Die obige Beziehung legt für jemanden, der komplex rechnen kann, ein raffiniert-einfaches Verfahren zur Umwandlung eines amplitudenmodulierten in einen phasenmodulierten Vorgang nahe. Die zeitliche Ableitung \dot{a} entspricht für einen periodischen Vorgang der Multiplikation mit $i\omega$, d. h. der Phasenänderung um $\frac{\pi}{2}$. Man schicke also den obigen AM-Vorgang einmal durch einen engen Bandpass, der nur ω_0 durchlässt, zum anderen durch das dazu komplementäre Bandfilter, das nur die Seitenbänder durchlässt. Eines dieser beiden Signale wird dann um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben. So wird z. B. $A V_0 \cos(\omega_0 t)$ zu $A V_0 \sin(\omega_0 t)$ (dazu genügen ein Kondensator und ein Widerstand, s. Beispiel S. 405). Dann werden beide Vorgänge wieder zusammengesetzt zu

$$V' = A V_0 \sin(\omega_0 t) + V_0 a(t) \cos(\omega_0 t) .$$

Wenn $a(t) \ll A$, lässt sich das auch schreiben

$$V' = AV_0 \sin(\omega_0 t + A^{-1}a(t))$$

(Beweis mittels Additionstheorem des sin). Das ist aber ein FM-Signal.

Ganz analog funktioniert auch das **Phasenkontrast-Mikroskop**. Ein durchsichtiges Objekt, z. B. eine Zelle, moduliert die Amplitude des durchgehenden Lichts praktisch nicht. Anfärbung brächte eine stärkere AM, ist aber bei lebenden Objekten nur sehr beschränkt durchführbar, denn fast jeder Farbstoff ist giftig. Die Zelle hat aber eine andere Brechzahl n als die Umgebung, d. h. sie ändert die *Phase* der Welle. Man erhält ein nicht zeitlich, sondern räumlich phasenmoduliertes Signal, d. h. bei monochromatischer Beobachtung eine Trägerwelle und ihre Seitenbänder. Mittels einer Zusatzoptik trennt man Trägerwelle und Seitenbänder, verschiebt eine davon mit einem $\lambda/4$ -Plättchen (vgl. Abschn. 10.2.7) um $\frac{\pi}{2}$ und erhält durch Überlagerung ein AM-Signal, d. h. einen Helligkeitskontrast.

4.2 Wellen

Jetzt handelt es sich nicht mehr um einen Massenpunkt, sondern um sehr viele, die Kräfte aufeinander ausüben. Man kann auch von einem kontinuierlichen Medium reden, dessen einzelne Teile wechselwirken, oder viel allgemeiner von einem Feld, in dem eine solche Wechselwirkung herrscht.

4.2.1 Beschreibung von Wellen

Wir spannen ein Seil zwischen zwei Punkten und schlagen nahe dem einen Ende kurz darauf. Es entsteht eine Auslenkung, die über die ganze Seillänge bis zum anderen Ende läuft. Dort wird sie reflektiert und kann mehrmals hin- und herlaufen, ohne ihre Form wesentlich zu ändern.

$y = f(x, t)$ sei die Auslenkung des Seils aus der Ruhelage an der Stelle x zur Zeit t . Die Anfangsauslenkung $f(x, 0)$ soll nach der Zeit t ohne Formänderung um die Strecke ct gewandert sein, z. B. nach rechts. c ist dann die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Dieselbe Auslenkung, die anfangs bei x herrschte, besteht jetzt bei $x + ct$. Offenbar ist dies gegeben, wenn f nicht von x und t einzeln abhängt, sondern nur von der Kombination $x - ct$, also

$$y = f(x - ct) . \quad (4.42)$$

Sonst ist die Funktion f ganz beliebig; wir können ja im Prinzip jede Anfangsauslenkung herstellen. Es kann auch $y = f(x + ct)$ sein, aber eine solche Welle läuft nach links (Abb. 4.22).

$x - ct$ ist die **Phase der Welle**. In den Ebenen, wo $x - ct$ den gleichen Wert hat, ist auch die Amplitude y gleich. Diese Ebenen stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und heißen Wellenflächen oder Wellenfronten, speziell Wellenberg oder Wellentäler, wenn die Auslenkung dort maximal nach „oben“ bzw. „unten“ geht. Hier beschreiben wir **ebene Wellen**, deren Wellenfronten parallele Ebenen sind. Natürlich gibt es auch kompliziertere Wellenformen. Am wichtigsten sind **Kugel-** und **Zylinderwellen**, die von einer punkt- bzw. stabförmigen Quelle ausgehen.

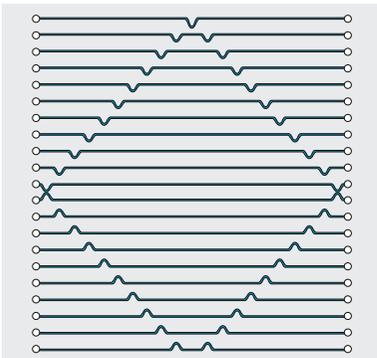


Abb. 4.22. Eine Auslenkung beliebiger Form (nicht nur ein Sinus!) läuft auf einem Seil oder einer Saite ohne Formänderung nach beiden Seiten, falls Reibung keine Rolle spielt

Ein undeformbares Seil können wir nur senkrecht zu seiner Richtung auslenken und eine **Transversalwelle** erzeugen. Bei einem Gummiseil oder einer Spiralfeder können wir auch **Longitudinalwellen** machen, indem wir in Seilrichtung auslenken.

Bei einer ganz speziellen Welle, der *harmonischen* Welle, hat die Auslenkung Sinusform. Eine Momentaufnahme (z. B. bei $t = 0$) zeigt dann etwa ein Profil $y = y_0 \sin(kx)$. Die Konstante k , genannt **Wellenzahl**, hängt eng mit der Wellenlänge zusammen: Nach einem Abstand $x = 2\pi/k$ wiederholt sich das ganze Profil. Die **Wellenlänge** ist also

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (4.43)$$

Eine bestimmte Stelle x des Seils führt im Lauf der Zeit eine Sinusschwingung aus: $y = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Damit bei $t = 0$ das räumliche Sinusprofil herauskommt, muss $\varphi = kx$ sein, im Ganzen also

$$y = y_0 \sin(kx + \omega t). \quad (4.44)$$

Dies ist von der Form (4.42). Wie das Vorzeichen zeigt, läuft die Welle nach links (wenn t zunimmt, muss x abnehmen, damit das Argument und damit y gleich bleibt). Ausklammern von k zeigt durch Vergleich mit (4.42), dass die **Phasengeschwindigkeit** der Welle

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi v}{2\pi/\lambda} = \lambda v \quad (4.45)$$

ist. Wenn es Rechenvorteile bringt, wie sehr oft, können wir diese Funktion auch komplex ergänzen:

$$y = y_0 e^{i(kx + \omega t)}. \quad (4.46)$$

4.2.2 Die Wellengleichung

Welche Kraft treibt das Seil in die Ruhelage zurück? Sicher hat sie mit der Seilspannung zu tun. Aber ein Seil überträgt doch Kräfte nur in seiner eigenen Richtung und nicht senkrecht dazu. Für ein gerades Seilstück ist das richtig, aber sowie das Seil gekrümmt ist, ergibt sich eine Resultierende der Kräfte längs der beiden Tangenten, denn diese beiden Kräfte sind zwar der Größe nach gleich (F_0), aber der Richtung nach verschieden. Aus Abb. 4.23 liest man für ein Seilstück der Länge dx und vom Krümmungsradius R als Resultierende ab

$$dF = F_0 \frac{dx}{R}$$

(die gleiche Überlegung haben wir bei der Seifenblase in Abb. 3.26 zweimal, für die beiden Richtungen, ausgeführt). Wenn die Auslenkung nicht zu stark ist, können wir die Krümmung $1/R$ durch die zweite Ableitung y'' ersetzen. Gleichzeitig finden wir auch die Beschleunigung des Seilstücks, das die Masse $\rho A dx$ hat:

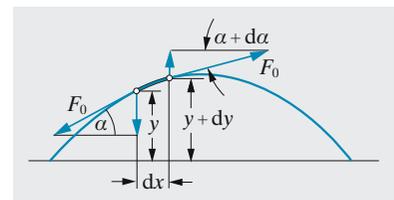


Abb. 4.23. Die Kraft, die eine Saite in die Ruhelage zurückzieht, ist proportional zur Krümmung der Saite an dieser Stelle

$$\ddot{y} = \frac{dF}{\rho A dx} = \frac{F_0 y'' dx}{\rho A dx} = \frac{F_0}{\rho A} y''.$$

Mit der Seilspannung $\sigma = F_0/A$ wird das noch einfacher

$$\ddot{y} = \frac{\sigma}{\rho} y'' \tag{4.47}$$

Eine solche Gleichung der Form $\ddot{y} = ay''$ heißt **Wellengleichung (d'Alembert-Gleichung)**.

Wir zeigen: Jede Funktion $y = f(x - ct)$ oder $y = f(x + ct)$ ist Lösung dieser Gleichung mit der Phasengeschwindigkeit $c = \sqrt{a}$. Zum Beweis leiten wir $f(x \pm ct)$ einmal partiell nach x und dann partiell nach t ab. Beide Male müssen wir zunächst f nach seinem direkten Argument $x \pm ct$ ableiten, was natürlich beide Mal dasselbe ergibt, und mit der Ableitung dieses Arguments nach x bzw. t multiplizieren, was 1 bzw. $\pm c$ ergibt. Nach der zweiten Differentiation sieht man

$$\ddot{y} = c^2 y'' \tag{4.48}$$

Wie wir sehen werden, ergeben sich auch für viele andere typische Wellenvorgänge Gleichungen dieser Form, aber nicht für alle (Abschn. 4.4.2).

4.2.3 Elastische Wellen

Wir betrachten eine Flüssigkeits- oder Gassäule, z. B. in einer Flöte, vom Querschnitt A . Wenn der Druck sich längs der Säulenachse (in x -Richtung) ändert, wirkt in einem solchen Druckgradienten $p(x)$ auf ein Volumenelement $V = A \Delta x$ die Kraft $-A \Delta x p'$ (Abb. 4.24, Abschn. 3.3.3). Sie erteilt der Masse $\rho A \Delta x$ des Volumenelements die Beschleunigung

$$\dot{v} = -\frac{A p' \Delta x}{\rho A \Delta x} = -\frac{1}{\rho} p' \tag{4.49}$$

Die Geschwindigkeit v des Mediums wird auch von Ort zu Ort wechseln, was dazu führt, dass die einzelnen Flüssigkeitselemente ihr Volumen ändern. In Abb. 4.24 bewegt sich die linke Stirnfläche des Flüssigkeitselements von der Dicke Δx mit v , die rechte mit $v + v' \Delta x$. Nach einer Zeit dt hat sich also die rechte Stirnfläche um $v' \Delta x dt$ weiter verschoben als die linke. Das Volumen $V = A \Delta x$ hat sich dadurch um $dV = A v' \Delta x dt$ geändert. Die relative Volumenänderung

$$\frac{dV}{V} = \frac{A v' \Delta x dt}{A \Delta x} = v' dt$$

erfordert bzw. erzeugt nach Abschn. 3.1.3 eine Druckänderung

$$dp = -\frac{1}{\kappa} \frac{dV}{V} = -\frac{1}{\kappa} v' dt$$

oder

$$\dot{p} = -\frac{1}{\kappa} \dot{v}' \tag{4.50}$$

(κ ist die Kompressibilität des Mediums).

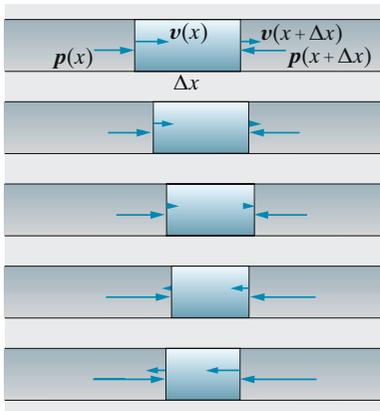


Abb. 4.24. In einer elastischen Welle ändert ein Volumenelement seine Lage und seine Größe infolge der wechselnden Druckverhältnisse an seinen Stirnflächen

Um (4.49) und (4.50) zu einer Gleichung für eine der Größen p oder v zu verschmelzen, kann man (4.49) nochmals nach x , (4.50) nach t ableiten. Man erhält dann ein gemeinsames Mittelglied \dot{v}' , also

$$\ddot{p} = \frac{1}{\kappa \varrho} p'' . \quad (4.51)$$

Der Druck gehorcht einer d'Alembert-Gleichung, d.h. longitudinale Wellen beliebiger Art breiten sich mit der Phasengeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{1}{\kappa \varrho}} \quad (4.52)$$

aus. Hätte man umgekehrt (4.49) nach t , (4.50) nach x abgeleitet, hätte man dieselbe Gleichung (4.51) für die Geschwindigkeit v statt für den Druck p erhalten. Auch für den Ort x der Teilchen oder für ihre Auslenkung $\xi = x - x_0$ aus der Ruhelage gilt dieselbe Gleichung. Es ist ja $v = \dot{\xi}$, und ob man beiderseits in dieser Gleichung einmal mehr oder weniger nach t ableitet, spielt keine Rolle.

× Beispiel...

Wie groß ist die **Schallgeschwindigkeit** in Wasser? Daten s. Abschn. 3.1.3c.

Die Kompressibilität des Wassers ist $\kappa = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$, die Dichte $\varrho = 1000 \text{ kg/m}^3$, also nach Abschn. 4.2.3 oder Abschn. 4.4.2 die Schallgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\varrho \kappa} = 1,4 \text{ km/s}$, d.h. mehr als viermal so groß wie in Luft. Direktmessung der Schallgeschwindigkeit ist das einfachste Mittel zur Bestimmung der Kompressibilität einer Flüssigkeit.

Handelt es sich nicht um einen fluiden, sondern um einen festen Körper, dann ändert sich nichts an der Betrachtung, außer dass p durch die Schubspannung σ und die Gleichung $dp = -\kappa^{-1} dV/V$ durch das Hookesche Gesetz $d\sigma = -E dV/V$, also κ durch E^{-1} zu ersetzen ist:

$$\ddot{\xi} = \frac{E}{\varrho} \xi'' , \quad c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} . \quad (4.53)$$

Im Gegensatz zum Fluid, wo es nur solche Longitudinalwellen gibt (außer an der Flüssigkeitsoberfläche), wehrt sich ein Festkörper aber gegen eine Scherung und kann daher auch Tansversalwellen übertragen. Dabei tritt der Schermodul G anstelle des Schubmoduls E .

Die wichtigste Anwendung auf die Schallgeschwindigkeit in einem Gas hat eine interessante Entdeckungsgeschichte. *Newton* ging von der Gasgleichung $p \sim V^{-1}$ aus, wonach $dV/dp = -V/p$, und bestimmte so die Kompressibilität als $\kappa = 1/p$. Damit müsste die **Schallgeschwindigkeit** $c = \sqrt{p/\varrho}$ sein, für Luft also $c = 280 \text{ m/s}$. Jedes Kind, das zwischen

Tabelle 4.1. Schallgeschwindigkeiten in verschiedenen Stoffen (20 °C)

Stoff	c in m/s
Kohlendioxid	266
Sauerstoff	326
Stickstoff	349
Helium	1 007
Wasserstoff	1 309
Azeton	1 190
Benzol	1 324
Wasser	1 485
Blei	1 300
Kupfer	3 900
Aluminium	5 100
Eisen	5 100
Kronglas	5 300
Flintglas	4 000

Blitz und Donner 12 s zählt und daraus schließt, das Gewitter sei 4 km entfernt, kannte aber auch damals schon den genaueren, höheren Wert von c : Etwa 330 m/s. Erst *Laplace* klärte die Diskrepanz: Newtons $p \sim V^{-1}$ gilt nur, wenn die Gastemperatur konstant bleibt. Die Schallschwingungen sind aber so schnell, dass die Kompressionswärme nicht abfließen kann. Wärmeres Gas hat höheren Druck und lässt sich schwerer komprimieren. Man muss das κ für **adiabatische Zustandsänderungen** einsetzen, das aus der kurz zuvor von *Poisson* aufgestellten Zustandsgleichung $p \sim V^{-\gamma}$ (5.26) zu $\kappa = 1/(\gamma p)$ folgt. Ein zweiatomiges Gas wie Luft hat $\gamma = \frac{7}{5}$. Damit wird richtig für Normalluft

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = 330 \text{ m/s} . \quad (4.54)$$

Bei konstanter Temperatur ist $p \sim \rho$, also hängt c nicht vom Gasdruck ab. Je heißer aber das Gas, desto höher ist p bei gegebenem ρ , denn $p \sim T\rho$ (T : absolute Temperatur). Es folgt $c \sim \sqrt{T}$: In heißer Luft läuft der Schall schneller. Damit erklären sich viele Alltagsbeobachtungen.

4.2.4 Überlagerung von Wellen

Zum Glück wird mein Blick auf meine Strandnachbarin nicht dadurch beeinträchtigt, dass andere Leute zwischen uns beiden hindurch das Meer betrachten. Wellen überlagern sich ungestört, ihre Auslenkungen addieren sich einfach, allerdings nur, wenn die Amplituden nicht zu groß sind. Mathematisch drückt sich das in der *Linearität* der d'Alembert-Gleichung (4.48) aus: Wenn ξ_1 und ξ_2 Lösungen sind, ist auch $\xi_1 + \xi_2$ eine Lösung. Diese **ungestörte Superposition** tritt nicht mehr ein, wenn die eine Welle die Eigenschaften des Mediums beeinflusst, wie in elastischen Medien bei sehr hohen Amplituden oder sogar beim Licht bei extremen Amplituden, wie sie ein Laser erzeugen kann. Nicht einmal das Vakuum ist in diesem Sinne streng linear: Zwei γ -Quanten können einander beeinflussen, z. B. ein Elektron-Positron-Paar erzeugen, obwohl dieser Vorgang noch nicht experimentell nachgewiesen werden konnte.

Zwei Schwingungen können sich in Frequenz, Amplitude, Phase und Schwingungsrichtung unterscheiden. Dazu kommt bei den Wellen noch die Ausbreitungsrichtung, die nur bei den Longitudinalwellen mit der Schwingungsrichtung identisch ist, bei Transversalwellen aber senkrecht dazu liegt. Bei Transversalwellen bezeichnet man die Schwingungsrichtung auch als **Polarisationsrichtung**. Abgesehen davon überträgt sich der ganze Abschn. 4.1.1 sinngemäß auch auf Wellen.

Wir beschränken uns zunächst auf harmonische Wellen. Wenn eine solche ebene Welle in positiver x -Richtung läuft, lautet ihre Auslenkung

$$\xi = \xi_0 e^{i(kx - \omega t + \varphi)} .$$

Auch eine beliebige Ausbreitungsrichtung kann man erfassen, wenn man die **Wellenzahl** k zum Vektor \mathbf{k} erennt:

$$\xi = \xi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi)} . \quad (4.55)$$

Diese Welle läuft in Richtung des Vektors \mathbf{k} , denn nur beim Fortschreiten in dieser Richtung ändert sich $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ und damit die Phase überhaupt.

Wir untersuchen einige Fälle, die gegenüber dem Fall der Schwingungen Neues liefern.

a) Wellen gleicher Frequenz, aber verschiedener Ausbreitungsrichtung. Eine Welle laufe in der Richtung \mathbf{k}_1 , die andere in der Richtung \mathbf{k}_2 . Da beide Wellen gleiche Frequenz ω haben, stimmen sie auch im *Betrag* ihrer \mathbf{k} -Vektoren überein, denn dieser drückt die Wellenlänge aus (diese Gleichheit gilt nur in isotropen Medien, wo $c = \omega/k$ in allen Richtungen gleich groß ist). Beide Wellen sollen zunächst auch gleiche Amplituden ξ_0 haben. Die Gesamtauslenkung ist die Summe der beiden Teilauslenkungen, die wir gleich komplex schreiben:

$$\xi = \xi_0 e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \xi_0 e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} .$$

Jetzt benutzen wir eine Beziehung, die man aus Abb. 4.25 ablesen kann:

$$e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(x - y)\right) e^{i(x+y)/2} .$$

Für unsere Wellen heißt das

$$\xi = 2\xi_0 \cos\left(\frac{(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}}{2}\right) e^{i((\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} / 2 - \omega t)} . \tag{4.56}$$

Der Faktor vor dem e-Ausdruck ist die Gesamtamplitude. Sie ist offenbar räumlich moduliert: Bei $(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} = (2m + 1)\pi$ (m : ganze Zahl) ist die Amplitude Null; der e-Faktor kann machen was er will, es herrscht dort Ruhe. $(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} = \pi$ beschreibt eine Ebene senkrecht zum Vektor $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$, die also den Winkel zwischen \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 halbiert. Die übrigen Knotenebenen mit $m \neq 0$ liegen im Abstand $2\pi/|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|$ parallel dazu. In den Schichten zwischen diesen Ebenen kann die Welle laufen, ihre Kreisfrequenz ist natürlich immer noch ω , ihr Ausbreitungsvektor $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)/2$ ist parallel zu den Knotenebenen, wie der e-Faktor in (4.56) zeigt. Aber die Wellenlänge und damit die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \lambda v$ sind *nicht* mehr die der Einzelwellen: Die resultierende Welle hat $\lambda' = 4\pi/|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|$, was immer *größer* ist als das $\lambda = 2\pi/k$ der Einzelwelle, außer natürlich bei $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ (Abb. 4.26). Wellen, die zwischen Knotenebenen eingeklemmt sind, laufen schneller als im Freien. Wir werden dies bei elektromagnetischen Wellen im Hohlleiter wiederfinden.

Wenn die Teilwellen verschiedene Amplituden ξ_1 und ξ_2 haben, löschen sie sich nicht mehr in Knotenebenen völlig aus, die Amplitude hat dort nur den Minimalwert $\xi_1 - \xi_2$, dazwischen den Maximalwert $\xi_1 + \xi_2$. Diese angenäherten **Knotenebenen** halbieren noch den Winkel zwischen \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 . Aber die Gesamtwelle läuft nicht mehr längs der so vorgezeichneten Schichten, sondern taucht schräg durch die Knotenebenen durch.

Wir betrachten noch einige Spezialfälle von (4.56). $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$, aber Phasendifferenz φ zwischen beiden Wellen (Abb. 4.27, 4.28):

$$\xi = 2\xi_0 \cos\frac{\varphi}{2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi/2)} . \tag{4.57}$$

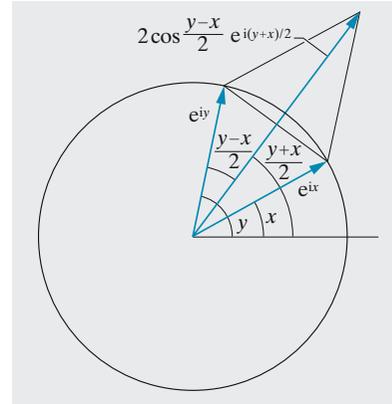


Abb. 4.25. Überlagerung zweier Schwingungen oder Wellen gleicher Frequenz und Amplitude, aber verschiedener Phase

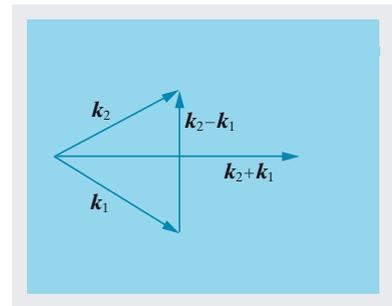


Abb. 4.26. Zwei ebene Wellen gleicher Frequenz, aber verschiedener Ausbreitungsrichtung überlagern sich zu einer Reihe paralleler Kanäle, in denen die Welle schneller laufen kann als die Einzelwellen

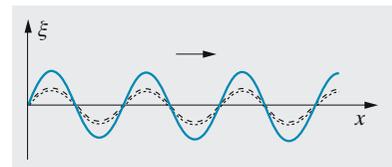


Abb. 4.27. Überlagerung zweier Wellen, deren Gangunterschied Null oder ein ganzzahliges Vielfaches von λ beträgt

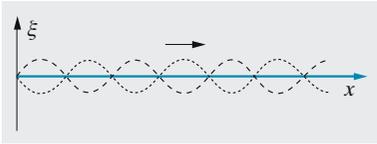


Abb. 4.28. Überlagerung zweier Wellen, deren Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt

Wellen, die in gleicher Richtung laufen, verstärken oder schwächen sich je nach der Phasendifferenz. Bei $\varphi = 2m\pi$ verdoppelt sich die Amplitude. Hierauf beruht ein großer Teil der Interferenzzoptik.

$\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ mit Phasendifferenz φ :

$$\xi = 2\xi_0 \cos\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{-i(\omega t - \varphi/2)}. \quad (4.58)$$

Hier ist der räumliche Anteil ganz aus dem Exponenten verschwunden. Die Welle läuft überhaupt nicht mehr, sondern an jeder Stelle schwingt ξ zeitlich auf und ab ($e^{-i\omega t}$), aber die Amplitude dieser Schwingung ist überall verschieden, sie bildet selbst ein cos-Profil. Solche **stehenden Wellen** (Abb. 4.29a,b) bilden sich z. B., wenn eine senkrecht einfallende Welle reflektiert wird. Sie sind das einfachste Beispiel für Eigenschwingungen (Abschn. 4.4). Wegen $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$, also $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$ muss man stehenden Wellen eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit zuschreiben. Das klingt paradox, aber in der Tat schwingen ja alle Stellen synchron, die Erregung gelangt sozusagen in der Zeit 0 überall hin.

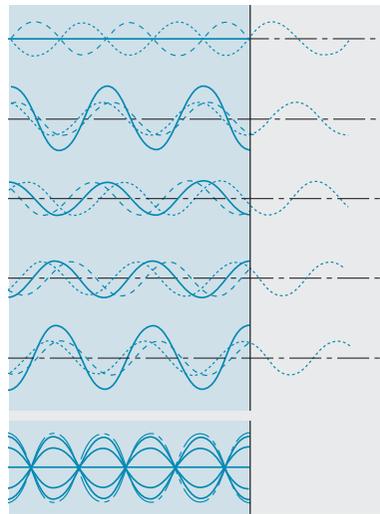


Abb. 4.29a. Entstehung einer stehenden Welle durch Überlagerung der an einem „dünneren“ Medium reflektierten mit der einfallenden Welle. Die punktierte Welle eilt auf den Spiegel zu, die gestrichelte ist die reflektierte Welle. In jedem Bild ist die hinlaufende Welle um $\lambda/5$ gegenüber der Welle im darüberstehenden Bild verschoben. Die Phase der reflektierten Welle schließt sich am Spiegel stetig an die der ankommenden Welle an. Im untersten Teilbild sind die resultierenden Wellen für die 5 dargestellten Phasen aufeinander gezeichnet

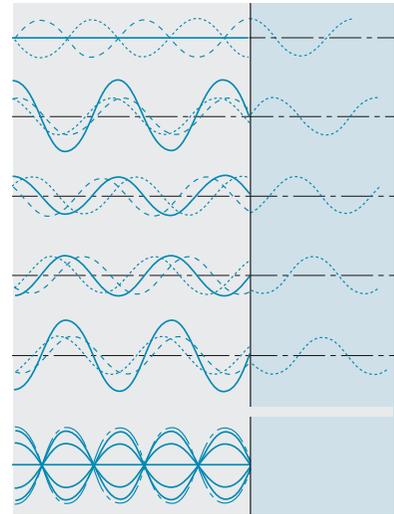


Abb. 4.29b. Entstehung der stehenden Welle bei der Reflexion am „dichteren“ Medium. Es erfolgt ein Phasensprung um π (rechts vom Spiegel ist die um $\lambda/2$ verschobene ankommende Welle gezeichnet, deren Umklappung die reflektierte Welle ergibt). Im untersten Teilbild sind die resultierenden Wellen für die 5 dargestellten Phasen aufeinander gezeichnet

x Beispiel...

An Steilküsten sieht man, besonders bei starkem Seegang, oft gelbbraune Streifen parallel zur Küstenlinie, auch Vorsprünge und Buchten folgend. Sie treiben nicht mit den Wellen mit, sondern stehen still. Wie entstehen sie?

An der Steilküste laufen die Wellen sich nicht tot, sondern werden reflektiert. Mit der einlaufenden Welle überlagert sich die reflektierte zu einer stehenden Welle, in deren Knoten das Wasser relativ ruhig ist und sich Tang ansammeln kann.

b) Wellen gleicher Ausbreitungsrichtung, aber verschiedener Frequenz. Wenn die Kreisfrequenzen der beiden Wellen, ω_1 und ω_2 , nur geringfügig verschieden sind, entsteht an jeder Stelle des Raumes das zeitliche Bild einer Schwebung (Abb. 4.30): Die Amplitude ist zeitlich moduliert durch den Faktor $\cos(\omega_1 - \omega_2)t$, also mit der Kreisfrequenz $\omega_1 - \omega_2$. Die Wellenlängen λ_1 und λ_2 und damit die Wellenzahlen k_1 und k_2 sind i. Allg. auch verschieden, und daher ist auch das räumliche Momentbild der Welle entsprechend räumlich amplitudenmoduliert mit dem Faktor $\cos(k'x)$, wobei $k' = k_1 - k_2$. Da $k = 2\pi/\lambda$, ist die räumliche Periode dieses Schwebungsbildes $\lambda' = \lambda_1\lambda_2/|\lambda_1 - \lambda_2| \approx \lambda^2/\Delta\lambda$. Je ähnlicher die Wellenlängen der Teilwellen, desto breiter ist die **Schwebung**.

Angenommen, wir wollen nur eines dieser Schwebungsmaxima übrig lassen, alle anderen sollen sich auslöschen. Es soll also nur *ein* Wellenzug der Länge λ' übrig bleiben. Die Mitte unseres Wellenzuges liege bei $x = 0$, dort verstärken sich die Teilwellen mit λ_1 und λ_2 , beiderseits im Abstand $\frac{1}{2}\lambda^2/\Delta\lambda$ löschen sie sich aus. Wollen wir auch im Abstand $\lambda^2/\Delta\lambda$, wo das nächste Schwebungsmaximum käme, Auslöschung haben, müssen wir eine Welle mit der Wellenlänge mitten zwischen λ_1 und λ_2 hinzufügen, denn halbes $\Delta\lambda$ ergibt doppelten Abstand der Schwebungsminima. Damit sind die unerwünschten Schwebungsmaxima noch längst nicht weg, aber je mehr Wellenlängen wir in den Zwischenraum zwischen λ_1 und λ_2 einfügen, desto mehr verschwinden sie. Ein kontinuierliches Wellenlängen-Spektralband der Breite $\Delta\lambda$ erzeugt einen Wellenzug der Länge $\Delta x = \lambda^2/\Delta\lambda$, außerhalb dessen Ruhe herrscht (Abb. 4.31). *Fourier* hätte uns das gleich verraten, besonders in der k -Schreibweise:

$$\int_{k-\Delta k/2}^{k+\Delta k/2} e^{ik'x} dk' = e^{ikx} \int_{-\Delta k/2}^{\Delta k/2} e^{ik''x} dk'' \tag{4.59}$$

$$= e^{ikx} \frac{1}{ix} (e^{i\Delta kx/2} - e^{-i\Delta kx/2}) = e^{ikx} \frac{2}{x} \sin \frac{\Delta kx}{2}.$$

Das ist wieder das Beugungsbild des Spaltes (vgl. (4.28)). Ebenso wie zwischen Frequenz und Zeit besteht zwischen Wellenzahl k , also $2\pi/\lambda$, und Ort eine Unbestimmtheitsrelation: Ein räumlich begrenztes **Wellenpaket** hat ein k - oder λ -Spektrum, das umso breiter ist, je kürzer das Wellenpaket ist:

$$\Delta k \Delta x = \frac{2\pi \Delta\lambda}{\lambda^2} \Delta x \approx 2\pi. \tag{4.60}$$

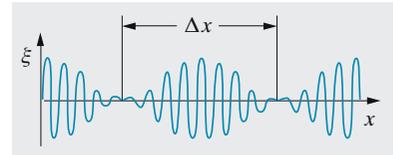


Abb. 4.30. Wellengruppe

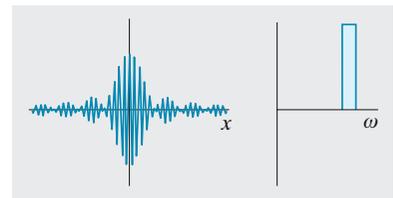


Abb. 4.31. Wellen gleicher Amplitude, deren Wellenlängen einen Bereich der Breite $\Delta\lambda$ gleichmäßig erfüllen, vernichten einander fast überall, außer in einem Bereich der Breite $\Delta x \approx \lambda^2/\Delta\lambda$. Außerhalb davon gibt es nur schwache Nebenmaxima, die man auch beseitigen kann, wenn man das Amplitudenspektrum anders wählt (vgl. Abb. 4.15a)

Mit der **de-Broglie-Beziehung** $p = h/\lambda$ übersetzt sich dies in die **Unbestimmtheitsrelation** zwischen Ort und Impuls:

$$\Delta x \Delta p \approx h . \quad (4.61)$$

Wir haben ein räumliches Wellenpaket gebaut. Ob es aber zeitlich erhalten bleibt oder auseinander fließt, hängt natürlich davon ab, ob die Teilwellen, aus denen es zusammengesetzt ist, alle gleich schnell laufen oder nicht. Wenn c von λ abhängt, sagt man, die Wellen oder das Medium, in dem sie sich ausbreiten, haben eine Dispersion. Das Vakuum hat keine Dispersion, aber alle durchsichtigen Medien dispergieren, sonst würden sie die Spektralfarben nicht trennen. In einem dispergierenden Medium läuft unser Wellenpaket auseinander.

Alle Signale, ob Schall-, Licht- oder Funksignale, sind Wellengruppen, die man gedanklich in viele harmonische Wellen verschiedener Frequenz und Wellenlänge zerlegen kann. Nicht alle diese Wellengruppen zerfließen zum Glück, aber jedenfalls ist die **Gruppengeschwindigkeit**, mit der die Wellengruppe läuft, verschieden von der Phasengeschwindigkeit der harmonischen Einzelwelle, falls Dispersion herrscht. Wir untersuchen das an zwei harmonischen Wellen mit den Kreisfrequenzen ω und $\omega + \Delta\omega$ sowie den Wellenzahlen k und $k + \Delta k$. Diese beiden Wellen verstärken einander, bilden also eine rudimentäre Wellengruppe, wenn und wo ihre Phasen übereinstimmen, also bei

$$kx - \omega t = (k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t \quad \text{oder} \quad \Delta k x = \Delta\omega t .$$

Bei $t = 0$ stimmt das für $x = 0$. Etwas später, bei $t = \Delta t$, stimmt es an der Stelle $\Delta x = \Delta t \Delta\omega / \Delta k$. Die Wellengruppe hat sich verschoben mit der Geschwindigkeit

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} . \quad (4.62)$$

Dies ist nur dann identisch mit der Phasengeschwindigkeit $c = \omega/k$, wenn keine Dispersion herrscht, wenn also $\omega \sim k$ ist.

Eine harmonische Welle ist eine ziemlich nichts sagende Angelegenheit. Da sie überall und immer im Wesentlichen gleich beschaffen ist, kann sie z. B. direkt keine **Information** übermitteln (außer allenfalls einem Zahlenwert, nämlich ihrer Frequenz oder Wellenlänge und ihrer Amplitude und evtl. ihrer Polarisationsrichtung). Man kann ihr allerdings eine Nachricht aufmodulieren, aber dann ist sie nicht mehr harmonisch, sondern nach *Fourier* als Überlagerung unendlich vieler harmonischer Wellen darzustellen. Ist die aufmodulierte Nachricht wieder ein Frequenzgemisch, wie in der Rundfunktechnik, dann wird nach Abschn. 4.1.1d der Frequenzbereich (das **Frequenzband**) der Trägerwelle ebenso breit wie das der Nachricht, beim Telefonverkehr also 3–4 kHz, beim HiFi-Musikfunk fast 20 kHz. Mindestens so weit müssen die Trägerfrequenzen der Fernsprechanäle bzw. der Radiostationen auseinander liegen, damit gegenseitige Störung vermieden wird.

Ein nachrichtentechnisch ideales Ausbreitungsmedium soll nicht nur möglichst dämpfungsfrei sein, also die Signale nicht stärker abklingen lassen, als dem r^{-2} -Gesetz für die Intensität bei Kugelwellen entspricht. Das Medium soll die Signale auch möglichst wenig verzerren, speziell soll es eine Wellengruppe nicht auseinander laufen lassen. Eine solche **Wellengruppe**, die z. B. ein sehr kurzzeitiges

Geräusch (Knall) darstellt, lässt sich durch Überlagerung sehr vieler harmonischer Wellen mit Wellenlängen zwischen $\lambda_0 - \Delta\lambda$ und $\lambda_0 + \Delta\lambda$ erzeugen. Diese Wellen löschen einander überall aus, bis auf ein Gebiet von der Breite $\lambda^2/\Delta\lambda$ um die Stelle, wo sie alle in Phase sind. Dieses Wellenpaket bewegt sich aber nur dann unverzerrt weiter, wenn alle Trägerwellen gleich schnell laufen, d. h. wenn das Medium keine **Dispersion** hat. Jede Dispersion lässt die Teilwellen und damit das ganze Wellenpaket auseinander fließen.

Das Vakuum hat für Lichtwellen keine Dispersion, die Luft für hörbare Schallwellen auch so gut wie keine. Sonst würden wir z. B. einen vom Mond bedeckten Stern farbig wieder auftauchen sehen, etwa blau, wenn blaues Licht schneller lief. Wir würden von ferner Musik die Akkorde und auch die Einzeltöne mit ihren Oberwellen als Arpeggien hören. Festkörper und Flüssigkeiten haben aber erhebliche Dispersion für Schall. Wenn jemand über dünnes Eis geht oder Steine darauf wirft, hört man aus der Ferne ein „Piuuh“: Die hohen Frequenzen laufen schneller.

4.2.5 Intensität einer Welle

Jede Welle transportiert Energie und Impuls. Die **Energiestromdichte** der Welle, d. h. die Energie, die sie in der Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche senkrecht zu ihrer Ausbreitungsrichtung transportiert, heißt auch **Intensität**. Bei einer elastischen Welle steckt diese Energie teils in der kinetischen Energie der schwingenden Teilchen, teils in der potentiellen Deformationsenergie der komprimierten, dilatierten oder gesicherten Bereiche. Wie immer bei elastischen Schwingungen sind kinetische und potentielle Energie im Mittel gleich, und zwar z. B. gleich der maximalen kinetischen Energie (wo sie vorliegt, also beim Durchschwingen durch die Ruhelage, verschwindet ja die potentielle Energie). Die Geschwindigkeitsamplitude hängt mit der Amplitude der Auslenkung zusammen wie

$$v_0 = \omega \xi_0 .$$

Also ist die **Energiedichte** der Welle

$$e = \frac{1}{2} \rho v_0^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 . \quad (4.63)$$

Diese Energiedichte wandert mit der Geschwindigkeit c der Welle (zu unterscheiden von der **Geschwindigkeitsamplitude** v_0 , die bei elastischen Wellen auch **Schallschnelle** heißt). Also ist die Intensität

$$I = ec = \frac{1}{2} c \rho \omega^2 \xi_0^2 = \frac{1}{2} c \rho v_0^2 . \quad (4.64)$$

Genauso gut kann man w auch als Dichte der potentiellen Energie darstellen. Wenn der Überdruck Δp das Volumen eines elastischen Mediums um $-dV$ verkleinert, führt er dem Medium die Deformationsarbeit $dW = -\Delta p dV$ zu. Die Volumenänderung ist wieder proportional zum Überdruck: $\Delta V = -\kappa V \Delta p$, also $\Delta E = \kappa \Delta p^2 V$. Während der Überdruck von 0 auf Δp anstieg, war aber die Deformation im Mittel nur halb so groß: $\Delta E = \frac{1}{2} \kappa \Delta p^2 V$ (vgl. die Energie der Feder: Integration von 0 bis F bzw. Δp). Die Energiedichte ist $w = \Delta E/V = \frac{1}{2} \kappa \Delta p^2$, die Intensität

$$I = \frac{1}{2} c \kappa \Delta p^2 . \quad (4.65)$$

Vergleich der beiden Ausdrücke für w oder I liefert $\Delta p/v_0 = \sqrt{\rho/\kappa}$, oder mit $c = \sqrt{1/\rho\kappa}$:

$$\boxed{\frac{\Delta p}{v_0} = c\rho = Z} \quad (4.66)$$

Dieses Verhältnis $Z = c\rho$ heißt **Wellenwiderstand** des Mediums. Für Normalluft ist $Z = 428 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

Auch bei anderen Arten von Wellen wird die Intensität durch das Quadrat der Amplitude gegeben.

Intensität einer reflektierten Welle. Eine Welle falle aus dem Medium 1 senkrecht auf die Grenzfläche zum Medium 2 und gehe zum Teil durch, zum Teil werde sie reflektiert. Der Energiesatz verlangt, dass dabei keine Intensität verloren geht:

$$I_e = I_r + I_d$$

(e, r, d: Einfallende, reflektierte, durchgehende Welle). Wir drücken die Intensitäten durch die Geschwindigkeitsamplituden aus:

$$\frac{1}{2}\rho_1 c_1 v_e^2 = \frac{1}{2}\rho_1 c_1 v_r^2 + \frac{1}{2}\rho_2 c_2 v_d^2,$$

oder mit den Wellenwiderständen $Z_i = \rho_i c_i$:

$$Z_1(v_e^2 - v_r^2) = Z_2 v_d^2. \quad (4.67)$$

Andererseits muss die Auslenkung und damit auch v an der Grenzfläche stetig sein, sonst würde dort eine katastrophale unendlich große Deformation eintreten. Im Medium 1 überlagern sich einfallende und reflektierte Welle, also fordert die Stetigkeit

$$v_e + v_r = v_d. \quad (4.68)$$

Division von (4.67) durch (4.68) liefert $v_e - v_r = Z_2 v_d / Z_1$, also durch Addition bzw. Subtraktion mit (4.68)

$$v_d = v_e \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad v_r = v_e \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (4.69)$$

oder für die Intensitäten

$$\boxed{\begin{aligned} I_d &= \frac{1}{2}Z_2 v_d^2 = 4I_e \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \\ I_r &= \frac{1}{2}Z_1 v_r^2 = I_e \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \end{aligned}} \quad (4.70)$$

$R = I_r/I_e = (Z_2 - Z_1)^2/(Z_1 + Z_2)^2$ ist der **Reflexionsfaktor**. Allein aus dem Energiesatz und der Stetigkeitsbedingung können wir also folgern: Reflexion tritt nur ein, wenn die beiden Medien verschiedene Wellenwiderstände $Z = \rho c$ haben. Sind die Z sehr verschieden, z. B. $Z_1 \ll Z_2$, dann dringt die Welle praktisch gar nicht ein: Der **Transmissionsfaktor** ist $4Z_1/Z_2 \ll 1$. Bei $Z_1 > Z_2$ hat v_r das gleiche Vorzeichen wie v_e , die Welle wird mit der gleichen Phase reflektiert, wie sie ankam. Bei $Z_2 > Z_1$ liegt v_r in entgegengesetzter Richtung wie v_e : Reflexion an einem Medium

mit höherem Wellenwiderstand ergibt einen **Phasensprung** um π . Auch diese Tatsachen sind auf alle Arten von Wellen übertragbar.

× Beispiel...

Bestimmen Sie den **Reflexionsfaktor** beim Schallübergang von Luft in Wasser und umgekehrt.

Aus der Luft kommend, falle eine Schallwelle mit der Schnelle v senkrecht auf eine Wasserfläche. Da $\rho_L c_L \ll \rho_W c_W$, tritt nur eine Welle mit der Schnelle $v_W = 2\rho_L c_L v_L / (\rho_W c_W)$, also mit der Intensität $I_W = \frac{1}{2} \rho_W v_W^2 = 4\kappa_W I_L / \kappa_L$ ins Wasser ein. Es ist $\kappa_W = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$, $\kappa_L = c_p/p = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{N}$, also $I_W/I_L \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$. Alles übrige wird reflektiert.

Wellenimpuls, Strahlungsdruck. Außer Energie transportiert eine Welle auch Impuls. Seine Dichte ist gleich der Energiedichte e , geteilt durch die Schallgeschwindigkeit c , seine Stromdichte ist Impulsdichte $\cdot c$, d. h. gleich der Energiedichte. Eine mittlere Impulsstromdichte äußert sich als Druck, ebenso wie in der kinetischen Gastheorie (Abschn. 5.2.1). Also übt eine Schallwelle einen Strahlungsdruck

$$p_{\text{Str}} = e = \frac{1}{2} \rho v_0^2 = \frac{1}{2} \kappa \Delta p^2 = \frac{I}{c} \quad (4.71)$$

aus. Dieser Zusammenhang zwischen Wellenenergie und Wellenimpuls gilt ganz allgemein, lässt sich aber für die verschiedenen Wellenmechanismen auch speziell nachweisen, z. B. für elastische oder elektromagnetische Wellen (Aufgabe 4.5.2, Abschn. 13.1.2).

Eine ebene Welle hat überall die gleiche Intensität, falls sie nicht durch Absorption gedämpft ist. Bei einer **Kugelwelle**, wie sie von einem punktförmigen Erregungszentrum ausgeht, verteilt sich die Leistung dieser Quelle mit wachsendem Abstand r über immer größere Kugelflächen ($\sim r^2$), also nimmt die Intensität mit dem Abstand ab wie $I \sim r^{-2}$. Wegen $I \sim \xi^2$ nimmt die Amplitude der Kugelwelle nur ab wie $\xi \sim r^{-1}$. Eine solche Welle lässt sich, wenn sie harmonisch ist (nur eine Frequenz enthält), darstellen als

$$\xi = \xi_0 \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (4.72)$$

Eine stabförmige Quelle sendet eine **Zylinderwelle** aus. Für sie gilt entsprechend $I \sim r^{-1}$, $\xi \sim r^{-1/2}$ (die Leistung verteilt sich über immer größere Zylinderflächen), aber die Gesamtdarstellung der Welle ist nicht so einfach, man braucht dazu **Zylinder-** oder **Bessel-Funktionen**.

4.3 Wellenausbreitung

Was einer Welle unterwegs alles passieren kann und wie mehrere Wellen sich überlagern, lässt sich auf mehrere Arten beschreiben: Nach *Huygens*, nach *Fermat*, nach *Fourier* usw. Man muss möglichst viele Darstellungen kennen, um sich die geeignetste herausuchen zu können.

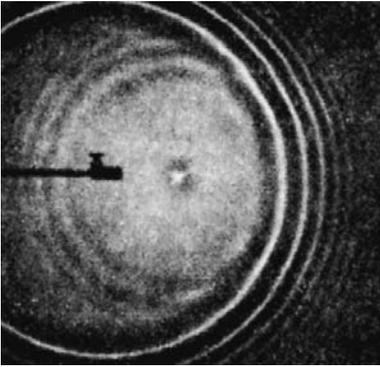


Abb. 4.32. Ein kleines Hindernis (*Bildmitte*) sendet eine Huygens-Kugelwelle aus. Damit man sie besser sieht, wurde das Vibrieren des wellenerregenden Stiftes (*links*) kurz vor der Aufnahme abgeschaltet. Der letzte Sekundärwellenkamm tangiert den letzten primären von innen. (Nach R. W. Pohl, aus H. U. Harten: *Physik für Mediziner*, 4. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1980))

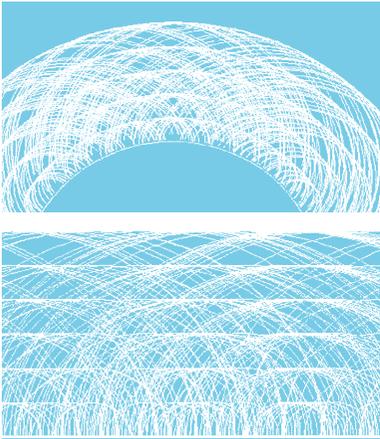


Abb. 4.33. Die Huygens-Sekundärwellen, die von einer Wellenfront ausgehen, überlagern sich automatisch zur nächsten Wellenfront. Die Zentren der Sekundärwellen sind in diesem Bild durch einen Zufallsgenerator bestimmt. Wären sie äquidistant, ergäbe sich ein irreführendes Beugungsmuster

4.3.1 Streuung

Bisher haben wir die ungehinderte Ausbreitung von Wellen in einem homogenen Medium untersucht. Wenn die Welle auf ein Hindernis trifft, d. h. eine Stelle, wo diese Homogenität irgendwie unterbrochen ist, dann sendet dieses Hindernis eine **Streuwelle** aus. Am besten sieht man sie, wenn man z. B. einen Nagel aufrecht in eine Wellenwanne stellt. Ist das Hindernis klein gegen die Wellenlänge, dann ist seine Streuwelle kugelförmig (kreisförmig in der Wellenwanne). Ein komplizierteres Muster, speziell ein wellenfreies Gebiet (Schatten) hinter dem Hindernis, entsteht erst, wenn das Hindernis größer als die Wellenlänge ist. Die Kugel-Streuwelle sagt nur, *dass* ein Hindernis da ist, verrät aber nichts über seine Form (Abb. 4.32). Ein **Mikroskop** lässt kein Objekt deutlich erkennen, das kleiner ist als die Wellenlänge der benutzten Strahlung (manchmal auch bei viel größeren Objekten nicht, Abschn. 9.5 und Abschn. 10.1.5). *Dass* streuende Objekte da sind und wie viele, erkennt man allerdings doch: „Sonnenstäubchen“, die man von der Seite in einem schrägen Lichtbündel tanzen sieht, sind oft mikroskopisch klein, und im **Ultramikroskop** mit **Dunkelfeldbeleuchtung** kann man auch Teilchen zählen, die kleiner als λ sind. Die Streuintensität in einer Kugelwelle nimmt nach (4.72) mit dem Abstand r wie r^{-2} ab. Außerdem ist sie proportional der Fläche des streuenden Teilchens, also dem Quadrat seines Radius. Sehr viele kleine Hindernisse erzeugen eine gleichmäßige **Trübung**. Das seitlich weggestreute Licht geht zwar für die durchgehende Welle verloren, die gesamte Wellenenergie bleibt aber erhalten. Das ist der Gegensatz zur **Absorption**, bei der Wellenenergie in andere Energieformen (letzten Endes meist Wärme) übergeht.

Der Nagel in der Wanne wird, wenn ihn eine Welle trifft, selbst zum Erregungszentrum für eine Welle, die mit der ursprünglichen in Phase schwingt oder eine feste Phasenbeziehung hat (z. B. immer Phasendifferenz π). Eine solche Streuung ist **kohärent**. Manche Hindernisse nehmen dagegen Wellenenergie auf, speichern sie eine Weile und strahlen sie erst dann wieder ab, wobei die feste Phasenbeziehung verloren geht. Eine solche **inkohärente Streuung** bildet also einen Übergang zur Absorption.

Wenn viele Streuzentren kohärente Sekundärwellen abstrahlen, addieren sich deren **Amplituden**. Bei inkohärenter Streuung addieren sich die **Intensitäten** (Abschn. 4.1.1e). Das ist ein wesentlicher Unterschied. Angenommen, in einem Bereich, der viel kleiner ist als die Wellenlänge, sitzen N Streuzentren. Ihre Streuwellen sind im Wesentlichen phasengleich, falls die Streuung kohärent ist, weil die Zentren so dicht sitzen. Die Gesamtamplitude ist N -mal, die Gesamtintensität N^2 -mal so groß wie die einer Einzelstreuwelle. Bei inkohärenter Streuung ist die Gesamtintensität dagegen nur N -mal so groß wie die der Einzelwelle.

4.3.2 Das Prinzip von Huygens-Fresnel

Die Wellenausbreitung im homogenen Medium und in komplizierteren Fällen versteht man, wenn man sich mit *Huygens* vorstellt, in jedem Punkt einer Wellenfront sitze ein Streuzentrum, von dem wieder eine Kugelwelle ausgeht. Alle diese Kugelwellen überlagern sich dann zu einer neuen

Wellenfront. Abbildung 4.33 zeigt, wie aus einer ebenen bzw. kugelförmigen Wellenfront eine neue herauswächst, warum sich das Licht also geradlinig ausbreitet. Interessanter wird die Sache, wenn Hindernisse im Weg der Welle stehen oder sich z. B. die Geschwindigkeit c der Welle räumlich ändert. Dann kommt es zu Reflexion, Beugung, Brechung usw. Das Huygens-Prinzip führt alle diese Erscheinungen auf Streuung und Interferenz zurück, wobei man mit *Fresnel* die Phasenverhältnisse der überlagerten Teilwellen beachten muss.

Das **Reflexionsgesetz** Einfallswinkel = Ausfallswinkel erhält man nach *Huygens* sofort, wenn man die spiegelnde Ebene dicht mit Streuzentren besetzt denkt. Die Tangentialebene an die Kugelwellen, die von diesen Zentren ausgehen, ist die neue Wellenfront und schließt mit dem Spiegel den gleichen Winkel ein wie die ursprüngliche Wellenfront, nur nach der anderen Seite (Abb. 4.34a).

Eine ebene Welle falle schräg auf die ebene Grenze zwischen zwei Medien, in denen die Ausbreitungsgeschwindigkeiten verschiedene Werte c_1 bzw. c_2 haben. Auch hier besetzen wir die Grenzfläche dicht mit Huygens-Streuzentren. Ihre Streuwellen haben in den beiden Medien verschiedene Radien r_1 und r_2 , die sich wie c_1/c_2 verhalten. Nach Abb. 4.34b bestimmt r_1/r_2 das Verhältnis der Sinus der Winkel, die die Wellenfronten (Tangentialebenen) mit der Grenzfläche bilden. Wir erhalten das **Brechungsgesetz**

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}, \quad (4.73)$$

das also für alle Wellenarten gilt.

4.3.3 Das Prinzip von Fermat

Jemand will möglichst schnell von A nach B laufen, dabei aber Wasser aus dem Fluss F mitbringen (Abb. 4.35). Wo muss er schöpfen, wenn das Wasser ihn nicht merklich belastet? Bei C , sodass AC und BC mit dem Ufer gleiche Winkel bilden. Beweis: Wäre der Fluss nicht da, würde man vom Punkt A' , der spiegelbildlich zu A liegt, natürlich geradlinig laufen, denn dieser Weg ist kürzer als jeder geknickte Weg $A'C'B$. Spiegelung am Flussufer ändert aber nichts an den Weglängen. Ein elastisch reflektierter Ball scheint dies zu wissen, ebenso eine Welle.

Jetzt will man zum Gegenufer bei B . Schwimmend kommt man mit v_2 voran, laufend mit v_1 . Der Fluss strömt praktisch nicht oder ist ein See. Wo muss man hineinspringen? Man wird möglichst lange auf der Wiese bleiben, wo man schneller vorankommt, aber genau gegenüber von B wird man auch nicht hineinspringen. Der Beweis, dass das Brechungsgesetz herauskommt, ist etwas raffiniert. Wir betrachten zwei sehr nahe benachbarte Wege, AOB und $A'O'B$. AOB sei der optimale, schnellste Weg. Die beiden Wege unterscheiden sich nur durch die Stücke CO bzw. $O'D$ (Abb. 4.36). Jetzt erinnern wir uns: Eine Funktion ändert sich an ihrem Extremum nicht, wenn man ihr Argument ein wenig ändert. Was ist die Funktion? Die „Laufzeit“ von A nach B . Was ist das Argument? Die Lage des Einstiegs. Wenn

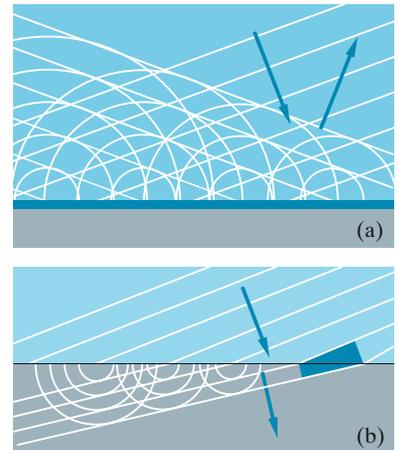


Abb. 4.34. Das Huygens-Prinzip erklärt (a) Reflexion und (b) Brechung. Die von links oben einfallende Wellenfront löst an der Grenzfläche Sekundärwellen aus, die sich zu reflektierten bzw. gebrochenen Wellenfronten überlagern (Tangentialebenen an die Sekundärwellenberge)

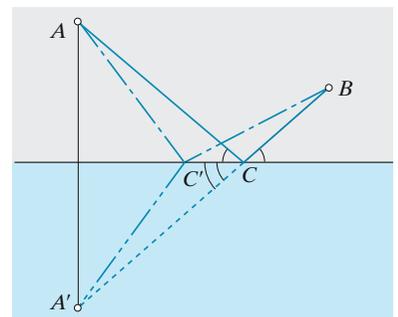


Abb. 4.35. Der reflektierte Lichtstrahl folgt dem kürzesten Weg, der über den Spiegel von A nach B führt

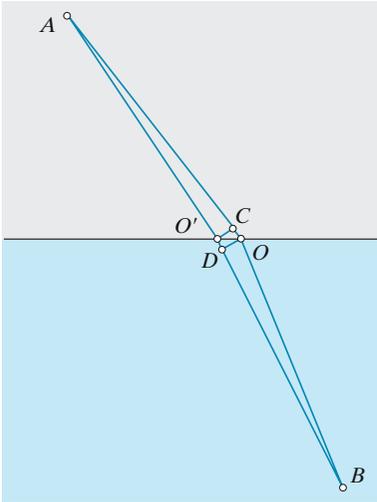


Abb. 4.36. Auch der gebrochene Strahl läuft so, dass er so schnell wie möglich von A nach B gelangt

also AOB der optimale Weg ist, muss die Laufzeit von C nach O gleich der Schwimmzeit von O' nach D sein: $\overline{CO}/v_1 = \overline{O'D}/v_2$. Aus den kleinen Dreiecken liest man dann ab $\overline{OO'} \sin \alpha_1/v_1 = \overline{OO'} \sin \alpha_2/v_2$ oder

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (4.73')$$

Reflexions- und Brechungsgesetz sind Spezialfälle des

Prinzips von *Fermat*: Eine Welle läuft zwischen zwei Punkten immer so, dass sie dazu möglichst wenig Zeit braucht.

Zwischen beiden Punkten können beliebige Medien mit beliebigen scharfen oder kontinuierlichen Übergängen dazwischen liegen. Das klingt fast so geheimnisvoll wie der vor kurzem endlich bewiesene Satz von Fermat, nach dem die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ nur für $n = 2$ ganzzahlige Lösungen hat. Natürlich hat die Welle (oder das Photon) keinen Bordcomputer. Aber sie probiert sozusagen ständig alternative Wege aus und schickt Huygens-Sekundärwellen auf diese, aber auf allen Irrwegen interferieren sich die Huygens-Wellen weg, nur auf dem richtigen verstärken sie sich.

Wenn viele Wellen von einem Punkt P ausgehen und sich in einem „Bildpunkt“ P' wieder vereinigen, können sie zwischendurch auf sehr verschiedenen Wegen gelaufen sein. Nach *Fermat* müssen sie trotzdem alle die gleiche Zeit gebraucht haben. Deswegen müssen sie, wenn sie phasengleich gestartet sind, auch mit gleicher Phase ωt ankommen, d. h. sie bauen das Bild in konstruktiver Interferenz auf. Dies zeigt wieder den Zusammenhang zwischen *Fermat* und *Huygens-Fresnel*. Eine elliptische Wand sammelt Wellen, die von einem Brennpunkt ausgehen, im anderen Brennpunkt, denn nach der Definition der Ellipse, z. B. der Fadenkonstruktion, ist die Strecke Brennpunkt-Wand-anderer Brennpunkt für alle Wandpunkte gleich groß. Bei der Parabel liegt ein Brennpunkt im Unendlichen, also sammelt sie achsparallel einfallende Wellen im Brennpunkt.

In Abb. 4.37 sei das Ufer so unwegsam, dass man schwimmend schneller vorankommt. Man wird also ein gewisses Stück schwimmend zurücklegen und unter einem „irregulären“ Reflexionswinkel in B ankommen. Die Geophysiker kennen diese irregulär an einer tieferen, festeren Gesteinsschicht reflektierte Welle als **Mintrop-Welle**. Am Punkt B empfangen sie drei Wellen von einer Explosion in A : Die direkte, dann die irreguläre und erst danach die regulär reflektierte.

Wo muss ein Mitfahrer aussteigen, wenn er zu einem Ziel Z abseits der Straße will? Nicht genau auf der Höhe von Z , wenn er nicht faul ist und wenn das Gelände überall gleichmäßig begehbar ist. Er steigt etwas vorher aus und geht dann unter einem Winkel β zur Straßenrichtung, sodass $\cos \beta = v'/v$ (v' , v : Geschwindigkeiten des Fußgängers bzw. des Autos). Genau an dieser Stelle und in dieser Richtung „springen“ die Schallwellen von einem Überschallflugzeug oder die Lichtwellen von einem **Überlichtelektron** ab und erzeugen den **Mach-Kegel** des **Überschallknalls** oder des **Tscherenkow-Effekts** (Abb. 4.38, Abschn. 4.3.5).

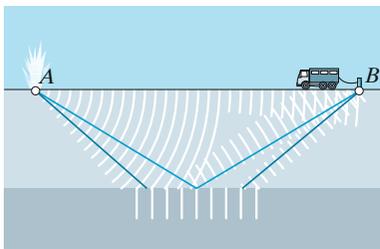


Abb. 4.37. Außer der direkten und der regulär reflektierten Welle gibt es noch eine dritte, die Mintrop-Welle, falls ein Medium mit erhöhter Phasengeschwindigkeit in der Nähe ist. Soweit *Fermat*. Den Mechanismus der Sache zeigen erst die Wellen. Um das Verhältnis der Laufzeiten zu finden, braucht man nur die Wellenberge zu zählen. Wieso? Wie gewinnt die Mintrop-Welle ihren Vorsprung?

4.3.4 Beugung

Niemand wundert sich, wenn er hinter einem dicken Baum stehend die Leute auf der anderen Seite nicht sieht, aber hört. Wellen gehen leicht um ein Hindernis, wenn sie länger sind als dessen Abmessungen. Nur ein viel größeres Hindernis wirft hinter sich einen Schatten, ein fast wellenfreies Gebiet. Wer dies mit dem Huygens-Prinzip allein verstehen will, muss sehr viele Sekundärwellen zeichnen. Einige davon erreichen zwar jeden Punkt hinter einem Hindernis (Abb. 4.39), auch bei sehr kleinem λ , aber eben nur einige, verglichen mit der Häufung in der ursprünglichen Richtung der Welle, zu der sehr viel mehr Teilwellen beitragen.

Wie weit geht das Licht um die Ecke, d. h. um welche Breite x ist der Schattenbereich beiderseits reduziert, wenn man um D hinter dem Hindernis steht (Abb. 4.40)? Die Betrachtung wird einfacher, wenn man eine zweite Wand danebenstellt, sodass nur ein Spalt der Breite d bleibt. Die Sekundärwellen, die von den Rändern dieses Spaltes ausgehen, haben bis zu einem Punkt P Wege zurückzulegen, die sich um ein Stück $BC = d \sin \alpha$ unterscheiden. Wenn dieser Gangunterschied gleich $\lambda/2$ ist, löschen sich diese beiden Teilwellen aus. Ungefähr bis zu diesem Winkel $\alpha \approx \lambda/2d$ dringt die Welle aus dem Spalt in den Bereich vor, wo eigentlich Schatten sein sollte (Abb. 4.41). Berücksichtigung der übr-

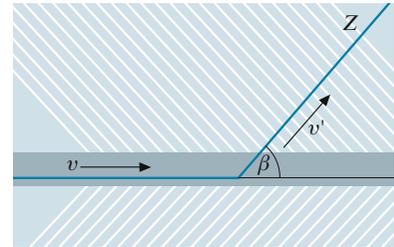


Abb. 4.38. Nach *Fermat* steigt der Mitfahrer so aus, Licht und Schall springen vom Überlicht-Fahrzeug so ab, dass die Mach-Welle des Überschallknalls oder des Tscherenkow-Lichts entsteht. Sehen Sie den Zusammenhang mit der Totalreflexion? Wie ist es bei einem Bus mit äquidistanten Haltestellen?

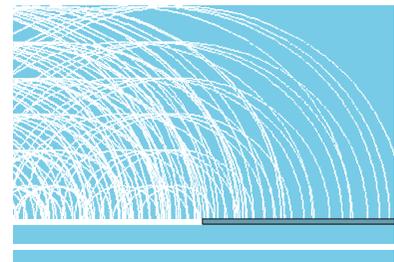


Abb. 4.39. Fresnel-Beugung: Wellen dringen in den Schattenraum hinter einem Hindernis ein, sind dort aber schwächer als draußen. Dafür erreicht der Hellraum nahe der Kante noch nicht die volle Helligkeit

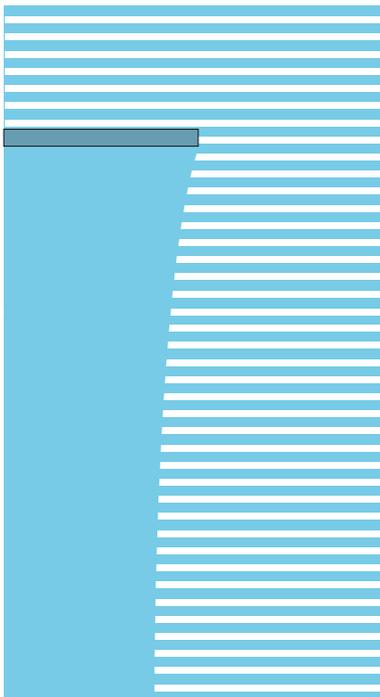


Abb. 4.40. Fresnel-Beugung an einer Wand: Die Eindringtiefe in den Schattenraum wächst mit dem Abstand D wie $x \approx \sqrt{\lambda D}$

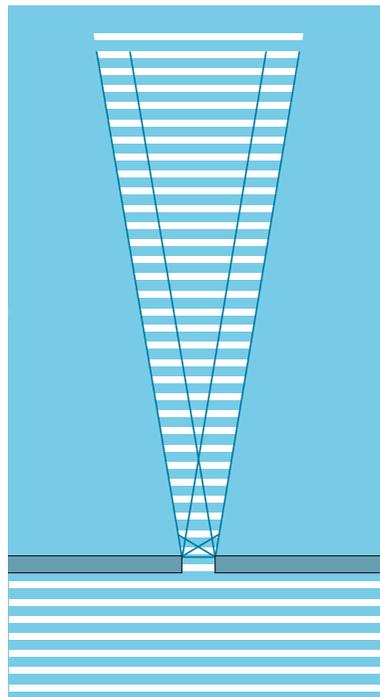


Abb. 4.41. Fresnel-Beugung am Spalt: Die Eindringtiefe in den Schattenraum entspricht der Breite des Maximums 0. Ordnung

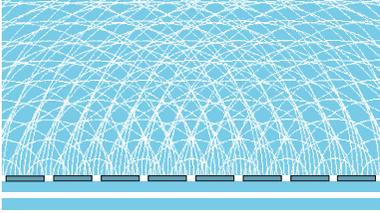


Abb. 4.42. Hinter einem Schirm mit äquidistanten Löchern formieren sich Sekundärwellen zu Beugungsmaxima (schauen Sie schräg auf das Bild und drehen Sie es, bis Sie die auslaufenden Wellenfronten sehen)

gen Sekundärwellen verändert das Ergebnis auf $\alpha \approx \lambda/d$ (Abschn. 10.1.4). Jetzt schieben wir die zweite Wand um d nach rechts, d. h. setzen noch einen Spalt der Breite d daneben. Er erzeugt ebenfalls ein Beugungsbild der Breite $2x \approx 2D\alpha \approx 2D\lambda/d$, dessen Amplitude sich zu der des ersten Spalts addiert. Im Schattenraum hinter der ersten Wand ändert sich dadurch offenbar kaum etwas, sobald $d \approx x$ ist. Auch wenn der zweite Schirm ganz weg ist, dringt das Licht in einer Breite $x \approx \sqrt{\lambda D}$ in den Schattenraum vor. Schallwellen mit $\lambda \approx 1$ m haben sich schon in weniger als 1 m Abstand hinter einem 1 m dicken Baum zusammengeschlossen, Lichtwellen mit $\lambda < 1 \mu\text{m}$ dringen weniger als 1 mm in den Schattenbereich ein. Genaueres über die Intensitätsverteilung hinter einer Wand bringt die Theorie der **Fresnel-Beugung** (Abschn. 10.1.10).

Mehrere enge äquidistante Spalte bilden als **Beugungsgitter** ein Grundgerät der optischen Spektroskopie. Die Zylinderwellen, die aus den einzelnen Spalten hervorquellen, verschmelzen in einigem Abstand zu einer Wellenfront, die in der ursprünglichen Richtung weitergeht (Beugungsmaximum 0. Ordnung). Aber auch in anderen Richtungen laufen Wellenfronten (Abb. 4.42), nämlich in solchen Richtungen, aus denen gesehen jeder Spalt um $\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$ weiter entfernt ist als sein Nachbar. Für die Richtungen φ_m der Maxima m . Ordnung ergibt sich wie vorhin beim Spalt die Bedingung

$$\sin \varphi_m = \frac{m\lambda}{d} . \quad (4.74)$$

Auch dies gilt nicht nur für Licht, sondern lässt sich z. B. in der Wellenwanne sehr schön demonstrieren. Beugungsmaxima 1. und höherer Ordnung an einem Kristallgitter bilden sich ebenso gut im kurzwelligen Licht (Röntgenlicht) wie im Wellenfeld von Teilchen (Elektronen, Protonen, Neutronen) und dienen zur Aufklärung der Kristallstruktur (Abschn. 16.3.2).

4.3.5 Doppler-Effekt; Mach-Wellen

Bewegt sich ein Wellenerzeuger mit der Geschwindigkeit v durch das Wellen tragende Medium, dann drängen sich die Wellenfronten vor ihm zusammen, hinter ihm lockern sie sich auf. Während der Periode T verschiebt sich die Quelle um vT , die gerade vorher ausgesandte Wellenfront läuft eine Strecke cT , liegt also in der Vorwärtsrichtung nur um $(c - v)T$ vor der soeben entstehenden Wellenfront. Die Wellenlänge ist verringert auf $\lambda' = (c - v)T$, die Frequenz erhöht sich auf

$$v' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{(c - v)T} = \frac{1}{1 - v/c} v , \quad (4.75)$$

denn die Wellen laufen nach wie vor mit c . Die Frequenzerhöhung ist für kleine $v/c \ll 1$ wegen

$$v' = \frac{v}{1 - v/c} \simeq v \left(1 + \frac{v}{c} \right) \quad (4.75')$$

noch leichter zu erkennen.

Hinter der sich entfernenden Quelle ($v \rightarrow -v$) erniedrigt sich die Frequenz auf $v/(1 + v/c)$. Deshalb schlägt die Tonhöhe der Hupe um, wenn das Auto an uns vorbeifährt, sodass jemand mit etwas Gehör daraus seine Geschwindigkeit schätzen kann, ebenso wie die Polizei es mit ihren elektromagnetischen Dezimeterwellen macht. Die moderne Astronomie und Kosmologie leben geradezu vom optischen **Doppler-Effekt**.

x Beispiel...

Verkehrsgericht in Los Angeles:
 Polizist W.C. Cop: Dieser Kerl fuhr mindestens 80 miles per hour, wo nur 50 erlaubt waren.
 Richter: Wie haben Sie das festgestellt? Hatten Sie Radar?
 Cop: Nein, aber seine Reifen gaben ein singendes Geräusch, und als er vorbeifuhr, klang es genau wie ein Kuckuck.
 Richter: Machen Sie mal einen Kuckuck nach.
 Cop (singt sehr sauber): Cuckoo!
 Würden Sie den Autofahrer zur Kasse bitten?
 Der Kuckucksruf ist eine absteigende kleine Terz. Deren Frequenzverhältnis $\frac{5}{4} = (1 + v/c)/(1 - v/c)$ ergibt $v = 37 \text{ m/s} = 82,5 \text{ mph}$. Dies ist kaum zu verwechseln mit $50 \text{ mph} = 22,2 \text{ m/s}$, was 1,14, wenig mehr als eine große Sekund ergäbe.

Etwas anders ist die Lage, wenn die Quelle relativ zum Medium ruht, aber der Beobachter sich mit v auf sie zubewegt. Dann liegen die Wellenfronten äquidistant im Abstand λ , aber der Beobachter empfängt in der Sekunde nicht $v = c/\lambda$ solche Fronten, sondern

$$\boxed{v' = \frac{c + v}{\lambda} = v \left(1 + \frac{v}{c} \right)}, \tag{4.76}$$

wenn er sich der Quelle nähert, oder $v(1 - v/c)$, wenn er sich entfernt.

Beim Schall kann man bei genügend großem v/c (4.75') entscheiden, ob sich Quelle oder Beobachter bewegt: Bewegung ist relativ zum Medium Luft gemeint. Für das Licht gibt es kein solches Wellen tragendes Medium, daher entfällt der Unterschied zwischen (4.75) und (4.76), der zwar klein ist, aber durchaus messbar wäre, und beide verschmelzen zur relativistischen Formel (Abschn. 12.2.3).

Bewegt sich die Quelle ebenso schnell wie die Welle ($v = c$), dann drängen sich ihre Wellenfronten vor ihr dicht zur **Schallmauer** zusammen. Das Überschallflugzeug hat die Schallmauer durchstoßen ($v > c$) und zieht hinter sich einen Kegel her, auf dem sich die zu verschiedenen Zeiten ausgesandten Wellenfronten addieren. Dieser **Mach-Kegel** (Abb. 4.43) hat nach Konstruktion den halben Öffnungswinkel α mit

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}. \tag{4.77}$$

Die Machzahl M gibt v in der Einheit c . Wir hören die addierten Teilwellen des Mach-Kegels als **Überschallknall** eines Düsenflugzeugs, das im gleichen Augenblick nicht mehr über uns, sondern um α über dem Horizont

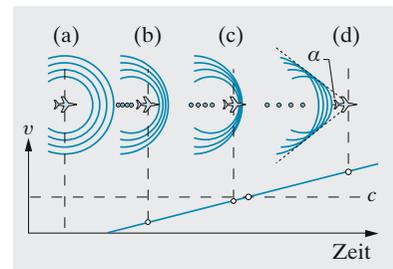


Abb. 4.43a–d. Doppler-Effekt (b), Schallmauer (c) und Mach-Kegel. Die Geschwindigkeit v der Schallquelle nähert sich der Schallgeschwindigkeit c und überschreitet sie

ist. Erst nach diesem Knall hören wir auch das Motorengeräusch, denn erst dann sind wir im Innern des Mach-Kegels, wo die Wellen hingelangen. Die Bugwelle eines Schiffes ist i. Allg. kein Mach-Kegel, wie man aus dem v -unabhängigen Öffnungswinkel $\alpha \approx 19^\circ$ sieht (Abschn. 4.6). Auch bei Lichtwellen kommen Mach-Kegel vor. Die *Phasengeschwindigkeit* c' ist z. B. in Wasser wesentlich kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit, geladene Teilchen können also durchaus schneller sein als dieses c' . Dann ziehen sie einen Mach-Kegel, die **Tscherenkow-Welle**, hinter sich her (Aufgaben 4.3.6, 7.3.16, 12.9.7).

4.3.6 Absorption

Bei der Streuung geht der Welle insgesamt keine Energie verloren, sie wird nur umgelenkt. Echt absorbierende Vorgänge verzehren dagegen Wellenenergie. Dieser Intensitätsverlust $-dI$ ist (wie allerdings vielfach bei der Streuung auch) proportional zur vorhandenen Intensität I (je mehr Energie kommt, desto mehr wird verzehrt) und zur Laufstrecke dx :

$$\boxed{dI = -\beta I dx} . \quad (4.78)$$

Der **Absorptionskoeffizient** β drückt die Eigenschaften des Mediums aus, hängt aber auch von der Art der Welle, speziell meist von ihrer Frequenz ab. Durch Integration erhält man die Intensität, die nach einer endlichen Eindringtiefe x noch von einer Anfangsintensität I_0 übrig ist:

$$\boxed{I = I_0 e^{-\beta x}} . \quad (4.79)$$

Wegen $I \sim \xi_0^2$ nimmt die Amplitude ξ_0 nur mit einer halb so großen Dämpfungskonstante ab.

Speziell bei elastischen Wellen (Schall und Ultraschall) gibt es mehrere Energie verzehrende Mechanismen. Wären die Kompressionen und Dilatationen streng adiabatisch, wie sie in Abschn. 4.2.3 beschrieben wurden, so würde in einem einatomigen Gas keine **Schallabsorption** auftreten. In Wirklichkeit erfolgt aber ein Wärmeaustausch zwischen benachbarten Gebieten, die durch Kompression erwärmt bzw. durch Dilatation abgekühlt sind. Die so ausgetauschte Energie geht dem Schallfeld verloren. Da der Austausch umso schneller erfolgt, je näher die verschiedenen temperierten Bereiche einander sind, werden hohe Töne stärker absorbiert als tiefe. Zur Absorption trägt ferner die innere Reibung bei (die Diffusion hat meist nur geringfügigen Einfluss). In mehratomigen Gasen und in kondensierter Materie kommt als – meist überwiegende – Absorptionsursache die **Relaxation** des thermischen Gleichgewichts hinzu: Bei hohen Frequenzen teilt sich die Schallenergie nur den translatorischen Freiheitsgraden der Moleküle mit, bei niederen hat sie Zeit, auch auf die Rotations-, Schwingungs- und sonstigen Freiheitsgrade übertragen zu werden. Am Übergang zwischen beiden Gebieten liegen eine **Dispersionsstufe** und das entsprechende Absorptionsgebiet. Diese Relaxationsfrequenzen liegen sehr hoch, und umso höher, je dichter das Gas ist; daher wächst die Absorption i. Allg. mit steigender Frequenz und bei Gasen mit abnehmendem Druck. Unter gleichen Versuchsbedingungen ist β_{Luft} etwa 1 000mal so groß wie β_{Wasser} .

4.3.7 Stoßwellen

Alle bisherigen Überlegungen über Schallwellen (Abschn. 4.3.1 bis 4.3.6) gelten für Wellen kleiner Amplitude, d. h. für Wellen, bei denen die Druckamplitude klein ist gegen den mittleren Druck, die Verdichtung klein gegen die mittlere Dichte, die Temperaturamplitude klein gegen die mittlere (absolute) Temperatur, die Schallschnelle klein gegen die Schall-(Phasen-)Geschwindigkeit und die Verrückung der Teilchen klein gegen die Wellenlänge.

Wenn dies nicht der Fall ist, treten viel kompliziertere, mathematisch nur in Sonderfällen exakt zu beschreibende Verhältnisse ein. Qualitativ übersieht man sie auf Grund folgender Überlegung: Lässt man die Amplitude immer mehr anwachsen, so tritt an den Stellen größten (kleinsten) Druckes eine merkliche Temperaturerhöhung (-erniedrigung) und damit eine größere (kleinere) Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung ein. Das bewirkt (vgl. Abb. 4.44), dass die Wellenberge schneller, die Wellentäler langsamer fortschreiten als die Stellen unveränderten Druckes. Die Gestalt der Welle bleibt nicht mehr sinusförmig, sondern nähert sich der Sägezahnform. Es treten Fronten auf, in denen sich der Druck und damit auch die Temperatur in der Ausbreitungsrichtung (x) abrupt ändert. Solche abnormen Temperaturgradienten veranlassen dann verstärkten Wärmeaustausch und damit erhöhte Absorption. Außerdem sind in der Sägezahnwelle höhere Oberwellen stark enthalten, die eine andere Ausbreitungsgeschwindigkeit haben können als die Grundwelle.

Solche aufgesteilten Wellenfronten spielen in der modernen Aerodynamik eine große Rolle, da sie auch bei **Kopfwellen**, also bei jeder mit mehr als der Ausbreitungsgeschwindigkeit bewegten Quelle auftreten (Abschn. 4.3.5).

Einzelne Fronten oder Stoßwellen erzeugt man relativ einfach im **Stoßwellenrohr** (Abb. 4.45): Ein zylindrisches Rohr wird durch eine Membran senkrecht zur Achse in zwei Kammern geteilt, deren eine (die linke) mit Gas vom Druck p_2 , deren andere (die rechte) mit Gas vom sehr viel kleineren Druck p_0 gefüllt sei. Wird nun die Membran plötzlich durchstoßen, so dringt eine Front verminderten Druckes in die linke, eine Front erhöhten Druckes als Stoßwelle in die rechte Rohrhälfte ein. Die Stoßwelle schreitet bei großem Druckverhältnis p_2/p_0 mit erheblicher Überschallgeschwindigkeit fort. Die resultierenden Strömungen im Gas sind etwas langsamer, liegen aber ebenfalls i. Allg. im Überschallbereich. Um das nachzuweisen, betrachten wir Abb. 4.46. Die rechte Front liege bei x , die linke bei x' , sie verschieben sich mit \dot{x} bzw. \dot{x}' . Der Durchgang der rechten Front bedeutet eine plötzliche Druck- und Dichtezunahme. Es muss also von links her Gas nachströmen, und zwar in der Zeit dt die Masse $(\varrho_1 - \varrho_0)A dx$. Um diese Masse heranzutransportieren, stellt sich zwischen x' und x eine Strömungsgeschwindigkeit v ein, sodass $\varrho_1 v A dt = (\varrho_1 - \varrho_0)A dx$, d. h.

$$v = \dot{x} \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_1} \tag{4.80}$$

Dies verlangt die Massenerhaltung. Wir diskutieren auch die **Impulserhaltung** in einem kleinen raumfesten Volumen, das die rechte Front umfasst. Der Impuls in diesem Volumen ändert sich dadurch, dass sich die Masse $A\varrho_1 dx$ mit v in Bewegung setzt: Impulszuwachs $A\varrho_1 v dx$. Die Ursache dieses Zuwachses ist 1. das Einstromen der Masse $A\varrho_1 v dt$ von links, die den Impuls $A\varrho_1 v dt v$ mitbringt; 2. die Druckkraft $A(p_1 - p_0)$, die in der Zeit dt den Impulszuwachs $A(p_1 - p_0) dt$ erzeugt. Man hat also $\varrho_1 v \dot{x} = p_1 - p_0 + \varrho_1 v^2$, und mittels (4.80)

$$\varrho_0 v \dot{x} = p_1 - p_0 \tag{4.81}$$

und schließlich

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{p_1 - p_0}{\varrho_0} \frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_0}}, \quad v = \sqrt{\frac{p_1 - p_0}{\varrho_0} \frac{\varrho_1 - \varrho_0}{\varrho_1}} \tag{4.82}$$

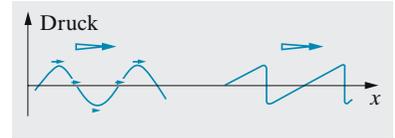


Abb. 4.44. Aufsteilung von elastischen Wellen großer Amplitude

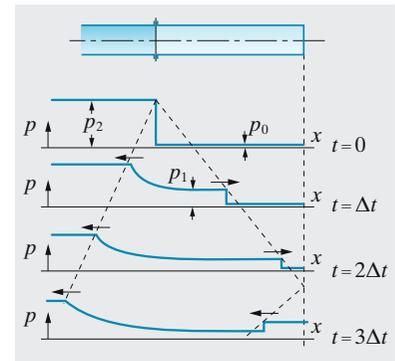


Abb. 4.45. Beim Durchstoßen der Membran, die zwei Gase mit sehr unterschiedlichem Druck trennte, beginnt sich ins Niederdruckgebiet eine Überschall-Stoßwelle, ins Hochdruckgebiet eine Expansionswelle mit Schallgeschwindigkeit auszubreiten

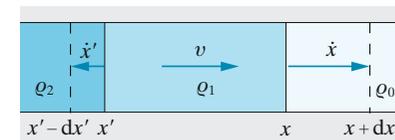


Abb. 4.46. Dichten und Ausbreitungs- und Strömungsgeschwindigkeiten in den Wellen von Abb. 4.45

Solange ϱ_0 gegenüber ϱ_1 berücksichtigt werden muss, ist v etwas kleiner als \dot{x} . Beide sind aber für $p_1 \gg p_0$, $\varrho_1 \gg \varrho_0$ erheblich größer als die Schallgeschwindigkeit $c_S = \sqrt{\gamma p / \varrho}$, und zwar um den Faktor $\sqrt{p_1 / (p_0 \gamma)}$.

An der linken Wellenfront ergibt sich analog

$$\dot{x}' = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{\varrho_2} \frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1}}, \quad v = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{\varrho_2} \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_1}}. \quad (4.83)$$

Die Strömungsgeschwindigkeit muss zwischen \dot{x}' und \dot{x} überall gleich sein, denn es gibt dort weder Quellen noch Senken. Dann folgt bei $p_2 \gg p_1 \gg p_0$ und $\varrho_2 \gg \varrho_1 \gg \varrho_0$

$$p_1 \varrho_1 \approx p_2 \varrho_0 \approx p_0 \varrho_2. \quad (4.84)$$

Damit haben wir die Unbekannten (Druck und Dichte in der Stoßwellenzone) noch nicht einzeln bestimmt. Wir haben ja auch noch den **Energiesatz**. Wie so oft, lassen sich Energie- und Impulssatz nicht gemeinsam erfüllen, ohne dass ein Teil der Energie in Wärme übergeführt wird. Das einströmende Gas trifft auf die Stoßwellenfront und schiebt sie vorwärts, ohne selbst zurückzuprallen. Vom inelastischen Stoß zweier Pendel unterscheidet sich die Lage nur dadurch, dass ständig eine Kraft $(p_1 - p_0)A$ nachschiebt. Zur quantitativen Diskussion benutzen wir die Bernoulli-Gleichung für die kompressible Strömung (Abschn. 3.3.6d): Vom **Kesselzustand** p_0 , ϱ_0 , T_0 , $v_0 = 0$ erfolgt Beschleunigung auf den strömenden Zustand mit p_1 , ϱ_1 , T_1 , v gemäß

$$v^2 = \frac{2}{\gamma - 1} c_S^2 \frac{T_1}{T_0} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{p_0 T_1}{\varrho_0 T_0}, \quad \text{also} \quad \frac{T_1}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{p_1}{p_0}.$$

Dies wäre für eine stationäre Strömung richtig. Berücksichtigung der Nichtstationarität liefert

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{p_1}{p_0}.$$

Mit (4.84) und der Zustandsgleichung $p \sim T \varrho$ kann man alle Zustandsgrößen der Stoßwellenzone angeben:

$$\varrho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \varrho_0; \quad p_1 = p_2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}; \quad T_1 = T_0 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^2 \frac{p_2}{p_0}.$$

$$v \approx \dot{x} \approx c_S \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma(\gamma + 1)} \frac{p_2}{p_0}}; \quad \dot{x}' \approx c_S \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma(\gamma - 1)} \frac{p_0}{p_2}}.$$

Herrschte anfangs links 1 bar, rechts 0,001 bar, dann könnte die Stoßwellenzone in der Kombination H₂-Luft hiernach fast 10 000 °C heiß werden. Die Stoßwelle kann das Gas zu thermischem Leuchten bringen, aber die hiermit verbundenen Anregungsvorgänge, die wir nicht berücksichtigt haben, senken die erreichbare Temperatur. Nach der Reflexion läuft die Front in das vorgeheizte Gas zurück und erhitzt es weiter. Mit laserinduzierten Stoßwellen hofft man Plasmen so aufzuheizen, dass Kernfusion möglich wird.

Abgesehen von dem technischen Interesse bietet sich hier Gelegenheit, Materie unter extremen Bedingungen, wie sie etwa in Fixsternen vorkommen, zu studieren; allerdings nur für den kurzen Moment des Vorbeistreichens der Front vor einem Beobachtungsfenster. Dieser muss durch geeignete Vorrichtungen erfasst werden (Schlierenmethode; ähnlich wie Abb. 4.66, Abschn. 4.5.1).

4.4 Eigenschwingungen

Musikinstrumente ebenso wie Atome bevorzugen bestimmte Schwingungs- und Wellenformen, erwünschte und unerwünschte. Einige davon nehmen wir als Töne oder als Farben wahr. Mathematisch hängen sie nicht von der Schwingungsgleichung, sondern von den Randbedingungen ab.

4.4.1 Gekoppelte Pendel

Wir verbinden zwei Pendel z. B. mit einer schwachen Feder und stoßen eines an. Bald überträgt sich die Schwingung auch auf das andere Pendel, und wenn beide gleich lang sind, bleibt das erste einen Augenblick völlig in Ruhe: Seine ganze Schwingungsenergie ist auf das zweite Pendel übergegangen und flutet von da ab ständig zwischen beiden hin und her. Dies geschieht umso schneller, je stärker die Kopplung, je größer also die Federkonstante der verbindenden Feder ist (Abb. 4.47). Jedes der Pendel führt eine typische Schwebungskurve aus, wie sie zustandekommt, wenn zwei Schwingungen etwas verschiedener Frequenz sich überlagern. Im Umkehrschluss folgern wir, dass auch hier infolge der Kopplung die sonst einheitliche Pendelfrequenz in zwei nahe benachbarte aufgespalten wird.

Genauer erfahren wir aus den Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen x_1 und x_2 der beiden Pendel aus ihrer jeweiligen Ruhelage. Zu der üblichen Rückstellkraft $-Dx_1$ liefert die Koppelfeder eine kleine Rückstellkraft, die nur von der Differenz $x_1 - x_2$ abhängt; wenn beide Pendel im Takt schwingen, also bei $x_1 = x_2$, ist die Feder unbeanspruch und die Zusatzkraft Null:

$$m\ddot{x}_1 = -Dx_1 + D^*(x_2 - x_1), \quad m\ddot{x}_2 = -Dx_2 - D^*(x_2 - x_1). \quad (4.85)$$

Ein solches System zweier gekoppelter Differentialgleichungen könnte man lösen, indem man x_1 und x_2 zu einer komplexen Größe zusammenfasst. Viel allgemeiner, nämlich für beliebig viele gekoppelte Schwinger gültig, ist aber folgende Methode. Wir suchen zunächst Schwingungsformen, bei denen beide Pendel sinusförmig schwingen. Schwebungen u. dgl. können wir später daraus zusammensetzen. $x_1 = x_{10} e^{i\omega t}$, $x_2 = x_{20} e^{i\omega t}$, in (4.85) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} m\omega^2 x_{10} - Dx_{10} + D^*(x_{20} - x_{10}) &= 0 \\ m\omega^2 x_{20} - Dx_{20} - D^*(x_{20} - x_{10}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem für die Amplituden x_{10} und x_{20} , in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - D - D^* & D^* \\ D^* & m\omega^2 - D - D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.87)$$

Ein solches System hat genau dann nicht verschwindende Lösungen, wenn seine Determinante verschwindet, also wenn

$$\begin{aligned} (m\omega^2 - D - D^*)^2 - D^{*2} &= 0 \quad \text{oder} \\ m\omega^2 - D - D^* &= \pm D^*, \end{aligned} \quad (4.88)$$

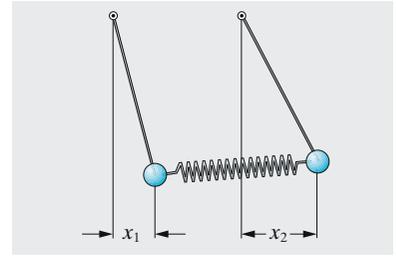


Abb. 4.47. Gekoppelte Pendel

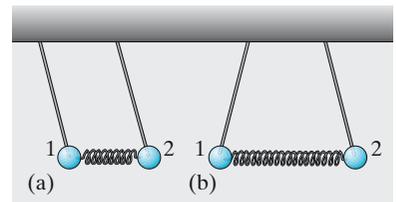


Abb. 4.48a,b. Die Fundamentalschwingungen von gekoppelten Pendeln

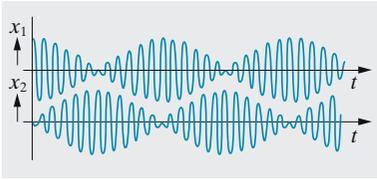


Abb. 4.49. Die Schwingungen der gekoppelten Pendel (Schwebungen)

d. h. für die Kreisfrequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D+2D^*}{m}}, \quad (4.89)$$

Bei der ersten dieser **Eigenschwingungen** bleiben beide Pendel im Takt, die koppelnde Feder wird nicht beansprucht; bei der zweiten schwingen sie genau gegeneinander, die Feder wird maximal beansprucht, daher ist $\omega_2 > \omega_1$ (Abb. 4.48).

Die allgemeinste Schwingungsform, eine **Schwebung**, lässt sich als Gemisch der beiden Grenzfälle darstellen:

$$x_1 = x_{11} e^{i\omega_1 t} + x_{12} e^{i\omega_2 t}, \quad \text{entsprechend für } x_2.$$

Wenn $D^* \ll D$, kann man nähern $\omega_2 \approx \omega_1 (1 + D^*/D)$, und die Differenz, die Schwebungsfrequenz, wird $\omega_2 - \omega_1 \approx \omega_1 D^*/D$ (Abb. 4.49).

Eine Schwebung findet auch statt, wenn die beiden Pendel verschiedene Massen oder Frequenzen haben. Dann ist aber die Energieübertragung nicht vollständig, d. h. kein Pendel kommt vollständig zur Ruhe.

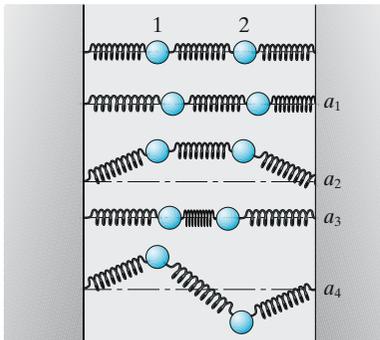


Abb. 4.50. Grund- und Oberschwingungen von zwei elastisch gebundenen Kugeln

4.4.2 Wellen im Kristallgitter; die Klein-Gordon-Gleichung

Die Atome im Festkörper sind durch Kräfte an ihre Ruhelagen gebunden, die wir durch Federn darstellen. Man kann auch Stahlkugeln äquidistant in einem Glasrohr wenig größeren Durchmessers verteilen und die Luftfederung benutzen, hat dann aber nur Longitudinalschwingungen, keine transversalen wie in Abb. 4.50 und 4.51. Die dargestellten Schwingungsformen sind *Eigenschwingungen*, d. h. alle Kugeln schwingen mit gleicher Frequenz und (falls die Dämpfung unwesentlich ist) mit zeitlich konstanter Amplitude. Zwei gekoppelte Pendel, die nur in x -Richtung schwingen, hatten zwei solche Eigenschwingungen; allgemein ist deren Anzahl gleich Kugelzahl mal Anzahl der Freiheitsgrade jeder Kugel. In Abb. 4.50 und 4.51 kann jede Kugel in allen drei Raumrichtungen schwingen, hat also drei **Freiheitsgrade**, und es gibt sechs bzw. neun Eigenschwingungen. Die Federn werden am wenigsten beansprucht, wenn alle Kugeln phasengleich schwingen (a_1, a_2, b_1). Diese Schwingungen haben die kleinsten Frequenzen und heißen **Grundschwingungen** oder erste Eigenschwingungen.

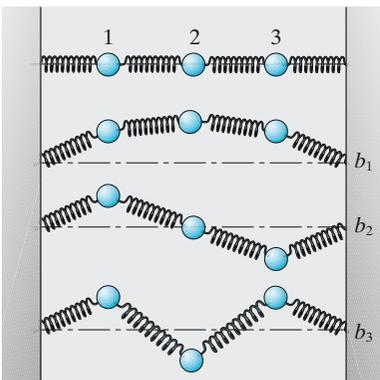


Abb. 4.51. Grund- und Oberschwingungen von drei elastisch gebundenen Kugeln

Zur theoretischen Behandlung kann man das System von Bewegungsgleichungen, eine für jede Koordinate (jeden Freiheitsgrad jeder Kugel), im Ganzen $3N$ Gleichungen, ansetzen. Bei einer Eigenschwingung enthält jede Koordinate den Faktor $e^{i\omega t}$, der sich weghebt. Es bleibt wieder wie in Abschn. 4.4.1 ein linear-homogenes algebraisches System, dessen $3N$ -reihige Determinante verschwinden muss. Das ergibt eine Gleichung $3N$ -ten Grades für ω^2 , das in der Diagonale steht, also $3N$ Lösungen für die $3N$ Eigenschwingungen. Statt dies durchzuführen, weisen wir lieber nach, dass nicht alle Wellen in einem Festkörper gleich schnell laufen, wie bisher angenommen, sondern nur die längeren.

Die Wellengleichung $\Delta\xi = c^{-2}\ddot{\xi}$, die **d'Alembert-Gleichung** (Abschn. 4.2.2; 4.2.3) lässt Lösungen beliebiger Form zu und verlangt nur, dass diese Form sich zeitlich zwar verschiebt, aber nicht ändert. Alle harmonischen Teilwellen, aus denen diese Form fouriersynthetisiert werden kann, laufen also gleich schnell. Die d'Alembert-Gleichung (4.48) beschreibt ein Medium ohne Dispersion. Man sollte sie also eigentlich nicht *die* Wellengleichung nennen: Für ein dispergierendes Medium muss eine andere Wellengleichung gelten.

Wir betrachten ein System aus sehr vielen gekoppelten Pendeln (harmonischen Oszillatoren). Jeder feste und z. T. auch flüssige Stoff lässt sich so behandeln, denn er besteht aus Teilchen, die schwingungsfähig an Ruhelagen zwischen den Nachbarpartikeln gebunden sind (permanent beim Festkörper, zeitweise bei der Flüssigkeit). Zunächst liege nur eine lineare Kette solcher Pendel mit dem Abstand d zwischen benachbarten Ruhelagen vor. Die Kräfte auf jedes Teilchen stammen z. T. von der Kopplung an die nächsten Nachbarn. Den Einfluss fernerer Nachbarn versuchen wir weiter unten zu erfassen. Das i -te Pendel sei bei x_i , weiche also um $\xi_i = x_i - id$ von seiner Ruhelage id ab. Das $i+1$ -te Pendel zieht nach rechts mit der Kraft

$$F_i = D'(\xi_{i+1} - \xi_i),$$

das $i-1$ -te schiebt nach rechts mit der Kraft

$$F'_i = D'(\xi_{i-1} - \xi_i).$$

Im ganzen ist die Kraft seitens der beiden Nachbarn nach rechts (oder nach links, wenn etwas Negatives herauskommt):

$$F_i + F'_i = D'(\xi_{i+1} + \xi_{i-1} - 2\xi_i). \quad (4.90)$$

Wenn die Teilchen sehr dicht sitzen, geht die Differenz $\xi_{i+1} - \xi_i$ über in das Differential $\xi'(x_i)d$, die Differenz $\xi_i - \xi_{i-1}$ in $\xi'(x_i - d)d$, also die rechte Seite von (4.90) in $\xi_{i+1} - \xi_i - (\xi_i - \xi_{i-1}) \approx \xi''d^2$. Wenn die Kräfte seitens nächster Nachbarn die einzigen wären, hieße die Bewegungsgleichung des i -ten Teilchens

$$m\ddot{\xi} = D'\xi''d^2.$$

Das ist genau die d'Alembert-Gleichung (4.48) mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = d\sqrt{D'/m}$. Solche Medien schwingen dispersionsfrei.

Der Einfluss der übrigen Teilchen wirkt sich angenähert so aus, dass er dem betrachteten Teilchen eine bestimmte Ruhelage zuweist, nicht nur relativ zu den nächsten Nachbarn, sondern „absolut“, bezogen auf ein raumfestes System. Auslenkung um $\xi_i = x_i - id$ bringt eine rüctreibende Kraft $F_{i0} = -D\xi_i$ zusätzlich zu den bisher betrachteten. Die vollständige Bewegungsgleichung heißt dann

$$m\ddot{\xi} = D'\xi''d^2 - D\xi. \quad (4.91)$$

Wir suchen eine harmonische Lösung, $\xi = \xi_0 e^{i(kx - \omega t)}$. Einsetzen liefert $-m\omega^2 = -D'd^2k^2 - D$ oder

$$\omega = \sqrt{\frac{D'}{m}d^2k^2 + \frac{D}{m}}. \quad (4.92)$$

Diese **Dispersionsbeziehung** für das System gekoppelter Pendel liefert eine Phasengeschwindigkeit der Welle

$$c_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{D'}{m}d^2 + \frac{D}{mk^2}}. \quad (4.93)$$

Bei langen Wellen (kleinen k) sind Nachbarpartikeln kaum gegeneinander verschoben. Dann wirkt überwiegend die „absolute“ Verschiebung mit $\omega \approx \sqrt{D/m}$. Im

Grenzfall $k \rightarrow 0$ wird $c_{\text{ph}} = (1/k)\sqrt{D/m}$ sogar unendlich: Die Teilchen schwingen alle in Phase. Je kürzer die Wellen sind, desto mehr überwiegen die „relativen“ Kräfte zwischen nächsten Nachbarn, und desto genauer gilt die d'Alembert-Gleichung mit $c_{\text{ph}} = d\sqrt{D'/m}$. Diese beiden Grenzfälle und der Übergang zwischen ihnen lassen sich sehr schön an Kugellagerkugeln verfolgen, die man in ein Präzisions-Glasrohr steckt, dessen lichter Durchmesser nur etwa $10\ \mu\text{m}$ größer ist als der Kugeldurchmesser. Pumpt man das Glasrohr bis auf etwa 10 mbar aus, dann wird die Luftfederung, die D' und D darstellt, so schwach und c_{ph} so klein, dass man alle Einzelheiten der Wellenausbreitung bequem beobachten kann.

Die Wellengleichung (4.91) ist hauptsächlich aus einem ganz anderen Gebiet bekannt, nämlich aus der als sehr schwierig geltenden relativistischen Quantenphysik. Dort heißt (4.91) **Klein-Gordon-Gleichung** und beschreibt das Wellenfeld eines Teilchens vom Spin 0 mit Ruhmasse. Für Teilchen vom Spin $\frac{1}{2}$ wie die Elektronen gilt entsprechend die **Dirac-Gleichung**. Die Klein-Gordon-Gleichung ist einfach die Übersetzung des relativistischen Energiesatzes (Abschn. 17.2.1), ebenso wie die Schrödinger-Gleichung die Übersetzung des nichtrelativistischen Energiesatzes ist (Abschn. 13.6.8). Das „absolute“ Glied D entspricht der Ruhmasse m_0 des Teilchens. Wenn $m_0 = 0$ ist wie beim Photon, geht die Klein-Gordon-Gleichung in die d'Alembert-Gleichung über, und die Dispersion verschwindet. Teilchen mit Ruhmasse haben auch im Vakuum **dispargierende Materiewellen**.

Die Klein-Gordon-Gleichung mit ihrer höheren Phasengeschwindigkeit für lange Wellen beschreibt gerade das Gegenteil des „Piuuh“-Effekts auf der Eisfläche. Dieses „Piuuh“ lässt sich aus der Theorie der **elastischen Membran** erklären: Je kürzer die Wellen, desto stärker die Krümmung der Eisfläche, desto größer also die rüctreibenden Kräfte. Für sehr kurze Schallwellen im Festkörper (**Hyperschall**), wie sie *Debye* zur Erklärung der spezifischen Wärmekapazität heranzog, gelten dagegen ganz ähnliche Wellengleichungen wie die Klein-Gordon-Gleichung (Abschn. 17.2.2).

4.4.3 Stehende elastische Wellen

Zwei Wellen gleicher Frequenz und Amplitude, die einander entgegenlaufen, bilden eine **stehende Welle** (Abb. 4.29). Sie hat **Knotenflächen** im Abstand $\lambda/2$, wo die Teilchen ruhen, und dazwischen **Bauchflächen** mit maximaler Schwingung. Beiderseits der Knotenflächen schwingen die Teilchen aufeinander zu oder voneinander weg, komprimieren oder dilatieren also das Medium gerade in den Knotenflächen am stärksten, und zwar zeitlich abwechselnd: Geschwindigkeitsknoten sind Druckbäuche, die Auslenkungs- und die Druckwelle sind um $\lambda/2$ gegeneinander verschoben.

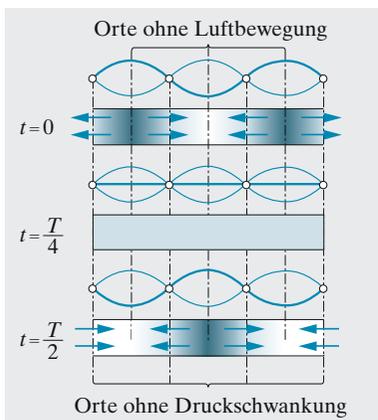


Abb. 4.52. Zuordnung von Druckknoten und -bäuchen zu den Schwingungsknoten und -bäuchen einer stehenden Welle in einem Gas

X Beispiel...

Ein Geiger verkürzt durch Aufsetzen des 1. Fingers die E-Saite um ein Viertel ihrer Länge und erzeugt durch leichtes Berühren (Flageolett) mit dem 4. Finger eine stehende Welle, bei der zwei Wellenlängen auf das freischwingende Saitenstück fallen. Welche Frequenz hat der erzeugte Flageolettton und welcher Ton ist es? (Normalerweise fällt auf die schwingende Saite eine halbe Wellenlänge, bei E ist die Frequenz 660 Hz). ▶

Die Wellenlänge des Flageolettons ist nur $\frac{3}{16}$ von der des Tons E, die Frequenz $\frac{16}{3}$ mal so groß, d. h. 3 520 Hz. Es ist die Quarte zum 2 Oktaven höheren E, also ein A.

Eine stehende Welle bildet sich am einfachsten durch Überlagerung einer ursprünglichen und einer reflektierten Welle oder durch Mehrfachreflexion. Der Phasensprung bei der Reflexion bestimmt, wo die Knotenebenen liegen: An einer Wand, die größeren Wellenwiderstand hat als das Medium, schwingt die reflektierte Welle nach (4.69) in Gegenphase zur einfallenden, also liegt dort ein Auslenkungsknoten, d. h. ein Druckbauch (Abb. 4.52). Beim Übergang zu einem Medium mit kleinerem Z , z. B. am offenen Ende einer Orgelpfeife, erfolgt Reflexion *ohne* Phasensprung, dort liegt ein Auslenkungsbau, d. h. ein Druckknoten. Holz- und Blechblasinstrumente einschließlich der Orgel erzeugen normalerweise solche stehenden Wellen oder Eigenschwingungen einer Luftsäule der Länge l . Sind beide Enden geschlossen, dann müssen beiderseits Auslenkungsknoten sein, also muss eine ganze Anzahl von Halbwellen ins Rohr passen:

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{oder} \quad \lambda_n = \frac{2l}{n} \tag{4.94}$$

Die Frequenzen dieser Eigenschwingungen sind also

$$\boxed{v_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2l}} \tag{4.95}$$

Oberschwingungen aller Ordnungen n der Grundfrequenz $v = \frac{1}{2}c/l$ sind möglich und sind im Ton vertreten oder können durch geeignetes Anblasen auch einzeln erzeugt werden. Mit c hängt aber die Tonhöhe von der Lufttemperatur ab: Im kalten Saal liegt sie tiefer. Anblasen mit anderen Gasen, speziell Wasserstoff, ergibt auch Überraschungseffekte. Tiefseetaucher, die ein Helium-Sauerstoff-Gemisch geatmet haben, piepsen wie Kinder, denn $c \sim \sqrt{p/\rho} \sim \sqrt{1/\mu}$ (μ : Molekülmasse).

Ist ein Pfeifenende offen, muss dort ein Auslenkungsbau sein, also muss $\lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots$ ins Rohr passen:

$$\boxed{l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad v_n = \frac{(2n + 1)c}{4l}} \tag{4.96}$$

Hier gibt es nur ungerade Obertöne.

Für einen schwingenden dünnen Stab oder eine Saite gilt Ähnliches. Dem geschlossenen Pfeifenende entspricht ein eingespanntes, dem offenen ein freies Stabende (Abb. 4.53, 4.54). Für den Stab ist $c = \sqrt{E/\rho}$, für die Saite $c = \sqrt{F/\rho A}$ zu setzen (Abschn. 4.2.2). Eine Dispersion ist für hörbare und auch für viel schnellere Schwingungen noch nicht zu befürchten (Abschn. 4.4.2). Bei **Torsionsschwingungen** (Verdrillungsschwingungen) eines Stabes ist E durch G zu ersetzen. Das Frequenzverhältnis der longitudinalen und der Torsions-Grundschwingungen ist also $v_{\text{long}}/v_{\text{tors}} = \sqrt{E/G} = \sqrt{2(1 + \mu)}$, woraus man die Poisson-Zahl μ des Materials bestimmen kann (Abschn. 3.4).

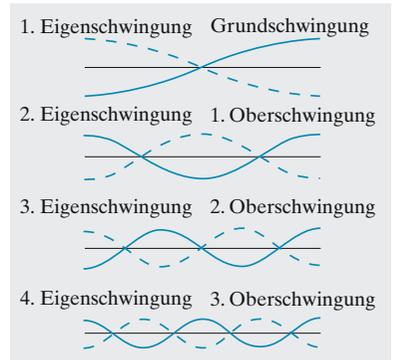


Abb. 4.53. Grund- und Oberschwingungen eines an beiden Enden freien, longitudinal schwingenden Stabes

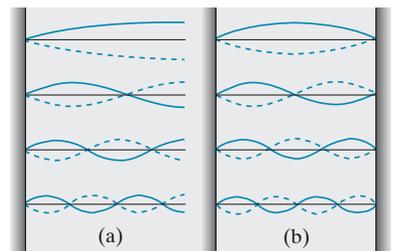


Abb. 4.54a,b. Longitudinalschwingungen eines Stabes; (a) an einem Ende fest, am anderen frei; (b) an beiden Enden fest. Die Verschiebungen in Richtung der Stabachse sind senkrecht zum Stab gezeichnet (Verschiebung nach rechts – nach oben, Verschiebung nach links – nach unten)

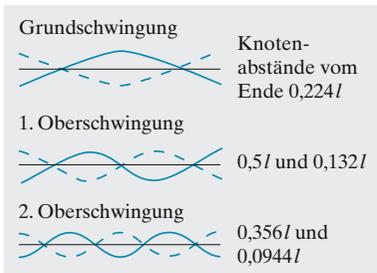


Abb. 4.55. Biegeschwingungen eines freien zylindrischen Stabes

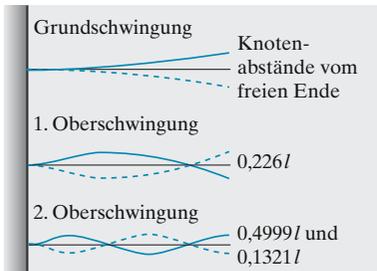


Abb. 4.56. Biegeschwingungen eines einseitig eingeklemmten Stabes

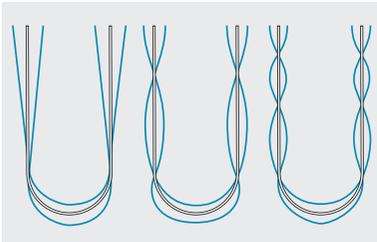
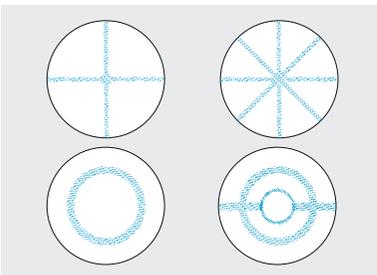


Abb. 4.57. Grund- und Oberschwingungen einer Stimmgabel

Abb. 4.58. Einige Eigenschwingungen einer Kreisplatte (**Chladnische Klangfiguren**)

Biegeschwingungen eines dicken Stabes, z. B. von Stimmgabelzinken, staffeln sich nicht harmonisch, das Schwingungsprofil ist auch nicht sinusförmig (Abb. 4.55, 4.56, 4.57). Für einen kreiszylindrischen Stab der Dicke d gilt annähernd

$$v_n \approx \frac{\pi d}{8 l^2} \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Die Frequenzen verhalten sich annähernd wie die Quadrate der ungeraden Zahlen. Ob die Eigenfrequenzen harmonisch oder anharmonisch gestaffelt sind, ist aus folgendem Grund wichtig: Aus harmonisch (äquidistant) liegenden Obertönen baut sich nach *Fourier* automatisch eine streng periodische Schwingung auf, deren Grundton leicht erkennbar ist. Beim anharmonischen Frequenzspektrum ist die Lage nicht so klar. Dadurch unterscheiden sich Saiten- und Blasinstrumente einschließlich Klavier und Orgel von den meisten **Schlaginstrumenten** einschließlich Trommel und Glocke.

Welche Oberschwingungen z. B. in einem Geigenton vorhanden sind, d. h. welche Klangfarbe er hat, hängt von der Art des Streichens oder Zupfens ab: Die räumliche Fourier-Zerlegung der Anfangsauslenkung, die z. B. beim **Pizzicato** nahezu dreieckig ist, liefert auch die Amplituden der zeitlichen Oberwellen. Betrachten Sie bei einem Flügel, in welchem Verhältnis die Filzhämmerchen die Saiten teilen und welche Form des Spannrahmens sich daraus ergibt. Warum wohl gerade dieses Verhältnis? Fourier-Analyse der „schiefen“ Dreiecksauslenkung zeigt, dass bei diesem Teilverhältnis 1 : 9 gerade die Oberschwingungen unterdrückt sind, die bei der temperierten Stimmung am falschesten klingen (Abb. 4.11c,d).

4.4.4 Eigenschwingungen von Platten, Membranen und Hohlräumen

Auf einer Platte, die man mit dem gut gespannten und kolophonierten Geigenbogen zu weithin klingenden Eigenschwingungen anregt, zeichnet Schmirgelpulver deutlich die Schwingungsform: Nur in den Knotenlinien bleibt es liegen (Abb. 4.58). Angefangen vom Stern, der immer eine gerade Anzahl von Strahlen hat (warum?), kann man auch kompliziertere Muster erzeugen und hört gleichzeitig, dass die Frequenzen der Eigenschwingungen keineswegs harmonisch gestaffelt sind. Kreisförmige Knoten erhält man besonders einfach, wenn man die Platte auf einen Lautsprecher legt, den man mit einem Frequenzgenerator versorgt. Steigert man dessen Frequenz, dann schwingt die Platte bei den diskreten Eigenfrequenzen besonders stark mit, und es bilden sich Muster, die immer mehr Knoten enthalten, je höher die Eigenfrequenz liegt.

Auch ein Hohlraum, z. B. ein Konzert- oder Hörsaal, hat viele Eigenfrequenzen. Die **Raumakustik** sollte verhindern, dass zu starke Eigenschwingungen in den Frequenzbereich der menschlichen Stimme oder der Instrumente fallen. Sie tut das durch Formgebung des Saales und durch den Wandbelag, der die Reflexion in vernünftigen Grenzen hält. Die **Nachhallzeit**, d. h. die Laufzeit des Schalles bis zur Wand, multipliziert mit der Anzahl der Reflexionen, die noch erhebliche Intensität haben,

sollte gering sein, außer vielleicht in Kirchen, wo der Nachhall zur feierlichen Raumwirkung beiträgt, aber auch den typischen Redestil der Sprecher prägt.

Die Erklärung für die Existenz von diskreten Eigenschwingungen liegt nicht in der Schwingungsgleichung selbst, sondern in den **Randbedingungen**. Es ist klar, dass an den Enden einer Saite ($x = 0$ und $x = l$) die Auslenkung 0 herrscht. Demnach kommen keine fortschreitenden Wellen auf der Saite in Betracht, sondern nur stehende. Da die Saitenenden Knoten sind, muss auf die Länge l eine ganze Anzahl von Halbwellen passen: Auslenkung $u = A \sin(n\pi x/l)$ oder $\sin(k_n x)$ mit $k_n = n\pi/l$. Aus dieser räumlichen Form der Schwingung ergibt sich nach der Schwingungsgleichung (4.48) die zeitliche, denn Einsetzen in $u'' = c^{-2}\ddot{u}$ liefert die Kreisfrequenz $\omega_n = ck_n = n\pi c/l$. Hier haben die Eigenfrequenzen ein harmonisches Spektrum. Ähnlich ist es bei der Luftsäule in einem Rohr (beiderseits Knoten bei der „gedackten“, Bauch am Ende der offenen Pfeife). Die Knotenflächen sind senkrecht zur Rohrachse. Knotenflächen parallel zu ihr sind auch möglich, haben aber zu hohe Frequenzen, um in Blasinstrumenten eine Rolle zu spielen.

Bei der schwingenden **Membran** der Pauke oder der schwingenden Luft des ganzen Konzertsaals ist das komplizierter. Eine Membran leistet dem Verbiegen nicht aus innerer Steifigkeit Widerstand wie Balken oder Platte, sondern nur infolge ihrer tangentialen Spannung. Diese zieht, eben wegen ihrer tangentialen Richtung, den Rand jeder Beule nach innen, sucht also die Verbiegung zu beseitigen. Die Zeichnung, aus der man die Rückstellkraft abliest, sieht im Querschnitt aus wie Abb. 4.23 (Saite), im Ganzen wie Abb. 3.26 (Seifenhaut). Nach (3.14) ergibt sich die Kraft auf ein Flächenstück dA als

$$dF = p dA = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) dA ,$$

wobei σ die am Rand angreifende Kraft/Meter Randlänge ist; r_1 und r_2 sind die **Hauptkrümmungsradien** in der Beule (Krümmungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen). Die ruhende Membran liege in der x, y -Ebene, ihre Auslenkung ist also $z(x, y)$. Analog wie bei der Saite für kleine Auslenkungen $1/r = d^2z/dx^2$ war, gilt für die Membran $1/r_1 + 1/r_2 = \partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = \Delta z$, also

$$dF = \sigma \Delta z dA .$$

Die Masse γdA des Flächenstücks wird dadurch beschleunigt gemäß

$$\gamma dA \ddot{z} = dF = \sigma \Delta z dA , \quad \text{d. h.} \quad \Delta z = \frac{\gamma}{\sigma} \ddot{z} . \tag{4.97}$$

Das ist eine Wellengleichung der Form (4.48) mit der Phasengeschwindigkeit $c = \sqrt{\sigma/\gamma}$, die frequenzunabhängig ist (keine Dispersion).

Wir interessieren uns für zeitlich sinusförmige Schwingungen. Am festen Ort x, y soll sich also z ändern wie $z = u(x, y) \sin(\omega t + \delta)$. Einsetzen in (4.97) zeigt: Zu jeder festen Zeit wird die Gestalt der Membran beschrieben durch eine Funktion $z = u(x, y)$, die Lösung der Gleichung $\Delta u = -\omega^2 c^{-2} u$ ist, oder mit $k = \omega/c$

$$\boxed{\Delta u = -k^2 u} . \tag{4.98}$$

Am Rand der Membran, wo sie eingespannt ist, muss die Auslenkung 0 sein. Das ist unsere Randbedingung. Wir betrachten nicht das kreisförmige Fell einer Pauke (dies würde auf Bessel-Funktionen als Lösungen führen), sondern eine rechteckige Begrenzung mit den Seiten a und b . Eine Ecke liegt im Ursprung, die Seiten sind

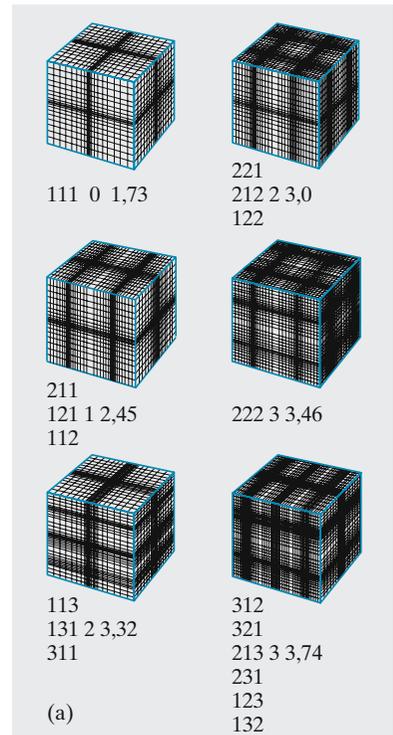


Abb. 4.59a. Die niedersten Eigenschwingungen eines würfelförmigen Raumes. Bäuche dunkel, Knoten hell. Die Bauebenen gehen natürlich nicht bis zu den Wänden, die Knoten darstellen. Die Zahlen bedeuten: Anzahl der Bäuche (stehende Halbwellen) in den drei Koordinatenrichtungen; Gesamtzahl der Knoten; Eigenfrequenzen als Vielfache der Grundfrequenz

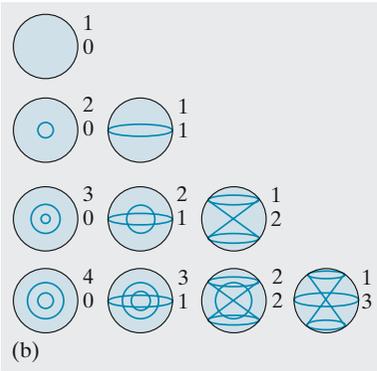


Abb. 4.59b. Knotenkugeln, -ebenen, -kegel der niedrigsten Eigenschwingungen einer Hohlkugel

Niederste Eigenschwingungen einer quadratischen Membran

n	m	$\omega_{nm} a/\pi c$
1	1	$\sqrt{2}$
1	2	$\sqrt{5}$
2	1	$\sqrt{5}$
2	2	$\sqrt{8}$
1	3	$\sqrt{10}$
3	1	$\sqrt{10}$

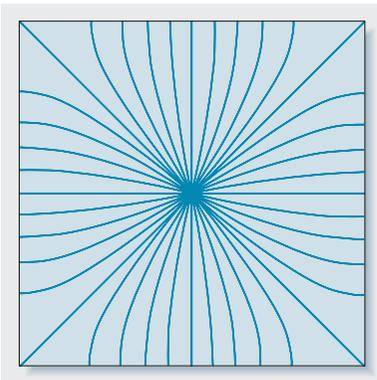


Abb. 4.60. Entartung: Alle diese Knotenlinien der Schwingungen einer quadratischen Platte entsprechen der gleichen Frequenz

parallel zu den Koordinatenachsen. Offenbar erfüllt $u = u_0 \sin(\pi x/a)$ die Schwingungsgleichung (4.98) mit $k = \pi/a$ und die Randbedingung in x -Richtung, nicht aber in y -Richtung. Dies wird erst erreicht durch $u = u_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$. Allgemeiner: Es müssen ganze Anzahlen von Halbwellen sowohl in a als auch in b passen:

$$u_{nm} = u_0 \sin(n\pi x/a) \sin(m\pi y/b), \quad n = 1, 2, \dots \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.99)$$

Einsetzen in (4.98) ergibt die k -Werte und Frequenzen:

$$k_{nm}^2 = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad \omega_{nm}^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right). \quad (4.100)$$

Dies sind die Eigenfrequenzen der Membran; die Funktionen $u_{nm}(x, y)$ nach (4.99) sind die Eigenfunktionen. Andere Funktionen sind i. Allg. ausgeschlossen (auf Ausnahmen kommen wir gleich zu sprechen). Durch Regeln der Spannung σ lässt sich die Pauke daher auf verschiedene Grundfrequenzen abstimmen, deren Oberfrequenzen allerdings nicht harmonisch verteilt sind. Am rechteckigen Fell sieht man das aus (4.100): Nur wenn eines der Glieder n^2/a^2 oder m^2/b^2 keine Rolle spielt, gibt das andere eine äquidistante Folge. Die Chladni-Staubfigur zeigt klar die Struktur der Eigenfunktion: Der Staub sammelt sich in den Knotenlinien an, wo $u = 0$ ist, denn sonst wird er weggeschleudert.

Eine quadratische Membran ($a = b$) hat die Eigenfrequenzen $\omega_{nm} = \pi c a^{-1} \sqrt{n^2 + m^2}$. Wie man sieht, fallen einige Eigenfrequenzen zusammen, obwohl ihre Eigenfunktionen verschieden sind: Vertauschen von n und m ändert ω_{nm} nicht, kippt aber alle Knotenlinien um 90° . Wenn zwei Eigenfunktionen die gleiche Eigenfrequenz haben, nennt man sie (oder auch diese Frequenz) *entartet*.

4.4.5 Entartung

Bei **Entartung** ergeben sich noch viel mehr als nur zwei Schwingungsmöglichkeiten mit der gleichen Frequenz. Jede Linearkombination zweier entarteter Eigenfunktionen u_1 und u_2 ist wieder eine Eigenfunktion. Zum Beispiel erfüllt die Funktion $u = u_1 u_{12} + u_2 u_{21} = u_1 \sin(2\pi x/a) \sin(\pi y/b) + u_2 \sin(\pi x/a) \sin(2\pi y/b)$ sowohl die Schwingungsgleichung (4.98) (denn diese ist linear) als auch die Randbedingungen (wenn u_{12} und u_{21} an einer Stelle verschwinden, ändert ihre Addition nichts daran). Außerdem hat $u = u_1 u_{12} + u_2 u_{21}$ die gleiche Frequenz wie u_{12} und u_{21} , wie man durch Einsetzen in (4.98) erkennt. Diese Kombination ohne Frequenzänderung ist wohlgemerkt nur im Fall der Entartung möglich; die Kombination von Obertönen ist etwas ganz anderes.

Alle kombinierten Eigenfunktionen, die sich aus u_{12} und u_{21} mit verschiedenen u_1 und u_2 bilden lassen, haben gemeinsam, dass sie genau eine Knotenlinie besitzen. Aber diese Linie kann sehr verschieden verlaufen: Bei $u_1 = 0$ in x -Richtung, bei $u_2 = 0$ in y -Richtung, bei $u_1 = u_2$ oder $u_1 = -u_2$ diagonal, bei anderen Werten gekrümmt (Abb. 4.60). Allgemein hat ein Zustand mit den Indizes n, m genau $n + m - 2$ Knotenlinien. Dies ist leicht zu zeigen, etwas schwerer Folgendes: Wo sich mehrere Knotenlinien kreuzen, tun sie das immer unter gleichen Winkeln; zwei Knotenlinien stehen senkrecht aufeinander, drei bilden Winkel von 60° usw.

Die Übertragung auf den Raum, z. B. auf die Luft in einem quaderförmigen Saal, ist einfach (Randbedingung: $u = 0$ an allen Wänden; es kommt ein weiterer ganzzahliger Index hinzu). Alle diese Tatsachen finden sich in der Atomphysik wieder, wo sie die entscheidende Rolle spielen. Man hat das Atom erst verstanden, als man seine Zustände als Eigenschwingungen auffasste (*de Broglie, Schrödinger*).

Jede Entartung gibt zu sehr vielen Schwingungsmöglichkeiten Anlass. Ein Raum muss in einer entarteten Eigenfrequenz viel stärker widerhallen als in den anderen, was für einen Konzertsaal verheerend wirkt. Der Hauptfeind einer guten Akustik ist die Entartung. Außerdem ist eine günstige Nachhallzeit wesentlich. Sie hängt von der Absorption an den Wänden ab (Aufgabe 4.5.9). Die Würfelform, der sich manche Opernhäuser nähern, ist daher sehr ungünstig. Günstige Proportionen vermeiden das Auftreten von quadrat- oder würfelförmigen Teilräumen so weit wie möglich. Jedes Rechteck mit rationalem Seitenverhältnis a/b lässt sich in eine Anzahl von Quadraten zerlegen. Diese Anzahl ist das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b , seine Seite der größte gemeinsame Teiler. Bei irrationalem Verhältnis existiert keine solche Zerlegung, aber in der Praxis verschwimmt der scharfe Unterschied rational-irrationale, denn die Seitenlängen sind ja nicht einmal beliebig genau definiert. Welches Verhältnis ist „am irrationalsten“? Wir trennen vom Rechteck ab (mit $a > b$) ein Quadrat b^2 ab, von der Restfläche wieder ein möglichst großes Quadrat usw. (Abb. 4.61). Schließlich muss (bei rationalem a/b) ein kleines Quadrat übrig bleiben, dessen Seite der größte gemeinsame Teiler von a und b ist. (In der Arithmetik kennt man dieses Verfahren als Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers.) Offenbar ist es akustisch ungünstig, wenn sich dabei irgendwo mehrere gleich große Quadrate aneinander reihen, denn ihre entarteten Schwingungen verstärken sich. Die Quadratfolge muss also alternieren wie in Abb. 4.61a, und das Endquadrat muss möglichst klein sein. Die erste Bedingung ist nur erfüllt für alle Glieder der **Fibonacci-Folge** $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$. Wenn ein Bruch der Folge a/b heißt, ist der nächste $b/(a+b)$. Beim Euklid-Algorithmus wird diese Folge rückwärts durchlaufen. Ihr Grenzwert ist $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, das Verhältnis des **Goldenen Schnittes**, und diesem Wert muss a/b möglichst nahe kommen, damit das Endquadrat möglichst klein ist. Säle mit berühmter Akustik, wie der Wiener Musikvereinssaal und das Concertgebouw in Amsterdam, kommen in ihren Proportionen dem Goldenen Schnitt tatsächlich sehr nahe.

Die ungeheure Bedeutung der Eigenschwingungen für die moderne Physik ergibt sich u. A. daraus, dass alle Teilchen Welleneigenschaften haben. Im Hohlraum, der durch das Kraftfeld eines Atoms gegeben ist, vollführen die Elektronen Eigenschwingungen, die den diskreten Energiezuständen des Atoms entsprechen. Allmähliche Auffüllung dieser Eigenzustände erklärt das **Periodensystem**. Übergang zwischen zwei Eigenzuständen ist mit Emission oder Absorption von Licht verbunden. Entsprechendes gilt für die Nukleonen im Kern; die **magischen Zahlen** von Protonen oder Neutronen entsprechen dem Schalenabschluss im Periodensystem, bei Übergängen entsteht γ -Strahlung.

4.5 Schallwellen

Schon Leonardo da Vinci verglich den Schall einer Glocke mit den Kreiswellen, die sich um einen ins Wasser geworfenen Stein bilden und bestimmte die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Alle Geheimnisse unseres Ohres sind aber auch heute noch nicht aufgeklärt.

4.5.1 Schallmessungen

Die Wellenlänge eines Tons bestimmt man heute am einfachsten als $\lambda = c/\nu$ durch Messung der Frequenz ν mit dem Oszilloskop, das das Signal eines Mikrophons als Sinuskurve zeigt. Zur Direktmessung von λ sind **stehende Wellen** am bequemsten.

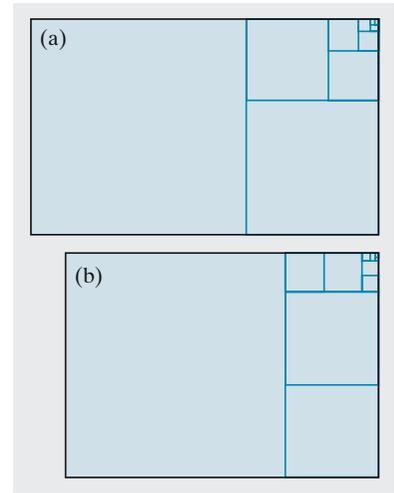


Abb. 4.61. (a) Ein „goldenes“ Rechteck und (b) ein DIN-Format zerfallen in eine knospenartige Folge von Quadraten

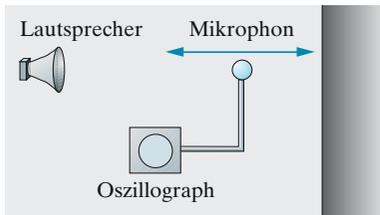


Abb. 4.62. Nachweis stehender Schallwellen vor einer reflektierenden Wand

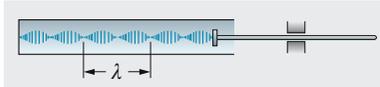


Abb. 4.63. Das kundtsche Rohr

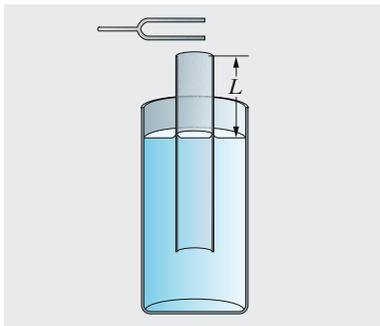


Abb. 4.64. Das quinckesche Resonanzrohr

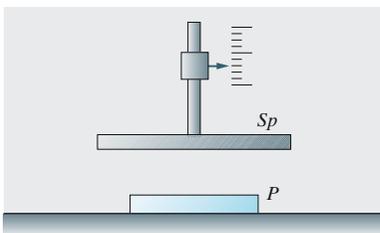


Abb. 4.65. Das Ultraschall-Interferometer (Pierce)

a) Messung in stehender Welle. Ein Lautsprecher, der eine harmonische Schallwelle (Sinuston) abstrahlt, wird vor einer reflektierenden ebenen Wand in so großer Entfernung aufgestellt, dass die Wand von nahezu ebenen Wellen getroffen wird. Ein Mikrofon, das mit einem Oszillographen verbunden ist, wird in der Nähe der Wand und senkrecht zu ihr hin und her bewegt (Abb. 4.62). Dabei zeigt sich auf dem Schirm des Oszillographen, dass das Mikrofon in gewissen Abständen von der Wand, die sich um die halbe Wellenlänge unterscheiden, keinen Schall empfängt (vgl. Abb. 4.29b). Das Auftreten derartiger stehender Wellen muss in Räumen, von denen eine gute Hörsamkeit verlangt wird, durch geeignete Gestalt und Beschaffenheit der Wände (Absorber) möglichst vermieden werden.

b) Kundtsches Rohr (Abb. 4.63). In ein einseitig geschlossenes, gasgefülltes Rohr ragt ein in der Mitte eingespannter Stab (Glas oder Metall), der durch Reiben in Längsschwingungen versetzt wird. Von seinem Ende breiten sich Wellen in dem Rohr aus, die sich mit den am geschlossenen Ende reflektierten zu stehenden Wellen zusammensetzen. Feines Korkmehl oder Lycopodiumsamen werden an den Stellen der Schwingungsbäuche (Abb. 4.63, lange Schraffur) aufgewirbelt, während sie an den Orten der Schwingungsknoten liegen bleiben. Der Abstand benachbarter Schwingungsknoten ist $\lambda/2$. Da auch die Schwingung eines in der Mitte eingespannten Stabes als stehende Schallwelle aufzufassen ist, deren Wellenlänge (λ_{St}) gleich der doppelten Stablänge ist, ergibt der Versuch unmittelbar das Verhältnis der Schallwellenlängen in Gas und im Stabmaterial bei gleicher Frequenz und damit das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten.

c) Quinckesches Resonanzrohr (Abb. 4.64). Die möglichen Eigenschwingungen einer Luftsäule in einem einseitig geschlossenen Rohr (z. B. einem in Wasser nicht ganz eingetauchten Rohr) ergeben sich aus der Abb. 4.54a. Bei den vorgeschriebenen Grenzbedingungen, nach denen am unteren Ende ein Knoten und am oberen ein Bauch sein muss, kann die Schwingung nur so erfolgen, dass die Länge der Luftsäule $\lambda/4$, $3\lambda/4$, $5\lambda/4$ usw. beträgt. Sie wird also durch eine über das offene Ende gehaltene Stimmgabel in Resonanzschwingung versetzt, wenn $L = \lambda/4$, $3\lambda/4$ usw. Die Differenz der Längen, bei denen man bei Heben des Rohres aus dem Wasser ein kräftiges Mitschwingen wahrnimmt, ist $\lambda/2$.

d) Ultraschall-Interferometer (Abb. 4.65). Für Ultraschallwellen, d. h. Schallwellen, deren Frequenz höher als etwa 20 kHz und daher dem Ohr nicht mehr zugänglich ist, kommen als Schallquellen vorzugsweise piezoelektrische Schallgeber in Betracht (vgl. Abschn. 6.2.5). Lässt man die von einem solchen (P) erzeugte Schallwelle an einem ihm parallel angeordneten Spiegel (Sp) reflektieren, so gerät die von P und Sp begrenzte Schicht immer dann in kräftige Schwingungen (Resonanz), wenn ihre Dicke $(2n + 1)\lambda/4$ ist ($n =$ ganze Zahl), genau wie bei einem einseitig geschlossenen Rohr (vgl. Abb. 4.54b). Man erkennt das Eintreten der Resonanz am vermehrten Energiebedarf des Schallgebers, der sich elektrisch nachweisen lässt. Verschiebt man den Reflektor messbar in Richtung seiner Normalen, so lässt sich das Eintreten der Resonanz über viele Halbwellen hin verfolgen und ihre Länge mit großer Genauigkeit messen. Da sich die Frequenz der Schallquelle auf elektrischem Wege praktisch beliebig genau ermitteln lässt, stellt das Gerät ein Präzisionsinstrument zur Schallgeschwindigkeitsmessung dar.

e) Optische Wellenlängenmessung von Ultraschallwellen (Debye und Sears) (Abb. 4.66). Ein Ultraschallwellenzug wird von parallelem einfarbigem Licht senkrecht zu seiner Ausbreitungsrichtung (parallel zu seinen Wellenflächen) durchstrahlt. In der Schallwelle ändert sich periodisch die Dichte und daher auch der Brechungsindex (s. Abschn. 10.3.2). Sie wirkt dann ähnlich wie ein optisches

Beugungsgitter (Abschnitte 4.3.4 und 10.1.3). Aus dem auf einem Schirm aufgefangenen Beugungsspektrum kann man die „Gitterkonstante“ berechnen, die gleich der Wellenlänge λ der Schallwelle im Medium ist: $\sin \alpha_z = z\Lambda/\lambda$; hier ist α_z der Winkel, unter dem das z -te Beugungsbild gegen das 0-te (Zentralbild) abgelenkt wird. Λ ist die Wellenlänge des verwendeten Lichtes. Dabei ist es gleichgültig, ob durch Reflexion stehende Schallwellen gebildet werden oder nicht. Die „Gitterkonstante“ ist in beiden Fällen die gleiche, und die Beugungserscheinung wird durch eine Verschiebung, selbst wenn diese mit Schallgeschwindigkeit erfolgt, nicht beeinflusst. Eine Anwendung dieses Effekts stellt der sog. akusto-optische Modulator dar, bei dem mit Hilfe von Ultraschallwellen Licht in bestimmte Richtungen abgelenkt wird.

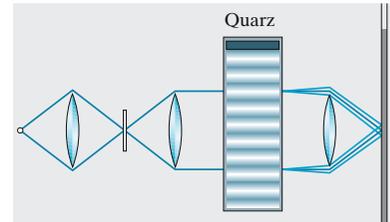


Abb. 4.66. Wellenlängenmessung an Ultraschallwellen nach Debye-Sears

Die **Schallintensität** misst man über die Schallschnelle v_0 oder die Druckamplitude Δp . Sie bestimmen den Schallwechseldruck $\Delta p \sin(\omega t)$, in dessen Rhythmus eine Mikrofonmembran schwingt und ihn auf ein elektronisches System überträgt, aber auch den **Schallstrahlungsdruck** $p_{\text{Str}} = \frac{1}{2} \rho v_0^2 = \frac{1}{2} \kappa \Delta p^2 = I/c$, der zeitlich konstant ist und eine **Rayleigh-Scheibe** oder ein **Schallradiometer** verdreht. Die Rayleigh-Scheibe ist direkt, die Radiometerscheibe über einen Dreharm an einem dünnen Quarz-Torsionsfaden aufgehängt und mit einem Spiegelchen versehen, das die Auslenkung stark vergrößert auf einen Schirm projiziert. Das Radiometer erfährt im Schallfeld ein Drehmoment $T = A l p_{\text{Str}}$, die Rayleigh-Scheibe (Radius r) $T = \frac{4}{3} p_{\text{Str}} r^3$. Die Scheibe muss klein gegen die Wellenlänge sein, sonst mitteln sich die Kräfte teilweise weg.

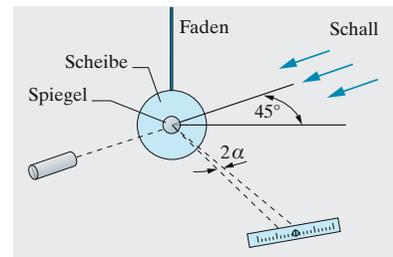


Abb. 4.67. Rayleigh-Scheibe zur Messung der Schallschnelle

4.5.2 Töne und Klänge

Die Fourier-Analyse schält aus unserer akustischen Umwelt als Grundelement den **Ton**, eine reine Sinusschwingung $a \sin(\omega_0 t + \varphi)$ heraus, charakterisiert durch Amplitude, Frequenz und Phase. Er entspricht im Spektrum (in der Fourier-Transformierten) einer einzelnen Spektrallinie bei der Kreisfrequenz ω_0 . Ein musikalischer „Ton“ (abgesehen von den leblosen Sinustönen elektronischer Instrumente) ist physikalisch bereits ein **Klang**, nämlich die Überlagerung mehrerer Sinustöne, eines Grundtons und einiger Obertöne. Im Spektrum eines Klanges liegen diskrete gleich abständige Linien $\omega_n = n\omega_0$. Ein Klang ist ein streng periodischer Vorgang beliebiger Form. Ein nichtperiodischer Vorgang ergibt ein kontinuierliches Frequenzspektrum und heißt **Geräusch**. Strenggenommen trifft dies auch für jeden Vorgang zu, dessen Amplitude mit der Zeit anschwillt oder abklingt. Nur ein unendlicher Sinuston ist wirklich ein Ton. Das Frequenzspektrum eines nicht zu kurzen abbrechenden Klanges ist aber schmal genug, dass das Ohr und jedes Analysegerät ihn noch als reinen Klang empfindet (Aufgaben 4.1.1, 13.1.6).

Physikalisch besteht der Unterschied zwischen einem musikalischen Einzel„ton“ und einem **Akkord** nur in der relativen Amplitude der Oberschwingungen: Im Akkord sind einige von ihnen besonders betont, nämlich die musikalischen Einzeltöne. Bis zu einem gewissen Grade kann man so das Harmoniesystem unserer Musik aus der Obertonreihe ableiten. Wie *Pythagoras* mit mystischer Befriedigung fand, klingen Akkorde angenehm, wenn die Saitenlängen oder die Frequenzen der Teiltöne im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen stehen. Für Oktave, Quint, Quart, große Terz, kleine Terz sind diese Verhältnisse $2 : 1$, $3 : 2$, $4 : 3$, $5 : 4$, $6 : 5$. Solche

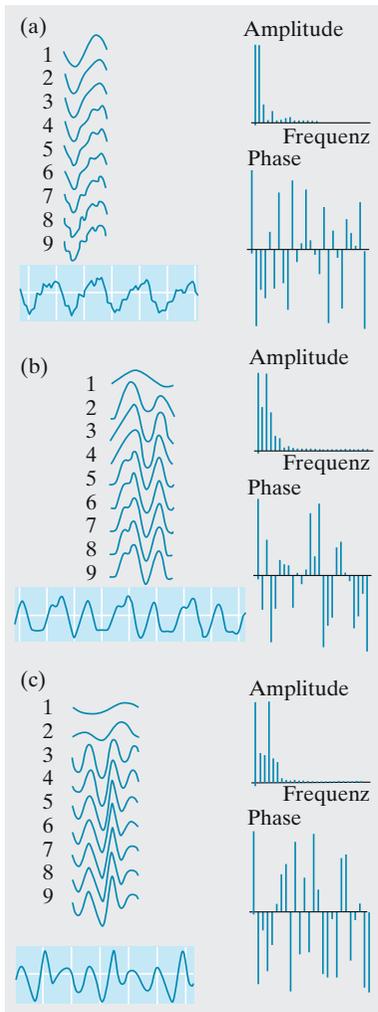


Abb. 4.68. Oszillogramme der Töne von (a) Violine, (b) Klarinette und (c) Trompete mit ihrer Obertonentwicklung

Verhältnisse bestehen naturgemäß zwischen geeigneten Obertönen jedes Einzeltones. So steckt der Dur-Dreiklang als $3\omega, 4\omega, 5\omega$ in jedem „Ton“ ω . Die Töne $4\omega, 5\omega, 6\omega, 7\omega$ bilden fast genau den Dominantseptakkord (allerdings mit deutlich zu tiefer Septime und mit der Auflösung nach F-Dur, wenn man von C ausgeht). Höhere Obertöne geben die ganze Tonleiter wieder, aber mit Abweichungen. Untertöne, d. h. die Frequenzen $\omega/2, \omega/3$ usw. entstehen in den klassischen Instrumenten nur ausnahmsweise, werden dagegen in elektronischen Instrumenten bewusst durch Frequenzteilung erzeugt. Musikalisch bilden sie die „Umkehrung“ der Obertonreihe und enthalten den Moll-Dreiklang an der gleichen Stelle wie diese den Dur-Dreiklang. Jedes Blasinstrument erzeugt ohne besondere Tricks (Stopfen, Ventile, Mundakrobatik) nur die Obertonreihe als „Naturtöne“: Man kann die Luftsäule im Rohr so anregen, dass 1, 2, 3, ... halbe Wellenlängen hineinpassen.

Unser Tonsystem muss überall auf Physik und Mathematik Rücksicht nehmen. Wenn man die Intervalle z. B. von C aus durch die reinen Frequenzverhältnisse $3/2, 4/3$ usw. definiert (reine Stimmung), könnte man auf einem so gestimmten Klavier eigentlich nur C-Dur spielen (Aufgabe 4.5.6). Seit A. Werckmeister und J. S. Bach stimmt man daher die Tasteninstrumente **temperiert**, d. h. man verteilt die unvermeidliche Falschheit auf alle Töne und Tonarten in gleichmäßiger, aber erträglicher Weise. Die zwölf Halböne einer Oktave haben zum Nachbarton das gleiche Frequenzverhältnis $\sqrt[12]{2}$. Kleine Terz und große Sext weichen am meisten von der reinen Stimmung ab. Im Moll-Akkord hört man daher auch beim gut gestimmten Klavier Schwebungen, die anzeigen, dass die Fourier-Synthese nicht ganz stimmt.

Die **Klangfarbe** eines Klages wird bestimmt durch die Amplitudenverhältnisse von Grund- und Obertönen. Die Phasen der Teilschwingungen sind dagegen ohne Einfluss auf die Klangfarbe. Das Ohr ist ein Fourier-Analysator ohne Phasempfindlichkeit. Ein Ton mit überwiegend geraden Obertönen ($2\omega, 4\omega, \dots$; der Grundton gilt als 1. Oberton), wie ihn viele Holzblasinstrumente, besonders Oboe und Flöte liefern, klingt hohl und näselsnd. Er enthält nämlich zunächst nur reine Oktaven und eine Quint, muss also ähnlich klingen wie der Anfang der 9. Sinfonie mit seinen berühmten leeren Quinten. Die ungeraden Obertöne der Streicher machen den Ton „hell“ oder „warm“, denn schon $\omega, 3\omega, \text{ und } 5\omega$ konstruieren den vollen Dur-Dreiklang. Zu zahlreiche und intensive Obertöne klingen „rau“, als wenn man alle Töne der Tonleiter auf einmal anschlägt.

Zur objektiven Aufzeichnung von Klängen ist ein Oszillograph in Verbindung mit Kondensatormikrophon und Verstärker geeignet (Abb. 4.68). Die Frequenzanalyse eines Klages erfolgt im Prinzip immer noch mit einem System von Resonatoren, wenn diese auch nicht mehr wie bei Helmholtz als Hohlkörper angelegt sind, die auf einen bestimmten engen Frequenzbereich ansprechen, sondern als elektronische Filter mit engem durchgelassenen Frequenzband. Im Tonfrequenzspektrometer wird die Reihe solcher Filter nacheinander an die y-Platten eines Oszillographen gelegt, auf dessen Schirm direkt das Fourier-Spektrum des Klages entsteht.

Schallaufzeichnung und -wiedergabe sind durch Elektronik, Feinmechanik und Optik zu höchster Perfektion entwickelt. Grundvoraussetzung ist Linearität der Systeme im ganzen hörbaren Frequenzbereich, denn sonst sind Verzerrungen nicht zu vermeiden. Die **Stereoplatte** enthält Signale von den beiden Mikrofonen auf den Flanken einer V-förmigen Rille. Der Schwingungsvorgang der Nadel setzt sich aus diesen beiden senkrechten Komponenten zusammen. Auf dem **Magnetband** werden feinste Eisenteilchen im Rhythmus des Stroms im Magnetkopf ausgerichtet, und ihr Magnetfeld induziert bei der Wiedergabe im gleichen Kopf genau entsprechende Ströme. Manche Diktaphone benutzen zum gleichen Zweck die Einzelbereiche eines polykristallinen Drahtes. Beim **Tonfilm** moduliert man die

Schwärzung der Tonspur auf dem Film durch eine Kerr-Zelle oder einen Schleifenoszillographen, und diese Schwärzung moduliert bei der Wiedergabe ihrerseits den Strom durch eine Photozelle.

In wenigen Jahren hat die Compact Disk (CD) die Schallplatte fast ganz verdrängt. Wie das spektrale Interferenzfarben-Schillern im Schräglicht zeigt, ist eine solche Scheibe bedeckt mit μm -großen Gruben (pits), erzeugt von einem Hochleistungslaser und ausgeätzt, die die Schallsignale digital und daher kaum störanfällig wiedergeben. Etwa 20 000 solche pits/s tasten den analogen Verlauf der Schallintensität punktweise ab, sogar zweimal für Stereo-Aufnahmen. Sie werden als Reflexe von Festkörper-Lasern berührungsfrei abgelesen. Auch andere Daten können digital auf Video-Disks oder CD ROMs gespeichert werden.

x Beispiel ...

Messen Sie die bespielte Fläche einer CD; schätzen Sie die Drehfrequenzen am Anfang und Ende des Stückes. Wie viel Platz etwa nehmen die pits ein, die einen Abtastpunkt der analogen Amplitudenkurve wiedergeben?

Innenradius 23 mm, außen z. B. 55 mm, Drehfrequenzen 500 U/min bzw. 200 U/min, also 1,1 m/s. Auf die 32 mm müssen bei 1 h Spieldauer 21 000 Spuren passen, von je 1,5 μm Breite. $2 \cdot 10^4$ Abtastungen/s ergeben 50 μm Länge für die beiden Binärzahlen (Stereo!), die die Amplitude digital darstellen. Außerdem müssen noch Signale für Zeit und Drehfrequenz untergebracht werden.

4.5.3 Lautstärke

Vor überhohen Schallintensitäten, die das Ohr verletzen könnten, warnt die **Schmerzschwelle**. Am anderen Ende der Skala hätte es keinen Zweck, ein zu empfindliches Ohr zu konstruieren. Wenn unser Ohr nur ein bisschen empfindlicher wäre, nähmen wir die molekularen Schwankungen in der Luft, d. h. die **brownsche Bewegung** des Trommelfells, als ständiges Störrauschen wahr (Aufgabe 4.5.7). Damit ist der Intensitätsbereich, den das Ohr wahrnimmt, umgrenzt. Bei der günstigsten Frequenz (1–4 kHz) umspannt er 13 Zehnerpotenzen.

Schon daraus ist klar, dass die subjektive Empfindung, die **Lautstärke**, anderen Gesetzen folgen muss als ihr physikalisches Analogon, die Intensität. Es wäre biologisch sinnlos, diesen riesigen Intensitätsbereich linear einzuteilen. Wenn z. B. 100 unterscheidbare Lautstärkestufen verfügbar sind und gleichmäßig über die I -Skala verteilt würden, könnte man ganz unnötigerweise unterscheiden, ob 99 oder 100 Menschen gleichzeitig reden. Wenn ein einzelner Mensch unter den gleichen Umständen etwas leiser redete, würde, was er sagt, im Lautstärkeniveau 0 der Unhörbarkeit untergehen.

Nach *W. Weber* und *G. Th. Fechner* hilft sich die Natur genau wie der Mathematiker, der einen riesigen Bereich durch Logarithmieren komprimiert und dabei im interessanten niederen Teil gewaltig an Unterscheidungsschärfe gewinnt. Die Wahrnehmungsintensität, hier die Lautstärke, ist proportional dem Logarithmus der Reizintensität, hier Schallintensität:

$$L = \text{const} \ln(I/I_0) . \quad (4.101)$$

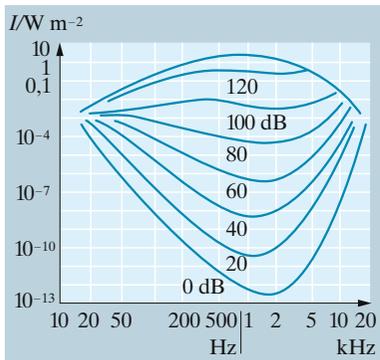


Abb. 4.69. Die „Hörfläche“ gibt an, bei welchen Schallintensitäten und -frequenzen das menschliche Ohr einen bestimmten Lautstärkeindruck hat

Dass sich die Intensität geändert hat, merkt man erst, wenn sie sich um einen bestimmten *Faktor* geändert hat (empirisch 20–25%) gleichgültig, wie groß sie anfangs war. Der Lautstärkeunterschied zwischen zwei Motorrädern und einem ist derselbe wie zwischen zwei Mücken und einer. Das gleiche Grundgesetz der Psychophysik gilt ja auch für Tonhöhen: Gleiche Intervalle bedeuten gleiches *Verhältnis* der Frequenzen. Ähnliches gilt für das Unterscheidungsvermögen für Gewichte, Helligkeiten usw., nicht aber z. B. für den durch einen elektrischen Strom erregten Schmerz.

Hörschwelle und Schmerzschwelle liegen für die einzelnen Frequenzen verschieden. Am tiefsten liegt die Hörschwelle und am höchsten die Schmerzschwelle zwischen 1 und 4 kHz. Wo beide zusammenfallen, hört man nichts mehr. Das ist der Fall bei 16 Hz einerseits, bei 20 kHz beim kindlichen Ohr andererseits. Mit zunehmendem Alter schwinden die hohen Frequenzen bis 4 kHz oder darunter.

Entsprechend dem Weber-Fechner-Gesetz misst man Lautstärken in **Phon**. Ein Phon (auch **Dezibel**, dB genannt) entspricht einem Intensitätsverhältnis $\sqrt[10]{10} = 1,259$, also etwa dem Unterscheidungsvermögen des Ohres. Der gerade noch hörbare Ton der Normalfrequenz 1 kHz soll 0 Phon haben (Intensität I_0). Damit ist die Konstante in (4.101) festgelegt.

$$L = 10 \log(I/I_0)$$

Die Schmerzschwelle für 1 kHz ($I/I_0 = 10^{13}$) liegt demnach bei 130 Phon. Die **Phonometrie** versucht Lautstärken auch bei verschiedenen Frequenzen zu vergleichen: Man regelt die Intensität eines Normaltons von 1 kHz so, dass dieser als ebenso laut empfunden wird wie der zu messende Ton. Die **Hörfläche** (Abb. 4.69) fasst alle Tatsachen zusammen.

Neuerdings zweifelt man die Allgemeingültigkeit des Weber-Fechner-Gesetzes an. Subjektiv sei der Unterschied zwischen zwei Düsenflugzeugen und einem doch größer als zwischen zwei Mücken und einer. Analog scheinen dem Musiker die hohen Oktaven breiter: Das Tonunterscheidungsvermögen wird in der Höhe feiner. Man glaubt das universelle ln-Gesetz durch individuelle Potenzgesetze mit kleinem Exponenten (z. B. $L \sim I^{0,3}$) ersetzen zu müssen, obwohl diese natürlich die Existenz der unteren Schwelle nicht wiedergeben. So ergibt sich die von der Phon-Skala etwas abweichende **Sone-Skala**. Es scheint auch eine enge Wechselwirkung zwischen Frequenz- und Intensitätswahrnehmung zu bestehen: Laute Töne klingen systematisch tiefer. Dies könnte auf den Schwingungseigenschaften der Basilarmembran beruhen (Abschn. 4.5.4).

4.5.4 Das Ohr

Bündelung durch die Ohrmuschel (Abb. 4.70) und den leicht verjüngten Gehörgang verstärkt den Schalldruck zwischen Außenraum und **Trommelfell** etwa auf das Doppelte, also die Intensität auf das Vierfache. Ob die Resonanzeigenschaften des Gehörgangs dabei eine Rolle spielen, ist umstritten; mit 2,5 cm Länge wäre er auf 6 kHz abgestimmt. Interessanter wird es hinter dem Trommelfell, dessen Schwingungen von **Hammer**, **Amboss** und **Steigbügel** auf das ovale Fenster, den Eingang zum Innenohr, übertragen werden. Das Trommelfell hat 1 cm² Fläche, die Membran des ovalen Fensters nur 0,05 cm², entsprechend verjüngen sich die drei Gehörknöchelchen. Bei einer Kraftübersetzung 1 : 1 wäre die Druckamplitude am ovalen Fenster daher 20mal größer als am Trommelfell. Die eigenartige Form und Anordnung der Knöchelchen fügt dazu eine Hebelübersetzung von 3 : 1 zugunsten

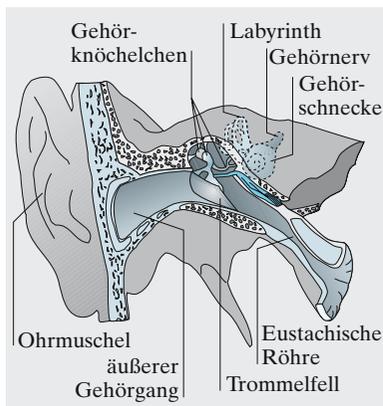


Abb. 4.70. Das menschliche Ohr: Gehörgang, Trommelfell, Mittelohr mit Gehörknöchelchen und Eustachischer Röhre, Innenohr mit den drei Ringen des Gleichgewichtsorgans (Labyrinth) und der Schnecke, an der der Gehörnerv ansetzt

des ovalen Fensters, bringt also das Verhältnis der Druckamplituden auf 60 : 1. Wozu das alles?

Das Innenohr ist mit Zellflüssigkeit, also praktisch Wasser, gefüllt. Jeder Taucher weiß, wie schwer der Schall aus der Luft seiner Stimmorgane ins Wasser zu bringen ist. An einer normalen Luft-Wasser-Grenzfläche mit beiderseits gleicher Druckamplitude erfolgt fast vollständige Reflexion (Abschn. 4.2.5). Diese Schwierigkeit wird überwunden, wenn der Druck auf das Wasser im Verhältnis der Wurzeln aus den Schallwiderständen $Z = \rho c$ verstärkt wird (**Anpassung**), denn dann geht die Intensität $I = \frac{1}{2} \Delta p_0^2 / (\rho c)$ stetig durch die Grenzfläche. Wasser ist 800mal dichter als Luft und hat die 4,5fache Schallgeschwindigkeit. Das Mittelohr erzeugt $\Delta p_W^2 / \Delta p_1^2 \approx 3\,600 \approx \rho_W c_W / (\rho_1 c_1)$, sorgt also für praktisch ideale Anpassung.

Auch in umgekehrter Richtung besteht ein ganz symmetrisches Anpassungsproblem: Schall kommt nur schwer aus Festkörpern und Flüssigkeiten in Luft. Eine schwingende Saite erregt die Luft nur schwach. Hier muss man umgekehrt die Schwingungsamplitude der Saite über die große Fläche des Resonanzbodens (Violinkörpers) verteilen, um gute Anpassung zu erzielen. Man kann auch sagen: Für die Wellenlängen in Luft, die alle groß gegen den Durchmesser der Saite sind, gleichen sich die Druckunterschiede einfach außen herum aus, ebenso wie um die Membran eines zu kleinen Lautsprechers (akustischer Kurzschluss).

Weitere Funktionen des Mittelohrs sind Ausgleich des Durchschnittsdrucks beiderseits des Trommelfells durch die **Eustachische Röhre** (Verbindung mit dem Rachenraum, die man beim Passfahren oder Fliegen durch Schlucken oder Gähnen freimacht), und Schutz des Innenohrs durch eine automatische Lautstärkeregelung: Anschwellen der Schallintensität zieht die Muskeln des Mittelohrs zusammen, sodass sie die Schwingungen der Gehörknöchelchen dämpfen und das Übersetzungsverhältnis verringern, und versteift gleichzeitig das Trommelfell. Auf einen plötzlichen Knall ist dieser Mechanismus nicht eingerichtet.

Was hinter dem ovalen Fenster vorgeht, ist erst zum Teil geklärt. Außer dem **Vestibularapparat**, dem Gleichgewichtsorgan mit seinen drei zueinander senkrechten Bogengängen, beginnt dort die **Schnecke (Cochlea)** aus $2\frac{1}{2}$ Windungen, längsgeteilt in zwei Kanäle durch die **Basilarmembran**. Diese 3,3 cm lange Membran mit ihren 20 000 Querfasern ist sehr wahrscheinlich der Fourier-Analysator des Ohres. Ihr Schwingungszustand überträgt sich auf die 30 000 Zellen des darauf liegenden **Cortischen Organs**. Von diesen Zellen gehen die Einzelfasern des Hörnervs aus. Schon 1605 vermutete *G. Baudin* Resonanz im Innenohr als Grundlage des Tonhörens. *J. C. Du Verney* lokalisierte 1683 diese Resonanz in der Schnecke, *A. Corti* 1851 in Basilarmembran und Corti-Organ, *H. von Helmholtz* baute seit 1850 die Resonanztheorie aus. Wenn die 20 000 Fasern je auf eine Frequenz abgestimmt wären, reichte das selbst für das feinste Musikerohr, um über 100 Stufen in jedem der 12 Halbtöne der 10 hörbaren Oktaven zu unterscheiden.

Die Fourier-Analyse bringt aber die Resonanztheorie in Schwierigkeiten. Eine so feine Abstimmung setzt sehr schwach gedämpfte Resonatoren voraus, die anatomisch fast undenkbar sind, vor allem aber sehr lange nachklingen müssten, viel zu lange, um rasch wechselnde Gehörseindrücke aufnehmen zu können (Aufgabe 4.5.8). Heute spricht man daher mit *v. Bekesy* (um 1930) von Eigenschwingungen der gesamten Basilarmembran, deren Amplitudenmaximum für verschiedene Frequenzen an verschiedenen Stellen dieser Membran liegt, wegen deren variabler Breite und Spannung. Obwohl offenbar jeder Frequenz ein bestimmter Erregungsort zugeordnet ist, kennen sich die wenigsten Menschen auf ihrer Basilarmembran so gut aus, dass sie ein absolutes Gehör für Tonhöhen haben.

Jede Einzelzelle des Cortischen Organs und jede Einzelnervenfaser scheint also einer bestimmten Frequenz zugeordnet zu sein. Die Amplitude wird, wie ganz allge-

mein die Erregungsintensität von Nerven, anders umcodiert: Die **Nervenerregung** besteht in einzelnen Impulsen des **Aktionspotentials**, wobei die Erregungsintensität nicht die Höhe der Impulse bestimmt – sie bleibt immer im Wesentlichen gleich –, sondern ihre Frequenz. Heftig erregte Zellen feuern häufiger, maximal mit etwa 1 000 Impulsen/s, was schon zeigt, dass der Nervenvorgang keine direkte Ähnlichkeit mit dem Schwingungsvorgang haben kann, sondern umcodiert worden ist. So wird die ganze $a(\omega)$ -Funktion des Fourier-Spektrums übertragen. Die Phasenlagen spielen keine Rolle. All dies kann man seit *C. W. Bray* und *E. Wever* (1931) mit Mikroelektroden in den einzelnen Fasern direkt nachweisen.

Wir haben zwei Ohren, um räumlich hören, d. h. Schallquellen lokalisieren zu können. Diese heute durch jede Stereoplatte bestätigte Binsenweisheit wurde lange bezweifelt und erst 1876 durch *Lord Rayleigh* sichergestellt. Die Amplituden-, Phasen- und Laufzeitunterschiede der Signale, die beide Ohren erreichen, kombinieren sich bei verschiedenen Frequenzen in verschiedenem Grade, um die akustische Umwelt zu organisieren: Über 4 kHz Intensitätsunterschiede, unterhalb 3 kHz Phasenunterschiede mit unvollständiger Überlappung zwischen beiden, so dass bei 3 kHz die Orientierung am schlechtesten wird. Anders, durch Echos von selbstausgesandten Signalen, orten Fledermäuse und Delfine die Objekte; sie hören und schreien bis 150 kHz. Auch Blinde und in geringerem Grade wir alle orten so bei niederen Frequenzen und daher mit geringerer Auflösung (Aufgabe 4.5.3).

4.5.5 Ultraschall und Hyperschall

Elastische Wellen mit Frequenzen von der menschlichen Hörschwelle (15 bis 20 kHz) bis etwa 10 GHz nennt man **Ultraschall**. Im oberen Teil dieses Bereichs ist die Wellenlänge etwa so groß wie die des sichtbaren Lichts. Dementsprechend verlieren die Beugungserscheinungen, die die Hörschallausbreitung so komplizieren, an Bedeutung. Ultraschall lässt sich ebenso gut bündeln wie Licht und zur Ortung und Hinderniserkennung durch Richtstrahlreflexion ausnutzen (**Sonar** in der Schifffahrt, bei Fledermäusen und Delfinen). Die Raumakustiker studieren Konzertsäle usw. am verkleinerten Modell mit Schall von proportional verkleinerter Wellenlänge. In Materialien mit einfachem Molekülaufbau, z. B. in Metallen, ist die Absorption von Ultraschall sehr gering, denn die wesentlichen atomaren Dispersions- und Absorptionsfrequenzen beginnen erst oberhalb von 10^{10} Hz. Daher und wegen seiner Ungefährlichkeit ist Ultraschall zur Materialprüfung, d. h. Entdeckung von Materialfehlern und Dickenmessung, meist den anderen Strahlungen (Röntgen, hartes UV, Neutronen) überlegen. Auch die Medizin misst Gewebestärken aus der Laufzeit von Ultraschallreflexen. Andererseits ist die Absorption, die besonders in hochpolymerem Material, z. B. organischem Gewebe, mit seinen zahlreichen niederfrequenten Schwingungsmöglichkeiten eintritt, technisch wichtig zur Steuerung der Polymerisationsvorgänge und therapeutisch zur Erwärmung tiefliegender Organe. Der Absorptionskoeffizient eines Materials lässt sich sehr elegant nach dem Impulsehochverfahren messen. Der flächenhafte Schallgeber sendet einen sehr kurzen Impuls aus, der an den Wänden der planparallelen Probe mehrfach reflektiert wird und in dem jetzt als Empfänger benutzten Geber eine Folge von Echoimpulsen mit exponentiell abklingender Stärke erzeugt. Die Dämpfungskonstante dieser Impulsfolge gibt bei bekannter Probendicke direkt den Absorptionskoeff-

fizienten. In Abhängigkeit von der Frequenz, also als Absorptions- bzw. Dispersionskurve, helfen solche Messungen bei der Strukturanalyse.

Mechanische Ultraschallgeber wie Pfeifen und Sirenen, erreichen 500 kHz. Bequemer sind **elektroakustische Schallgeber**, die elektrische oder magnetische Schwingungen nach dem Prinzip der **Elektrostriktion** oder des umgekehrten **Piezoeffekts** (vgl. Abschn. 6.2.5) bzw. der **Magnetostraktion** in mechanische umwandeln. Der Wirkungsgrad dieser Umwandlung ist am besten für eine mechanische Resonanz mit hohem Gütefaktor, also eine schwach gedämpfte Eigenschwingung des Schallgebers. Schon ein Weicheisen- oder Nickelstab in einer Hochfrequenzspule ist ein guter Ultraschallgeber. Man verringert i. Allg. die Dämpfung durch Wirbelströme wie im Transformator kern durch Schichtung vieler dünner Bleche. Die Resonanzfrequenz des Stabes ergibt sich nach (4.95). Für eine Piezo-Quarzplatte der Dicke l ist die tiefste Eigenfrequenz $\nu = \frac{1}{2} \sqrt{E/\rho}/l = 2,8 \cdot 10^5/l$ (l in cm; vgl. Tabelle 4.1). Außer Quarz wird Bariumtitanat wegen seiner hohen Elektrostriktion viel verwendet.

Moderne Schallgeber erreichen Schallintensitäten über 100 W cm^{-2} , die im hörbaren Bereich 10^5 mal höher liegen würden als die Schmerzschwelle. Geeignet geformte Transducer können diese Intensität noch konzentrieren, sodass fast jedes Material zerstört wird. Schon bei viel geringeren Intensitäten ergeben sich physiko-chemische Wirkungen, die man anders kaum erreicht: Feinermulgierung nicht mischbarer Flüssigkeiten, selbst Quecksilber und Wasser, Feindispersierung von Festkörpern in Flüssigkeiten, Abbau von Hochpolymeren mit Einblicken in die Kinetik organischer Reaktionen.

Zwischen 10^{10} und etwa 10^{13} Hz spricht man von **Hyperschall**. Hiermit endet der Bereich elastischer Festkörperschwingungen, denn die Wellenlänge kann nicht kürzer werden als der doppelte Atomabstand $2d$. Bei $\lambda = 2d$ schwingen benachbarte Atome gegenphasig, und jede geometrisch noch kürzere Welle wäre physikalisch gleichwertig einer längeren (vgl. Abschn. 17.2.1). Für Stahl mit $c_S = 5,1 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$ und $d = 2,9 \text{ \AA}$ folgt eine Grenzfrequenz (**Debye-Frequenz**) $\nu_G = \frac{1}{2} c_S/d \approx 10^{13}$ Hz.

Im Hyperschallbereich verschwindet der Unterschied zwischen Schall- und Wärmeschwingungen. Da die Wellenlänge nicht viel größer ist als der Atomabstand, treten erhebliche Phasenverschiebungen zwischen Druck und Atombewegung auf, die zu starker Absorption führen, aber auch interessante festkörperphysikalische und molekularkinetische Untersuchungen ermöglichen. Bei sehr tiefen Temperaturen frieren die für diese Absorption verantwortlichen Schwingungen ein (vgl. Abschn. 17.2.1). Hyperschall wurde daher erstmals (*Baranski, 1957*) in einem heliumgekühlten Quarzstab durch Ankopplung an zwei Mikrowellen-Koaxialresonatoren erzeugt.

4.6 Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten

Wasserwellen sind physikalisch ebenso interessant wie außerphysikalisch, dabei theoretisch so schwierig, dass wir hier keine allgemeine Behand-

lung versuchen können, sondern uns mit einigen Plausibilitätsschlüssen zufrieden geben müssen, die die entscheidenden Zusammenhänge liefern.

Wir gehen aus von der Tatsache, dass in einer Welle, die nicht bricht, die Wasserteilchen im Wesentlichen an derselben Stelle bleiben, wie man an schwimmenden Körpern, z. B. seinem eigenen, leicht feststellt. Die Geschwindigkeit v der Wasserteilchen hat also direkt nichts mit der Phasengeschwindigkeit c der Welle zu tun.

Jetzt beschreiben wir den Wellenvorgang vom Standpunkt zweier Beobachter. Der eine (A) fahre mit dem Boot genau mit der Welle mit, der andere (B) ruhe relativ zum Meeresboden. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter ist also c .

Für A ist die Welle ein statisches Gebilde; er sieht eine Folge paralleler Rücken und Täler. Die Wasserteilchen allerdings huschen an ihm vorbei im Mittel mit der Geschwindigkeit c , und zwar überall parallel zur Oberfläche. Bei genauerer Betrachtung sieht A , dass die Teilchen auf den Bergen etwas langsamer laufen als der Durchschnitt, im Tal etwas schneller. Das wundert ihn auch gar nicht, denn vom Berg zum Tal sind sie ja abwärts gelaufen und haben dabei eine potentielle Energie $mg2h$ gewonnen (h sei die Wellenamplitude, m die Masse eines Wasserpaketes). Um genau so viel muss die kinetische Energie im Tal größer sein als auf dem Berg. Sei $c - v$ die Geschwindigkeit auf dem Berg, $c + v$ die im Tal, dann ist der Gewinn an kinetischer Energie

$$\frac{1}{2}m(c+v)^2 - \frac{1}{2}m(c-v)^2 = 2mcv.$$

Da dies gleich $2mgh$ sein muss, folgt

$$v = \frac{gh}{c}. \quad (4.102)$$

Der Beobachter B brauchte gar nichts zu beobachten, sondern könnte die Teilchenbewegung in seinem Bezugssystem allein aus den Daten von A erschließen. Von allen Geschwindigkeiten, die A zeichnet, hat B einfach die Relativgeschwindigkeit c (als Vektor) abzuziehen (Abb. 4.71). Er erhält so eine kreisende Bewegung der Wasserteilchen. Der Phasenwinkel, auf dem sich das Teilchen gerade befindet, schreitet in Wellenrichtung fort. So ergibt sich für B das Profil der Welle (nur bei kleiner Amplitude ähnlich einem Sinus, allgemein eine Trochoide oder verallgemeinerte Zykloide: Die Täler sind breiter als die Berge). Die Kreisbahnen der Oberflächenteilchen haben den Radius h (Amplitude der Welle) und werden mit der konstanten Bahngeschwindigkeit durchlaufen, die A als v gefunden hat. Die Winkelgeschwindigkeit des Umlaufs ist also

$$\omega = \frac{v}{h} = \frac{g}{c}. \quad (4.103)$$

Die Wellenlänge ergibt sich wie immer als $\lambda = 2\pi c/\omega$, also $\lambda = 2\pi c^2/g$ oder

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (4.104)$$

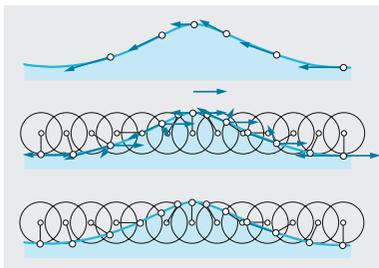


Abb. 4.71. *Oben:* Teilchengeschwindigkeiten in der Wasserwelle, die der mitfahrende Beobachter feststellt. *Mitte:* Der ruhende Beobachter konstruiert die Teilchengeschwindigkeiten in seinem System. *Unten:* Orbitalbewegung der Teilchen an der Oberfläche

Lange Wellen laufen also schneller als kurze. Eine Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge nennt man **Dispersion**. In Anlehnung an die Optik spricht man von **normaler Dispersion**, wenn, wie hier, c mit λ zunimmt. Rotes Licht wird i. Allg. schwächer gebrochen, seine Brechzahl n ist also kleiner, d. h. seine Phasengeschwindigkeit $c = c_0/n$ größer (c_0 : Vakuum-Lichtgeschwindigkeit).

Bei sehr kurzen Wellen spielt die potentielle Energie der Wasserteilchen im Schwerfeld eine geringere Rolle als die Kapillarenergie. Jede Kräuslung der Oberfläche erfordert ja neben einer Hubarbeit auch Oberflächenarbeit: Die ebene Wasserfläche ist am kleinsten. An die Stelle des Schweredruckes $p = \rho gh$, der z. B. im Innern eines Wellenberges auf Normalniveau herrscht, tritt also der Kapillardruck $p = \sigma/r$ (Abschn. 3.2), wo r der Krümmungsradius der Oberfläche ist. Dieser ergibt sich bei nicht zu großer Amplitude als $r = y''^{-1}$, wenn $y(x)$ die Form der Oberfläche ist. Angenähert gilt $y = h \sin(2\pi x/\lambda)$, d. h. $y'' = -h 4\pi^2 \lambda^{-2} \sin(2\pi x/\lambda)$, also wird der maximale Kapillardruck (am Gipfel des Wellenberges)

$$p_{\text{Kap}} = \sigma \frac{4\pi^2}{\lambda^2} h .$$

An die Stelle von ρg tritt $4\pi^2 \sigma / \lambda^2$, und damit wird aus (4.104)

$$c_{\text{Kap}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}} . \tag{4.105}$$

Diese **Kapillarwellen** haben also **anomale Dispersion** (Abb. 4.72). Mit steigender Wellenlänge müssen die Kapillarwellen in Schwerwellen übergehen. Dies geschieht dort, wo sich die beiden Dispersionskurven $c(\lambda)$ treffen, also bei

$$c_{\text{Kap}} = c_{\text{Schwere}} , \quad \text{d. h. bei} \\ \lambda_{\text{min}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} . \tag{4.106}$$

Für Wasser mit $\sigma = 0,07 \text{ N m}^{-1}$ ergibt sich $\lambda_{\text{min}} = 0,0172 \text{ m}$. Die Geschwindigkeit solcher Wellen, nämlich $c_{\text{min}} = \sqrt[4]{2g\sigma/\rho} = 0,23 \text{ m/s}$ (man beachte den Faktor 2, der von der Ausgleichung des Knickes herrührt), ist die kleinste Phasengeschwindigkeit, die für Wasserwellen vorkommt.

Die Kreise, die die Wasserteilchen in der Welle beschreiben, werden umso kleiner, je tiefer man unter die Oberfläche geht, und zwar nehmen Radius und Bahngeschwindigkeit auf einer Tiefe von $\lambda/2\pi$ um den Faktor e ab. Dies Verhalten ist für jemanden, der mit den funktionentheoretischen Methoden der Strömungslehre vertraut ist, fast trivial: Die Geschwindigkeit der ebenen Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit muss immer eine Funktion von $x \pm iy$ sein, weil sonst die Kontinuitätsgleichung (vgl. (3.21)) nicht erfüllt wäre. Wenn daher in horizontaler Richtung eine harmonische Abhängigkeit e^{ikx} herrschen soll, verlangt das automatisch in vertikaler Richtung eine e^{-iky} , d. h. e^{-ky} -Abhängigkeit mit dem gleichen $k = 2\pi/\lambda$, also die beschriebene Dämpfung der Orbitalbewegung mit der Tiefe.

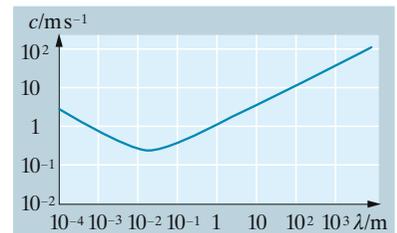


Abb. 4.72. Dispersion der Kapillar- und Schwerwellen im Tiefwasser

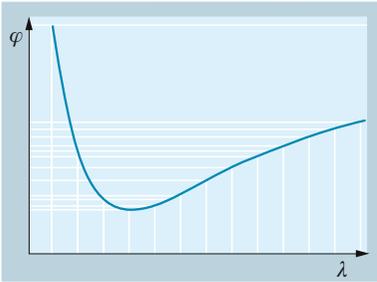


Abb. 4.73. Prinzip der stationären Phase: Das Extremum von $\varphi(\lambda)$ liefert den überwiegenden Beitrag zur Gesamterregung

Dieser Bewegungsablauf wird gestört, wenn die Wassertiefe H nur von der Größenordnung $\frac{1}{2}\lambda/\pi$ oder kleiner ist. Da am Grunde die Teilchen nur parallel zu diesem strömen können, müssen sich die Kreise mit wachsender Tiefe immer mehr zu Ellipsen abflachen, die ganz am Grunde zu „Strichen“ werden. Das wirkt sich auch auf die Phasengeschwindigkeit der Wellen aus: Für $H \ll \frac{1}{2}\lambda/\pi$ ist in (4.104) $\frac{1}{2}\lambda/\pi$ durch H zu ersetzen, also wird

$$c = \sqrt{gH}. \quad (4.107)$$

Seichtwasserwellen haben also keine Dispersion. Hierher gehören besonders die stehenden Wellen in Seen oder flachen Randmeeren (Ostsee, Genfer See), die nach einem Ausdruck der Fischer vom Genfer See als **Seiches** bezeichnet werden, und die durch Erdbeben o. Ä. ausgelösten **Tsunamis** des Pazifik, die Wellenhöhen über 30 m erreichen.

Für die Ausbreitung einer begrenzten Störung auf der Wasseroberfläche ist nicht die Phasengeschwindigkeit, sondern die **Gruppengeschwindigkeit** maßgebend. Da Dispersion herrscht, sind beide verschieden. Bei den Schwerewellen ist die Gruppengeschwindigkeit kleiner, bei den Kapillarwellen größer als die Phasengeschwindigkeit.

Wirft man einen Stein ins Wasser, so beobachtet man, dass nicht nur die Stärke der Erregung mit wachsendem Abstand und zunehmender Zeit abklingt, was selbstverständlich ist, sondern auch, dass die Wellen nach außen immer länger, mit der Zeit aber immer kürzer werden. Dies erklärt sich durch ein interessantes Zusammenwirken von Interferenz und Dispersion. Vom Erregungszentrum und -zeitpunkt gehen Wellen aller möglichen Wellenlängen aus, die natürlich miteinander interferieren. Ob sie sich dabei verstärken oder schwächen, hängt von ihrer Phasenbeziehung ab: Maximale Verstärkung erfolgt bei Phasengleichheit, maximale Schwächung bei einer Phasendifferenz π . Wir betrachten einen Punkt im Abstand r von der Stelle, wo der Stein hineingefallen ist, und eine Zeit t danach. Eine Welle der Länge λ , die dort und dann ankommt, hat die Phase $\varphi = 2\pi r/\lambda - \omega t$ (die Welle ist gegeben durch $\sin(2\pi r/\lambda - \omega t)$ mal einem Dämpfungsfaktor, der für die Phase belanglos ist). Diese Phase ist für festes r und t eine Funktion von λ und misst (zusammen mit einer Amplitudenfunktion, die die Stärke der einzelnen Wellen angibt) den Beitrag zur Gesamterregung in r und t . Es ist nun klar, dass diejenigen λ -Werte am meisten beitragen, die am häufigsten vorkommen. Besonders häufig sind nach Abb. 4.73 Phasenwerte an einem Extremum der $\varphi(\lambda)$ -Kurve. Die ihnen entsprechende Wellenlänge setzt sich durch, alle anderen Wellen interferieren einander weg. Dies ist die Grundidee der **Sattelpunktmethode** oder **Methode der stationären Phase**, ohne die die Lösung der meisten praktischen Wellenprobleme in Hydrodynamik, Akustik und Optik hoffnungslos wäre.

Beachtet man, dass $\omega = g/c = \sqrt{2\pi g/\lambda}$, also die Phase $\varphi = 2\pi r/\lambda - \sqrt{2\pi g/\lambda} t$ ist, so ergibt sich die charakteristische Wellenlänge (bei festem r und t) sofort aus $d\varphi/d\lambda = -2\pi r/\lambda^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2\pi g/\lambda^3} t = 0$ als

$$\lambda = \frac{8\pi}{g} \frac{r^2}{t^2}. \quad (4.108)$$

Das drückt die beobachtete r - und t -Abhängigkeit der Wellenlänge aus. Für Wellen ohne Dispersion ist die Lage anders: Da c nicht von λ abhängt, ist $\omega \sim \lambda^{-1}$ und $\varphi = 2\pi r/\lambda - 2\pi ct/\lambda$. Das Prinzip der stationären Phase führt dann auf $d\varphi/d\lambda = -2\pi(r - ct)/\lambda^2 = 0$, d. h. nicht auf eine bestimmte Wellenlänge, sondern auf

$$r = ct.$$

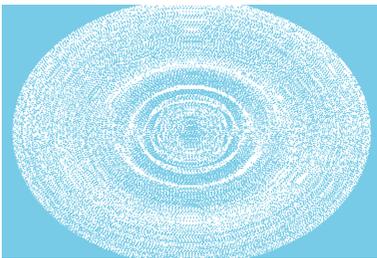


Abb. 4.74. Schwerewellen aus einer punktförmigen Momentanerregung

Der Erregungsvorgang breitet sich hier als Stoßwelle aus, an der alle möglichen Wellenlängen beteiligt sind.

x Beispiel...

Ein sehr kleines Steinchen fällt ins Wasser. Behandeln Sie die Ringwellen (reine **Kapillarwellen**).

Wir wiederholen die Betrachtung, die zu (4.108) führt, für Kapillarwellen: Die Phase $\varphi = r/\lambda - vt = r/\lambda - ct/\lambda = r/\lambda - \sqrt{2\pi\sigma/\rho} \cdot t/\lambda^{3/2}$ ist maximal für $d\varphi/d\lambda = 0$, d. h. $\lambda = 2,25\sigma t^2/(\rho r^2)$. Dies ist die beherrschende Wellenlänge. Die Wellen werden nach außen immer kürzer, mit der Zeit immer länger, gerade umgekehrt wie bei Schwerewellen.

Ein Schiff erzeugt neben und hinter sich eine komplizierte Wellenerregung, die ziemlich scharf durch die **Bugwelle** begrenzt wird. Diese wird oft als typisches machsches Phänomen analog zum Überschallknall oder der Tscherenkow-Strahlung bezeichnet. Die einfache Beobachtung, dass der Öffnungswinkel der Bugwelle *nicht* von der Schiffsgeschwindigkeit abhängt, sondern immer etwa $2 \cdot 20^\circ$ ist, widerspricht dem aber, denn ein Mach-Kegel sollte sich nach $\sin \vartheta_0 = c/v$ mit wachsendem v verengen. Der Grund ist wieder ein Zusammenwirken von Interferenz und Dispersion. Diesmal interferieren noch mehr Wellen, nämlich für jeden Ort des Schiffes alle Wellen aller möglichen Wellenlängen, die von diesem Ort ausgehen (s. Beispiel des Steins), ferner alle Wellensysteme, die von den aufeinander folgenden Schiffsorten ausgehen. Die Methode der stationären Phase, hier allerdings zweimal angewandt, klärt auch dieses Gewirr: Wir betrachten die Wellenerregung an einer Stelle P in einem Moment, wo das Schiff schon in S ist. Als es in S' war (dies war vor der Zeit t), hat es Wellen ausgesandt, die nach (4.108) an dem um r' von S' entfernten Ort P mit der beherrschenden Wellenlänge $\lambda_1 = 8\pi r'^2/(gt^2)$, also mit der Phase

$$\varphi = \frac{2\pi r'}{\lambda_1} - \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda_1}} t = -\frac{gt^2}{4r'}$$

ankommen. Sie kennzeichnet den Beitrag der Lage, die das Schiff vor einer Zeit t innehatte. Die einzelnen Schiffslagen S' hatten natürlich verschiedenen Abstand r' von P , und zwar lässt sich dieser nach dem Cosinussatz durch t ausdrücken: $r'^2 = r^2 + v^2 t^2 - 2rvt \cos \vartheta$ (Abb. 4.75), also

$$\varphi(t) = -\frac{g}{4} \frac{t^2}{\sqrt{r^2 + v^2 t^2 - 2rvt \cos \vartheta}} \tag{4.109}$$

Von allen Wellensystemen, die das Schiff zu verschiedenen Zeiten t ausgesandt hat, leisten wieder die den entscheidenden Beitrag, für die die Phase stationär (extremal) ist. Das ist der Fall für

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 = \frac{g}{4} \left(\frac{2t}{r'} - \frac{t^2}{r'^2} \frac{dr'}{dt} \right)$$

Wegen

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{1}{2r'} (2v^2 t - 2rv \cos \vartheta)$$

(man beachte, dass S' nach *rechts* wandert, wenn t zunimmt; deswegen das $-$ vor $2rv \cos \vartheta$) folgt

$$2r^2 + v^2 t^2 - 3rvt \cos \vartheta = 0, \quad \text{also} \quad t = \frac{3r}{2v} \left(\cos \vartheta \pm \sqrt{\cos^2 \vartheta - \frac{8}{9}} \right)$$

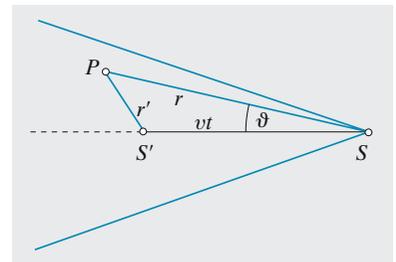


Abb. 4.75. Schiffswellen: Die Erregung im Punkt P zur Zeit t ergibt sich aus den Beiträgen aller früheren Schiffslagen S'

Wie man sieht, wird für $\cos^2 \vartheta < \frac{8}{9}$ oder $\sin \vartheta > \frac{1}{3}$, d. h. $\vartheta > 19,5^\circ$ die Lösung komplex. Es gibt dann überhaupt keine Schiffs-lage, die den beherrschenden Einfluss hat. Wenn aber alle Wellensysteme etwa gleichen Einfluss haben, kann das Ergebnis nur ein praktisch völliges Weginterferieren sein. Außerhalb $19,5^\circ$ ist also das Wasser ruhig.

Man beachte, dass infolge der eigenartigen Dispersion der Schwerewellen im Prinzip Wellen jeder Geschwindigkeit möglich sind, die schneller laufen als jedes Schiff und daher leicht in den Raum außerhalb des $19,5^\circ$ -Fächers eindringen oder sogar dem Schiff vorauslaufen könnten. Beim Schall, der praktisch keine Dispersion hat, ist das anders. Die Überlagerung aller von den einzelnen Positionen des Flugkörpers ausgehenden Wellen, die alle mit dem gleichen c laufen, ist dann einfacher und führt zum Mach-Kegel.



Ernst Chladni (1756–1827), Dozent in Wittenberg, führte 1809 *Napoléon* seine Klangfiguren vor, mit denen er die gebildete Gesellschaft ganz Europas unterhielt. Einen Preis für die Theorie dieser Figuren erhielt 1816 *Sophie Germain*, die mit Fachkollegen meist unter männlichem Pseudonym korrespondierte, damit man sie ernst nähme

▲ Ausblick

Nicht nur der Physiker sollte sich für Wellen interessieren: Fast alles, was wir über die Welt wissen, verdanken wir Schall und Licht, von Radio und Fernsehen ganz zu schweigen. Kein Wunder, denn die ganze Welt besteht nach der Quantenmechanik aus Wellen, wenn auch ganz seltsamen: Wahrscheinlichkeitswellen. Eine Welle ist mathematisch nicht einfach: Ein Feld, das nicht nur orts-, sondern auch zeitabhängig ist. Und diese Abhängigkeit wird durchaus nicht immer durch die d' Alembert-Gleichung beschrieben. Was wir hier über die Schicksale von Wellen erfahren haben, werden wir in Kap. 10 auf das Licht, in Kap. 7 auf elektromagnetische Wellen überhaupt, in Kap. 11 auf Strahlung, in Kap. 13 auf die Materie überhaupt übertragen. Auch die Wärmeenergie, speziell die eines Kristalls, wird in Kap. 17 in Wellen zerlegt. Eine wesentliche Beschränkung, die auf lineare Schwingungen, werden wir in Kap. 20 fallen lassen und dadurch auf ganz neue Tatsachen stoßen.

✓ Aufgaben ...

www. CD

●● 4.1.1 Koloraturbass

Sarasstros getragene Platituden gegen die glitzernden Koloraturen der Königin der Nacht – sind die Männer so schwerfällig, oder gibt es physikalische Gründe? Hinweis: Wie lange muss ein Ton andauern, damit er die erforderliche Reinheit (sagen wir: $\frac{1}{16}$ Ton) hat?

●● 4.1.2 Obertöne

Was kann man aus Abb. 4.10a,b über die **Obertöne** einer gezupften Saite lernen? Lassen sich die Ergebnisse über den zeitlichen Verlauf von x auch auf die Ortsabhängigkeit der Auslenkung umdeuten?

●● 4.1.3 Schatzsuche

Jemand findet am Strand eine uralte Rumflasche und darin ein Pergament, unterzeichnet „Captain Kidd“, in dem die Koordinaten einer Insel angegeben werden, wo der Piratenschatz vergraben ist. Auf der Insel sollen sich zwei Bäume und die Reste eines Blockhauses befinden. Um den Schatz zu finden, gehe man von der Blockhaustür geradlinig zum einen Baum, zähle dabei die Schritte, schwenke am Baum 90° nach rechts und gehe in der neuen Richtung ebenso viele Schritte, wie man vorher zum Baum gegangen ist. Dann schlage man einen Pflock ein. Man gehe zurück zur Blockhaustür und verfare

mit dem zweiten Baum genauso, nur dass man an diesem Baum nach links schwenkt. In der Mitte zwischen beiden Pflöcken liegt der Schatz. Der Finder der Flasche fährt zur Insel, findet dort die beiden Bäume, aber keine Spur des Blockhauses. Kann er den Schatz trotzdem finden – besonders wenn er mit komplexen Zahlen umgehen kann?

●● 4.1.4 Beschleunigungsmesser

Eine Stahlkugel in einem horizontalen Glasrohr wird von zwei Spiralfedern normalerweise in die Rohrmitte gedrückt. Zeichnen und diskutieren Sie, wie das System funktionieren soll.

Wie dimensionieren Sie Kugel und Federn sowie die Anzeigeskala? Füllen Sie das Rohr mit Wasser oder Glycerin oder dergleichen oder lassen Sie es leer?

●●● 4.1.5 Messgerät

Das drehbare Anzeigesystem habe das Trägheitsmoment J und die Rückstellgröße D^* . Die Dämpfungsgröße k lässt sich variieren. Wie muss man sie wählen, damit die Annäherung an den Endausschlag bei einer Messung möglichst schnell erfolgt? Diskutieren Sie auch die Fälle D^* , k fest, J variabel und J , k fest, D^* variabel. Sind alle drei Fälle praktisch wichtig?

●● 4.2.1 Verstimmt Uhren

Eine Anzahl von Uhren ist in einer Reihe aufgestellt, jede immer 1 m von der vorigen entfernt. Jede Uhr geht gegenüber der vorigen pro Stunde um 1 s nach. Zu einem bestimmten Zeitpunkt hat man alle genau gestellt. Jede Uhr gibt jede Viertelstunde einen Gongschlag von sich. Was geschieht später? Mit welcher Geschwindigkeit läuft die „Gongschlagwelle“ durch die Uhrenreihe? Wie hängt diese Geschwindigkeit vom Abstand und von der „Verstimmung“ der Uhren ab? Wovon hängt sie sonst noch ab?

●● 4.2.2 Erdbeben I

Fünf Minuten nach dem **Erdbeben** von Agadir begannen in Paris die Seismographen auszuschielen. Welchen Elastizitätsmodul haben die Gesteine des Erdmantels? Weshalb wird auch ein stoßartiges Großbeben in der Ferne als mehrere Minuten langer Wellenzug aufgezeichnet? Im Erdkern läuft die schnellste Welle (P -Welle) mit ca. 8 km/s. Kann der Erdkern aus Stahl sein? **Erdbebenwellen** laufen auf gekrümmten Bahnen. Wie und warum? Was geschieht, wenn sie dabei wieder an die Oberfläche oder auf die Grenze zwischen Mantel und Kern treffen?

●● 4.2.3 Erdbeben II

Ein Weltbeben habe als **Hypozentrum** eine Bruchzone in 100 km Tiefe. Im

Epizentrum direkt darüber an der Erdoberfläche kommen Beschleunigungen vor, die größer als g sind. Die entsprechenden Schwingungsperioden liegen zwischen 4 und 10 s. Welche Verschiebungs- und Geschwindigkeitsamplituden kommen im Epizentrum und in größerem Abstand davon, z. B. am Antipodenpunkt an (verlustfreie Ausbreitung vorausgesetzt)? Wie groß ist die Gesamtenergie des Bebens, wenn das Hypozentrum etwa 10 km Durchmesser hat? Vergleichen Sie mit einer Wasserstoffbombe. Eine Zehnerpotenz in der Epizentrums-Intensität entspricht drei Größenstufen in der **Mercalli-Skala**. Bis zu welcher Stärke lassen sich Beben auf der ganzen Erde registrieren, wenn die Schreibspitze knapp 1 mm dick ist?

●● 4.2.4 Seismograph

Ist ein System wie in Aufgabe 2.3.6 als Seismograph brauchbar, wenigstens im Prinzip? Wie muss man die Massen, Winkel usw. wählen? Wie würde man das Aufzeichnungssystem konstruieren? Fernbeben haben Perioden bis 20 s. Muss man dämpfen und wie? Man beachte: Ein sehr kurzer Erdstoß soll als Stoß und nicht als gedämpfte Eigenschwingung wiedergegeben werden.

●● 4.2.5 Seiches

Wie schwappt das Wasser in einem flachen Becken hin und her? Allgemeiner betrachten wir Wellen, die sehr lang sind verglichen mit der Tiefe des Beckens, sodass das Wasser über die ganze Tiefe mit gleicher Geschwindigkeit v nach rechts oder links strömt. Wie hängen v und seine Änderung von der Druckverteilung ab, wovon hängt wieder diese ab? Wie verschiebt sich der Wasserspiegel unter dem Einfluss dieser Strömung? Stellen Sie eine Wellengleichung auf und lesen Sie Ausbreitungsgeschwindigkeit, Periode usw. der Flachwasserwellen ab.

●● 4.2.6 Wellengruppe

Am Meer folgen auf eine große Welle meist noch mehrere ähnlich große,

nach einer solchen Serie ist es wieder ziemlich ruhig usw. Wie kommt das?

●● 4.2.7 Unterwassergespräch

Weshalb können sich Taucher so schlecht sprachlich verständigen, obwohl doch die Schallabsorption in Wasser so viel geringer ist als in Luft? Weshalb hat man so lange gedacht, die Fische seien stumm? Wieso hat man diese Ansicht plötzlich korrigiert?

●● 4.2.8 Seegeflüster

Warum hört man am See so deutlich, was die Leute am anderen Ufer reden? Sollte der Effekt über einer glatten Wüstenfläche auch da sein? Warum kann man so schlecht gegen den Wind schreien? Worauf beruht die Wirkung des Sprachrohres?

●● 4.3.1 Reflexion

An einer soliden Wand wird eine schräg einfallende Welle reflektiert. Bei einem Lattenzaun sollte man eher den Begriff der Beugung anwenden. Wie sind die beiden Bilder vereinbar? Sie sollten es sein, da sich eine Wand von einem sehr dichten Lattenzaun praktisch nicht unterscheidet.

●● 4.3.2 Am Strand

Auf einem flachen Strand laufen die Wellen fast immer senkrecht aus (Kämme parallel zur Strandlinie), selbst wenn sie im Tiefwasser eine ganz andere Richtung hatten. Wie kommt das?

●● 4.3.3 Flüsterjets

Zwei gleich große Schiffe fahren beiderseits in ungefähr gleichen Abständen an einem kleinen Boot vorbei. Unter welchen Umständen schaukelt das Boot auf beiden Wellen weniger bzw. stärker, als wenn nur ein Schiff vorbeiführe? Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für beide Ereignisse? Wie kommt es, dass zwei Autos lauter sind als eins?

●● 4.3.4 Doppler-Effekt

Die Astrophysik verdankt dem **Doppler-Effekt** einige ihrer wichtigsten Aussagen. Wie bestimmt man die

Geschwindigkeit von Sternen oder Galaxien relativ zur Sonne oder die Rotationsgeschwindigkeit von Sternen? Was versteht man unter der Doppler-Verbreiterung von Spektrallinien, und wovon hängt das ab? Kann man mittels des Doppler-Effekts feststellen, ob ein Fixstern dunkle Begleiter (Planeten) hat?

●● 4.3.5 Überschallknall

Warum hören wir einen *Doppelknall*, wenn ein Überschallflugzeug über uns weggeflogen ist? Wovon hängt der Zeitabstand zwischen den beiden Knallen ab? Das Flugzeug steht 42° über dem Horizont, als es knallt; der Zeitabstand der beiden Knalle ist $\frac{1}{8}$ s. Was kann man folgern?

●● 4.3.6 Tscherenkow-Strahlung

Welche **Phasengeschwindigkeit** v hat das Licht in Glas ($n = 1,5$) oder Wasser ($n = 1,33$)? Welche Energie W (in J bzw. in eV) muss ein Elektron, ein Proton, ein α -Teilchen haben, um schneller als v zu fliegen? Wie und wo erreicht man solche Energien? Was ist die Folge? Ändert die relativistische Betrachtung (vgl. Abschn. 12.8.2) die Werte für W erheblich?

● 4.4.1 Panflöte

Sie bauen eine Panflöte aus Schilfrohr. Wie müssen die Längen abgestuft sein, damit Sie alle 12 Halbtöne einer Oktave spielen können? Wie können Sie die absolute Höhe im Voraus festlegen?

●● 4.4.2 Goldener Schnitt

Zeigen Sie, dass folgende Probleme alle auf die gleiche Zahl hinauslaufen: (1) Die Proportionen einer Rechteckmembran sollen so bestimmt werden, dass möglichst wenig Chancen für entartete Schwingungen vorliegen. (2) Eine Strecke soll so geteilt werden, dass sich der große Abschnitt zum kleinen so verhält wie die ganze Strecke zum großen Abschnitt. (3) Konstruktion eines regelmäßigen Zehnecks oder Fünfecks. (4) Die **Fibonacci-Folge** $1/1, 1/2, 2/3, 3/5, \dots$ und ihr Grenzwert. (5) Die Folge

der Kettenbrüche

$$1, \frac{1}{1+1}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \dots$$

(6) Die Angabe zweier Zahlen a, b , für die **Euklids Algorithmus** zur Bestimmung ihres größten gemeinsamen Teilers (ggT) möglichst viele Divisionsschritte erfordert. (7) Folgende Konstruktion: Senkrecht über dem Ende B der Strecke AB setze man den Zirkel in der Höhe $AB/2$ ein, schlage einen Kreis K , der durch B geht, und einen Kreis um A , der K berührt. Der letzte Kreis teilt AB nach dem Goldenen Schnitt. (8) Viele Blätter sollen so um einen Stängel angeordnet werden, dass jedes durch alle Blätter darüber möglichst wenig beschattet wird.

●● 4.4.3 Membranschwingung

Wie sieht die **Knotenlinie** der Eigenschwingung $Au_{12} + Bu_{21}$ einer quadratischen Membran aus? Diskutieren Sie verschiedene Kombinationen von A und B . Geht die Knotenlinie immer durch den Mittelpunkt und wie? Trifft sie immer auf den Rand und wie?

●● 4.4.4 Knotenlinien

Zeigen Sie: Eine Kreuzung zweier Knotenlinien einer schwingenden Membran erfolgt immer rechtwinklig. Mehrere Knotenlinien schneiden sich so, dass lauter gleiche Winkel entstehen. Wie passt das Ergebnis von Aufgabe 4.4.3 in dieses Bild?

●● 4.5.1 Schalltote Zone

Starke Detonationen sind oft ab ca. 50 km Entfernung nicht mehr hörbar, können aber von etwa 100 km an wieder deutlich wahrgenommen werden. Wie ist das möglich? Spielt die Stratosphäre eine Rolle dabei?

●● 4.5.2 Schallstrahlungsdruck

Ein seitlich begrenztes Wellenbündel fällt auf einen Schirm. Im Bündel haben die Teilchen maximal die

Geschwindigkeit v_0 (Schallschnelle). Welchen Einfluss hat das auf den statischen Druck im Bündel? Was geschieht, um den Druckausgleich mit der Luft außerhalb des Bündels herzustellen? Am Schirm ist die Teilchengeschwindigkeit Null. Was ist die Folge?

●●● 4.5.3 Fledermaus-Sonar

Fledermäuse stoßen Ultraschallschreie aus (um 100 kHz) und benutzen die Echos zur Orientierung und zum Orten von Jagdbeute. Die Schallleistung eines solchen Schreies liegt zwischen 10^{-6} und 10^{-5} W. Falls das Fledermausohr ebenso empfindlich ist wie das Menschenohr, aus welcher Entfernung kann die Fledermaus – alle störenden Einflüsse ausgeschaltet (welche sind das?) – bestimmte Objekte (Bäume, Wände, Fliegen usw.) wahrnehmen? Warum verwendet die Fledermaus *Ultraschall*? Manche Fledermäuse fischen; ist es möglich, dass sie auch dazu ihr „Sonar“ verwenden? (Beachten Sie, dass der Fisch selbst praktisch nicht reflektiert, sondern nur die Schwimmblase; warum?) Hinweis: Der Fledermausschrei mag eine gewisse Bündelung haben, ist aber sicher kein vollkommener „Richtstrahl“. Welche Hilfsmittel sollte man Blinden als Orientierungshilfe geben?

●●● 4.5.4 Schallabsorption

Diskutieren Sie die Schallabsorption nach der Theorie der erzwungenen Schwingungen. Stimmt es allgemein, dass die Absorption mit der Phasenverschiebung zwischen Druck und Kompression zusammenhängt? Wie kommt es dazu im Einzelnen infolge Wärmeleitung, innerer Reibung, Diffusion, anderer Relaxationserscheinungen?

●● 4.5.5 Klangfarbe

Welche Töne spielen die Instrumente in Abb. 4.68? Wie würden alle drei zusammen klingen? Was können Sie über die **Klangfarben** ablesen? Welche Obertöne erkennen Sie? Analysieren Sie so weit wie möglich den Einzelton und den Akkord, falls sich einer ergibt.

●● 4.5.6 Reine Stimmung

Wenn man die weißen Tasten eines Klaviers so stimmt, dass C-Dur absolut rein ist, dann klingt schon G-Dur falsch. An welchem Ton liegt das? Warum hat man in der reinen Stimmung einen großen und einen kleinen Ganzton einführen müssen? Wie löst die **temperierte Stimmung** das Problem?

●●● 4.5.7 Warum hören wir nicht feiner?

Ist die Behauptung richtig, dass das menschliche Ohr fast die thermische Bewegung der Moleküle (mit anderen Worten: die thermischen Druckschwankungen beiderseits des Trommelfells) hören kann? Man beachte, dass das Empfindlichkeitsmaximum bei etwa 1 kHz liegt! Wie könnte man die **Hörschwelle** senken, ohne ins **thermische Rauschen** zu geraten? (Vergrößerung des Trommelfells, des Auffangtrichters, andere Maßnahmen?)

●●● 4.5.8 Basilarmembran

Diese Membran in der Schnecke des inneren Ohrs ist als Zungen- oder Saiten-Frequenzmesser aufgefasst worden (Reihe von Resonatoren mit verschiedenen Eigenfrequenzen). Der Anregungszustand der einzelnen Teile des Organs durch eine Schallwelle soll zur Frequenzanalyse dienen. Diskutieren Sie die Möglichkeiten eines solchen „Spektralapparates“ nach der Theorie der erzwungenen Schwingungen. Wieso sind die Forderungen nach guter Frequenzauflösung und kurzer Nachhallzeit einander konträr?

●● 4.5.9 Nachhall

Eine der wichtigsten raumakustischen Kenngrößen eines Saales ist seine Nachhallzeit τ . Warum darf sie nicht groß sein? Geben Sie eine vernünftige obere Grenze. τ wird bestimmt durch die allmähliche Absorption der im Saal enthaltenen Schallenergie an den Wänden bzw. ihr Verschwinden durch Öffnungen. Spezialdämmstoffe schlucken etwa 80% der auftreffenden Schallintensität, die besetzten Stuhlreihen etwa 40%, glattes Holz

6–10%, Putz und Glas 3–5%. Statuen Sie Säle verschiedener Größe zweckentsprechend aus.

●● 4.5.10 Wer heizt die Corona?

Schätzen Sie die Schallgeschwindigkeit im Innern eines Sterns (Druck: vgl. Aufgabe 5.2.6). Ist es denkbar, dass eine heftige Schallwelle (Stoßwelle) ein Gasvolumen so beschleunigt, dass es ganz vom Stern entweicht?

●●● 4.5.11 Sterne als Stimmgabeln

Die periodisch veränderlichen Sterne vom Typ δ **Cephei**, die „Meilensteine des Weltalls“, geben durch den eindeutigen Zusammenhang zwischen ihrer Leuchtkraft und der Periode ihrer Helligkeitsschwankung das wichtigste Mittel zur Absolutmessung großer Entfernungen im Weltall: Aus der Periode folgt die absolute Leuchtkraft, also aus der scheinbaren Helligkeit der Abstand. Zwei solche Sterne mit Perioden von 2,5 bzw. 100 Tagen zeigen maximale Dopplerverschiebungen von $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-3}$ bzw. $5 \cdot 10^{-4}$. Wenn der Sternradius schwingt wie $R = R_{\min} + \frac{1}{2}R_{\max}(1 + \sin(\omega t))$ mit $R_{\max} \gg R_{\min}$, wie groß sind die R_{\max} -Werte der beiden Sterne? Wenn sie Sonnenmasse haben (in Wirklichkeit haben sie mehr), welches sind ihre mittleren Dichten? Versuchen Sie die Pulsationen als Schall-Eigenschwingungen zu deuten: Welche Schallgeschwindigkeit erwartet man (vgl. Aufgabe 4.5.10), welche Periode, wie hängt diese speziell von der Dichte ab? Vergleichen Sie mit den gemessenen Perioden.

●● 4.5.12 Ultraschall-Bohrer

Wie bohrt und stanzt man mit **Ultraschall**? Welche Schalleistungen braucht man? Darf man einen Luftzwischenraum zwischen Quelle und Werkstück haben, oder muss man einen Transducer direkt aufsetzen? Welche Formgebung und welches Material schlagen Sie für den Transducer vor?

●● 4.6.1 Dispersion

Welche Schwereenergie und welche Kapillarenergie stecken in einem Wel-

lenberg + Wellental? Wenn Sie das Ergebnis, bezogen auf ein Wasserteilchen der Masse m , in der Betrachtung von Abschn. 4.6 als Differenz der kinetischen Energien verwenden, welche einheitliche Dispersionsformel ergibt sich dann?

●● 4.6.2 Brecher auf hoher See

Wieso kann die Amplitude einer Wasserwelle einen gewissen Bruchteil ihrer Länge nicht überschreiten, ohne dass sie bricht? Welcher maximale Bruchteil ergibt sich rein geometrisch? In Wirklichkeit ist er kleiner, nämlich etwa $\frac{1}{8}$.

●●● 4.6.3 Totwasser

Mittels der Energiebetrachtung in Aufgabe 4.6.1 behandle man Wellen an der Grenzfläche zwischen einer leichteren und einer schwereren Flüssigkeit (Dichten ρ_1 und ρ_2 ; Süßwasser über Salzwasser, Warmluft über Kaltluft). Man bestimme $c(\lambda)$. Was hat das mit den **Schäffchenwolken** zu tun? Wieso betrachtet man sie als Gutwetterboten? (Man beachte, dass die Aufgleitfläche an einer Kaltfront viel steiler ist als an einer Warmfront; zu welchen typischen Fronterscheinungen führt das?) In Flussbuchten haben kleine Schiffe oft mit dem **Totwasser** zu kämpfen: Sie kommen plötzlich kaum noch voran (Geschwindigkeit sinkt von 10–20 auf 2–3 Knoten). Erklärung: Das Schiff verbraucht den größten Teil seiner Maschinenleistung, um Wellen in der Süßwasser-Salzwasser-Grenzschicht aufzuführen. Bei „Einfrieren“ ungünstiger Phasenbeziehung kommt es nur noch mit dem c der Welle voran.

● 4.6.4 Seiches

Im Finnischen Meerbusen (und schwächer auch zwischen den dänischen Inseln) treten oft periodische Hochwasser bis zu einigen Metern auf, und zwar mit einer Periode von 27 h. Wie erklären Sie das? Wie tief ist danach die Ostsee im Mittel? Welche Periode erwarten Sie für Entsprechendes im Bodensee oder anderen Seen?

● 4.6.5 Brandung

Wenn die Formel (4.107) sich auf die Bewegung von Wellenberg und Wellental einzeln anwenden lässt, wie kann man dann die Küstenbrandung erklären?

●● 4.6.6 Wellengruppe

Welches ist die Gruppengeschwindigkeit für eine Störung, die sich aus Wellen aus einem engen Wellenlängenintervall um den Zentralwert λ_1 aufbaut (für Schwerewellen und für Kapillarwellen)? Was wird aus einer solchen Störung mit der Zeit? Was geschieht, wenn Wellen allzu verschiedener Wellenlängen am Aufbau der Störung beteiligt sind?

● 4.6.7 Kapillarwellen

Wenn ein Boot langsam über eine ruhige Wasseroberfläche gleitet, sieht man oft vor der eigentlichen „Bugwelle“ eine stehende (d. h. mit dem Boot mitbewegte) Welle von rasch nach außen abnehmender Amplitude. Wie kommt das? Wie hängt die Wellenlänge dieser Erscheinung von der Bootsgeschwindigkeit ab?

● 4.6.8 Gruppengeschwindigkeit

Wie groß ist sie für Schwerewellen bzw. Kapillarwellen im Tiefwasser

bzw. Flachwasser? Kommt es vor, dass sich eine Wellengruppe schneller ausbreitet als ihre Einzelwellen? Wenn ja, wie ist das möglich?

●● 4.6.9 Sturmsee

Wieso unterstützt die Dispersion das Anschwellen des Seeganges? Hinweis: Wenn Welle *A* Welle *B* einholt, verstärkt sich momentan die Amplitude so, dass es zum Brechen einer der Wellen kommt, wobei ihre Energie z. T. an die andere übergeht.

●● 4.6.10 Bugwelle

Wie kommt es, dass die Bugwelle auch lange nach dem Vorübersausen eines Motorbootes noch so erstaunlich kurz und hoch ist? Sollte ihre Länge nicht nach (4.108) sehr schnell mit dem Abstand zunehmen?

●● 4.6.11 Luftkissenboot

Ein Luftkissenboot gerät in sehr flaches Wasser. Wie verändert sich dabei die Gestalt seiner Bugwelle?

● 4.6.12 Tsunami

Gibt es eine Maximalgeschwindigkeit für Meereswellen und wie groß ist sie? Wie lange dürften die Wellen von der Krakatau-Explosion um die ganze Erde gebraucht haben?

●●● 4.6.13 Seegang

Bei ganz leichtem Wind bleibt der See spiegelglatt. Wenn der Wind sich örtlich oder zeitlich etwas steigert, laufen kleine Kräuselwellen über den See. Wie lang und wie schnell sind sie? Warum bilden sie sich zuerst, während längere Wellen einen stärkeren Wind brauchen? Es besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen der Phasengeschwindigkeit der Wellen und der kritischen Windgeschwindigkeit, die sie gerade erregen kann. Argumentieren Sie angenähert so: Wenn sich die Oberfläche zufällig etwas wellt, sucht der Winddruck die Störung zu steigern, der unterschiedliche Wasserdruck in einer gegebenen Tiefe sucht sie abzubauen. Der Wind muss eine Weile konstant wehen, bis der Seegang „ausgereift“ ist, d. h. die Wellenhöhe nicht mehr wächst. Dann muss die Leistung des Winddrucks gleich der in der Welle verzehrten Leistung sein. Können Sie diese Zeit schätzen? Wie hoch sind ausgereifte Wellen?

Wärme

■ Inhalt

5.1	Wärmeenergie und Temperatur	207
5.2	Kinetische Gastheorie	214
5.3	Wärmekraftmaschinen	227
5.4	Wärmeleitung und Diffusion	232
5.5	Entropie	242
5.6	Aggregatzustände	261
5.7	Lösungen	274
5.8	Vakuum	278

▼ Einleitung

Aus unserer Alltagserfahrung besitzen wir eine Vorstellung von dem was „Wärme“ ist. In der Wärmelehre der Physik werden die Konzepte und Größen vorgestellt, mit denen dieser ungenaue Begriff quantitativ erfasst werden kann. Interessanterweise können wir dabei zwei Wege gehen: Einerseits können wir die Eigenschaften der Materie als einer mehr oder weniger homogenen Substanz mit wenigen Größen wie Druck und Temperatur beschreiben. Andererseits können wir sie auffassen als die Summe der Eigenschaften einer fast unvorstellbar großen Zahl – 10^{19} in einem Kubikzentimeter Luft – einzelner Teilchen, deren individuelle Eigenschaften wir sehr gut kennen.

Ein Modell für alle Überlegungen zur Wärmelehre ist das ideale Gas, dort dürfen wir uns Wärme einfach nur als ungeordnete Molekülbewegung vorstellen.

5.1 Wärmeenergie und Temperatur

Wärmeenergie von Materie besteht aus der Bewegungsenergie ihrer Atome und Moleküle. Temperatur ist ein lineares Maß für den Mittelwert dieser Energie.

Benjamin Thompson (1753–1814), später Graf *Rumford*, beobachtete das Bohren von Kanonenrohren bei Krauss-Maffei in München und fand die damals herrschende Vorstellung eines Wärmestoffs unzureichend: „Ich finde es schwer, wenn nicht unmöglich, mir vorzustellen, wie hierbei anderes erzeugt und verbreitet werden könnte als Bewegung.“ *James Prescott Joule* fand dann: „... zur Erwärmung eines Pfundes Wasser um 1°F braucht man eine mechanische Kraft, repräsentiert durch den Fall von 772 Pfund durch 1 Fuß.“

5.1.1 Was ist Wärme?

Wenn ein Ball fliegt oder eine Schallwelle schwingt, bewegen sich ihre Moleküle natürlich auch, aber in geordneter Weise, d. h. in größeren



„Wärme, weil ja feststeht, dass sich Wärme durch wachsende Bewegung der Teilchen steigert . . . , dass der Druck dem Quadrat dieser Geschwindigkeit proportional ist, denn dabei wächst einmal die Zahl der Stöße und dann auch deren Intensität“

Daniel Bernoulli, *Hydrodynamica* (1738)

Was hier wie bei Bernoulli „Wärme“ genannt wird, heißt in vielen Büchern „innere Energie“. Dort wird unter „Wärme“ nur der Anteil einer Energieänderung verstanden, der zur Änderung der Temperatur, des Aggregatzustandes usw. führt, der also nicht mit mechanischer Arbeit verbunden ist.

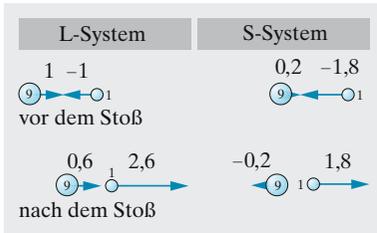


Abb. 5.1. Gleichverteilungssatz: Zwei Teilchen verschiedener Massen ändern beim Stoß ihre Geschwindigkeiten in Richtung einer Angleichung der kinetischen Energien. Nach sehr vielen Stößen in allen Richtungen nehmen alle Teilchensorten im Mittel die gleiche kinetische Energie an

(makroskopischen) Bereichen auf zueinander parallelen Bahnen. Bei der thermischen Bewegung dagegen wimmeln die einzelnen Moleküle, zumindest in einem Gas, völlig zufällig und unabhängig durcheinander, ohne dass eine makroskopische Gesamtbewegung zustande käme. Im Kristall ist diese Unabhängigkeit nicht mehr gegeben; eine Bewegung des Gesamtkristalls kommt zwar auch nicht zustande, aber nach *Fourier* und *Debye* lässt sich auch die unregelmäßige thermische Bewegung in ein breites Spektrum hochfrequenter Schallwellen (**Phononenspektrum**) auflösen (Abschn. 17.2).

Der molekulare Aspekt der thermischen Bewegung wird besonders in Abschn. 5.2 behandelt. Er führt zur kinetischen Theorie der Materie und ihrer Eigenschaften. In Abschn. 5.5 diskutieren wir den Unordnungsaspekt der thermischen Bewegung. Er führt zum 2. Hauptsatz, zur Entropie, zur Theorie der Wärmekraftmaschinen und allgemein zur statistischen Physik.

Am einfachsten können wir in einem Gas verstehen, was „Wärme“ ist: kinetische Energie der ungeordneten Molekülbewegung. Allerdings haben wir dabei die Kräfte zwischen den Molekülen nicht berücksichtigt. Sie führen z. B. zur Kondensation und tragen dabei als Verdampfungswärme zur Verdampfungsenergie bei. Deshalb sprechen wir zunächst nur vom idealen, d. h. kräftefreien Gas.

Wegen der ungeordneten Bewegung ist nicht zu erwarten, dass alle Gasmoleküle im gegebenen Augenblick die gleiche Energie haben. Aber die *mittlere Energie* ist tatsächlich für alle gleich, und zwar unabhängig von ihrer Masse. Wenn also $\bar{E} = \frac{1}{2}mv^2$ für alle Teilchen gleich ist, müssen die schweren langsamer fliegen. Man sieht das qualitativ ein, wenn man sich vorstellt, eine schwere Kugel bewege sich durch einen Schwarm leichter, zunächst mit der gleichen Geschwindigkeit wie diese. Die von hinten kommenden Kügelchen werden mit der großen kaum Energie austauschen, schon weil sie sie kaum einholen. Jeder Stoß von vorn aber muss der großen Kugel nach den Stoßgesetzen Energie entziehen (Abschn. 1.5.9g). Gleichgewicht tritt erst ein, wenn beide Kugelsorten ihre kinetischen Energien ausgeglichen haben (Aufgabe 5.1.2).

Folgende Herleitung des **Gleichverteilungssatzes** ist viel allgemeiner (berücksichtigt auch schräge Stöße) und liefert gleich die Verteilung der Teilchen über die Energie: Im Intervall $(E, E + dE)$ sei ein Bruchteil $f(E) dE$ der Teilchen. Stöße von Teilchen aus einem Intervall um E_1 mit solchen um E_2 haben die Häufigkeit $f(E_1) \cdot f(E_2)$ und ändern die Energien auf E'_1 und E'_2 , wobei der Energiesatz fordert $E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2$. Gleichgewicht besteht, wenn es ebenso viele Stöße gibt, die genau den entgegengesetzten Effekt haben, d. h. wenn $f(E_1) f(E_2) = f(E'_1) f(E'_2)$ ist, für alle Werte E , die den Energiesatz befriedigen. Das *Produkt* $f(E_1) \cdot f(E_2)$ darf also nur von der *Summe* $E_1 + E_2$ abhängen, nicht von E_1 und E_2 einzeln. Das trifft nur zu für $f = ae^{-bE}$ (das – verhindert, dass $f(\infty) = \infty$). $1/b$ ist der Mittelwert der Energie, wie man leicht nachprüft. Ob es sich um lauter gleiche oder verschiedenartige Teilchen handelt, ist egal: Dieser Mittelwert ist für alle Teilchenarten derselbe.

5.1.2 Temperatur

Die **Temperatur** eines idealen Gases ist nur ein anderes Maß für die **mittlere kinetische Energie** der Moleküle.

Wenn wir zunächst nur die Translationsenergie betrachten, wird ihr Mittelwert gegeben durch

$$\overline{E}_{\text{trans}} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT. \quad (5.1)$$

Dies ist die allgemeinste und vollständigste Definition der Temperatur. m ist die Masse, $\overline{v^2}$ die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Moleküle. Die Konstante k , die **Boltzmann-Konstante**, hat den Wert

$$k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}. \quad (5.2)$$

Die Temperatur ist in K (Kelvin) gemessen. Man hätte der Konstante in (5.1) den Wert 1 beilegen können, wenn man die Temperatur direkt in J messen würde. Das ergäbe aber eine unbequem große Einheit (fast 10^{23} von unseren Graden), und außerdem ist es günstig, die Sonderstellung der Wärmeerscheinungen durch die besondere Grundeinheit K zu betonen.

x Beispiel ...

Wie viel kinetische Energie steckt in 1 kg Luft? Schließen Sie auf die spezifische Wärme und auf die mittlere Molekülgeschwindigkeit.

Die spezifische Wärme bei konstantem Volumen für Luft ist 0,71 kJ/kg K. In einem kg Luft (etwas weniger als 1 m^3) bei 300 K stecken also $2,1 \cdot 10^5 \text{ J}$ Wärmeenergie, d. h. kinetische Energie der Moleküle. Davon sind allerdings nur $\frac{3}{5}$, also $1,3 \cdot 10^5 \text{ J}$ Translationsenergie, der Rest ist Rotationsenergie. Wie groß auch immer die Moleküle sind, sie müssen mit einer Geschwindigkeit fliegen, sodass $\frac{1}{2}v^2 \cdot 1 \text{ kg} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ J}$, also $v = 510 \text{ m/s}$.

Aus (5.1) folgt zunächst, dass es einen nichtunterschreitbaren **absoluten Nullpunkt** der Temperatur gibt, wo die Moleküle völlig ruhen, also E und T Null sind. Von hier aus zählt man die absolute oder Kelvin-Temperatur.

Ihre Einheit, 1 K, ist ebenso groß wie 1°C , das als $\frac{1}{100}$ des Abstandes zwischen dem Gefrier- und dem Siedepunkt des Wassers unter 1,013 bar Druck definiert ist. Bei diesem Druck liegt der Gefrierpunkt des Wassers bei 273,2 K, sein Siedepunkt bei 373,2 K.

Eine unmittelbare Anwendung von (5.1) auf alle Ausströmvorgänge ins Vakuum, z. B. in der Turbinen- oder Raketentechnik ist, dass die mittlere **Molekülgeschwindigkeit** mit der Temperatur ansteigt wie

$$\sqrt{\overline{v^2}} = v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (5.3)$$

Wenn man die Zusammensetzung eines Gases kennt, speziell die relative Molekülmasse μ , dann kann man v_{th} sofort angeben. Es ist ja $m = \mu m_{\text{H}}$, wobei

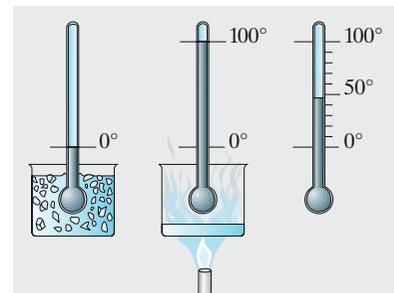


Abb. 5.2. Fixpunkte 0° und 100° der Celsius-Skala

$$m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (5.4)$$

Tabelle 5.1. Mittlere Geschwindigkeit der Moleküle v_{th} und des Schalles (c) in Gasen (in m/s) bei 0 °C

Gas		v_{th}	c	$\frac{v_{th}}{c}$
Wasserstoff	H ₂	1839	1261	1,46
Stickstoff	N ₂	493	331	1,49
Chlor	Cl ₂	310	206	1,50

Tabelle 5.2. Lineare Ausdehnungskoeffizienten α für verschiedene Materialien

Stoff	$\alpha / (10^{-6} \text{ K}^{-1})$	
	+100 °C	300 °C
Quarzglas	0,510	0,627
Jenaer Glas 16	8,08	8,67
Pyrexglas	3,0	—
Eisen	12,0	—
Aluminium	23,8	25,6
Mangan	22,8	32,23
Kupfer	16,7	—
Wolfram	4,3	—
Blei	29,4	—
Phosphor (weiß)	124,0	—
Eis	—	—
NaCl	40,0	—
Rohrzucker	83,0	—

Tabelle 5.3. Raumausdehnungskoeffizienten γ einiger Flüssigkeiten bei 18 °C

Flüssigkeit	γ / K^{-1}
Aceton	0,001 43
Ethylalkohol	0,001 43
Ethylether	0,001 62
Benzol	0,001 06
Quecksilber	0,000 181

die Masse des H-Atoms ist. So erhält man für Luft (80% N₂, 20% O₂, mittleres $\mu \approx 29$) bei 20 °C eine Molekülgeschwindigkeit von 500 m/s, bei 3 000 K von 1 600 m/s. H₂-Moleküle bewegen sich 3,8mal schneller als Luftmoleküle. Da die Endgeschwindigkeit der Rakete von der Geschwindigkeit des Treibstrahls, also letzten Endes der Geschwindigkeit der Moleküle in der Brennkammer, direkt abhängt, von der Treibstoffmasse aber nur logarithmisch (Abschn. 1.5.9b), ergibt sich die ungeheure Bedeutung immer heißerer und immer leichterer Treibgase für Triebwerke. Der Steigerung der Brennkammertemperatur sind durch den Schmelzpunkt des Wandmaterials enge Grenzen gezogen. Die leichtesten Produkte einer normalen chemischen Reaktion sind HF und H₂O. Deswegen wird z. B. der „Space Shuttle“ mit Knallgas betrieben. Man gewinnt gegenüber der Verbrennung von Benzin oder Alkohol einen Faktor 1,7 in der relativen Molekülmasse, also einen Faktor 1,3 im Schub. Noch wesentlich weiter wird man mit thermischen Raketen erst kommen, wenn man H₂ ausstößt (Faktor 3 im Schub). H₂ entsteht aber nicht als Reaktionsprodukt, denn H „in statu nascendi“ ist zu schwierig zu erzeugen, sondern muss in Kernreaktoren aufgeheizt werden. Daher das Interesse an Raketen mit **Nuklearantrieb**.

Es ist klar, dass die **Schallgeschwindigkeit** c etwas mit der Molekülgeschwindigkeit zu tun hat. Druckstörungen werden sich annähernd so schnell ausbreiten wie die Moleküle fliegen. Ein Blick auf die gemessenen Werte bestätigt dies (Tabelle 5.1).

Der Unterschied zwischen Molekül- und Schallgeschwindigkeit wird in Abschn. 4.2.3 und 5.2.5 genauer analysiert. Es folgt zunächst, dass mit v_{th} auch c unabhängig von der Gasdichte, aber proportional \sqrt{T} ist. Daraus ergeben sich zahlreiche interessante Phänomene wie die gute Schallausbreitung über einem See, die schlechte in der Wüste, die überhohen Schallreichweiten durch Reflexion an der „Thermosphäre“ oder Ozonschicht usw.

5.1.3 Thermometer

Zur Temperaturmessung sind im Prinzip alle Größen geeignet, die in reproduzierbarer Weise von der Temperatur abhängen. Am direktesten wäre eine Messung der Molekülenergie oder -geschwindigkeit. Beide Methoden haben Anwendungen in der Astrophysik. Bequemer benutzt man in Quecksilber- oder Alkohol-Thermometern die Ausdehnung von Flüssigkeiten, in **Bimetallstreifen** die von Festkörpern mit der Erwärmung. Die Länge l eines Festkörpers hängt mit der Temperatur T in recht guter Näherung linear zusammen:

$$l = l_0(1 + \alpha T) \quad (5.5)$$

α heißt **linearer Ausdehnungskoeffizient** (Tabelle 5.2). Eine Eisenbahnschiene von 30 m Länge zieht sich bei Abkühlung von +50 °C auf –30 °C um $\Delta l = 3$ cm zusammen. Verschweißt man die Schienen, statt wie früher entsprechende Schienenstoßlücken zu lassen, dann tritt nach Abschn. 3.4.1 und Tabelle 3.3 eine mechanische Spannung bis $E \Delta l / l \approx 2 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}$

auf (E : Elastizitätsmodul). Bei Erwärmung um einige hundert Grad dehnen sich die meisten Stoffe stärker aus, als man sie durch Zug allein deformieren könnte.

Die Abhängigkeit des Volumens von der Temperatur ergibt sich daraus, dass *jede* lineare Abmessung des Körpers sich gemäß (5.5) ändert. Ein Würfel von der Kantenlänge $l(T)$ hat das Volumen

$$V(T) = l(T)^3 = l_0^3(1 + \alpha T)^3 \approx l_0^3(1 + 3\alpha T) = V_0(1 + \gamma T).$$

In $(1 + \alpha T)^3$ können die Glieder $3\alpha^2 T^2$ und erst recht $\alpha^3 T^3$ gegen $3\alpha T$ vernachlässigt werden, weil $\alpha T \ll 1$ ist. Der **Raumausdehnungskoeffizient** γ ist also

$$\gamma = 3\alpha.$$

Flüssigkeiten dehnen sich i. Allg. stärker aus als Festkörper. Trotzdem muss man beim Hg-Thermometer berücksichtigen, dass sich auch die Glaskapillare mit ausdehnt (Tabelle 5.2–5.4).

Wie die Ausdehnung von Festkörpern und Flüssigkeiten mit der Erwärmung zustande kommt, werden wir erst in Abschn. 17.1.4 verstehen. Bei Gasen ist das viel einfacher und folgt direkt aus dem Molekülbild (Abschn. 5.2). Neben Ausdehnungsthermometern sind Widerstandsthermometer (Abschn. 6.4.3a), Thermoelemente (Abschn. 6.6.1) und Strahlungsthermometer (Pyrometer, Bolometer, Abschn. 11.2.7, 11.3.2) wichtig.

Zur Eichung von Thermometern benutzt man eine Reihe von Fixpunkten, die durch Schmelzpunkte (Sm.), Erstarrungspunkte (E.), Sublimationspunkte (Sb.) oder Siedepunkte (Sd.) verschiedener Stoffe festgelegt sind (Tabelle 5.5 gibt einige Beispiele).

5.1.4 Freiheitsgrade

Moleküle können nicht nur Translationsenergie haben, sondern auch Rotationsenergie. Außerdem können ihre Bestandteile, Atome, Ionen und sogar Elektronen, gegeneinander schwingen. Jede solche unabhängige Bewegungsmöglichkeit nennt man einen **Freiheitsgrad**. Die Translation hat drei Freiheitsgrade, nämlich die Bewegungen längs der drei zueinander senkrechten Raumrichtungen. Auch die Rotation hat drei Freiheitsgrade, entsprechend den drei möglichen zueinander senkrechten Richtungen der Drehachse. Ein zweiatomiges Molekül wie O_2 kann sich um die beiden in Abb. 5.4 angegebenen Achsen drehen. Die dritte noch denkbare Achse, die parallel zur Verbindungslinie der Atome ist, trägt aus Gründen, die erst später (Abschn. 17.2.1) klar werden, nicht zur Energiebilanz bei. Ein zweiatomiges Molekül hat also 5 Freiheitsgrade, 3 der Translation, 2 der Rotation, ebenso ein „lineares“ dreiatomiges Molekül, dessen Atome auf einer Geraden liegen. Gewinkelte Moleküle wie H_2O haben 6 Freiheitsgrade, 3 translatorische und 3 rotatorische, ebenso mehratomige Moleküle. Dazu können noch Schwingungsfreiheitsgrade der Atome gegeneinander kommen.

Wenn ein Teilchen in ein Kristallgitter eingebaut ist, kann es meist nicht mehr rotieren, aber Schwingungen in allen drei Raumrichtungen sind möglich. Bei einer Schwingung sind nach (1.65) kinetische und potentielle Energie im Mittel gleich groß. Daher hat das Teilchen im Kristall i. Allg. 6 Freiheitsgrade, 3 der kinetischen, 3 der potentiellen Schwingungsenergie.

Tabelle 5.4. Dichte des Wassers im Verhältnis zur Dichte bei 4 °C

$T/^\circ\text{C}$	ρ/ρ_4
0	0,999 868
1	0,999 927
2	0,999 968
3	0,999 992
4	1,000 000
5	0,999 992
6	0,999 968
8	0,999 876
10	0,999 728
15	0,999 126
20	0,998 232
25	0,997 074
30	0,995 676
40	0,992 247
50	0,988 08
60	0,983 24
70	0,977 81
80	0,971 83
90	0,965 35
100	0,958 38

Tabelle 5.5. Fixpunkte der Temperaturskala in °C bezogen auf 1 013 hPa (Sd.: Siedepunkt, Sm.: Schmelzpunkt, Sb.: Sublimationspunkt, E.: Erstarrungspunkt)

He	Sd.	−268,94
H ₂	Sd.	−252,78
O ₂	Sd.	−182,97
CO ₂	Sb.	− 78,52
Hg	E.	− 38,87
H ₂ O	Sm.	0,000
H ₂ O	Sd.	100,000
Cd	E.	321
S	Sd.	444,60
Ag	E.	960,5
Au	E.	1 063
Pt	E.	1 773
W	Sm.	3 380 ± 20

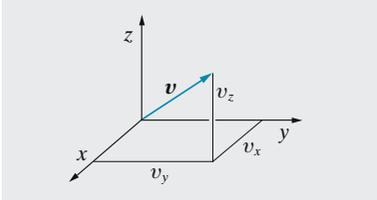


Abb. 5.3. Die drei Freiheitsgrade der Translation

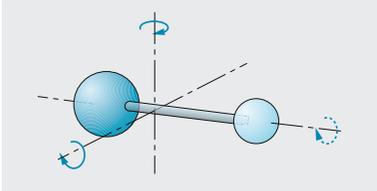


Abb. 5.4. Die drei Freiheitsgrade der Rotation (Drehachsen) eines zweiatomigen Moleküls. Die gestrichelte Drehrichtung nimmt üblicherweise keine Rotationsenergie auf. Sie „taut“ erst bei sehr hohen Temperaturen auf

Wir sahen in Abschn. 5.1.1, dass alle Teilchen unabhängig von ihrer Masse im thermischen Gleichgewicht die gleiche mittlere Translationsenergie annehmen. Diese Gleichverteilung der Energie gilt auch für die einzelnen Freiheitsgrade. Es gilt der **Gleichverteilungssatz** (das **Äquipartitionstheorem**):

Auf jeden Freiheitsgrad entfällt im thermischen Gleichgewicht die gleiche mittlere Energie, und zwar für jedes Molekül

$$E_{\text{FG}} = \frac{1}{2}kT . \quad (5.6)$$

Ein Molekül mit f Freiheitsgraden enthält also die mittlere Gesamtenergie

$$E_{\text{mol}} = \frac{f}{2}kT . \quad (5.6')$$

5.1.5 Wärmekapazität

Um einen Körper von der Temperatur T_1 auf T_2 zu erwärmen, muss man ihm Energie zuführen. Wie viel, folgt direkt aus der Definition (5.6'), wenn man weiß, wie viele Moleküle der Körper enthält. Ein homogener (aus lauter gleichen Molekülen bestehender) Körper der Masse M enthält M/m Moleküle der Masse m . Jedes davon braucht die Energie $\frac{1}{2}fk(T_2 - T_1)$, um von T_1 nach T_2 zu gelangen, der ganze Körper braucht also die Energie

$$\Delta E = \frac{M}{m} \frac{f}{2} k \Delta T . \quad (5.7)$$

Man nennt das Verhältnis

$$C = \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{M}{m} \frac{f}{2} k \quad (5.8)$$

die **Wärmekapazität** des Körpers. Bezogen auf 1 kg eines bestimmten Stoffes erhält man dessen **spezifische Wärmekapazität**

$$c = \frac{\Delta E}{M \Delta T} = \frac{fk}{2m} = \frac{fk}{2\mu m_{\text{H}}} . \quad (5.9)$$

Wir können damit für einfache Stoffe wie Gase oder feste Metalle die spezifischen Wärmekapazitäten berechnen. Für Metalle und überhaupt für Elementkristalle mit $f = 6$ Freiheitsgraden brauchen wir dazu nur ihre relative Atommasse μ . Für Eisen mit $\mu = 55,85$ erhalten wir $c = 3k/(\mu m_{\text{H}}) = 444 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (gemessener Wert $460 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$). Auf 1 mol eines solchen Kristalls bezogen, z. B. auf 55,85 g Eisen, sollte man immer die gleiche **molare Wärmekapazität** (früher **Atomwärme** genannt) erhalten. 1 mol enthält ja die **Avogadro-Zahl** an Teilchen, nämlich

$$N_{\text{A}} = \frac{1 \text{ g/mol}}{1,67 \cdot 10^{-24} \text{ g}} = 6 \cdot 10^{23} \text{ Teilchen/mol} , \quad (5.10)$$

also sollte die molare Wärmekapazität sein

$$C_{\text{mol}} = N_A \frac{f}{2} k = 3 N_A k = 24,9 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (5.11)$$

Diese **Regel von Dulong und Petit** ist, wie Tabelle 5.6 zeigt, für schwerere Elemente gut erfüllt. Leichtere bleiben hinter diesem Wert umso weiter zurück, je kälter sie sind (Abb. 5.5). Man spricht von einem **Einfrieren** der Schwingungs- und Rotationsfreiheitsgrade: Bei tiefen Temperaturen nehmen sie keine Energie mehr auf. In der Nähe des absoluten Nullpunktes strebt ihr energetischer Anteil ganz allgemein gegen Null. Selbst bei Zimmertemperatur sind Diamant und Beryllium noch nicht ganz „aufgetaut“, was die Schwingungsfreiheitsgrade betrifft. Das erklärt auch das Fehlen des sechsten Freiheitsgrades für O₂ (Rotation um die Molekülachse): Dieser taut erst bei sehr viel höherer Temperatur auf. Dieses Verhalten lässt sich mit der klassischen Mechanik nicht deuten, sondern findet seine Erklärung erst in der Quantenstatistik (Abschn. 17.2.1).

Bei Gasen muss man unterscheiden, ob die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen (c_V) oder bei konstantem Druck (c_p) gemessen wird. In c_p steckt noch die Arbeit, die das Gas bei seiner Wärmeausdehnung leisten muss (Abschn. 5.2.3). Bei Festkörpern und Flüssigkeiten macht dies nichts aus, weil die Ausdehnung äußerst gering ist. c_V ergibt sich wieder einfach aus (5.9), wenn die Molekülstruktur, also die Anzahl der Freiheitsgrade bekannt ist. Stickstoff mit $f = 5$ sollte $c_V = 738 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ haben. Man misst $c_V = 740 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (Tabelle 5.7).

Tabelle 5.7. Spezifische (c in $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$) und molare Wärmekapazitäten (C in $\text{J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$) einiger Gase bei 0 °C

1	2	3	4	5	6	7
	c_p	c_V	$\frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V}$	C_p	C_V	$C_p - C_V$
He	5 230	3 151	1,66	20,9	12,6	8,3
Ar	518	314	1,67	20,7	12,4	8,3
Luft	1 003	715	1,40	29,1	20,7	8,4
O ₂	915	656	1,40	29,3	21,0	8,3
N ₂	1 037	740	1,40	29,0	20,7	8,3
H ₂	14 210	10 078	1,41	28,5	20,2	8,3
CO ₂	819	627	1,30	32,9	25,1	7,8
N ₂ O	849	660	1,29	34,1	26,5	7,6

Tabelle 5.8. Molare Wärmekapazitäten von Gasen nach der kinetischen Theorie der Wärme

Zahl der Atome im Molekül	Zahl der Freiheitsgrade			Mol. Wärmekap. in $\text{J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$		$\frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V}$
	transl.	rot.	gesamt (f)	C_V	C_p	
1	3	0	3	12,6	20,8	1,667
2	3	2	5	20,8	29,1	1,40
3	3	3	6	24,9	33,3	1,33

Tabelle 5.6. Spezifische c und molare C Wärmekapazitäten einiger Elemente bei 20 °C (c in $\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, C in $\text{J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$)

Element	c	rel. Atom-masse	C
Li	3 386	6,94	23,4
Be	1 756	9,02	15,9
Diamant C	502	12,01	5,9
Mg	1 003	24,32	24,7
Si	710	28,06	20,1
K	752	39,10	28,8
Fe	460	55,85	25,5
Ag	234	107,88	25,1
W	134	183,92	24,7
Pb	130	207,21	26,8

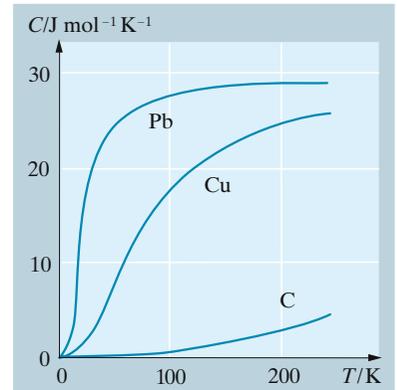


Abb. 5.5. Molare Wärmekapazität von Elementkristallen in Abhängigkeit von der Kelvin-Temperatur

Flüssiges Wasser, der praktisch wichtigste Stoff, verhält sich etwas komplizierter. Das gewinkelte H_2O -Molekül hat so viele Freiheitsgrade der Translation, Rotation und Schwingung, dass man die drei Atome fast als völlig unabhängige Einheiten auffassen kann, die jedes 6 Freiheitsgrade haben. Für μ kann man dann die *mittlere* relative Atommasse $(16 + 1 + 1)/3 = 6$ setzen und erhält rechnerisch $c = 4\,150\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$. Man misst

$$c = 4\,185\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}. \quad (5.12)$$

Die Energie 4,185 J, die man braucht, um 1 g Wasser um 1 K zu erwärmen, heißt auch 1 cal.

Da Wasser aus so leichten Atomen besteht (derselbe Grund, der es zum so guten Raketen-Treibgas macht), und wegen seiner vielen Freiheitsgrade hat es eine höhere spezifische Wärmekapazität als fast alle anderen Stoffe. Darauf beruht u. A. seine Bedeutung als klimatologischer Wärmespeicher und Temperaturdämpfer.

5.1.6 Kalorimeter

Die spezifische Wärmekapazität c kann mit dem **Mischungskalorimeter** bestimmt werden (Abb. 5.6). In einem Gefäß bekannter Wärmekapazität C_w befindet sich eine Wassermasse m_1 der Temperatur T_1 . Der Probekörper, dessen c gemessen werden soll, hat die Masse m_2 und wird auf T_2 erhitzt (z. B. im Wasserdampfbad, $T_2 = 100\text{ °C}$). Lässt man ihn in das **Kalorimeter** fallen, stellt sich nach einer Weile eine Mischungstemperatur T_m ein. Der Energiesatz fordert Gleichheit von abgegebener und aufgenommener Wärmemenge:

$$Q_2 = \underbrace{cm_2(T_2 - T_m)}_{\text{abgegeben}} = Q_1 = \underbrace{(c_0m_1 + C_w)(T_m - T_1)}_{\text{aufgenommen}}.$$

c_0 ist die spezifische Wärmekapazität des Wassers. Es folgt

$$c = \frac{c_0m_1 + C_w}{m_2} \frac{T_m - T_1}{T_2 - T_m}.$$

Die Wärmekapazität von Kalorimetergefäß + Rührer + Thermometer heißt auch **Wasserwert** des Kalorimeters. Wenn man in Kalorien rechnet, gibt der Wasserwert an, wie viele g Wasser dem Gefäß gleichwertig sind. Bei genauen Messungen muss das Mischgefäß gegen Wärmeaustausch nach außen geschützt werden (Dewar-Gefäß, Styropor-Umhüllung o. Ä.).

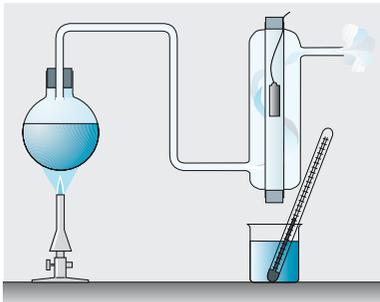


Abb. 5.6. Mischungskalorimeter. Das Metallstück im Dampfmantelgefäß hat $T_2 = 100\text{ °C}$, das Wasser im Becherglas die Temperatur T_1

5.2 Kinetische Gastheorie

Wärme ist ungeordnete *Molekülbewegung*. Das molekulare Modell gibt Auskunft über viele Eigenschaften der Materie.

5.2.1 Der Gasdruck

Die **kinetische Gastheorie** leitet die Eigenschaften der Gase aus mechanischen Bewegungsvorgängen der einzelnen Moleküle ab. Dazu schreibt sie

diesen folgende Eigenschaften zu: Ihre Masse sei m ; sie verhalten sich wie vollkommen elastische Kugeln, die keine Kräfte aufeinander ausüben, solange sie sich nicht berühren. Sie bewegen sich voneinander unabhängig, ohne irgendeine Richtung im Raum zu bevorzugen, mit der Geschwindigkeit v . Beim Zusammenstoß, der den Gesetzen des elastischen Stoßes gehorcht, tauschen sie Energie und Impuls aus. Dabei ändern sie im Allgemeinen ihre Geschwindigkeit; wenn wir trotzdem zunächst von *einer* Geschwindigkeit v sprechen, kann sie daher nur die Bedeutung eines Mittelwertes haben. Er hängt von der Masse der Moleküle und der Temperatur des Gases ab.

Die von dem Gas auf die Wand ausgeübte Kraft führen wir auf Stöße der Moleküle gegen die Wand zurück. Dabei wird Impuls auf die Wand übertragen. Nach dem Grundgesetz der Mechanik (Abschn. 1.3.4) ist die Kraft auf die Wand gleich dem in der Zeiteinheit durch die Stöße auf die Wand übertragenen Impuls.

$$\text{Druck} = \frac{\text{an die Wand abgegebener Impuls}}{\text{Wandfläche} \times \text{Zeit}}.$$

Als **Moleküldichte** n bezeichnen wir das Verhältnis der Anzahl N aller Moleküle zum Gasvolumen V , d. h. die Anzahl der Moleküle je Volumeneinheit: $n = N/V$.

Die ungeordnete Bewegung denken wir uns so geordnet, dass der dritte Teil der Moleküle eine Flugrichtung senkrecht zur Wand hat. Von ihnen bewegt sich die Hälfte, also $\frac{1}{6}$, in Richtung zur Wand hin. Alle Moleküle mit dieser Flugrichtung, die in einer Säule vom Querschnitt A (Grundfläche in Abb. 5.7) und der Länge $v dt$ enthalten sind, erreichen in der Zeit dt die Wand. Also ist die Stoßzahl pro Flächeneinheit und Zeiteinheit

$$z = \frac{1}{6} \frac{nv dt}{dt} = \frac{n}{6} v.$$

× Beispiel...

Man bestimme und begründe die Umrechnungsfaktoren zwischen den verschiedenen Druckeinheiten (bar, atm, at, Torr).

1 bar ist definiert als 10^5 N/m^2 . $1 \text{ at} = 1 \text{ kp/cm}^2 = 0,981 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.
 $1 \text{ atm} = 1013 \text{ mbar} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 760 \text{ Torr} = 1,032 \text{ at}$. $1 \text{ Torr} (\equiv 1 \text{ mm Hg-Säule}) = -3 \text{ m} \cdot 13,546 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 133 \text{ N/m}^2$.
 Quecksilber hat bei 20°C die Dichte $13\,546 \text{ kg/m}^3$. 1 m Wassersäule (bei 4°C) $\hat{=} 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 0,1 \text{ at}$.

Jedes einzelne Molekül überträgt beim Aufprall und nachfolgender Reflexion den Impuls $2mv$ (s. Abschn. 1.5.9g) auf die Wand. Also wird durch alle Stöße auf die Wand ein Impuls pro Zeit- und Flächeneinheit der Größe

$$z2mv = \frac{n}{6} v 2mv = \frac{1}{3} nmv^2$$

übertragen. Für den Druck (p) ergibt sich daher

$$p = \frac{1}{3} nmv^2.$$

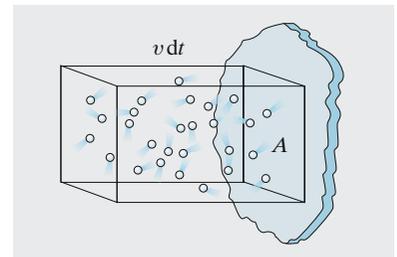


Abb. 5.7. Der Gasdruck entsteht durch das Trommeln (die Impulsübertragung) der Moleküle auf die Wand. Der dargestellte Kasten (Grundfläche A , Höhe $v dt$) enthält $nAv dt$ Moleküle, von denen $\frac{1}{6}$ in der Zeit dt an die Wand prallen und dort den Impuls $dI = 2mv \frac{1}{6} nAv dt$ abliefern. Der Druck ist $p = dI/(A dt) = \frac{1}{3} nmv^2$

Berücksichtigt man die Tatsache, dass die Geschwindigkeiten der Gasmoleküle nicht alle gleich sind, so muss man hier v^2 ersetzen durch $\overline{v^2}$, das Mittel der Quadrate aller vorkommenden Geschwindigkeiten

$$p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} \quad (5.13)$$

Grundgleichung der kinetischen Gastheorie von *Daniel Bernoulli*.

Mit (5.1) kann man auch sagen

$$p = nkT \quad (5.14)$$

5.2.2 Die Zustandsgleichung idealer Gase

Die **Zustandsgleichung** eines Systems gibt an, wie seine messbaren Eigenschaften voneinander abhängen. Der Zustand einer gegebenen Gasmasse M ist durch drei Größen vollständig beschrieben: Temperatur T , Druck p und Volumen V . Zwei davon können unabhängig voneinander variiert werden, die dritte ist dann eindeutig durch beide bestimmt. Diesen Zusammenhang gibt (5.14), indem man die Teilchenzahldichte n durch N/V ersetzt:

$$pV = NkT \quad (5.15)$$

Wenn es sich um eine Gasmenge von ν mol handelt, besteht sie aus $N = \nu N_A$ Molekülen, also gilt

$$pV = \nu N_A kT \quad (5.16)$$

Zur Abkürzung führt man die **Gaskonstante**

$$R = N_A k = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \quad (5.16)$$

ein und schreibt die makroskopische Form des Gasgesetzes

$$pV = \nu RT \quad (5.17)$$

Es gilt seiner Herkunft nach für ein **Idealgas**, in dem die Teilchen, abgesehen von kurzzeitigen Stößen, keine Kräfte aufeinander ausüben und selbst kein merkliches Eigenvolumen haben.

Folgerungen aus dem Gasgesetz (5.17) sind

- das *Gesetz von Boyle-Mariotte*: Bei konstanter Temperatur ist der Druck umgekehrt proportional zum Volumen

$$p \sim V^{-1} \quad (T = \text{const}) \quad (5.18)$$

- das *Gesetz von Gay-Lussac*: Bei konstantem Volumen steigt der Druck wie die absolute Temperatur

$$p \sim T \quad (V = \text{const}) \quad (5.19)$$

- das *Gesetz von Charles* (oft auch nach *Gay-Lussac* benannt): Bei konstantem Druck steigt das Volumen wie die absolute Temperatur

$$V \sim T \quad (p = \text{const}) \quad (5.20)$$

Der **kubische Ausdehnungskoeffizient** eines Idealgases ist also $1/273,2 \text{ K} = 0,003 66 \text{ K}^{-1}$. Tabelle 5.9 zeigt, wie nahe wirkliche Gase diesem Verhalten kommen. Die Abweichung ist umso größer, je höher die Verflüssigungstemperatur T_s des Gases liegt. Schon dies lässt auf sehr niedrige T_s für H_2 und besonders für He schließen. Ein **Gasthermometer** mit linearer Skala ist also am genauesten, wenn es mit H_2 oder He gefüllt ist.

Eine mit Wasserstoff oder Helium gefüllte Kugel steht mit einem Quecksilbermanometer in Verbindung, dessen einer Schenkel so gehoben oder gesenkt werden kann, dass bei jeder Temperatur das gleiche Volumen eingestellt wird. Der Druck, unter dem das Gas steht, ist gleich dem äußeren Luftdruck b , vermehrt um den Druck der Quecksilbersäule AB mit der Höhe h . $b + h_0$ sei der Druck des Gases bei 0°C , wenn die Kugel von schmelzendem Eis umgeben ist (diese Addition von „Druck“ und „Höhe“ ist in Zahlenwertgleichungen erlaubt, wenn man etwa den Druck in Torr oder mm Hg-Säule und die Höhe in mm misst). Dann ist der Druck bei $t^\circ\text{C}$ ($t > 0$), wenn durch Heben des beweglichen Manometerschenkels das Anfangsvolumen wieder eingestellt ist:

$$b + h_t = (b + h_0)(1 + \beta t) .$$

Daraus folgt für die Temperatur:

$$t = \frac{h_t - h_0}{\beta(b + h_0)} , \quad \text{wo } \beta = \frac{1}{273,2 \text{ K}} .$$

Die mit dem Gasthermometer mit Heliumfüllung gemessene Temperatur entspricht recht genau der thermodynamischen Skala.

5.2.3 Der 1. Hauptsatz der Wärmelehre

Nach der jahrhundertelangen Erfahrung aller Patentämter gibt es kein **Perpetuum mobile 1. Art**, d.h. keine Maschine, die Arbeit leistet, ohne in ihrer Umgebung Veränderungen herbeizuführen, nämlich ihr die entsprechende Energie zu entziehen. Dies ist nur ein anderer Ausdruck des Energiesatzes, den wir schon ständig benutzen und jetzt für die Wärmelehre so formulieren wollen:

Führt man einem System von außen die Wärmeenergie ΔQ zu, so kann sie teilweise zu einer Arbeitsleistung $-\Delta W$ verbraucht werden (wir rechnen sie als negativ, wenn das System Arbeit hergibt). Der Rest von ΔQ führt zur Steigerung der inneren Energie U des Systems um ΔU :

$$\Delta Q = \Delta U - \Delta W . \quad (5.21)$$

Die innere Energie U kann Bewegungsenergie der Moleküle sein ($\Delta U = c_V M \Delta T$), also zu einer Erwärmung führen; bei idealen Gasen ist dies die einzig mögliche Form innerer Energie. Sie kann aber auch zum

Tabelle 5.9. Kubischer Ausdehnungskoeffizient γ einiger Gase (zwischen 0°C und 100°C)

	γ
Luft	0,003 675
H_2	0,003 662
He	0,003 660
Ar	0,003 676
CO_2	0,003 726

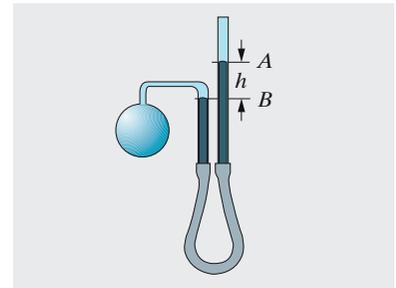


Abb. 5.8. Gasthermometer nach Jolly

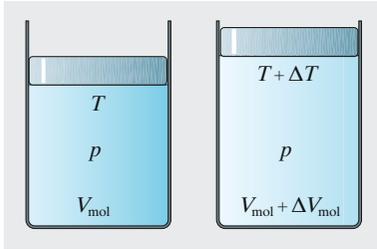


Abb. 5.9. Die Temperatur von 1 mol eines Idealgases wird um ΔT erhöht. Von außen wirkt auf den Kolben die Kraft $F = pA$, gegen die das Gas bei der Ausdehnung die Arbeit $F \Delta x = p \Delta V_{\text{mol}}$ verrichten muss

Umbau oder zum Aufbrechen des Festkörper- oder Flüssigkeitsverbandes dienen (Schmelz-, Verdampfungs-, Lösungsenergie). Sie kann auch in Arbeit gegen chemische oder elektromagnetische Kräfte bestehen.

Wenn wir mit einem Gas zu tun haben, besteht die äußere Arbeitsleistung nur in Druckarbeit $\Delta W = -p \Delta V$ (Arbeit wird geleistet, Energie geht dem Gas verloren, wenn ΔV positiv ist; daher das Minuszeichen).

Für ein Gas lautet der Energiesatz

$$dQ = dU + p dV, \quad (5.21')$$

spezieller für ein Idealgas mit $dU = c_V M dT$

$$dQ = c_V M dT + p dV. \quad (5.22)$$

5.2.4 c_V und c_p bei Gasen

Bei konstantem Druck braucht man mehr Energie zur Erwärmung eines Gases als bei konstantem Volumen, denn man muss nicht nur die Temperatur um ΔT steigern, also die Molekülenergie erhöhen, sondern auch für die Volumenzunahme aufkommen. Für diese gilt nach (5.20)

$$\Delta V = V \frac{\Delta T}{T}.$$

Gegen den Druck p ist also die Druckarbeit

$$p \Delta V = pV \frac{\Delta T}{T} = \nu RT \frac{\Delta T}{T} = \nu R \Delta T$$

zu erbringen. Damit kommt zur Erwärmungsarbeit $C_V \Delta T = \frac{1}{2} f \nu R \Delta T$ die Druckarbeit $\nu R \Delta T$ hinzu. Die Wärmekapazität unserer ν mol bei konstantem Druck ist also

$$C_p = C_V + R\nu = \left(\frac{f}{2} + 1\right) \nu R. \quad (5.23)$$

Aus solchen Überlegungen leitete zuerst *Robert Mayer* 1842 die Wesensgleichheit von Arbeit und Wärme sowie das **mechanische Wärmeäquivalent** $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$ ab. *J. P. Joule* maß dieses Äquivalent direkt nach dem Schema von Abb. 5.10. Das Schaufelrad, angetrieben vom Gewicht F , dreht sich mit großer Reibung in einer Flüssigkeit, der es die Fallarbeit Fh als Wärme mitteilt.

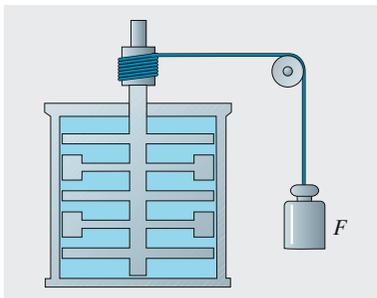


Abb. 5.10. Apparatur von Joule zur Messung des mechanischen Wärmeäquivalents (schematisch)

× Beispiel...

Vollziehen Sie *R. Mayers* Überlegung zum mechanischen Wärmeäquivalent nach. Wie kommt der Zahlenwert heraus?

Robert Mayer benutzte Literaturdaten über c_V und c_p und erkannte, dass der Unterschied in der Expansionsarbeit zu suchen ist. 1 l Luft bei 1 bar hat eine Wärmekapazität von $0,22 \text{ cal}/^\circ\text{C}$ bei konstantem Volumen und $0,31 \text{ cal}/^\circ\text{C}$ bei konstantem Druck. Die Ausdehnung um $1/2731$ bei Erwärmung von 0 auf 1°C gegen den Druck von 1 bar $= 10^5 \text{ N/m}^2$ erfordert eine Arbeit $p \Delta V = 0,37 \text{ J}$. Sie ist äquivalent zu den $0,09 \text{ cal}$, also $1 \text{ cal} \hat{=} 4,1 \text{ J}$.

Besonders interessant ist das Verhältnis $\gamma = c_p/c_v$, auch **Adiabat-Exponent** genannt. Nach (5.23) sollte sein

$$\boxed{\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}}. \quad (5.24)$$

Tabelle 5.7 überprüft diese Voraussage für einige Gase. Aus solchen Messungen von c_p und c_v , für die es eine ganze Reihe sehr eleganter Methoden gibt, kann man offenbar Angaben über die Molekülstruktur machen: Gase mit $\gamma = \frac{5}{3}$ haben $f = 3$, müssen also einatomig sein. $\gamma = \frac{7}{5}$ ergibt $f = 5$, also zweiatomige oder linear angeordnete Moleküle. Gewinkelte oder mehratomige Moleküle sollten $f = 6$ und $\gamma = \frac{8}{6}$ haben.

5.2.5 Adiabatische Zustandsänderungen

Viele Vorgänge in der Atmosphäre, in Maschinen, in Schallwellen gehen so schnell vor sich, dass zu einem Wärmeaustausch gar keine Zeit ist. Ob das der Fall ist, kann man mittels der thermischen Relaxationszeit (5.53) entscheiden. Einen Vorgang ohne Wärmeaustausch nennt man **adiabatisch**. Bei ihm verschwindet dQ in (5.22), es gilt also

$$c_v M dT = -p dV.$$

Da wir nach der Zustandsgleichung (5.17) haben $p = \nu RT/V$, ergibt sich mit $C_v = c_v M = \frac{f}{2} \nu R$

$$\frac{f}{2} dT = -T \frac{dV}{V} \quad \text{oder} \quad \frac{f}{2} \frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V}.$$

Integriert man dies beiderseits, so folgt

$$\boxed{V \sim T^{-f/2} = T^{1/(1-\gamma)}} \quad (5.25)$$

(bei der Rechnung beachte man, dass rechts und links die Ableitungen von $\ln T$ bzw. $\ln V$ stehen). Mittels der Zustandsgleichung kann man (5.25) auch in andere Kombinationen von Zustandsgrößen umschreiben:

$$\boxed{p \sim V^{-(f+2)/f} = V^{-\gamma}} \quad (5.26)$$

und schließlich

$$\boxed{p \sim T^{f/2+1} = T^{\gamma/(\gamma-1)}}. \quad (5.27)$$

Dies sind die **Poisson-Gleichungen** oder **Adiabatengleichungen**.

Luft hat eine so geringe Wärmeleitfähigkeit, dass größere auf- oder absteigende Luftmassen während ihrer Bewegung nur sehr wenig Wärme mit ihrer neuen Umgebung austauschen können. Die atmosphärische Schichtung ist daher eher adiabatisch als isotherm. In einer Höhe z. B., wo die Dichte nur noch halb, d. h. das Volumen einer bestimmten Gasmenge doppelt so groß ist wie am Erdboden, ist dann der Druck nicht halb so groß, wie isotherm nach $pV = \text{const}$, sondern nach $pV^\gamma = \text{const}$ nur $(\frac{1}{2})^\gamma = (\frac{1}{2})^{1.4} \approx \frac{1}{3}$ so groß wie am Boden. Die barometrische Höhenformel ändert sich dementsprechend. Vor allem nimmt T mit der Höhe ab, wie der Beobachtung entspricht.

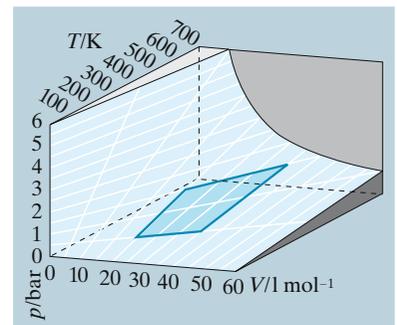


Abb. 5.11. Isobaren und Isochoren auf der Zustandsfläche $p(V, T)$ eines Idealgases. Der schematisierte Arbeitszyklus einer pV -Maschine (\approx Dampfmaschine) ist hervorgehoben

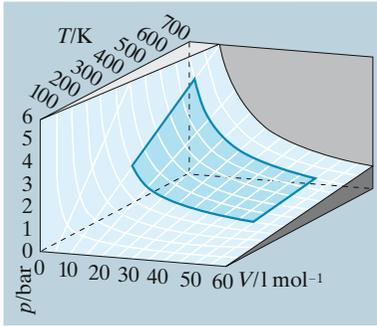


Abb. 5.12. **Isothermen** und **Isochoren** auf der Zustandsfläche $p(V, T)$ eines Idealgases. Der schematisierte Arbeitszyklus einer **Stirling-Maschine** ist hervorgehoben

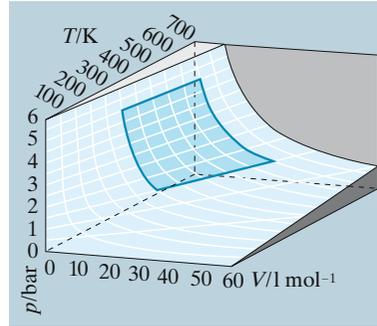


Abb. 5.13. **Isobaren** und Isothermen auf der Zustandsfläche $p(V, T)$ eines Idealgases. Ein „pipi-Zyklus“ ist hervorgehoben

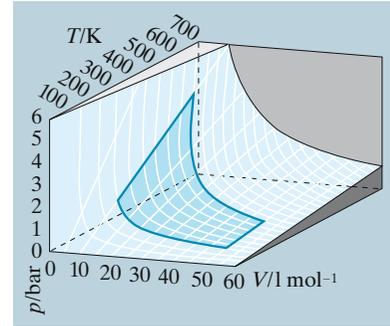


Abb. 5.14. Adiabaten und Isochoren auf der Zustandsfläche $p(V, T)$ eines Idealgases. Der schematisierte Arbeitszyklus eines **Otto-Motors** ist hervorgehoben

In Abb. 5.12, 5.13 und 5.16 sind u. A. auch Isothermen eingetragen. Es sind Hyperbeln, die umso höher liegen, je größer die Temperatur ist. Abbildung 5.16 zeigt Isothermen und Adiabaten. Die Adiabaten verlaufen steiler und schneiden daher bei kleinerem Volumen die höheren Isothermen. Bei adiabatischer Kompression tritt also Erwärmung ein. Sie rührt von der bei der Kompression geleisteten Arbeit her, die in Wärme verwandelt wird und dann nicht – wie bei isothermer Kompression – an ein Wärmebad abgeführt werden kann. Die Temperaturerhöhung ergibt sich aus (5.25) zu:

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{V'}{V}\right)^{1-\gamma}.$$

Komprimiert man eine Luftmenge ($\gamma = 1,4$) von Zimmertemperatur ($T = 293 \text{ K}$) adiabatisch auf $\frac{1}{10}$ ihres Volumens, so steigt ihre Temperatur auf das $10^{\gamma-1} \approx 2,5$ fache, d. h. auf $735 \text{ K} = 462 \text{ °C}$ (**pneumatisches Feuerzeug**). – Die Abkühlung eines Gases bei adiabatischer Expansion wird in der **Nebelkammer** (Abschn. 18.3.2b) ausgenutzt, die Erhitzung bei Kompression im Dieselmotor.

Abbildung 5.12 zeigt überdies, dass eine *isochore* (d. h. bei konstantem Volumen verlaufende) Drucksteigerung immer mit einer Temperatursteigerung verbunden, bzw. durch diese zu erreichen ist. Entsprechendes gilt für *isobar* (d. h. bei konstantem Druck) durchgeführte Volumenvergrößerung (Abb. 5.13). Natürlich muss Energie zugeführt werden, wenn p und T steigen sollen, und erst recht, wenn p trotz der Volumenzunahme konstant bleiben soll.

5.2.6 Druckarbeit

Wie viel Arbeit ein Gas leistet, hängt von der Art der Zustandsänderung ab. Man untersucht sie am besten im p, V -Diagramm. Dort ist die Arbeit direkt als Fläche unter der $p(V)$ -Kurve abzulesen, denn differentiell gilt immer $dW = p dV$.

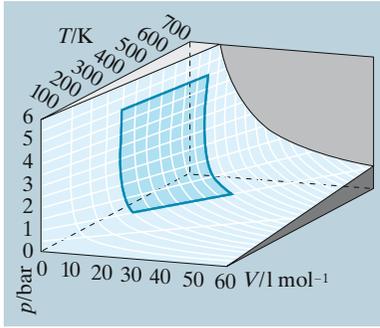


Abb. 5.15. Isobaren und Adiabaten auf der Zustandsfläche $p(V, T)$ eines Idealgases. Ein „papa-Zyklus“ ist hervorgehoben

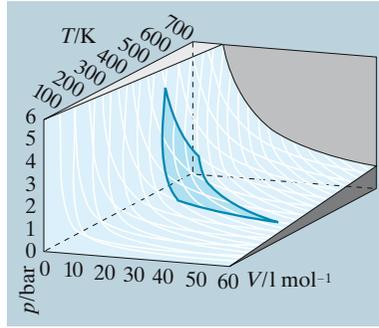


Abb. 5.16. Isothermen und Adiabaten auf der Zustandsfläche $p(V, T)$ eines Idealgases. Ein **Carnot-Zyklus** ist hervorgehoben

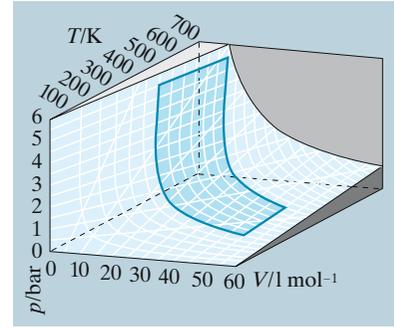


Abb. 5.17. Isobaren, Isochoren und Adiabaten auf der Zustandsfläche $p(V, T)$ eines Idealgases. Der schematisierte Arbeitszyklus eines **Diesel-Motors** ist hervorgehoben

Bei isobarer Expansion ($p = \text{const}$) ergibt sich einfach

$$\Delta W = p \Delta V$$

auch für endliche Volumenänderungen ΔV .

Bei adiabatischer Expansion ändert sich die Temperatur, und zwar nimmt sie ab, eben weil hier nur die innere Energie des Gases die Expansionsarbeit decken kann. Da beide Änderungen gleich sein müssen, ergibt sich bei Abkühlung von T_1 auf T_2 eine Arbeit

$$W = U_1 - U_2 = c_V M(T_1 - T_2)$$

Bei der isothermen Expansion ($T = \text{const}$) müssen wir das Arbeitsintegral $W = \int p dV$ ausrechnen. Für ν mol Gas liefert die Zustandsgleichung $p = \nu RT/V$, also

$$W = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Bei isochorer Zustandsänderung ($V = \text{const}$) wird natürlich gar keine Arbeit $p dV$ geleistet.

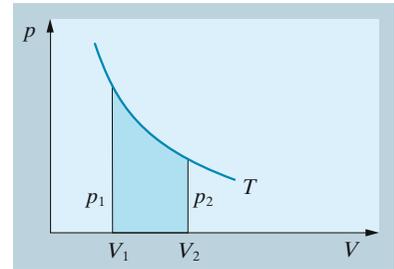


Abb. 5.18. Die Arbeit bei isothermer Ausdehnung eines Idealgases

5.2.7 Mittlere freie Weglänge und Wirkungsquerschnitt

Wir haben aus der Gaskinetik die Grundlagen für die Theorie der Wärmekraftmaschinen entwickelt, die wir in Abschn. 5.3 weiterverfolgen. Jetzt wollen wir wieder zum molekularen Bild der Materie zurückkehren und eine Größe verstehen, die so verschiedene Gebiete wie Vakuumtechnik, Gasentladungen, Wärmeleitung, Diffusion und Viskosität beherrscht, ferner für die ganze chemische Kinetik grundlegend ist.

Pumpt man ein Vakuumsystem bis auf etwa 10^{-3} mbar aus, dann ändern sich die Strömungsverhältnisse vollkommen, die klassische Strömungslehre gilt nicht mehr. Man versteht das daraus, dass bei so geringem Druck die Moleküle praktisch nicht mehr untereinander, sondern nur noch

mit den Gefäßwänden stoßen. Die **mittlere freie Weglänge**, die ein Molekül zwischen zwei Stößen mit anderen zurücklegt, ist größer geworden als die Gefäßabmessungen. Daher strömt das Gas nicht mehr als kontinuierliches Fluid, sondern in Gestalt der Einzelmoleküle. Die Gesetze einer solchen **Knudsen-Strömung** können Sie in Aufgabe 5.2.20 studieren.

Ein sehr schnelles Teilchen vom Radius r_1 werde in ein Gas eingeschossen, dessen Moleküle sich ebenfalls als Kugeln vom Radius r_2 auffassen lassen und praktisch ruhende Zielscheiben für das schnelle Teilchen darstellen. Ein Stoß findet statt, wenn der Mittelpunkt des schnellen Teilchens sich dem eines Moleküls auf weniger als $r_1 + r_2$ nähert. Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man die Gasmoleküle als Punkte auffasst und dafür dem schnellen Teilchen eine Scheibe vom Radius $r_1 + r_2$ mit dem **Stoßquerschnitt** $\pi(r_1 + r_2)^2 = \sigma$ anheftet. Wenn das Teilchen den Weg x zurücklegt, überstreicht sein Stoßquerschnitt einen Kanal vom Volumen σx . Ein Stoß ist eingetreten, wenn in diesem Volumen der Mittelpunkt eines Moleküls liegt. Wenn das Gas die Teilchenzahldichte n hat, liegen im Volumen σx im Mittel $n\sigma x$ Teilchen. Wenn diese Zahl 1 wird, tritt im Mittel auf der Strecke x gerade ein Stoß ein, d. h. dieses x ist die mittlere freie Weglänge l :

$$l = \frac{1}{n\sigma} . \quad (5.30)$$

Wenn die Gasmoleküle sich ebenso schnell bewegen wie das betrachtete Teilchen, werden die Stöße etwas häufiger und die freie Weglänge etwas kleiner (Aufgabe 5.2.17):

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} n\sigma} . \quad (5.30')$$

Auf einer Wegstrecke dx des einfliegenden Teilchens besteht die Wahrscheinlichkeit $dP = \sigma n dx$, dass ein Gasmolekül im überstrichenen Volumen liegt. Lässt man also einen Strahl aus N Teilchen einfallen, dann erleiden davon im Mittel $N dP = \sigma n N dx$ auf der Strecke dx einen Stoß. Nehmen wir an, sie scheiden durch einen solchen Stoß aus dem Strahl aus. Dann verringert sich die Anzahl N darin gemäß

$$dN = -\sigma n N dx \quad \text{oder} \quad \frac{dN}{dx} = -\sigma n N . \quad (5.31)$$

Das ist die Differentialgleichung der e-Funktion: Die Funktion $N(x)$, deren Ableitung bis auf den Faktor $-\sigma n$ gleich der Funktion selbst ist, muss lauten

$$N = N_0 e^{-\sigma n x} . \quad (5.32)$$

N_0 ist die ursprüngliche Anzahl der Teilchen im Strahl, der noch kein Gas durchlaufen hat ($x = 0$). In (5.31) oder (5.32) kann man σn als **Absorptionskoeffizienten** α deuten:

$$\alpha = \sigma n = \frac{1}{l} . \quad (5.33)$$

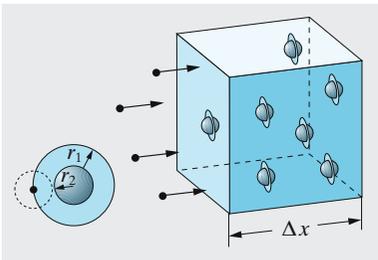


Abb. 5.19. Absorption eines Molekularstrahls in einem Gas. Definition des „Wirkungsquerschnittes“

Der **Absorptionsquerschnitt** ist die Summe aller Querschnitte der Moleküle in der Volumeneinheit. Entsprechende Ausdrücke bestimmen die Absorption von Licht, Röntgenstrahlung, Kathodenstrahlung, gelten aber auch in der chemischen Kinetik (Aufgabe 5.2.19), jedoch nicht für sehr energiereiche Strahlung, wo *vielen* Stöße nötig sind, um ein solches Teilchen zu bremsen. (5.31) gilt auch, wenn die Gasdichte vom Ort abhängt, aber natürlich sieht dann die Lösung anders aus als (5.32).

Für H_2 kann man setzen $r = 0,87 \cdot 10^{-10}$ m, unter Normalbedingungen ergibt sich $l = 2,7 \cdot 10^{-7}$ m, beim Druck 10^{-7} bar steigt l auf fast 3 m. Solche Verhältnisse herrschen in etwa 150 km Höhe in unserer Atmosphäre.

5.2.8 Brownsche Bewegung

Ein Teilchen in einem System mit der Temperatur T hat die mittlere kinetische Energie $\frac{3}{2}kT$ der regellosen thermischen Bewegung. Wie groß das Teilchen ist, spielt für die Energie keine Rolle (Gleichverteilungssatz), nur für die Geschwindigkeit: Schwere Teilchen fliegen langsamer. Für ein Teilchen von 1 μm Durchmesser, also etwa 10^{-15} kg Masse folgt bei Zimmertemperatur $v_{\text{th}} = \sqrt{3kT/m} \approx 3$ mm/s. Diese Bewegung, im Mikroskop gut erkennbar, die er zunächst für aktiv hielt wie bei tierischen Spermien, entdeckte der Botaniker *Brown* 1828 an Pollen einer Nachtkerzenart und erbrachte so, ohne es zu ahnen, den ersten direkten Beweis für die kinetische Theorie der Materie. An Rauch- oder Staubteilchen in einem Sonnenlichtbündel, das durchs Fenster schräg einfällt, kann man die **brownsche Bewegung** manchmal auch ohne Mikroskop beobachten.

Die Zitter- oder Wimmelbewegung eines solchen Teilchens setzt sich aus Translationen und Rotationen ständig wechselnder Richtung zusammen. Bei der Messung unter dem Mikroskop muss man beachten, dass man nicht jeden Richtungswechsel erkennt, sondern nur die mittlere Verschiebung x während einer bestimmten Beobachtungszeit t . Für diese quadratisch gemittelte Verschiebung $\overline{x^2}$ gelten dieselben Wahrscheinlichkeitsgesetze wie für das mittlere Fehlerquadrat einer Messung, die sich aus k Einzelmessungen mit je dem Fehler l zusammensetzen: $\overline{x^2} = kl^2$. Hier ist k die Anzahl der freien Weglängen, die das Teilchen in zufälligen Richtungen aneinander reiht, also $k = vt/l$. Damit wird

$$\boxed{\overline{x^2} = vlt} . \quad (5.34)$$

Man kann dies entsprechend (5.64) und (5.42) durch den Diffusionskoeffizienten D der Schwebeteilchen oder durch die Viskosität η des Mediums ausdrücken, in dem sie schweben:

$$\boxed{\overline{x^2} = 3Dt = \frac{kT}{2\pi\eta r} t} . \quad (5.34')$$

Diese Formel von *Einstein* und *Smoluchowski* wird durch die Erfahrung gut bestätigt.

Die Leistungsfähigkeit vieler hochempfindlicher Geräte wird durch die brownsche Bewegung oder das **thermische Rauschen** des Anzeigeorgans

begrenzt. Das gilt für ein **Spiegelgalvanometer**, aber auch für das Trommelfell unseres Ohres. Auch die Elektronen in einem Widerstand nehmen an der brownischen Bewegung teil und erzeugen so das **Nyquist-Rauschen** (Aufgabe 5.2.21, 4.5.7).

5.2.9 Die Boltzmann-Verteilung

Wir gehen aus von der **barometrischen Höhenformel** (3.10)

$$p = p_0 e^{-\rho_0 g h / p_0} = p_0 e^{-Mgh / (V_0 p_0)} .$$

Es handele sich um 1 mol Gas. Mittels der Zustandsgleichung (5.15) kann man auf molekulare Größen umrechnen: $p_0 V_0 = RT = N_A kT$, also

$$n = n_0 e^{-Mgh / (N_A kT)} = n_0 e^{-mgh / (kT)} \tag{5.35}$$

(n , die Teilchenzahldichte, ist bei konstanter Temperatur proportional zum Druck p). Man kann diese Beziehung auf eine andere Weise aussprechen, die den Weg zu einer wichtigen Verallgemeinerung weist: Bringt man ein Gas aus Teilchen mit der Masse m in ein Gravitationsfeld, dessen Potential wie $\varphi = \varphi(h)$ vom Ort abhängt, so befindet sich am Ort h , wo die potentielle Energie der Moleküle $m\varphi(h)$ ist, eine Teilchenzahldichte

$$n(h) = n(0) e^{-m\varphi(h) / (kT)} . \tag{5.36}$$

Anders ausgedrückt:

Die Teilchenzahldichten an zwei Orten 1 und 2 verhalten sich wie

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-(E_1 - E_2) / (kT)} , \tag{5.37}$$

wenn die potentiellen Energien (gleichgültig ob Schwereenergie oder z. B. elektrische Energie) an diesen Orten E_1 bzw. E_2 sind.

In der Nähe des Erdbodens ist das Schwerefeld praktisch homogen: $\varphi(h) = gh$; damit folgt die barometrische Höhenformel.

Es gibt – außer der „Kontinuumsbetrachtung“ – eine sehr lehrreiche Ableitung für dieses Verteilungsgesetz. Die Moleküle unterliegen zwei Tendenzen: Sie wollen im Schwerefeld längs des Gradienten von φ fallen. Dieses Fallen durch das Medium der übrigen Moleküle ist nach dem Stokes-Gesetz durch eine Sinkgeschwindigkeit

$$v = \mu m g$$

($\mu = v/F$ Beweglichkeit; vgl. Abschn. 6.4.2) zu beschreiben. Wenn alle Teilchen mit der Teilchenzahldichte n so sinken, repräsentieren sie eine Teilchenstromdichte

$$j_{\text{sink}} = nv = -\mu m g n . \tag{5.38}$$

Wäre dies die einzige Tendenz, so würden sich alle Teilchen im Potentialminimum (am Erdboden) versammeln. Einer so extrem inhomogenen Verteilung wirkt aber die **Diffusion** entgegen, die die Tendenz vertritt, die Teilchen möglichst gleichmäßig zu verteilen. Ist $n(h)$ die Höhenabhän-

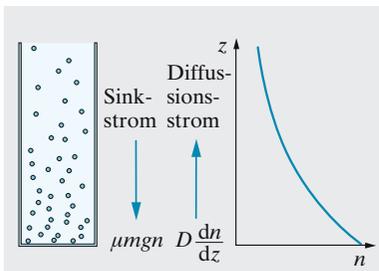


Abb. 5.20. Die Dichteverteilung in einer Atmosphäre ergibt sich aus dem Gleichgewicht von Diffusionsstrom und Sinkstrom

gigkeit der Teilchenzahldichte, so ruft jede Inhomogenität von $n(h)$ einen Diffusionsstrom

$$j_{\text{diff}} = -D \frac{dn(h)}{dh} \quad (5.39)$$

hervor (vgl. Abschn. 5.4.5).

Nun ist leicht zu sehen, dass jedes Überwiegen einer der beiden Einflüsse dazu führt, dass sich eben dieses Übergewicht abbaut. Ist z. B. die Verteilung $n(h)$ zu homogen, also $j_{\text{diff}} < j_{\text{sink}}$, so führt das Sinken der Teilchen zu einer Aufsteilung von $n(h)$, so lange bis der Diffusionsstrom den Sinkstrom kompensiert. Nach einer gewissen Zeit (der **Relaxationszeit**) stellt sich also ein Gleichgewicht ein, das gegeben ist durch Stromlosigkeit:

$$j = j_{\text{sink}} + j_{\text{diff}} = 0 = -\mu m g n(h) - D \frac{dn(h)}{dh} \quad (5.40)$$

oder nach Lösung dieser Differentialgleichung für $n(h)$:

$$n(h) = n(0) e^{-\mu m g h / D} . \quad (5.41)$$

Das ist wieder die barometrische Höhenformel, mit dem zusätzlichen Bonus, dass wir durch Vergleich mit (5.35) einen Zusammenhang zwischen dem Diffusionskoeffizienten D und der Beweglichkeit gewinnen:

$$D = \mu k T . \quad (5.42)$$

Dies ist die **Einstein-Beziehung**.

Auch die allgemeine Verteilung (5.37) ist nur ein Spezialfall einer viel allgemeineren Beziehung, des Verteilungssatzes von *Boltzmann*:

Wenn ein System (gleichgültig ob ein einzelnes Teilchen oder ein zusammengesetztes System) eine Reihe von Zuständen mit den Energien E_1, E_2, \dots annehmen kann (E_i ist die Summe von kinetischer und potentieller Energie), dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Zustand i befindet

$$P_i = g_i e^{-E_i / (kT)} . \quad (5.43)$$

g_i ist das **statistische Gewicht** des Zustandes i .

Verschiedene Zustände haben verschiedene statistische Gewichte, wenn ihre Wahrscheinlichkeiten schon abgesehen von allen energetischen Betrachtungen verschieden sind.

Für sehr viele gleichartige Systeme, z. B. viele Gasmoleküle, drückt die Wahrscheinlichkeit P_i offenbar die relative Anzahl von Molekülen im Zustand i aus, womit man wieder zu (5.36) kommt.

5.2.10 Die Maxwell-Verteilung

Gasmoleküle stoßen ständig zusammen und ändern dabei ihre Geschwindigkeiten. Die im Abschn. 5.2.1 angenommene einheitliche Geschwindigkeit \underline{v} kann daher nur einen Mittelwert bedeuten, genauer das Quadratmittel $\sqrt{v^2}$. Wir messen, welcher Bruchteil der Moleküle eines

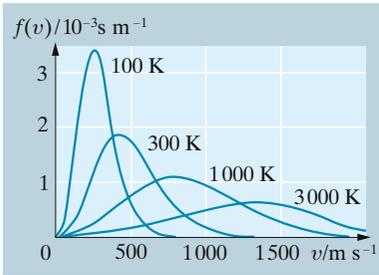


Abb. 5.21. Maxwell-Verteilung der Molekülgeschwindigkeiten in Luft für vier verschiedene Temperaturen

Gases eine Geschwindigkeit aus einem Intervall zwischen v und $v + dv$ hat (eine Messmethode bringt Abschn. 5.2.10b). Trotz der ständigen Stöße wird dieser *Bruchteil*, den wir $f(v) dv$ nennen, zeitlich konstant sein, wenn auch jedes Mal andere Moleküle dazu beitragen. Abbildung 5.21 zeigt, wie $f(v)$ von v abhängt, und zwar für verschiedene Temperaturen.

× Beispiel ...

Wie viele Moleküle in Ihrem Zimmer fliegen in diesem Moment genau mit 1 km/s? Wie viele fliegen mit mehr als 10 km/s?

Mathematisch genau mit 1 km/s fliegt kein einziges Molekül. Erst wenn man ein endliches, wenn auch vielleicht sehr kleines Intervall zulässt, gibt die Maxwell-Verteilung eine endliche Antwort. Mit mehr als $v_1 = 10$ km/s fliegt ein Bruchteil, der durch die Fläche des Schwanzes der Maxwell-Verteilung rechts von v_1 oder in der Energieauftragung rechts von $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ gegeben wird. Da $E_1 \gg kT$, kann man diese Fläche als $f(E_1)kT$ annähern, denn von der Ordinate $f(W_1)$ ab fällt die Kurve im Wesentlichen wie $e^{-W/(kT)}$ ab, d. h. mit einer Breite kT . Da v_1 etwa 20mal größer ist als die mittlere Geschwindigkeit, ist $E_1 \approx 400 \cdot \frac{3}{2}kT = 600kT$. Der Faktor $e^{-600} \approx 10^{-260}$ ist so klein, dass bestimmt noch nie in einem Zimmer ein Luftmolekül 10 km/s gehabt hat, außer in einer Höhensonne oder Bogenlampe.

a) Die Verteilungsfunktion. In einem idealen Gas hat ein Molekül mit der Geschwindigkeit v nur die kinetische Energie $E = \frac{1}{2}mv^2$, keine potentielle. Die Boltzmann-Verteilung besagt, dass man bei höheren Energien exponentiell weniger Moleküle antrifft:

$$f(v) dv = C e^{-mv^2/(2kT)} dv.$$

In C steckt noch das statistische Gewicht der einzelnen v -Intervalle. Ein großer Geschwindigkeitsbetrag v hat ein höheres statistisches Gewicht, weil er sich durch mehr Vektoren \mathbf{v} darstellen lässt als ein kleiner (Abb. 5.22). Man kann zeigen, dass gleiche Volumina des **Geschwindigkeitsraumes**, d. h. des von den \mathbf{v} -Vektoren gebildeten Raumes, gleiche statistische Gewichte haben. Das Intervall $(v, v + dv)$ des Geschwindigkeitsbetrages ist repräsentiert durch eine Kugelschale vom Volumen $4\pi v^2 dv$ im Geschwindigkeitsraum (Abb. 5.22):

$$f(v) dv = C' 4\pi v^2 e^{-mv^2/(2kT)} dv.$$

Die Konstante C' ist dadurch bestimmt, dass $\int_0^\infty f(v) dv = 1$ (irgendeinen Wert von v zwischen 0 und ∞ hat ja jedes Teilchen mit Gewissheit). Daraus ergibt sich C' zu $(m/(2\pi kT))^{3/2}$.

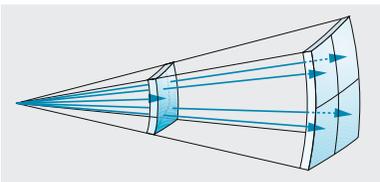


Abb. 5.22. Das statistische Gewicht einer Kugelschale im Geschwindigkeitsraum ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeitsverteilung (Maxwell-Verteilung) lautet

$$f(v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)} dv, \quad (5.44)$$

oder auf kinetische Energie $E = \frac{1}{2}mv^2$ umgerechnet:

$$f(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{E} e^{-E/(kT)} dE. \quad (5.44')$$

Die Maxwell-Verteilung beantwortet u. A. die Frage: Wie viele der Gasmoleküle haben genug kinetische Energie, um eine endotherme chemische Reaktion auszulösen, einem anderen Teilchen ein Elektron zu entreißen (**Stoßionisation**), oder es zur Strahlung anzuregen (**Stoßanregung**), dem Schwerfeld der Erde oder eines anderen Planeten zu entweichen, die zwischen den Atomkernen herrschende elektrostatische Abstoßung zu überwinden (eine **Kernfusion** auszuführen)? Da es sich in der Praxis immer um Energien handeln wird, die größer sind als die mittlere Molekularenergie $\approx kT$, treffen alle diese Bedingungen nur für die relativ wenigen Teilchen zu, die sich ganz rechts in Abb. 5.21 im **Maxwell-Schwanz** befinden. Die Intensität der genannten Prozesse wird durch die Fläche dieses Schwanzes gemessen. Sie ist in guter Näherung

$$\frac{\text{Fläche des Maxwell-Schwanzes}}{\text{Gesamtfläche}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E_0}{kT}} e^{-E_0/(kT)}, \quad (5.45)$$

wenn W_0 die Mindestenergie ist, die der Prozess verlangt.

b) Molekularstrahlen. Durch eine geeignete Blendenanordnung kann man in einen hochevakuierten Raum, dessen Abmessungen klein gegen die freie Weglänge l der Moleküle sind, einen scharf begrenzten Molekular- oder **Atomstrahl** eintreten lassen. Seine Geschwindigkeit kann man sehr einfach mit zwei Zahnrädern messen, die im Abstand L auf einer gemeinsamen Achse so montiert sind, dass der Strahl bei ruhenden Rädern durch die Lücken a und b tritt. Nun dreht man die Räder mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Die meisten Moleküle kommen jetzt nicht mehr durch, denn in der Zeit $\Delta T = L/v$, die sie vom Rad 1 zum Rad 2 brauchen, hat sich ein Zahn von Rad 2 in ihren Weg geschoben. Dies ist nur dann nicht mehr der Fall, wenn $\Delta t = L/v = N\alpha/\omega$ ist, wo α der Winkelabstand benachbarter Zahnluken und N eine natürliche Zahl ist. Die Geschwindigkeit v dieser Moleküle ergibt sich so aus lauter direkt messbaren Größen:

$$v = \frac{L\omega}{N\alpha}.$$

Ändert man ω , dann zeichnet das Nachweisgerät hinter Rad 2 einen Teil der Maxwell-Verteilung auf. Die Ergebnisse bestätigen genau die Theorie.

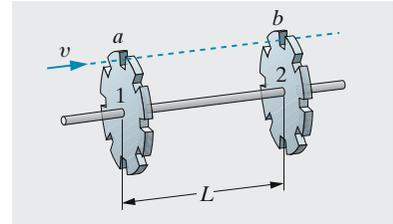


Abb. 5.23. Messung der Geschwindigkeit von Gasatomen bzw. -molekülen (Monochromator für Molekularstrahlen)

5.3 Wärmekraftmaschinen

Wärme ist *ungeordnete* Molekülbewegung. Wie kann man diese Energie in geordnete Bahnen lenken, also Wärme- in mechanische Energie umwandeln?

5.3.1 Thermische Energiewandler

Die so genannten **Wärmekraftmaschinen** (**Dampfmaschinen**, **Verbrennungsmotoren** unserer Autos, **Gas-** und **Dampfturbinen** unserer Kraftwerke) wandeln Wärmeenergie in mechanische um. Andere Ma-

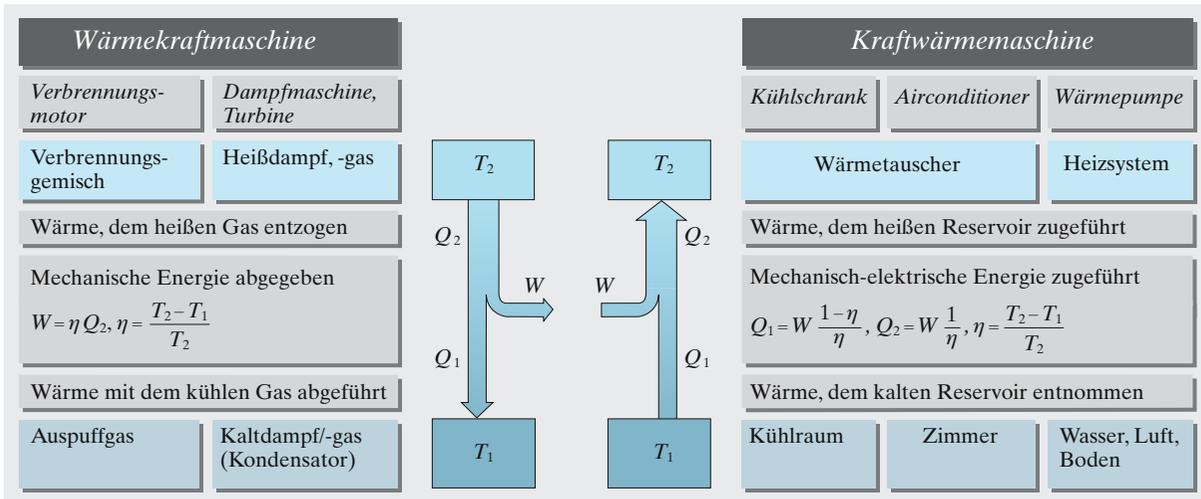


Abb. 5.24. Wärmekraftmaschine und Kraftwärmemaschine

schinen wandeln umgekehrt mechanische Energie in Wärme um; man kann sie Kraftwärmemaschinen nennen (**Kühlschrank, Airconditioner, Wärmepumpe**). In beiden Arten von Maschinen laufen im Prinzip die gleichen Vorgänge mehrfach zyklisch ab, nur bei der einen Gruppe vorwärts, bei der anderen rückwärts. In der Wärmekraftmaschine erzeugt man zunächst Wärmeenergie auf hohem Temperaturniveau T_2 (z. B. im Explosionstakt des Verbrennungsmotors), indem man eine Arbeitssubstanz (Luft, Wasserdampf) durch eine chemische oder eine Kernreaktion erhitzt, z. B. durch Verbrennung eines Treibstoffs (Benzin, Öl, Kohle). Die Arbeitssubstanz sinkt dann auf ein niederes Temperaturniveau T_1 ab und gibt dabei einen Bruchteil η der vorher aufgenommenen Wärmeenergie als mechanische Energie ab. Bestimmung des **Wirkungsgrades** η ist die Hauptaufgabe der Theorie der Wärmekraftmaschine. In der Kraftwärmemaschine spielt sich genau das Umgekehrte ab: Durch Zufuhr von mechanischer (oder elektrischer) Energie hebt man die Arbeitssubstanz von der Temperatur T_1 auf die höhere T_2 . In der Wärmepumpe nutzt man die Wärmeenergie im höheren T -Zustand (dem Heizsystem) und entzieht dem tieferen (Wasser, Boden, Luft) Wärmeenergie. Beim Kühlschrank oder Airconditioner ist der Kühleffekt wichtiger. Hierbei wechselt die Arbeitssubstanz zwischen zwei Zuständen verschiedener Energie, nämlich flüssig-gasförmig oder absorbiert-desorbiert hin und her; die transportierte Wärmeenergie ist überwiegend Verdampfungs- bzw. Desorptionsenergie.

Weil eine Kraftwärmemaschine nur eine umgekehrt laufende Wärmekraftmaschine ist, haben beide im Prinzip den gleichen Wirkungsgrad η . Nur die praktischen Nutzenanwendungen klingen verschieden: Aus jedem Joule Wärmeenergie, das in der Wärmekraftmaschine von T_2 nach T_1 fließt, kann man nur η J mechanische Arbeit abzweigen. Umgekehrt liefert 1 J mechanischer oder elektrischer Energie in der Kraftwärmemaschine $1/\eta$ J, also mehr, auf dem Niveau T_2 ab und schöpft $1/\eta - 1$ J aus dem Niveau T_1 .

5.3.2 Arbeitsdiagramme

Die Vorgänge in einem thermischen Energiewandler lassen sich in **Arbeitsdiagramm** darstellen, die die Abhängigkeit zwischen zwei Zustandsgrößen der Arbeitssubstanz zeigen. Zeitlich wird in einem solchen Arbeitsdiagramm ein bestimmter Zyklus mehrfach durchlaufen. Am anschaulichsten, wenn auch nur für Gase, besonders Idealgase geeignet ist das p, V -**Diagramm**, denn in ihm erscheint die Arbeit, die das Gas verrichtet oder die ihm zugeführt wird, direkt als Fläche $\int p \, dV$. In einer realen Maschine wird ein abgerundeter Zyklus im p, V -Diagramm durchlaufen, der sich meist mehr oder weniger genau aus vier Abschnitten der typischen Linien Isotherme, Adiabate, Isobare und Isochore zusammensetzen lässt. Beim **Otto-Motor** erhitzt die Verbrennung des Benzin-Luftgemisches dieses von T_1 auf T_2 . Dann schiebt das heiße Gas den Kolben adiabatisch vor sich her und kühlt sich dabei auf T_3 ab. Nach dem Auspufftakt und dem Ansaugen frischen Gemisches bei der Temperatur T_4 wird dieses durch den sich hebenden Kolben verdichtet, wobei natürlich ein Teil der vorher gewonnenen Energie wieder verbraucht wird. Diese adiabatische Verdichtung erhitzt das Gemisch auf T_1 , und der Zyklus kann neu beginnen. Beim **Diesel-Motor** ist die obere Ecke des Otto-Zyklus annähernd isobar abgeschnitten. Die klassische, von *S. Carnot* idealisierte **Dampfmaschine** hat zwei adiabatische und zwei isotherme Arbeitstakte; in den isothermen steht der Dampf in Kontakt mit dem Verbrennungsraum T_2 bzw. mit dem Kondensator T_1 , in den adiabatischen Takten verschiebt sich der Kolben ohne einen solchen Wärmekontakt. Interessant ist noch die **Stirling-Maschine**, ein **Heißluftmotor**, in dem die Luft abwechselnd in Kontakt mit einer Wärmequelle (z. B. elektrisch geheizten Glühkerze) und mit einer Wasserkühlung gebracht wird. Sehr angenähert führt das zu einer isochoren Drucksteigerung bzw. -senkung mit anschließender isothermer Ausdehnung bzw. Verdichtung.

In jedem Arbeitszyklus leistet das Gas bei der Expansion eine Arbeit, die durch die Fläche unter dem *oberen* Kurvenzug des p, V -Diagramms gegeben wird. Anschließend muss es durch Verdichtung wieder in den Ausgangszustand zurückgeführt werden, wobei man ihm eine Energie zuführen muss, die durch die Fläche unter dem *unteren* Kurvenzug gegeben wird. Als Nutzarbeit bleibt bei jedem Zyklus genau die Differenz, d. h. die Fläche *innerhalb* des geschlossenen Kurvenzuges.

5.3.3 Wirkungsgrad von thermischen Energiewandlern

Beim Verbrennungsmotor benutzen wir die Verbrennungsenergie des Treibstoffs, um das Gasgemisch im Zylinder auf eine Temperatur T_2 zu erhitzen. Ein Teil dieser Energie geht mit dem Auspuffgas wieder verloren, denn dieses hat die Temperatur T_3 . Jedes Gasmolekül hat bei T_2 eine Energie $\frac{1}{2}fkT_2$, bei T_3 die Energie $\frac{1}{2}fkT_3$.

Höchstens die Differenz $\frac{1}{2}fk(T_2 - T_3)$ kann jedes Molekül als mechanische Arbeit an den Kolben abgeliefert haben, d. h.

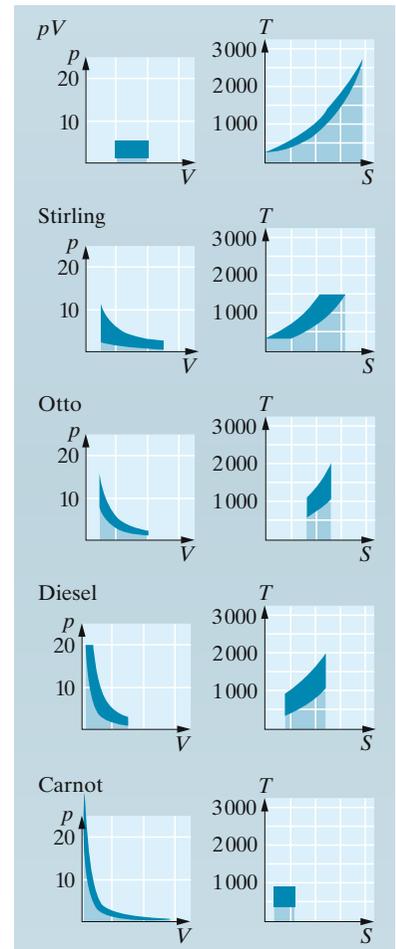


Abb. 5.25. Arbeitsdiagramme von Wärmekraftmaschinen in p, V - und in T, S -Auftragung. Das p, V -Diagramm stellt die Vorgänge im Zylinder sehr anschaulich dar; die gelieferte Arbeit pro Zyklus ist ebenfalls leicht abzulesen (*dunkelblaue Fläche*), der Energieaufwand aber nicht so einfach (außer im Fall Stirling). Das T, S -Diagramm zeigt die Arbeit (*dunkelblau*) und die Verlustenergie (*hellblau*) direkt. Um das einzusehen, braucht man nur $\Delta Q = \int T \, dS$ und den Energiesatz $\Delta W = \Delta Q_1 - \Delta Q_2$. Außerdem muss man wissen, in welchen Takten die Arbeitssubstanz im Wärmekontakt mit einem der beiden Reservoirs steht. In den adiabatischen Takten ist das sicher nicht der Fall

einen Bruchteil

$$\eta = \frac{T_2 - T_3}{T_2} \quad (5.46)$$

von der Energie, die es nach der Explosion hatte.

Vom einzelnen Molekül können wir auf den gesamten Zylinderinhalt schließen, denn die Molekülzahl ändert sich bei der Ausdehnung nicht. Wir erwarten also einen Wirkungsgrad η gemäß (5.46) für den Verbrennungsmotor. Dies erweist sich hiermit ganz einfach als eine Folge der Proportionalität zwischen Molekülenergie und Temperatur.

An dieser Betrachtung stört nur, dass wir die Verbrennungsenergie des Benzins proportional T_2 gesetzt haben, als ob das Gemisch vorher $T = 0$ gehabt hätte. In Wirklichkeit erreicht es schon durch die Verdichtung T_1 . Entsprechend verlieren wir im Auspuff nicht T_3 , sondern nur die Differenz gegen die Außentemperatur T_4 . Damit wird der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{T_2 - T_1 - T_3 + T_4}{T_2 - T_1}. \quad (5.46')$$

T_2 und T_3 liegen auf einer Adiabate, T_1 und T_4 auf einer anderen, und beide Adiabaten verknüpfen die gleichen Volumina V_1 und V_2 :

$$\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma} = \frac{T_1}{T_4}.$$

Daraus folgt durch Überkreuz-Multiplizieren bzw. -Dividieren

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}.$$

Nennen wir dieses Verhältnis α , dann können wir mittels $T_2 = \alpha T_1$, $T_3 = \alpha T_4$ jeweils zwei der Temperaturen aus (5.46') eliminieren und erhalten wie erwartet

$$\eta = \frac{T_1 - T_4}{T_1} = \frac{T_2 - T_3}{T_2}.$$

Wir können η auch durch eine bekanntere Größe ausdrücken, nämlich das **Kompressionsverhältnis**, d. h. das Druckverhältnis

$$\kappa = \frac{p_1}{p_4} = \frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-\gamma}$$

zwischen oberem und unterem Umkehrpunkt (Totpunkt) des Kolbens. Beide Druckverhältnisse sind gleich, weil wir adiabatisch mit dem gleichen Volumenverhältnis arbeiten. Wegen der Adiabategleichung ist

$$\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{1-1/\gamma} = \kappa^{1/\gamma-1},$$

also

$$\eta = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 1 - \kappa^{1/\gamma-1} = 1 - \kappa^{-2/(f+2)}.$$

Das Gas im Zylinder ist immer noch überwiegend Stickstoff mit $f = 5$, also

$$\eta = 1 - \kappa^{-2/7} \tag{5.47}$$

So erhalten wir bei einem Kompressionsverhältnis $\kappa = 8$ einen idealen Wirkungsgrad $\eta = 0,45$, der infolge der unvermeidlichen Verluste (Kühlung, Reibung) leider längst nicht erreicht wird. Für $\kappa = 20$ wird $\eta = 0,58$. Je höher die Kompression, desto besser wird der Treibstoff ausgenutzt. Der **Diesel-Motor** hat daher einen besseren Wirkungsgrad; er komprimiert ja so stark, dass sich das Gemisch bei T_3 von selbst entzündet.

Alle anderen Arbeitsdiagramme liefern ebenfalls einen Wirkungsgrad von der Form $(T_2 - T_1)/T_2$. Wir untersuchen speziell die Dampfmaschine, deren Arbeitsdiagramm *Carnot* durch zwei isotherme und zwei adiabatische Takte idealisiert hat. Man kann die Diskussion im p, V -Diagramm führen (Aufgabe 5.3.8), aber noch viel bequemer im T, S -Diagramm. Hierbei brauchen wir von der Entropie S zunächst nur zu wissen, dass ihre Änderung dS mit der Wärmezufuhr dQ nach

$$dS = \frac{dQ}{T} \tag{5.48}$$

zusammenhängt (Genaueres in Abschn. 5.5). Auf dem adiabatischen Zweig, wo $dQ = 0$ ist, muss also $S = \text{const}$ sein. Damit wird das T, S -Arbeitsdiagramm der Carnot-Maschine einfach ein Rechteck (Abb. 5.25). Ferner folgt aus dem Energiesatz $dU = dW + dQ$ für die isothermen Zweige $\Delta W = -\Delta Q$, da die innere Energie des Idealgases sich dabei nicht ändert ($\Delta U = 0$, weil U nur von T abhängt). Die Wärmezufuhren ΔQ ergeben sich aber wegen (5.48) sofort als $\Delta Q = \int T dS$, hier $T \Delta S$, weil $T(S)$ horizontal ist, d. h. allgemein als Flächen unter den betreffenden Kurvenstücken. Die Nutzarbeit ist $W = -\Delta W_2 + \Delta W_1 = \Delta Q_2 - \Delta Q_1$, also der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{W}{\Delta Q_2} = \frac{\Delta Q_2 - \Delta Q_1}{\Delta Q_2} = \frac{T_2 \Delta S - T_1 \Delta S}{T_2 \Delta S} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \tag{5.49}$$

Bei jeder Wärmekraftmaschine ist also ein möglichst großes Verhältnis T_2/T_1 anzustreben (Heißdampf oder hohe Kompression verbunden mit guter Kühlung). Eine vollständige Umwandlung der Wärmeenergie in mechanische wäre nur bei $T_1 = 0 \text{ K}$ möglich. In der Praxis ist man auf die Luft- oder Wassertemperatur beschränkt, denn Bereitstellung kälterer Kühlmittel durch eine Kraftwärmemaschine würde ebenso viel Energie verschlingen, wie man dabei gewinnen könnte. Große Anlagen brauchen enorme Mengen an Kühlwasser oder Kühlluft, die Abwärme in Gewässer oder Atmosphäre abführen. Natürlich kann man diese **Abwärme** z. T. zum Heizen von Gebäuden, Äckern oder Fischteichen benutzen, wozu man nur ein relativ niederes T -Niveau braucht, also den Wirkungsgrad des Kraftwerks kaum verschlechtern muss.

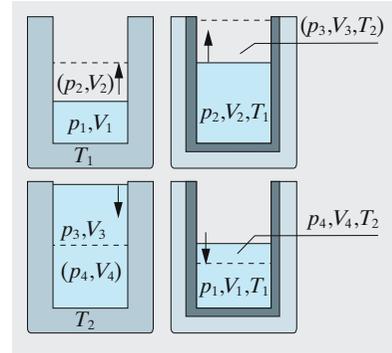
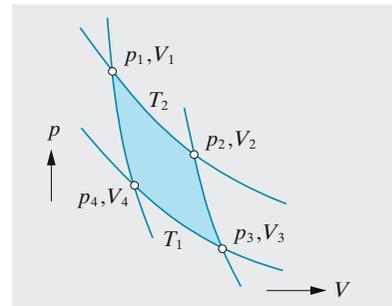


Abb. 5.26. Arbeitstakte der Carnot-Maschine



[www.1](#)

Abb. 5.27. So wird das Arbeitsdiagramm des Carnot-Prozesses gewöhnlich dargestellt ...

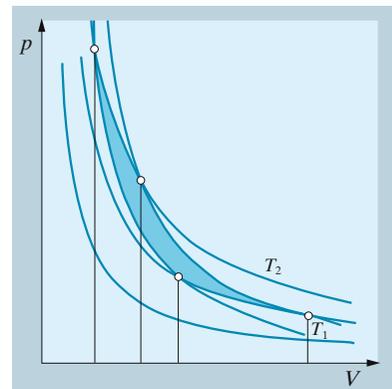


Abb. 5.28. ... und so sieht es wirklich für eine vernünftige Temperaturdifferenz aus (z. B. $T_1 = 900 \text{ K}$, $T_2 = 600 \text{ K}$). Abbildung 5.27 stellt nur den „infinitesimalen“ Carnot-Prozess dar

5.4 Wärmeleitung und Diffusion

Wärme ist ungeordnete Molekülbewegung. Wie überträgt sich deren Energie von einem Ort zum anderen? Die Gesetze dieser Übertragung gelten auch für viele andere Vorgänge.

5.4.1 Mechanismen des Wärmetransportes

Wärmeenergie kann durch Strahlung, Leitung oder Strömung (**Konvektion**) transportiert werden. **Wärmestrahlung** ist elektromagnetischer Natur wie das Licht. Sie ermöglicht die Abgabe von Wärme auch ins Vakuum. Diese Abgabe ist nur von der Temperatur des strahlenden Körpers abhängig, aber für die Energiebilanz ist auch die Rückstrahlung der Umgebung wichtig. Wir behandeln die Wärmestrahlung im Abschn. 11.2.

Wärmeströmung setzt makroskopische Bewegungen in der Flüssigkeit oder dem Gas voraus, deren Wärmehalt so an andere Stellen transportiert wird. **Wärmeleitung** erfolgt nur in Materie, ist aber nicht mit deren makroskopischer Bewegung verbunden, sondern nur mit Energieübertragung durch Molekülstöße. Sie setzt örtliche Unterschiede in der Molekülenergie, also ein Temperaturgefälle voraus. Vielfach führt gerade der Wärmetransport zum Ausgleich dieses Temperaturgefälles, allgemein zu einer zeitlichen Änderung der Temperaturverteilung. Dann spricht man von einem nichtstationären Problem. **Stationarität**, d. h. zeitliche Konstanz der ganzen Temperaturverteilung, ist nur dann möglich, wenn es irgendwo **Wärmequellen** gibt, d. h. Stellen, wo Wärmeenergie aus anderen Energieformen (mechanischer, elektrischer, chemischer Energie) entsteht. Quellen sind z. B. Heizdrähte, Verbrennungsräume, lebende Substanz. Negative Wärmequellen oder Senken sind Stellen, wo Wärme in andere Energieformen überführt wird, z. B. in chemische Energie, Verdampfungs- oder Schmelzenergie. Zwischen Quellen und Senken kann sich dann eine **stationäre Temperaturverteilung** einstellen.

5.4.2 Die Gesetze der Wärmeleitung

Außer dem Energiesatz brauchen wir nur ein ganz einfaches Gesetz:

Wärme strömt immer längs eines Temperaturgefälles, und zwar umso stärker, je steiler dieses Gefälle ist.

Wir betrachten ein System, an dessen verschiedenen Stellen \mathbf{r} verschiedene Temperaturen $T(\mathbf{r})$ herrschen, in dem also ein Temperaturfeld besteht. Wenn T nur von zwei der Koordinaten, z. B. x und y abhängt, kann man $T(x, y)$ durch Hinzufügen einer dritten T -Koordinate als Fläche darstellen. Den **Gradienten** $\text{grad } T = (\partial T/\partial x, \partial T/\partial y, \partial T/\partial z)$ kann man aber auch bei Abhängigkeit von allen drei Koordinaten bilden. Für die Fläche $T(x, y)$ ist er ein Vektor, dessen Richtung die Richtung größter Steigung, dessen Länge den Betrag dieser Steigung angibt. Durch eine Fläche A trete in der Zeit dt die Wärmeenergie dE . Dann ist $P = dE/dt = \dot{E}$ der Wärmestrom durch diese Fläche. Da der Wärmestrom von Ort zu Ort

verschieden stark sein kann, zerlegen wir A in hinreichend kleine Stücke und definieren die **Wärmestromdichte j** durch die Beziehung

$$P = \int j \cdot dA . \tag{5.49}$$

Der Zusammenhang zwischen Wärmestrom P und Wärmestromdichte j ist derselbe wie zwischen Volumenstrom \dot{V} und Strömungsgeschwindigkeit v .

Die Wärmestromdichte j ist proportional dem Temperaturgefälle und folgt seiner Richtung:

$$j = -\lambda \text{ grad } T \quad (\text{Wärmeleitungsgleichung}) . \tag{5.50}$$

λ ist eine Stoffkonstante, die **Wärmeleitfähigkeit**.

λ hat seiner Herkunft entsprechend die Einheit $\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$. Aus (5.50) ergibt sich der Wärmestrom durch einen homogenen Stab vom Querschnitt A und der Länge l , längs dessen sich ein lineares Temperaturgefälle zwischen T_1 und T_2 eingestellt hat (Abb. 5.29)

$$P = jA = A\lambda \frac{T_1 - T_2}{l} . \tag{5.51}$$

Metalle sind gute Wärmeleiter, Gase sehr schlechte (unabhängig vom Druck, aber abhängig von der Temperatur, Tabelle 5.10). Bei Nichtmetall-Kristallen ist λ ungefähr proportional T^{-1} , bei amorphen Substanzen wächst dagegen λ mit T , ist aber i. Allg. kleiner als für den gleichen Stoff im kristallinen Zustand. Quarzkristalle leiten bei 0°C etwa zehnmal besser als Quarzglas. Metalle leiten bei tiefen Temperaturen ebenfalls immer besser ($\lambda \sim T^{-2}$), zwischen Zimmertemperatur und einigen 100°C ändern sie dagegen ihr λ nur sehr wenig.

× Beispiel...

Warum fühlt sich ein heißes Metall heißer, ein kaltes kälter an als Holz oder Plastik der gleichen Temperatur?

Der Eindruck von Wärme oder Kälte stammt nicht direkt aus dem berührten Gegenstand, sondern aus dem Teil der Hand, der ihn berührt. Infolge seiner weit höheren Wärmeleitfähigkeit entzieht das kalte Metall der Hand mehr Wärme als das Holz, ein heißes führt ihr mehr zu.

Wenn aus einem Volumen mehr Wärme herauskommt als hineinströmt, ändert sich sein Wärmehalt Q . Für ein kleines Volumen drückt die Operation div diesen Verlust aus:

$$\text{div } j \, dV = -\dot{Q} .$$

Die Wärmekapazität des Volumens ist $qc \, dV$. Also ändert sich die Temperatur gemäß

$$\dot{T} = -\frac{1}{qc} \text{div } j .$$

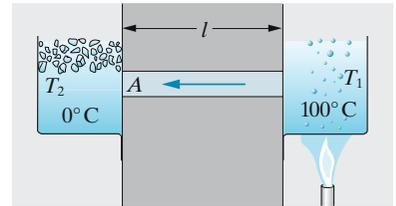


Abb. 5.29. Zur Definition der Wärmeleitfähigkeit

Tabelle 5.10. Wärmeleitfähigkeit einiger Stoffe ($T/^\circ\text{C}$, $\lambda/\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)

Stoff	T	λ
Silber	0	420
Kupfer	50	390
Aluminium	100	230
Platin	0	71
Blei	0	36
	200	33
Konstantan (40% Ni, 60% Cu)	0	22
Quarzglas	50	1,4
Flussspat	0	10
	100	7,9
Seide	0	0,04
Schwefel (rhomb. krist.)	0	0,3
Helium	0	0,14
	100	0,17
Luft	0	0,024
	100	0,031
Wasser	0	0,54
	100	0,67
Ethylalkohol	0	0,18

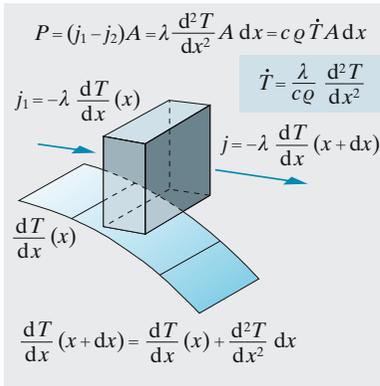


Abb. 5.30a. Die Wärmestromdichte ist proportional dem Temperaturgradienten, der Wärmezufluss eines Volumenelements ist proportional der Differenz von Wärmestromdichten, also der Krümmung des Temperaturprofils

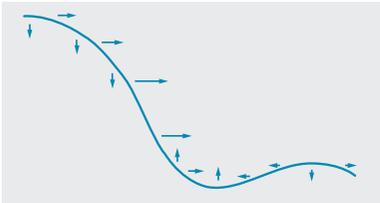


Abb. 5.30b. Wo das Temperaturprofil nach oben konvex gekrümmt ist, fließt mehr Wärme ab als zu (*waagrecht Pfeile*). Umgekehrt bei konkavem T -Profil. In beiden Fällen hat die Krümmung die Tendenz, sich abzubauen (*senkrecht Pfeile*). Schließlich bleibt als stationäre T -Verteilung ein geradliniges Profil, das schräg steht, wenn links und rechts eine Quelle bzw. Senke ist. Dies gilt im ebenen Fall. Die räumliche stationäre T -Verteilung ist eine Sattelfläche (Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta T = 0$)

Mit (5.50) wird daraus die allgemeine Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{T} = \frac{\lambda}{\rho c} \operatorname{div} \operatorname{grad} T \equiv \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T . \quad (5.52)$$

Sie regelt das gesamte räumliche und zeitliche Verhalten einer Temperaturverteilung, wenn die Randbedingungen, d. h. die Wärmeübergangsverhältnisse, am Rand des untersuchten Objekts gegeben sind. Die Größe $\lambda/\rho c$ heißt **Temperatur-Leitwert**. Ihre Einheit ist z. B. m^2/s . Der Temperatur-Leitwert bestimmt die Zeit, die zum Temperaturengleich benötigt wird.

Ein Temperaturgefälle, das sich über einen Raumbereich von der Abmessung d erstreckt, baut sich ab in einer Zeit von der Größenordnung

$$\tau = \frac{d^2 \rho c}{\lambda} \quad (\text{thermische Relaxationszeit}) . \quad (5.53)$$

Wenn z. B. ein würfelförmiger Bereich der Kantenlänge d um T kälter ist als seine Umgebung, herrscht an seinen Rändern ein T -Gefälle von der Größenordnung T/d , das einen Wärmestrom $P = \lambda \lambda T/d \approx \lambda T d$ hervorruft. Dieser gleicht das Energiedefizit $E \approx d^3 \rho c T$ in der Zeit $\tau \approx E/P \approx d^2 \rho c/\lambda$ aus. Während die Wärmeleitfähigkeit der Metalle sehr viel größer ist als die der Gase, sind die Temperatur-Leitwerte etwa gleich.

Es gibt aber auch Wärmequellen, z. B. elektrische Heizdrähte, Gebiete, wo exotherme chemische Reaktionen ablaufen usw. Auftauendes Eis z. B. ist eine Wärmesenke.

In (5.52) muss man also die **Wärmequellendichte** η (Wärmeerzeugung/Volumen) hinzufügen:

$$\dot{T} = \frac{1}{\rho c} (-\operatorname{div} \mathbf{j} + \eta) = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T + \frac{1}{\rho c} \eta . \quad (5.54)$$

Untersucht man die **stationäre Temperaturverteilung**, die sich i. Allg. nach hinreichender Wartezeit einstellt, d. h. den Zustand, wo überall $\dot{T} = 0$ ist, dann muss $T(\mathbf{r})$ genau derselben Gleichung folgen wie ein elektrostatisches Potential oder das Geschwindigkeitspotential einer inkompressiblen Strömung:

$$\Delta T = -\frac{\eta}{\lambda} .$$

Das mächtige Arsenal der Potentialtheorie, von dem Abschn. 6.1.4 eine schwache Vorstellung gibt, wird damit auch für den Wärmeingenieur verfügbar.

Als Beispiel betrachten wir die Temperaturverteilung um ein langes gerades Heizrohr. Vergleich mit Abschn. 6.1.4 ergibt sofort

$$T \sim \ln r \quad (r : \text{Abstand vom Rohr}) .$$

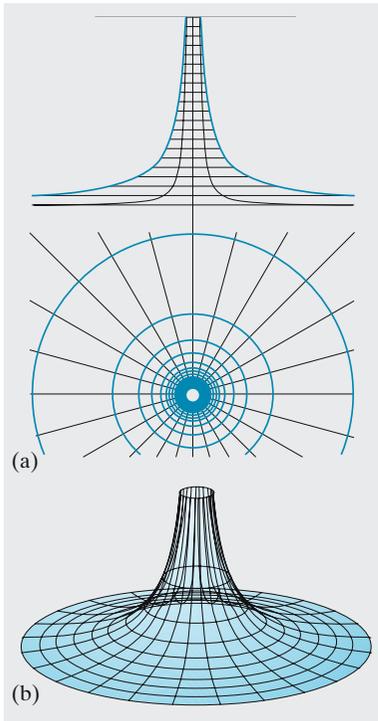


Abb. 5.31a,b. Die Temperaturverteilung in einem Wärmedämmstoff um eine sehr kleine Wärmequelle ist identisch mit dem elektrischen Feld einer Punktladung. (—) $T(r)$; (—) $\text{grad } T(r)$

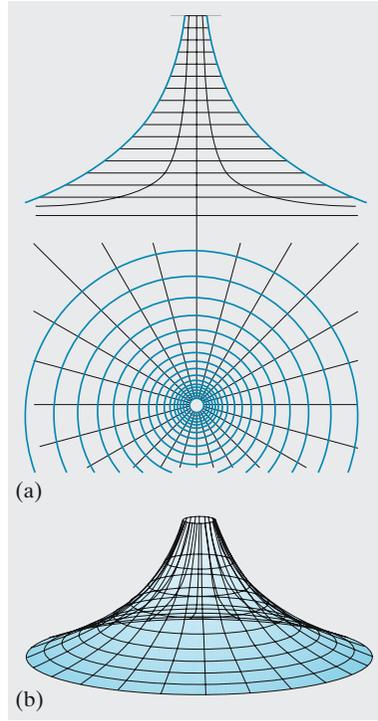


Abb. 5.32a,b. Die Temperaturverteilung um ein gerades Heizrohr, umhüllt mit Wärmedämmstoff, ist identisch mit dem elektrischen Feld eines geladenen Drahtes

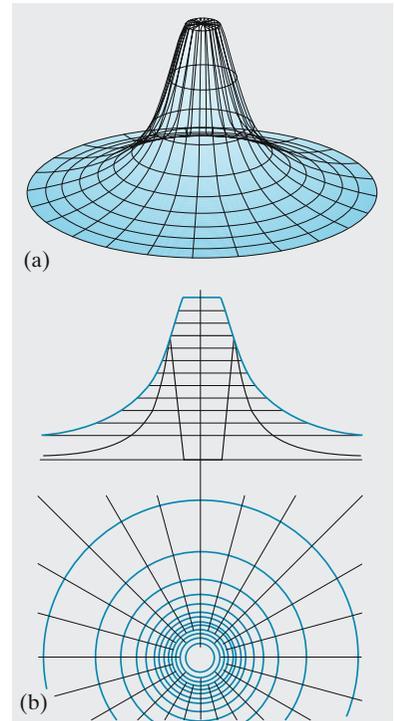


Abb. 5.33a,b. Die Temperaturverteilung innerhalb und außerhalb eines Kugelofens, umhüllt mit Wärmedämmstoff, ist identisch mit dem elektrischen Feld einer geladenen Hohlkugel. (—) $T(r)$; (—) $\text{grad } T(r)$

Im Innern einer heißen Hohlkugel ist die Temperatur überall gleich. Im Außenraum nimmt sie wie r^{-1} ab. All dies gilt, wenn nur die Wärmeleitung, nicht aber Strahlung oder Konvektion, eine Rolle spielt: Im Fall überwiegender Wärmestrahlung kommt $T \sim r^{-1/2}$ heraus (Aufgabe 11.2.16).

Ein **Heizofen** werde durch eine zylindrische Spirale (Radius R , Länge L , Heizleistung P) beheizt (Abb. 5.34). Durch die offene Grund- und Deckfläche erfolgt Wärmeverlust durch Leitung. Im Innern gilt $\Delta T = 0$ oder mit dem „zylindersymmetrischen Laplace-Operator“ $\partial^2 T / \partial r^2 + r^{-1} \partial T / \partial r + \partial^2 T / \partial z^2 = 0$ (z : Achsrichtung des Zylinders, $z = 0$ in der Mitte). Probieren ergibt die Lösung $T = T_0 + ar^2 + bz^2$, wobei $b = -2a$ sein muss, damit $\Delta T = 0$ ist. An den Stirnflächen ($z = \pm L/2$) ist $\partial T / \partial z = \mp 2aL$, also der Gesamtverlust $2 \cdot 2\pi R^2 \cdot \lambda \cdot 2aL$, was im stationären Fall gleich P sein muss. So folgt schließlich

$$T = T_0 + \frac{P}{8\pi R^2 \lambda L} (r^2 - 2z^2).$$

Trägt man T als dritte Koordinate über einem Schnitt durch den Zylinder auf, der die Achse enthält, d. h. über den Koordinaten r und z ,

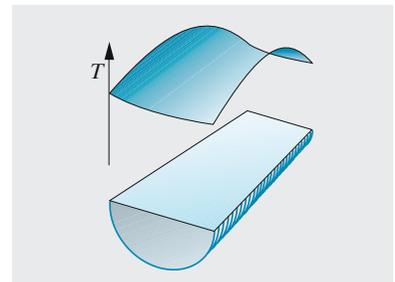


Abb. 5.34. Temperaturprofil eines zylindrischen Heizofens mit äußerer Heizwicklung

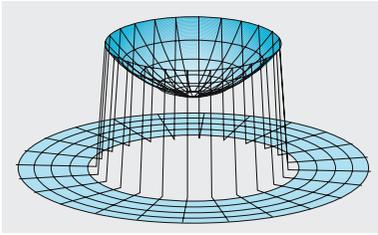


Abb. 5.35. Radiale Temperaturverteilung innerhalb und außerhalb eines zylindrischen Heizofens

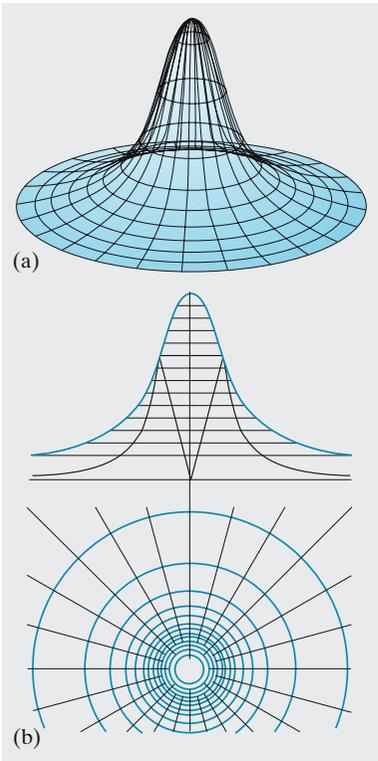


Abb. 5.36a,b. Die Temperaturverteilung innerhalb und außerhalb einer ausgedehnten kugelförmigen Wärmequelle (auch außen befindet sich Wärmedämmstoff) ist identisch mit dem elektrischen Feld einer kugelförmig verteilten Ladung. (—) $T(r)$; (—) grad $T(r)$

dann erhält man eine Sattelfläche: T nimmt gegen die Stirnfläche ab, gegen die Heizwicklung zu. Jede zweidimensionale Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta T = 0$ ist eine solche Sattelfläche (im Grenzfall eine Ebene). ΔT gibt nämlich einfach die mittlere Krümmung der T -Fläche an (vgl. Abschn. 3.2). Man sieht das am besten in der Form $\Delta T = \partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2$: Die beiden Terme bedeuten die Krümmungen in zwei zueinander senkrechten Richtungen. Genauso verhält sich eine druckfreie Seifenhaut. Man kann daher Potentialprobleme mit einem **Seifenhaut-Analogcomputer** lösen. Wenn z. B. an den Stirnflächen des Heizofens nicht wie oben der T -Gradient, sondern T selbst vorgegeben wäre (etwa durch bewusste Kühlung), brauchte man nur einen viereckigen Drahtrahmen zu biegen, dessen Form das T -Profil in Heizwicklung und Stirnflächen wiedergibt. Eine Seifenhaut in diesem Rahmen würde genau das T -Profil im Innern wiedergeben.

5.4.3 Wärmeübergang und Wärmedurchgang

Wenn ein Körper der Temperatur T_1 mit einer Oberfläche A an eine Umgebung mit der Temperatur T_2 grenzt (Luft, Kühl- oder Heizflüssigkeit), geht von ihm angenähert eine Wärmeleistung

$$P = \alpha A(T_1 - T_2) \tag{5.55}$$

an die Umgebung über. Wenn T_2 konstant ist und dem Körper keine Wärme nachgeliefert wird, kühlt er sich gemäß $P = cm \dot{T}_1$ ab, also

$$\dot{T}_1 = -\frac{\alpha A}{cm}(T_1 - T_2), \quad \text{d. h. } T_1 - T_2 = (T_{10} - T_2)e^{-t/\tau} \tag{5.56}$$

Das ist **Newtons Abkühlungsgesetz** mit der Zeitkonstanten $\tau = cm / (\alpha A)$. Für α findet man bei den meisten Stoffen Werte um $6 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

Die Gleichung (5.55) ist nur eine phänomenologische Beziehung, die nur für kleine Temperaturdifferenzen gilt. In Wirklichkeit muss man den Wärmeübergang als einen *Strahlungsvorgang* auffassen und die Leistung P als Differenz zwischen der Abstrahlungsleistung $P_1 = A\sigma T_1^4$ des Körpers und der Rückstrahlungsleistung der Umgebung $P_2 = A\sigma T_2^4$ (**Stefan-Boltzmann-Gesetz** mit $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$; vgl. Abschn. 11.2.5):

$$P = P_1 - P_2 = \sigma A(T_1^4 - T_2^4) .$$

Wenn $T_1 - T_2 \ll T_2$, kann man angenähert schreiben $T_1^4 \approx T_2^4 + 4T_2^3(T_1 - T_2)$:

$$P \approx 4\sigma T_2^3 A(T_1 - T_2) . \tag{5.55'}$$

Damit entpuppt sich α als $4\sigma T^3 \approx 6 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ für $T \approx 300 \text{ K}$. Genauer betrachtet hängt α noch vom **Emissionsgrad** ε der Oberfläche ab, der für die meisten praktischen Fälle zwischen 0,1 und 1 liegt.

Der Wärmedurchgang durch eine Platte zwischen zwei Medien mit den Temperaturen T_1 und T_2 wird beschrieben durch die Leistung

$$P = kA(T_1 - T_2) .$$

kA ist der **Wärmeleitwert**. Sein Kehrwert, der **Wärmewiderstand**, setzt sich analog zum elektrischen Widerstand aus den Widerständen der hintereinander geschalteten Hindernisse zusammen:

$$\frac{1}{kA} = \frac{1}{\alpha_1 A} + \frac{d}{\lambda A} + \frac{1}{\alpha_2 A}$$

Gesamt- Übergang Leitung der Übergang
widerstand Medium1-Platte Plattendicke d Platte-Medium 2

Für solche ebenen Probleme gilt nämlich das übliche ohmsche Gesetz mit allen seinen Konsequenzen, wenn man Temperatur durch Potential, Wärmestrom durch elektrischen Strom ersetzt. Die Temperaturverteilung auf und innerhalb der Platte ergibt sich auch völlig analog den Spannungsabfällen an Einzelwiderständen oder ihren Teilen. Die Wärmeleitungsgleichung (5.50) ist ja auch analog zum differentiellen ohmschen Gesetz (6.65).

5.4.4 Wärmetransport durch Konvektion

In Flüssigkeiten und Gasen befördert die **Konvektion** oft viel mehr Wärme als die Leitung. Strömungsvorgänge werden durch lokale Temperatur- und damit Dichteunterschiede, d. h. durch den Auftrieb der wärmeren Bereiche ausgelöst. Es bilden sich sehr komplizierte Strömungsfelder nichtstationärer oder stationärer Art, manchmal allerdings von erstaunlich regelmäßiger Zellenstruktur, z. B. in einer flachen, von unten geheizten Schale (polygonale **Bénard-Zellen**). Heiz- und Kühlanlagen nutzen die Konvektion weitgehend aus. Die Irrtümer der Wetterprognose zeigen, wie schwer solche Vorgänge trotz vollständiger Überwachung durch Satellitenphotos theoretisch zu behandeln sind. Der Wärmestrom in einer Konvektionszelle steigt mit einer ziemlich hohen Potenz der Zellenabmessungen d . Antrieb der Strömung ist eine Auftriebs-Kraftdichte, die proportional zu den lokalen Temperaturunterschieden δT ist. Bei stationärer Strömung ohne wesentliche Beschleunigung gleicht sich diese Kraftdichte mit der Reibungskraftdichte $\eta \Delta v \approx \eta v/d^2$ (**Navier-Stokes** (3.43)) aus, ergibt also eine Geschwindigkeit v und eine damit verbundene Wärmestromdichte, die mindestens proportional d^2 sind. Das beste Mittel, die Konvektion zu unterdrücken, ist also Verkleinerung der Hohlräume. Poröse Wärmedämmstoffe isolieren, weil sie so erst die geringe Wärmeleitfähigkeit der Luft zur Geltung bringen.

5.4.5 Diffusion in Gasen und Lösungen

Schichtet man Alkohol vorsichtig über Wasser oder reines Wasser über eine Salzlösung, dann wird die anfangs scharfe Trennfläche allmählich immer diffuser. Die steile Dichtestufe flacht sich immer mehr ab. Man kann dies im Versuch von *Wiener* sehr schön verfolgen, wenn man ein Lichtbündel durch einen 45° schrägen Spalt horizontal auf die Küvette fallen lässt. Im Dichte-, also Brechzahlgradienten wird das Licht gekrümmt (Abschn. 9.5.1) und zeichnet auf einen Schirm eine glockenförmige Lichtlinie, deren Abweichung von der schrägen Grundlinie proportional zu $d\varrho/dz$ ist

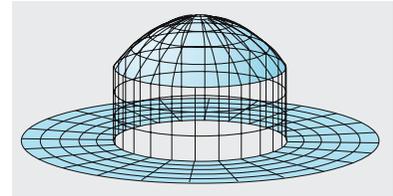


Abb. 5.37. Temperaturprofil einer kugelförmigen kontinuierlichen Wärmequelle. Der Temperatursprung an der Oberfläche ist durch Wärmestrahlung und Konvektion bedingt

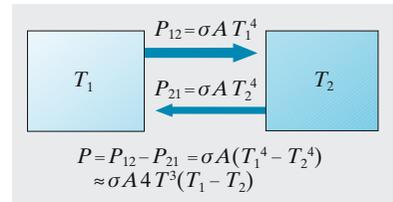


Abb. 5.38. Energiebilanz bei der Wärmestrahlung

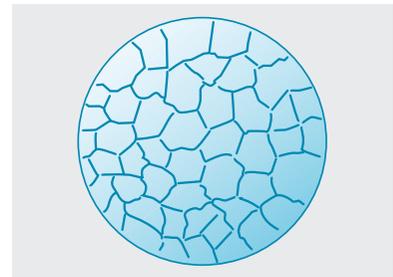


Abb. 5.39. Konvektionszellen in einem flachen von unten geheizten Topf (Bénard-Zellen, Rayleigh-Bénard-Konvektion)

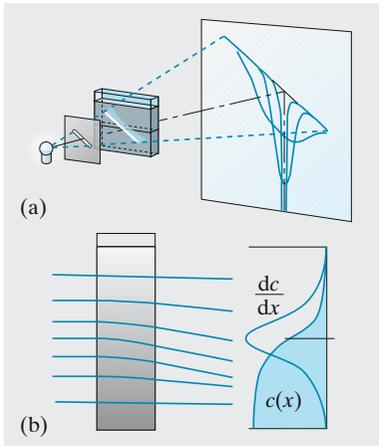


Abb. 5.40a,b. Der Diffusionsversuch von Wiener

(ρ : Dichte, z : Höhenkoordinate). In Lösungen dauert die Entwicklung des so dargestellten Dichteprofiles Stunden, in Gasen nur Sekunden.

Eine solche **Diffusion** findet immer dann statt, wenn die Konzentration eines gelösten Stoffes, der Druck eines Gases oder der Partialdruck eines Bestandteils eines Gasgemisches, allgemein also wenn die Teilchenzahldichte n von Ort zu Ort verschieden ist. Beendet wird der Vorgang erst durch völligen Ausgleich aller Teilchenzahldichten, falls keine Teilchenquellen oder -senken vorhanden sind (chemische Reaktionen, Kernreaktionen), die auch ein stationäres Konzentrationsgefälle aufrechterhalten können. Jedenfalls dauert der Ausgleich durch Diffusion auch bei einem Gas viel länger als durch Expansion ins Vakuum, eben weil andere Moleküle im Weg sind. Der Teilchentransport in der Diffusion wird durch den Gradienten der Teilchenzahldichte, $\text{grad } n$, angetrieben, genau wie die Wärmeleitung durch $\text{grad } T$. Die **Teilchenstromdichte** \mathbf{j}_n , ein Vektor, dessen Betrag die Anzahl von Teilchen darstellt, die in der Sekunde durch die Flächeneinheit treten, ist proportional dem n -Gefälle:

1. Ficksches Gesetz

$$\mathbf{j}_n = -D \text{grad } n . \quad (5.57)$$

Der Diffusionsstrom fließt immer in die Richtung, in der n am schnellsten abnimmt. D ist der Diffusionskoeffizient. Seine Einheit $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ergibt sich aus (5.57).

Wenn aus einem Volumen mehr Teilchen ausströmen als hineinfließen, nimmt die Teilchenzahldichte dort ab:

$$\dot{n} = -\text{div } \mathbf{j}_n . \quad (5.58)$$

Mit (5.57) erhält man ganz analog zur Wärmeleitungsgleichung (5.52) die allgemeine Diffusionsgleichung,

2. Ficksches Gesetz

$$\dot{n} = D \text{div grad } n = D \Delta n , \quad (5.59)$$

die gegebenenfalls entsprechend (5.54) noch durch Quelledichten zu ergänzen ist. Eine stationäre quellenfreie Konzentrationsverteilung $n(\mathbf{r})$ wird wegen $\dot{n} = 0$ ebenfalls durch die Potentialgleichung $\Delta n = 0$ beschrieben. **Diffusionspumpe.** Die moderne Hochvakuumtechnik wurde erst möglich durch die Diffusionspumpe (*W. Gaede, 1913, Abb. 5.41*). Öl oder Quecksilber werden in einem Siedegefäß verdampft. Der Dampf strömt nach oben und wird durch Kappen geeigneter Form umgelenkt. Hier diffundiert das Gas aus der zu evakuierenden Apparatur in den Dampf hinein und wird mit nach unten geführt. An den wassergekühlten Wänden, wo der Dampf kondensiert und ins Siedegefäß zurückfließt, wird das aufgenommene Gas frei und durch eine **Vorpumpe** abgesaugt. Zusammen mit anderen Vorrichtungen (**Kühlfallen**, in denen bei den Temperaturen flüssigen Stickstoffs, Wasserstoffs oder Heliums die meisten Moleküle durch

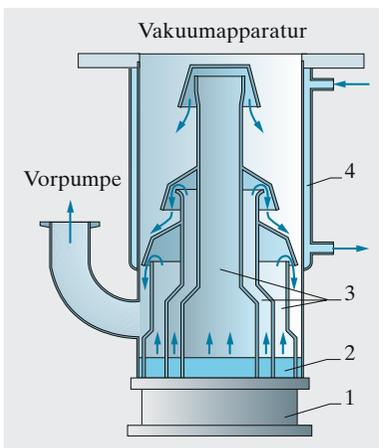


Abb. 5.41. Schema einer Diffusionspumpe. (1) Heizkörper, (2) Siedegefäß, (3) Steigrohre, (4) Kühlmantel

Ausfrieren beseitigt werden, und **Ionengeretter**, die durch elektrische Felder oder adsorbierende Schichten besonders geladene Teilchen abfangen) erreicht man heute Drücke unterhalb 10^{-10} mbar (Abschn. 5.8).

5.4.6 Transportphänomene

Wärmeleitung, Diffusion und Viskosität lassen sich als **Transportphänomene** zusammenfassen. Bei allen dreien löst die räumliche Inhomogenität (der Gradient) einer gewissen Größe den Transport einer anderen Größe aus: Bei der **Wärmeleitung** führt ein Temperaturgradient zum Strömen von Wärmeenergie, bei der **Diffusion** erzeugt ein Konzentrationsgradient einen Massenstrom. Was im Fall der **Viskosität** strömt, ergibt sich aus folgender Betrachtung (Abb. 5.42). Eine Gasschicht der Dicke z sei links von einer festen, ebenen Wand begrenzt, rechts von einer ihr parallelen, die in ihrer eigenen Ebene mit der Geschwindigkeit w bewegt werde. Dazu muss eine Kraft je Flächeneinheit (Schubspannung, Abschn. 3.4.2) aufgewandt werden, für die gemäß Abschn. 3.3.2 gilt

$$\sigma = \frac{F}{A} = \eta \frac{w}{z} . \tag{5.60}$$

Nach dem Impulssatz bedeutet eine Kraft immer eine gleichgerichtete Änderung des Impulses. Da der Impuls der Wand unverändert bleibt ($w = \text{const}$), kommt die Impulsänderung allein dem Gas zugute: Die an die bewegte Wand prallenden Moleküle verlassen diese wieder mit einem parallel zu ihr gerichteten Zusatzimpuls, der in Zusammenstößen mit anderen Molekülen diesen weitergereicht und schließlich an die feste Wand abgegeben wird. Es findet ein dauernder Impulsstrom von der bewegten zur festen Wand statt.

Die in den Abschnitten 5.4.2 und 5.4.5 besprochenen phänomenologischen Gesetze haben alle die Form

$$\boxed{j = -C \text{ grad } \varphi} \tag{5.61}$$

und

$$\boxed{\dot{\varphi} = C \Delta \varphi} \tag{5.62}$$

(Δ ist der Laplace-Operator (vgl. Abschn. 3.3.1)), wobei die Größen folgende konkrete Bedeutung haben:

	Wärmeleitung	Diffusion	Viskosität
j	Wärmestrom j_w oder „Temperaturstrom“ $j_T = j_w / (\rho c_V)$	Teilchenstrom	Impulsstrom = Schubspannung
φ	Temperatur T	Konzentration n	Strömungsgeschwindigkeit w
$\dot{\varphi}$	Temperaturänderung \dot{T}	Konzentrationsänderung \dot{n}	Beschleunigung
C	Temperaturleitfähigkeit $\lambda / (\rho c_V)$	Diffusionskoeffizient D	Viskosität η / ρ (kinematisch)

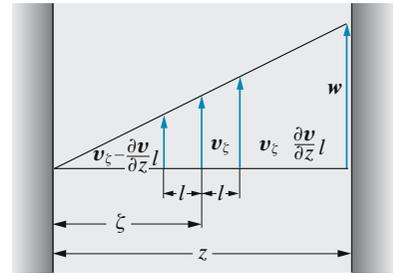


Abb. 5.42. Zur Berechnung der Viskosität von Gasen

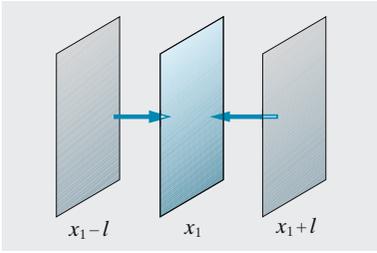


Abb. 5.43. Der Strom einer molekularen Größe durch eine Fläche stammt im Wesentlichen aus Abständen von einer freien Weglänge beiderseits

Wir wollen jetzt (5.61) und (5.62) aus molekularen Vorstellungen ableiten und gleichzeitig die Konstanten (Wärmeleitfähigkeit λ , Diffusionskoeffizient D und Viskosität η) aus den Eigenschaften der Moleküle berechnen. In allen drei Fällen entsteht der Strom der entsprechenden Größe (Wärme, also kinetische Energie mv^2 , Impuls mw oder Teilchenzahldichte n) dadurch, dass die Moleküle, die von einer Seite kommen, mehr von dieser Größe herantragen als die von der anderen Seite kommenden. Wir betrachten eine Einheitsfläche senkrecht zur x -Achse bei x_1 (Abb. 5.43). Die Moleküle, die dort eintreffen, stammen im Mittel aus einem Abstand l (mittlere freie Weglänge) und bringen die dort herrschenden Werte von Energie, Impuls bzw. Teilchenzahldichte mit. Es kommen

von rechts

$$\frac{1}{6}n(x_1 + l)v(x_1 + l) \approx \frac{1}{6}\left[n(x_1) + l\frac{dn}{dx}\right]\left[v(x_1) + l\frac{dv}{dx}\right] \quad (5.63)$$

von links

$$\frac{1}{6}n(x_1 - l)v(x_1 - l) \approx \frac{1}{6}\left[n(x_1) - l\frac{dn}{dx}\right]\left[v(x_1) - l\frac{dv}{dx}\right]$$

Moleküle/m² s. Die Differenz dieser beiden Teilchenströme bei $v = \text{const}$ ($T = \text{const}$), nämlich $\frac{1}{3}lv \, dn/dx$, gibt schon den Diffusions-Teilchenstrom. Der Vergleich mit (5.57) liefert für die **Diffusionskonstante**

$$\boxed{D = \frac{1}{3}vl} \quad (5.64)$$

Im Fall der Viskosität sind n und v beiderseits gleich, nur die mitgebrachten Impulse sind verschieden:

$$\begin{aligned} \text{von rechts} & \quad \frac{1}{6}nvm\left(w + l\frac{dw}{dx}\right) \\ \text{von links} & \quad -\frac{1}{6}nvm\left(w - l\frac{dw}{dx}\right). \end{aligned}$$

Die Differenz ist $\frac{1}{3}nmvl \, dw/dx$. Die **Viskosität** ergibt sich also zu

$$\boxed{\eta = \frac{1}{3}nmvl} \quad (5.65)$$

Nach (5.30) sind mittlere freie Weglänge und Teilchenzahldichte einander umgekehrt proportional: $nl \approx \text{const}$. Daraus folgt: *Die Viskosität der Gase ist unabhängig vom Druck*. Diese überraschende Folgerung wird durch das Experiment vollkommen bestätigt. Sie ist erfüllt, solange die mittlere freie Weglänge klein gegen die Abstände der sich im Gas bewegenden Körper ist, oder bei strömenden Gasen klein gegen die Gefäßdimensionen. Dagegen wächst die Viskosität der Gase – im Gegensatz zu derjenigen der Flüssigkeiten – mit steigender Temperatur, weil die mittlere Geschwindigkeit v mit der Temperatur zunimmt.

Während man aus der Zustandsgleichung mit Hilfe der kinetischen Gastheorie die mittlere kinetische Energie und damit die mittlere thermische Geschwindigkeit gewinnt, liefert die Kenntnis der Viskosität der

Gase eine Angabe über die freie Weglänge und damit über den Wirkungsquerschnitt, d. h. die Größe der Moleküle.

Bei der Wärmeleitung transportiert jedes Molekül die Wärmeenergie $E = \frac{1}{2}fkT$ (f : Anzahl der Freiheitsgrade). Die Wärmeströme sind

$$\begin{aligned} \text{von rechts} \quad & \frac{1}{6}n(x_1 + l) \left(\bar{v} + l \frac{d\bar{v}}{dx} \right) \frac{f}{2}kT(x_1 + l) \\ \text{von links} \quad & - \frac{1}{6}n(x_1 - l) \left(\bar{v} - l \frac{d\bar{v}}{dx} \right) \frac{f}{2}kT(x_1 - l). \end{aligned} \tag{5.66}$$

Wenn T sich räumlich ändert, aber p konstant ist, muss nach der Zustandsgleichung die Teilchenzahldichte n sich im entgegengesetzten Sinne ändern, sodass $T/V \sim nT$ konstant ist. Also bleibt in (5.66) nur die v -Änderung übrig. Damit ist der Differenzstrom

$$\frac{1}{3}n \frac{f}{2}kTl \frac{d\bar{v}}{dx}.$$

Nun ist wegen $T \sim v^2$:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{T} \frac{dT}{dx},$$

also wird der Wärmestrom

$$j = \frac{1}{6}n \frac{f}{2}k\bar{v}l \frac{dT}{dx}.$$

Die **Wärmeleitfähigkeit** ist demnach

$$\boxed{\lambda = \frac{f}{12}nk\bar{v}l} \tag{5.67}$$

Sie lässt sich auch durch spezifische Wärme $c_V = \frac{1}{2}fk/m$ und Viskosität ausdrücken:

$$\lambda = \frac{1}{2}\eta c_V.$$

Eine strengere Behandlung ergibt

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{2}\alpha\eta c_V}, \tag{5.67'}$$

wobei die Konstante α für einatomige Gase den Wert $\approx 2,4$, für zweiatomige $\approx 1,9$ und für dreiatomige $\approx 1,6$ hat.

Da c_V von Dichte und Druck des Gases unabhängig ist, muss ebenso wie η (Abschn. 3.3.2) auch die Wärmeleitung eines Gases vom Druck unabhängig sein; das wird durch das Experiment bestätigt. Erst wenn l die Größe der Gefäßdimensionen erreicht, nimmt λ dem Druck proportional ab.

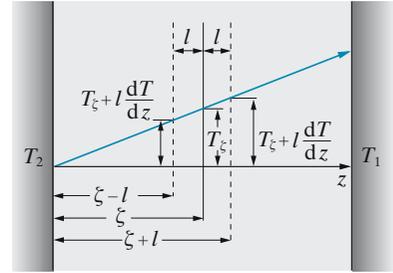


Abb. 5.44. Zur Berechnung der Wärmeleitung in Gasen

X Beispiel ...

Wenn die Wärmeleitfähigkeit eines Gases druckunabhängig ist, welchen Sinn hat es dann, den Mantel einer Thermosflasche (eines Dewar-Gefäßes) zu evakuieren? ▶

Das Evakuieren des Mantels unterbindet zunächst die Konvektion, die i. Allg. mehr Wärme austauscht als die Leitung. Evakuiert man so weit, dass die freie Weglänge größer wird als die Dicke des Luftmantels (einige mm, also $p \approx 0,1$ mbar), dann ist auch die Wärmeleitfähigkeit nicht mehr druckunabhängig, sondern nimmt proportional zur Stoßzahl, also zum Druck, ab.

In diesem Bereich sehr kleiner Drücke kann die Wärmeleitung zur Druckmessung dienen. Dazu misst man den Widerstand eines dort ausgespannten, elektrisch beheizten Drahtes. Seine Wärmeabgabe, daher auch seine Temperatur und sein elektrischer Widerstand sind vom Gasdruck abhängig.

5.5 Entropie

In einem Gas ist Wärme einfach *ungeordnete* Molekülbewegung. Gibt es verschiedene Grade dieser Unordnung? Wie kann man sie messen? Geben sie Auskunft über den Ablauf von Vorgängen in Physik, Chemie, Biologie?

5.5.1 Irreversibilität

Wenn Sie einen Film sehen, in dem jemand einen Hahn öffnet, der zwei gasgefüllte Gefäße verbindet, und wenn daraufhin sich das ganze Gas im linken Gefäß ansammelt, dann wissen Sie sofort: Dieser Film läuft rückwärts. Es gibt noch andere Prozesse, die von selbst nur in *einer* Richtung verlaufen. Solche Prozesse heißen **irreversibel**. Ein antriebsloses Fahrzeug kommt durch Reibung von selbst zum Stehen. Ein Topf mit kaltem Wasser, auf die heiße Herdplatte gesetzt, erwärmt sich. Zwei verschiedene Gase vermischen sich durch Diffusion. Die Umkehrung ist nicht etwa durch den Energiesatz ausgeschlossen. Dieser hätte nichts dagegen, wenn das Fahrzeug Wärmeenergie aus seiner Umgebung sammelte und in kinetische Energie verwandelte, oder wenn eine bestimmte Wärmeenergie dem kalten Wasser entzogen und der Heizplatte zugeführt würde, oder wenn sich die beiden Gase von selbst wieder trennten.

Die freie Ausdehnung eines Gases ins Vakuum hat den Vorzug, dass man besonders leicht sieht, *warum* dieser Prozess irreversibel ist. Man braucht nur zu wissen, dass ein Gas aus sehr vielen Teilchen besteht, die sich unabhängig voneinander bewegen. Speziell kann jedes Teilchen mit gleicher Wahrscheinlichkeit im linken wie im rechten Gefäß sein, falls beide gleich groß sind. Abbildungen 5.45 und 5.46 stellen alle Möglichkeiten zusammen, vier bzw. fünf Teilchen über die beiden Gefäßhälften zu verteilen. Zwei Zustände sind hier durch einen Strich verbunden, wenn sie durch Übertritt eines Teilchens auseinander hervorgehen. Wir nennen jeden der dargestellten 16 Zustände einen **Mikrozustand**; bei ihm kommt es offenbar darauf an, *welche* Teilchen links bzw. rechts sind. Wenn es dagegen nur darauf ankommt, *wie viele* Moleküle links bzw. rechts sind, sprechen wir von einem **Makrozustand**. Die fünf Makrozustände 4 : 0, 3 : 1, 2 : 2, 1 : 3, 0 : 4 sind offenbar durch sehr verschiedene Anzahlen von Mikrozu-

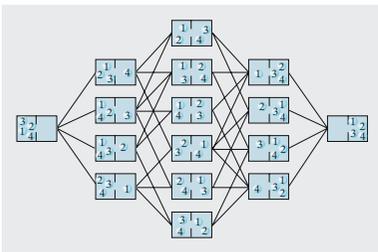


Abb. 5.45. Schon bei vier Teilchen ist eine gleichmäßige Verteilung über beide Hälften eines Volumens viel wahrscheinlicher als eine ungleichmäßige

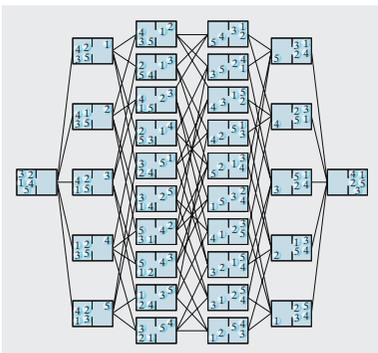


Abb. 5.46. Bei fünf Teilchen überwiegt die gleichmäßige Verteilung noch viel stärker

ständen realisiert. Wenn jedes Teilchen sich unabhängig von den übrigen ebenso oft links wie rechts aufhalten kann, haben alle 16 Mikrozustände die gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich jeder $\frac{1}{16}$. Die Makrozustände haben aber sehr ungleiche Wahrscheinlichkeiten (Abb. 5.45), der mittlere hat die höchste, sechsmal höher als die extremen Zustände.

Dieser Unterschied zwischen den Wahrscheinlichkeiten der gleichmäßigen und der extremen Verteilungen wird natürlich viel krasser, wenn man es mit mehr Teilchen zu tun hat. Schon bei $N = 100$ Teilchen sieht die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Makrozustände aus wie Abb. 5.47. Das System wird deshalb nicht lange in dem extremen Makrozustand bleiben, wo alle Teilchen in der linken Hälfte sind, sondern es wird einen mittleren Zustand aufsuchen, in dem rechts und links etwa gleich viele Teilchen sind. Man sieht das auch so: In Abb. 5.45 kann man von einem beliebigen 3 : 1-Makrozustand auf drei Arten zum ausgeglichenen Zustand kommen, aber nur auf eine Art zum extremen. Ein solcher 3 : 1-Zustand wird sich also dreimal häufiger ausgleichen als zum Extrem entwickeln. Die extremen Zustände entstehen nicht deshalb nie von selbst, weil sie unmöglich, sondern weil sie zu unwahrscheinlich sind.

5.5.2 Wahrscheinlichkeit und Entropie

Wir bleiben bei der Expansion eines Gases, unterscheiden den Zustand 1 (alle Moleküle sind in der linken Gefäßhälfte) und den Zustand 2 (die Moleküle sind gleichmäßig über beide Gefäßhälften verteilt), und fragen: Wie viel wahrscheinlicher ist der Zustand 2 als der Zustand 1?

Etwas vereinfacht können wir so antworten: Der Zustand 2 ist praktisch sicher, hat also eine Wahrscheinlichkeit, die fast 1 ist. Der Zustand 1, wo alle N Moleküle links sind, hat nur die Wahrscheinlichkeit 2^{-N} , denn er wird nur durch einen unter den 2^N gleichwertigen Mikrozuständen realisiert. Es wird nur einmal unter 2^N Beobachtungen vorkommen, dass man zufällig alle N Moleküle in der linken Hälfte antrifft. Schon bei $N = 10$ Molekülen ist diese Wahrscheinlichkeit nur $1/1\,000$, bei $N = 100$ Molekülen ist sie 10^{-30} , also völlig vernachlässigbar. Bei den $3 \cdot 10^{22}$ Molekülen in einem Liter Luft würden hinter 3 noch 10^{22} Nullen folgen!

So winzige Wahrscheinlichkeiten P sind kaum hinschreibbar. Man rechnet daher lieber mit dem Logarithmus von P .

Dieser Logarithmus, multipliziert mit der Boltzmann-Konstante k , heißt **Entropie** des Zustandes:

$$S = k \ln P. \quad (5.68)$$

Statt zu sagen: Der Zustand 2 ist 2^N -mal wahrscheinlicher als der Zustand 1, kann man auch sagen: Die Entropie des Zustandes 2 ist um $\Delta S = k \ln 2^N = kN \ln 2$ höher als beim Zustand 1. In dem Satz: Ein Zustand geht von selbst nur in einen gleich wahrscheinlichen oder einen wahrscheinlicheren über, ersetze man einfach das Wort Wahrscheinlichkeit durch Entropie und hat damit die Behauptung, dass die Entropie eines Systems nie abnehmen kann, als Selbstverständlichkeit erkannt. Wir können uns sogar viel genauer ausdrücken: Ein Zustand kann u. U. in einen

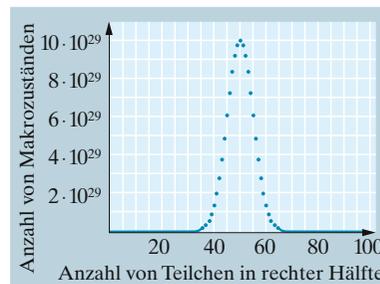


Abb. 5.47. Wahrscheinlichkeiten der Verteilungen von 100 Teilchen über zwei gleiche Teilvolumina

weniger wahrscheinlichen übergeben, aber nur, wenn dessen Wahrscheinlichkeit höchstens um einen Faktor kleiner ist, der nicht viel kleiner ist als Eins. Anders ausgedrückt: Die Entropie kann u. U. etwas abnehmen, aber nur um wenige Einheiten von der Größe k . Dies führt zur Theorie der **Schwankungserscheinungen**. Im Allgemeinen handelt es sich um sehr viel größere Entropieänderungen, und dann gilt der Satz, dass die Entropie nicht abnimmt, mit derselben oder größerer Sicherheit als die üblichen, nichtstatistischen Naturgesetze, nämlich mit einer Sicherheit, die sich exakt zahlenmäßig angeben lässt.

× Beispiel ...

Welche Entropieänderungen treten auf beim Mischen eines vorher sortierten Kartenspiels, beim Schütteln der Schachtel, die anfangs oben weißen, unten schwarzen Sand enthielt?

Ein Spiel von 52 Karten hat $52!$ mögliche Anordnungen. Nach *Stirling* ist $52! \approx 52^{52} \sqrt{2\pi \cdot 52} / e^{52} \approx 10^{70}$. Das Mischen führt eine ganz bestimmte, durch Sortieren erzeugte Anordnung in *irgendeine* andere über, erhöht also die Zustandswahrscheinlichkeit um den Faktor $10^{70} \approx e^{160}$ und die Entropie um $\Delta S = k \ln(P/P_1) \approx 160k \approx 2 \cdot 10^{-21} \text{ J/K}$. Eine Kiste von 50l enthält etwa 10^{13} feine Sandkörner von 0,1 mm Durchmesser, die Hälfte weiß, die Hälfte schwarz. Jedes Korn kann mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ oben oder unten sein. Die Anordnung, in der alle weißen Körner oben sind, hat die Wahrscheinlichkeit $P_1 = 2^{-N}$, die Wahrscheinlichkeit der Mischung kann $P_2 \approx 1$ gesetzt werden. Beim Schütteln erfolgt die Entropieänderung $\Delta S = k \ln 2^N = kN \ln 2 \approx 10^{13} k \approx 10^{-10} \text{ J/K}$.

Ein System hört erst dann auf, seinen Zustand zu ändern, wenn es den Zustand mit der maximalen Wahrscheinlichkeit, also der maximalen Entropie erreicht hat, die unter den gegebenen Bedingungen möglich ist. Dieser Zustand maximaler Entropie hat alle Eigenschaften eines Gleichgewichts: Ändert man ihn zwangsweise, bildet sich diese Änderung sofort wieder zurück, sobald man das System sich selbst überlässt. All dies gilt nur für isolierte Systeme, die mit ihrer Umgebung weder Materie noch Energie austauschen. Wenn Energieaustausch möglich ist, muss man das thermische Gleichgewicht etwas anders charakterisieren (Abschn. 5.5.7). In jedem Fall sind aus dem Gleichgewicht noch Schwankungen möglich, bei denen sich die Entropie um einige k ändert (s. oben).

Die Definition der Entropie S als Logarithmus der Wahrscheinlichkeit eines Zustandes bietet einen weiteren Vorteil: Die Entropie ist eine additive Zustandsfunktion, genau wie die Energie. Wenn man zwei Systeme zu einem Gesamtsystem zusammenfasst, addieren sich ihre Entropien S_1 und S_2 . Dies spiegelt einfach die Grundeigenschaft der Logarithmusfunktion wider und die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeiten P_1 und P_2 der Zustände der beiden Systeme sich zu der Wahrscheinlichkeit des Gesamtzustandes multiplizieren:

$$P = P_1 P_2 \quad S = S_1 + S_2 . \quad (5.69)$$

Man hätte von vornherein sagen können: Wenn wir eine *additive* Zustandsfunktion suchen, die die Wahrscheinlichkeit des Zustandes ausdrückt, kommt nur ein Logarithmus der Wahrscheinlichkeit in Frage.

5.5.3 Entropie und Wärmeenergie

Die klassische Definition der Entropie klingt völlig anders als die obige. Sie geht vom Differential der Zustandsfunktion S aus und sagt

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (5.70)$$

Um die Entropiedifferenz dS zwischen zwei nahe benachbarten Zuständen zu bestimmen, führe man den einen *reversibel* in den anderen über und messe die Wärmeenergie dQ , die das System dabei aufnimmt. Dieses dQ dividiert durch die absolute Temperatur des Systems ist die Entropiedifferenz.

Die Äquivalenz beider Definitionen weisen wir am einfachsten wieder an der Expansion eines Gases aus einem Halbgefäß in das ganze nach. Gemäß der statistischen Definition (5.68) nimmt hierbei die Entropie um

$$S = k N \ln 2 \quad (5.71)$$

zu. Für die Definition (5.70) können wir die beiden Zustände nicht ineinander überführen, indem wir das Gas einfach durch ein Loch in der Zwischenwand ausströmen lassen, denn diese Definition verlangt ausdrücklich einen *reversiblen* Übergang. Die Expansion ist reversibel, wenn wir das Gas einen Kolben sehr langsam wegschieben lassen. Der Kolben bleibt langsam, wenn wir den Druck auf ihn von außen immer nur ganz wenig kleiner halten als den jeweiligen Gasdruck. Dabei leistet das Gas Arbeit und würde sich daher abkühlen, falls wir ihm die geleistete Arbeit nicht gleich als Wärme wieder zuführen. Wir wollen das tun, damit wir genau den verlangten Endzustand 2 erreichen, in dem ja die Temperatur genauso groß sein muss wie zu Anfang im Zustand 1. Die Arbeit bei der isothermen Expansion auf das doppelte Volumen ist nach (5.29)

$$W = -\nu RT \ln \frac{V_1}{V_2} = \nu RT \ln 2.$$

Diese Arbeit wandeln wir in Wärme um (was immer möglich ist) und führen sie dem Gas wieder zu. Damit ergibt sich die Entropiezunahme beim Übergang von Zustand 1 nach Zustand 2 zu

$$S = \frac{\nu RT \ln 2}{T} = \nu R \ln 2.$$

Beachten wir noch, dass die ν mol unseres Gases genau $N = \nu N_A$ Moleküle enthalten und dass $R = N_A k$ ist, erhalten wir genau dieselbe Entropiedifferenz (5.71) wie aus der statistischen Definition.

5.5.4 Berechnung von Entropien

Thermodynamische Größen lassen sich auf zwei Arten einführen und berechnen: Makroskopisch-phänomenologisch und mikroskopisch-

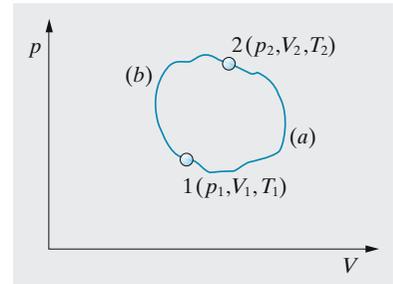


Abb. 5.48. Bei reversibler Änderung vom Zustand 1 nach 2 ist die Summe der reduzierten Wärmen vom Weg unabhängig

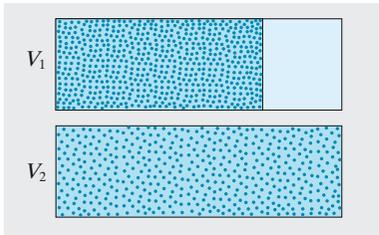


Abb. 5.49. Zur Volumenabhängigkeit der Entropie eines Gases

statistisch. Je nach den Umständen ist eine oder die andere Betrachtungsweise durchsichtiger und tragfähiger. Im Bereich der klassischen Thermodynamik (Theorie der Gleichgewichte) sind beide äquivalent, aber die Nichtgleichgewichte sind der statistischen Auffassung besser zugänglich. Wir werden beide Darstellungen entwickeln, aber jeweils diejenige betonen, die im gegebenen Fall überlegen erscheint. Kapitel 19 bringt eine geschlossene Einführung in die statistische Physik.

Zunächst verallgemeinern wir die Betrachtung über die **isotherme Expansion** eines Gases. Es möge sich von einem beliebigen Volumen v auf ein Volumen V ausdehnen. Ein bestimmtes Molekül hat die Wahrscheinlichkeit v/V , sich in v aufzuhalten, obwohl man ihm V anbietet. Die Wahrscheinlichkeit, dass *alle* N Moleküle dort sind, ist $P = (v/V)^N$ (die Einzelwahrscheinlichkeiten multiplizieren sich). Dagegen hat der Zustand gleichmäßiger Verteilung über das ganze Volumen V praktisch die Wahrscheinlichkeit 1. So ergibt sich die Entropiedifferenz zwischen den beiden Endzuständen der Expansion

$$S = k \ln \frac{1}{P} = kN \ln \frac{V}{v}. \quad (5.72)$$

Jetzt betrachten wir zwei verschiedene Gase, eines aus N_1 , das andere aus N_2 Molekülen. Sie seien erst getrennt, dann sollen sie sich vermischen, was natürlich ein irreversibler Vorgang ist. Wir bestimmen den Entropiezuwachs dabei, die **Mischungsentropie**. Wir setzen Temperatur- und Druckgleichheit in den zunächst getrennten Teilvolumina V_1 und V_2 voraus. Das bedeutet $N_1/V_1 = N_2/V_2$. Der Ausgangszustand „Alle Moleküle der Sorte 1 in V_1 “ hat nach (5.72) eine um $kN_1 \ln(V/V_1) = kN_1 \ln((N_1 + N_2)/N_1)$ kleinere Entropie als der Endzustand, wo die Moleküle 1 über $V = V_1 + V_2$ gleichmäßig verteilt sind. Analog hat der Zustand „Alle Moleküle der Sorte 2 in V_2 “ eine um $kN_2 \ln((N_1 + N_2)/N_2)$ kleinere Entropie als die gleichmäßige Verteilung dieser Moleküle. Im ganzen ist die Mischungsentropie

$$S_m = kN_1 \ln \frac{N_1 + N_2}{N_1} + kN_2 \ln \frac{N_1 + N_2}{N_2}. \quad (5.73)$$

Man kann dies wie viele andere Ausdrücke auch über die Binominalformel (Bernoulli-Verteilung)

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (5.74)$$

und die **Stirling-Näherung** für die Fakultät

$$n! \approx \frac{n^n}{e^n} \quad \left(\text{genauer: } n! \approx \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} \right) \quad (5.75)$$

gewinnen, oder auch mittels der makroskopischen Definition (5.70), und zwar über einen raffinierten Kreisprozess mit zwei semipermeablen Membranen, eine nur durchlässig für Moleküle 1, die andere nur für Moleküle 2 (Aufgabe 5.5.2). Der Entropiegewinn infolge Mischung ist entscheidend

für die chemische Thermodynamik (Abschn. 5.5.8) und viele andere Probleme.

Schließlich betrachten wir den **Wärmeaustausch** zwischen zwei Körpern 1 und 2 mit den Temperaturen T_1 und T_2 . Eine Wärmemenge dQ gehe von 2 nach 1 über. Dann wird nach der makroskopischen Definition (5.70) die Entropie von 2 um dQ/T_2 kleiner, die von 1 um dQ/T_1 größer. Insgesamt ist die Entropieänderung

$$dS = dQ \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right). \tag{5.76}$$

Dies ist genau dann positiv, d. h. der Vorgang läuft genau dann von selbst ab, wenn $T_2 > T_1$ ist. Statistisch versteht man dies auch. Man muss dazu die Moleküle im Impulsraum (Abschn. 1.5.9) betrachten. Im Anfangszustand sind einige (die des Körpers 2) über einen großen Impulsbereich verteilt, entsprechend ihrer höheren mittleren Energie, die anderen (die des Körpers 1) nur über einen kleineren Bereich. Was für den Ortsraum gilt, nämlich dass eine gleichmäßige Verteilung über ein größeres Volumen wahrscheinlicher ist, gilt auch für den Impulsraum, nur mit dem Unterschied, dass hier die Teilchen sich nicht ganz beliebig verteilen können, weil ihre Bewegung durch die Bedingung konstanter Gesamtenergie eingeschränkt ist.

Wir wissen jetzt endlich, warum die im Abschn. 5.5.1 als typisch irreversibel bezeichneten Vorgänge irreversibel sind.

Jetzt bestimmen wir noch auf beide Arten die Gesamtentropie eines idealen Gases aus N Molekülen, genauer den Entropieunterschied zwischen einem solchen Gas, wenn es das Volumen V und die Temperatur T hat, und dem gleichen Gas bei V_0, T_0 (i. Allg. sind ja nur Entropie-*unterschiede* physikalisch wesentlich, ähnlich wie beim elektrischen Potential; eine absolute Normierung der Entropie bringt erst die Quantenstatistik, Abschn. 19.3).

Statistisch: Die Verteilung der N Teilchen über den normalen Raum (Ortsraum) bringt nach (5.72) einen Betrag

$$S_V = kN \ln \frac{V}{V_0}.$$

Die Verteilung über den **Impulsraum** bringt ganz analog $kN \ln(V'/V'_0)$. Die Volumina V' und V'_0 , die die Teilchen im Impulsraum einnehmen, müssen wir bestimmen. Die mittlere Translationsenergie ist $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$, der zugehörige Impuls ist $I = mv = \sqrt{2mE} = \sqrt{3mkT}$. Die Teilchen sind über eine Art Kugel im Impulsraum verteilt, deren Radius von der Größenordnung I , deren Volumen also $V' \sim I^3 \sim T^{3/2}$ ist. Diese Kugel hat zwar keine scharfen Ränder, aber die Energiebedingung sperrt die Teilchen ebenso effektiv im Impulsraum ein wie eine feste Wand im Ortsraum. Wenn T steigt, dehnt sich die Kugel aus, was denselben Effekt hat wie eine Ausdehnung des verfügbaren Ortsvolumens. Der Impulsbeitrag wird also

$$S_I = kN \ln \frac{T^{3/2}}{T_0^{3/2}} = \frac{3}{2}kN \ln \frac{T}{T_0}.$$

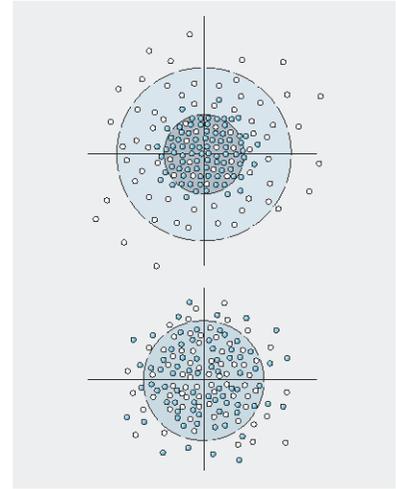


Abb. 5.50. Temperaturnivellierung: Oben gibt es „kalte“ Moleküle (blau), die ein geringes, und „warme“, die ein großes Impulsraumvolumen einnehmen. Dieser Zustand ist weniger wahrscheinlich als der untere, wo alle Moleküle das Impulsraumvolumen gemeinsam erfüllen, das ihnen der Energiesatz zubilligt

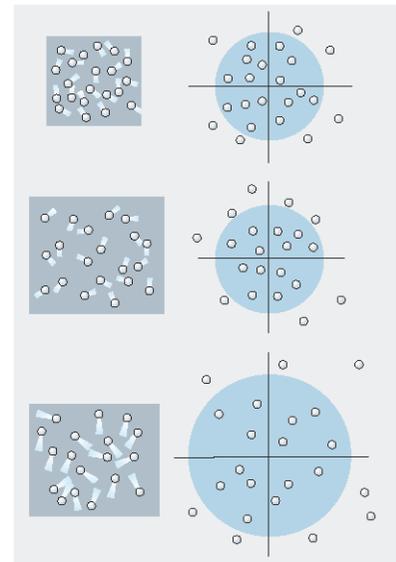


Abb. 5.51. Isotherme Expansion ohne Arbeitsleistung, gefolgt von einer isochoren Erwärmung. In beiden Fällen nimmt die Entropie zu, einmal weil das übliche Volumen, zum andern weil das Impulsraumvolumen zunimmt

Die Rotationsfreiheitsgrade spannen ebenfalls einen Impulsraum auf. Dieser hat eine Dimension pro Freiheitsgrad, jeder liefert einen Beitrag $\frac{1}{2}kN \ln(T/T_0)$, also ist die Gesamtentropie

$$S = kN \left(\ln \frac{V}{V_0} + \frac{f}{2} \ln \frac{T}{T_0} \right). \quad (5.77)$$

Thermodynamisch erhalten wir natürlich dasselbe aus $S = \int dQ/T$. Wir ändern z. B. zuerst isotherm das Volumen von V_0 auf V , was nach (5.72) liefert $kN \ln(V/V_0)$. Dann führen wir isochor die Wärmeenergie $\Delta Q = Mc_V(T - T_0)$ zu (M : Masse des Gases). Mit $c_V = \frac{1}{2}fk/m$ (5.9) und $M/m = N$ erhalten wir dann im Ganzen ebenfalls (5.77).

5.5.5 Der 2. Hauptsatz der Wärmelehre

Mit der statistischen Definition der Entropie nimmt der **2. Hauptsatz**, der die Richtung der Vorgänge in der Natur bestimmt, die evidente Form an:

Ein System geht nie von selbst in einen bedeutend unwahrscheinlicheren Zustand über. Seine Entropie wird durch Fluktuationen höchstens vorübergehend um einige k erniedrigt.

Will man nur von direkt makroskopisch beobachtbaren Sachverhalten ausgehen, kann man den 2. Hauptsatz formulieren:

Es gibt irreversible Vorgänge.

Das leuchtet ebenfalls aus der Alltagserfahrung vollkommen ein, ist aber unvollständiger, weil die Möglichkeit von Schwankungserscheinungen nicht berücksichtigt ist. Historisch wurde der 2. Hauptsatz in Anlehnung an Clausius und Kelvin noch anders formuliert:

Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die nichts anderes bewirkt als die Erzeugung mechanischer Arbeit und Abkühlung eines Wärmereservoirs.

Er handelt dann von einer hypothetischen Maschine, einem **Perpetuum mobile zweiter Art**. Sie soll Arbeit leisten, indem sie nichts weiter tut als *einen* Körper abzukühlen (ein Perpetuum mobile erster Art soll sogar ständig Arbeit leisten, ohne sonst irgendetwas in der Welt zu ändern). Der 1. Hauptsatz, der natürlich ein Perpetuum mobile erster Art ausschließt, wäre befriedigt, wenn die Wärme, die sich das Perpetuum mobile aus dem abzukühlenden Körper holt, gleich der Arbeit ist, die geleistet wird. Praktisch wäre ein Perpetuum mobile zweiter Art gleichwertig einem erster Art, denn als abzukühlenden Körper könnte man ja die Erde oder das Meer nehmen, zumal ihnen diese Wärme sehr bald zurückerstattet wird, nämlich nachdem die mechanische Energie durch Reibung aufgezehrt ist. Dieser typisch kapitalistische Wunschtraum – jemand leiht sich eine an sich wertlose Sache, verschafft sich damit alles was er will, und gibt sie trotzdem vollständig zurück – kann nicht funktionieren:

Es gibt kein Perpetuum mobile zweiter Art.

Diese Formulierung ist weniger unmittelbar einleuchtend als die vorige. Sie überzeugt viele Physikkandidaten wohl nur, weil sie sonst durchfallen, und viele Erfinder gar nicht. Sie ist auch nur negative Erfahrung, nämlich die aller Patentämter. Dass es irreversible Vorgänge gibt, ist direkte Alltagserfahrung. Wir zeigen, dass beide äquivalent sind.

Dazu beweisen wir: Wenn die Umkehrung irgendeines irreversiblen Vorgangs vorkäme, könnte man daraus ein Perpetuum mobile zweiter Art bauen; jeden irreversiblen Vorgang könnte man, ohne dass sich sonst etwas in der Welt ändert, umgekehrt ablaufen lassen, indem man insgeheim ein Perpetuum mobile zweiter Art einschaltet. Wir könnten jeden irreversiblen Prozess zur Demonstration benutzen und müssten das eigentlich auch, beschränken uns aber auf den Wärmeübergang von einem warmen zu einem kälteren Körper, der nach der Behauptung nur in dieser Richtung läuft. Dies wäre nicht wahr, wenn es ein Perpetuum mobile zweiter Art gäbe. Wir könnten dieses nämlich Wärme aus dem *kalten* Körper schöpfen und damit Arbeit verrichten lassen. Diese Arbeit führen wir dem wärmeren Körper zu, indem wir sie vollständig in Wärme umsetzen, z. B. durch Reibung, was immer möglich ist. Im Endeffekt hätten wir also nichts getan als Wärme vom kalten zum warmen Körper gebracht, d. h. einen irreversiblen Prozess umgekehrt. Andererseits nehmen wir an, Wärme ließe sich irgendwie vom kalten zum warmen Körper bringen, ohne dass sich sonst etwas in der Welt ändert. Nun gibt es viele Möglichkeiten, aus dem *Rückfluss* von Wärme vom warmen zum kalten Körper Arbeit zu erzeugen, z. B. eine normale Wärmekraftmaschine. Den Wärmeverlust, den der warme Körper dabei erfährt, könnten wir mittels des angenommenen Umkehrprozesses immer decken und somit effektiv nur den kalten Körper abkühlen und Arbeit erzeugen, hätten also ein Perpetuum mobile zweiter Art gebaut.

5.5.6 Reversible Kreisprozesse

Wir greifen die Frage nach dem Wirkungsgrad einer idealen **Wärmekraftmaschine** wieder auf, um diesen Begriff erheblich zu verallgemeinern und *S. Carnots* klassischen Gedankengang nachzuvollziehen, der schließlich zur modernen Thermodynamik führte. Eine Wärmekraftmaschine ist eine Vorrichtung, die, was ihren eigenen Zustand betrifft, periodisch immer wieder den gleichen Zyklus durchläuft, dabei allerdings in der Umgebung einsinnige Veränderungen hinterlässt, speziell bei jedem Zyklus einen bestimmten Arbeitsbetrag abliefern. Diese periodische Wirkungsweise ist allen realen Maschinen eigen. Bei der Wärmekraftmaschine stammt die geleistete Arbeit aus einer Wärmeenergie, die einem Speicher fortlaufend entzogen wird. Der 1. Hauptsatz hätte nichts dagegen, dass diese Umwandlung 100%ig ist, aber der 2. Hauptsatz erklärt das für unmöglich (die Maschine wäre sonst ein Perpetuum mobile zweiter Art). Es muss Wärme übrig bleiben, die an einen anderen Speicher abgeführt wird. Dieser muss eine geringere Temperatur haben als der erste Speicher, denn sonst könnte man die Differenzwärme sehr leicht wieder in den ersten Speicher bringen und hätte ein Perpetuum mobile zweiter Art.

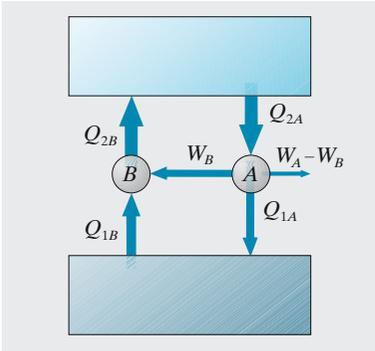


Abb. 5.52. Alle reversiblen Kreisprozesse haben denselben Wirkungsgrad. Sonst würde die dargestellte Kombination Arbeit liefern ($W_A - W_B$ bei jedem Zyklus), ohne etwas anderes zu tun, als das kalte Reservoir noch mehr abzukühlen

Wir nehmen an, die Maschine ändere ihren Zustand immer nur reversibel, und nennen das entstehende Idealgebilde eine **Carnot-Maschine**, den Prozess, den sie zyklisch durchläuft, einen Carnot-Kreisprozess. So nennt man manchmal einen viel spezielleren Prozess, in dem ein Idealgas durch zwei adiabatische und zwei isotherme Arbeitstakte gejaagt wird. Bei uns ist von der Arbeitssubstanz oder der Art des Kreisprozesses noch keine Rede, nur von der Reversibilität der Vorgänge. Die Diskussion und ihre Schlussfolgerung werden also völlig allgemein gültig sein: Was man an Voraussetzungen spart, gewinnt man an Allgemeinheit.

Jede Carnot-Maschine, wie jede reversible Maschine überhaupt, hat zwei mögliche Laufrichtungen: In der einen entnimmt sie dem Speicher 2 bei der Temperatur T_2 die Wärmeenergie Q_2 , erzeugt die Arbeit W und führt dem Speicher 1 bei T_1 die Differenzwärme $Q_1 = Q_2 - W$ zu. Sie läuft als Kraftmaschine. Bei umgekehrter Laufrichtung steckt man die Arbeit W hinein, dem Speicher 2 wird daher mehr Wärme $Q_2 = Q_1 + W$ zugeführt, als dem Speicher 1 entnommen wird (Q_1). Denkt man an die Abkühlung von Speicher 1, dann ist dies eine Kältemaschine.

Der Wirkungsgrad $\eta = W/Q_2$ der Kraftmaschine muss zwischen 0 und 1 liegen. Wäre er größer als 1, würde *beiden* Speichern Wärme entzogen und dabei Arbeit geleistet, im Widerspruch zum 2. Hauptsatz. $\eta < 0$ beschreibt die Kältemaschine.

Wir bauen jetzt zwei verschiedene Carnot-Maschinen, die zwischen den gegebenen Speichern laufen. Sie können nach völlig verschiedenen Prinzipien und mit verschiedenen Substanzen arbeiten. Man sollte erwarten, dass sie dann auch verschiedenen Wirkungsgrad haben. Wäre das der Fall und hätte z. B. die Maschine A das höhere η , benutzen wir sie als Kraftmaschine, die andere (B) als Kältemaschine. A entnimmt dann bei jedem Zyklus die Wärme Q_{2A} aus 2, erzeugt die Arbeit $W_A = \eta_A Q_{2A}$ und liefert Q_{1A} an 1 ab. Die Kältemaschine B entnimmt Q_{1B} aus 1, nimmt die Arbeit W_B auf und liefert die Wärme $Q_{2B} = W_B/\eta_B$ an 2 ab. Wir können ohne weiteres die Maschinen so dimensionieren, dass $Q_{2B} = Q_{2A}$ wird. Dann ändert sich in Speicher 2 auf die Dauer nichts, aber wegen der Annahme $\eta_A > \eta_B$ ist die Arbeit W_B , die B verbraucht, kleiner als die Arbeit W_A , die A erzeugt. Wir gewinnen also im Endeffekt Arbeit, wobei wir nichts weiter tun als den Speicher 1 abkühlen. Dieser Verstoß gegen den 2. Hauptsatz ist nur zu vermeiden, wenn die Annahme $\eta_A > \eta_B$ nicht realisierbar ist, d. h. wenn *alle Carnot-Prozesse den gleichen Wirkungsgrad haben*.

Wesentlich bei diesem Beweis ist, dass die beiden Maschinen A und B reversibel sind, denn sonst könnte man sie nicht wahlweise vorwärts oder rückwärts laufen lassen. Bei einer irreversiblen Maschine ist die Laufrichtung festgelegt. Trotzdem kann man sie wie oben mit einer reversiblen Maschine zusammenschalten, die im Gegensinn läuft. Kann die irreversible Maschine C einen höheren Wirkungsgrad haben als die reversible A? Wir nehmen einmal an, das sei so. Wenn C eine Kraftmaschine ist, würde das genau wie oben heißen, dass die kombinierte Maschine Arbeit leistet, ohne etwas anderes zu tun als z. B. den kalten Speicher abzukühlen. Ist C eine Kältemaschine, dann kann sie ebenfalls keine bessere sein als die Carnot-Maschine. Sie muss nämlich für jedes Joule, das

sie dem Speicher 1 entnimmt, mindestens so viel Arbeit aufnehmen, wie die Carnot-Maschine A für jedes dem Speicher 1 zugeführte Joule leistet. Wäre das nicht so, dann könnte man A und C nach Abb. 5.53 zu einer Verbundmaschine zusammenkoppeln, die zwar insgesamt keine Arbeit hergibt, die aber ständig Wärme vom kalten zum warmen Speicher befördert, was nach dem zweiten Hauptsatz ebenfalls unmöglich ist.

Es gibt also auch keine irreversible Maschine, die einen größeren Wirkungsgrad hätte als die reversible Carnot-Maschine, d. h. es gibt überhaupt keine Maschine, die diese übertrifft.

Der Wirkungsgrad der reversiblen Carnot-Maschine gewinnt so fundamentale Bedeutung. Er hängt weder von der Konstruktion der Maschine noch von der Arbeitssubstanz ab, nur von den Temperaturen der beiden Speicher: $\eta = \eta(T_2, T_1)$. Diesen Zusammenhang kann man durch ähnliche Betrachtungen wie oben noch genauer festlegen (Aufgabe 5.5.11). Wir können, wegen der Unabhängigkeit vom Verlauf des Prozesses und der Arbeitssubstanz, ein beliebiges Beispiel heranziehen, etwa den klassischen Carnot-Prozess aus zwei adiabatischen und zwei isothermen Takten (Abb. 5.27 oder jeden der in Abschn. 5.3.2 behandelten Prozesse) und finden

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \quad (5.46)$$

Am Beispiel des Arbeitsdiagramms für den klassischen Carnot-Prozess erkennt man auch anschaulich, warum ein irreversibler Prozess einen kleineren Wirkungsgrad hat. Wenn die Irreversibilität z. B. daher kommt, dass man, um den Wärmeaustausch mit dem heißen Speicher (T_2) zu beschleunigen, eine Gastemperatur unterhalb T_2 in Kauf nimmt, läuft das Zustandsdiagramm unterhalb der idealen T_2 -Isotherme. Wenn man bei der Expansion den Kolben außen etwas entlastet, damit er sich schneller verschiebt, wenn man also den Druck unter den der Isothermen bzw. Adiabaten entsprechenden Wert senkt, ist der Effekt derselbe: Beim nichtidealen irreversiblen Kreisprozess läuft das Zustandsprogramm überall *innerhalb* des idealen, also wird der Wirkungsgrad kleiner.

5.5.7 Das thermodynamische Gleichgewicht

Ein System ist im Gleichgewicht, wenn sich zeitlich nichts an ihm ändert, obwohl einer solchen Verschiebung kein äußeres Hemmnis im Wege steht. Das Gleichgewicht ist stabil, labil bzw. indifferent, wenn eine gewaltsame Verschiebung Einflüsse auslöst, die das System zum Gleichgewichtszustand zurücktreiben, weiter von ihm wegtreiben, bzw. wenn keine solchen Einflüsse ausgelöst werden. Bei einem mechanischen System sieht man sehr anschaulich, dass ein stabiles Gleichgewicht einem Minimum der potentiellen Energie E_{pot} entspricht. Die (negative) Ableitung von E_{pot} nach einer Lagekoordinate bedeutet nämlich eine Kraft in der entsprechenden Richtung. In einem Minimum verschwinden alle Kräfte, in seiner Umgebung zeigen sie alle zum Minimum hin.

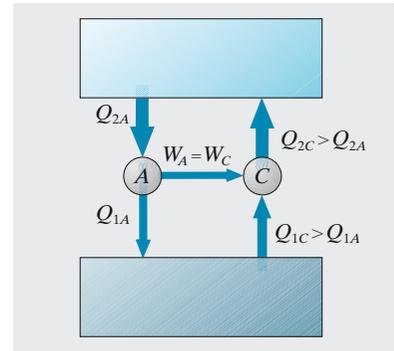


Abb. 5.53. Keine Wärmekraftmaschine oder Kältemaschine kann besser sein als der reversible Kreisprozess. Sonst würde die Kombination aus reversibler Wärmekraftmaschine A und irreversibler Kältemaschine C nichts weiter tun, als Wärme vom kalten zum warmen Reservoir befördern

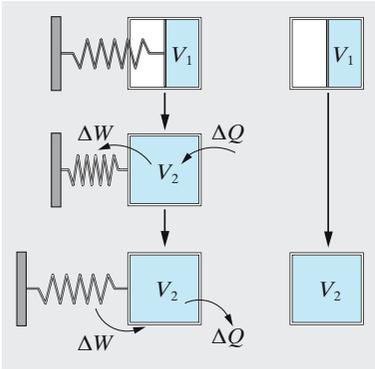


Abb. 5.54. Expansion eines idealen Gases mit reversiblen (*links*) und irreversiblen Prozessen (*rechts*). Der Endzustand ist in beiden Fällen identisch

Wir suchen eine thermodynamische Größe, die zur Charakterisierung des Gleichgewichts eines Systems dieselben Dienste tut wie die potentielle Energie in der Mechanik. Für ein isoliertes System, das weder Materie noch Energie mit der Umgebung austauscht, ist diese Größe einfach die Entropie: Das Gleichgewicht ist der Zustand maximaler Entropie, jeder benachbarte Zustand entwickelt sich im Sinne steigender Entropie zum Gleichgewicht hin, dieses ist daher stabil. Bei einem System, das Energie mit der Umgebung austauschen kann (aber zunächst keine Materie: abgeschlossenes System), muss die Umgebung mit einbezogen werden. Von selbst laufen nur Prozesse ab, für die die Entropie des Gesamtsystems wächst, die Summe der Entropien des betrachteten Systems und seiner Umgebung: $\Delta S_{\text{Syst}} + \Delta S_{\text{Umg}} \geq 0$ ist.

Wir betrachten noch einmal den schon in Abschn. 5.3.3 vorgestellten Prozess, einmal mit reversiblen und einmal mit irreversiblen Prozessen. Zuerst lassen wir das Gas isotherm und reversibel (d. h. sehr langsam) von V_1 nach V_2 expandieren (linker Pfad in Abb. 5.54) und speichern die Arbeit $-\Delta W$ in einer Feder, die das Gas auch reversibel wieder in das Volumen zurückführen kann. Weil die Temperatur konstant ist, wird die innere Energie nicht geändert, $\Delta U = 0$ und die geleistete Arbeit wird nach dem 1. Hauptsatz vollständig der Wärmemenge $\Delta Q = -\Delta W = \nu RT \ln(V_1/V_2)$ entnommen, die ihrerseits der Umgebung entnommen wird. Am Ende des reversiblen Prozesses hat die Umgebung genau die Entropie $\Delta S_{\text{Umg}} = -\nu R \ln(V_1/V_2) = -\Delta S_{\text{Syst}}$ abgegeben, um die die Entropie des Systems erhöht worden ist. Wir können nun diese Arbeit im zweiten Schritt in Wärme umwandeln (immer) und an das System isotherm zurückgeben. Dabei wird genau die Wärmemenge $\Delta Q = T \Delta S_{\text{Syst}} = -T \Delta S_{\text{Umg}}$ wieder an die Umgebung zurückgegeben, sie ist also im selben Zustand wie zu Beginn!

Denselben Endzustand erreichen wir, wenn wir nach Gay-Lussac einfach die Zwischenwand entfernen und das Gas frei, plötzlich und irreversibel expandieren lassen (rechter Pfad in Abb. 5.54). Dabei wird weder Arbeit geleistet ($\Delta W = 0$) noch findet Wärmeaustausch mit der Umgebung statt, die Temperatur bleibt konstant. Die Entropieänderung des Gases muss dieselbe sein wie zuvor, bei diesem irreversiblen Prozess ist Entropie produziert worden, $\Delta S_{\text{Syst}} = \nu R \ln(V_1/V_2)$ und die Gesamtentropie $\Delta S_{\text{Syst}} + \Delta S_{\text{Umg}}$ ist gewachsen.

Der Vergleich der beiden Prozesse – im reversiblen ersten Fall verursacht die Aufnahme von Wärme aus der Umgebung die Entropiezunahme, im zweiten irreversiblen Fall wird die Entropie durch freie Expansion ohne Wärmeaustausch oder Abfuhr von Arbeit erzeugt – illustriert die Ungleichung von Clausius

$$\Delta Q \leq T \Delta S, \quad (5.78)$$

in welcher das Gleichheitszeichen für reversible Prozesse gilt. (Den reversiblen Prozess führen wir in diesem Vergleich nur bis zum ersten Schritt aus.) Mit $\Delta U = \Delta Q - \Delta W$ gilt dann

$$T \Delta S \geq \Delta U - \Delta W \quad \text{oder} \quad -\Delta W \leq \Delta(U - TS), \quad (5.79)$$

wobei wir im zweiten Schritt isothermische Bedingungen angenommen haben. Das thermische Gleichgewicht zeichnet sich durch die Abwesenheit

mechanischer Änderungen aus, $\Delta W = -p\Delta V = 0$. Wir definieren daher ein neues thermodynamisches Potential, die freie Energie, die für $\Delta W = 0$ und wegen (5.79) im Gleichgewicht ein Minimum annehmen muss:

Unter isothermen und isochoren Bedingungen nimmt die **freie Energie** (das **Helmholtz-Potential**) eines Systems im Gleichgewicht ein Minimum an.

$$F = U - TS \quad (5.80)$$

Wenn wir isotherme Zustandsänderungen vornehmen, dann bezeichnet $\Delta F = \Delta U - T\Delta S$ offenbar den Teil von ΔU , der bei reversiblen Prozessen zur Abfuhr von Arbeit verfügbar ist bzw. bei irreversiblen Prozessen zur Entropieerzeugung verbraucht wird. Die Energie ΔU kann eben nicht vollständig in Arbeit umgesetzt werden. Die freie Energie ist das wichtigste der thermodynamischen Potentiale, weil in einem Experiment am einfachsten Temperatur und Volumen konstant zu halten sind.

Die Thermodynamik kennt weitere Situationen, die sich mit analogen Potentialen elegant beschreiben lassen. Wird neben der Temperatur auch der Druck konstant gehalten, gilt mit $\Delta W = -p\Delta V$ auch

$$\Delta(U + pV - TS) = 0. \quad (5.81)$$

Unter isotherm-isobaren Bedingungen ist das Gleichgewicht gegeben durch das Minimum der **freien Enthalpie** (des **Gibbs-Potentials**)

$$G = U + pV - TS. \quad (5.82)$$

G -Differenzen treiben die Prozesse an. Wenn Wärmeaustausch unterbunden ist, aber Arbeitsleistung möglich ist, wird $T\Delta S = 0$, also wird aus (5.79) bei $p = \text{const}$

$$\Delta(U + pV) = 0. \quad (5.83)$$

Unter *adiabatisch-isobaren* Bedingungen liegt das Gleichgewicht im Minimum der **Enthalpie**

$$H = U + pV, \quad (5.84)$$

unter *adiabatisch-isochoren* Bedingungen im Minimum der **Energie** U .

Um die Tragweite dieser Bedingungen zu prüfen, betrachten wir ein System aus Teilchen, die zwei verschiedene Zustände A und A^* einnehmen können, z. B. einen Grund- und einen angeregten Zustand. Die freien Enthalpien pro Teilchen seien g und g^* . Es sei $g^* > g$. Man sollte meinen, dann liege das Gleichgewicht des Prozesses $A \rightleftharpoons A^*$ ganz „links“, d. h. alle Teilchen seien im Grundzustand. Dabei hätten wir aber die **Mischungsentropie** vergessen. Die freie Enthalpie eines Gemisches aus n Teilchen A und n^* Teilchen A^* ist nicht einfach $ng + n^*g^*$, sondern dazu kommt die Mischungsentropie, multipliziert mit $-T$. Wenn nur N Teilchen A

vorhanden sind und keine Teilchen A^* , genügt zur Kennzeichnung des Zustandes die Angabe der Lagen und Geschwindigkeiten dieser N Teilchen. Wenn dagegen *ein* Teilchen A^* dabei ist, muss man außerdem noch angeben, *welches* Teilchen angeregt ist. Da jedes der N Teilchen hierfür in Frage kommt, ist die Wahrscheinlichkeit des Zustandes 2 aus $N - 1$ Teilchen A und einem A^* genau N -mal größer als die des Zustandes 1 aus N Teilchen A :

$$\frac{P_2}{P_1} = N .$$

Beim Übergang zum Zustand 2 muss zwar eine Anregungsenthalpie $\Delta H = g^* - g$ aufgewandt werden, dafür steigt aber auch die Entropie um $\Delta S = k \ln(P_2/P_1) = k \ln N$. Wenn gerade $\Delta H = T \Delta S$ ist, haben beide Zustände gleiches G (wäre z. B. $T \Delta S$ ein wenig größer als ΔH , läge das Gleichgewicht beim Zustand 2). Das ist der Fall bei $kT \ln N = g^* - g$ oder $1/N = e^{-(g^*-g)/(kT)}$. Unter N Teilchen ist eins angeregt, unter n Teilchen sind n^* angeregt, wobei

$$\frac{n^*}{n} = \frac{1}{N} = e^{-(g^*-g)/(kT)} . \quad (5.85)$$

Wir erhalten wieder die Boltzmann-Verteilung.

Das nächste Beispiel ist ein reiner Stoff, etwa Wasser. Es kann als Dampf, Flüssigkeit oder Eis vorliegen. Da alle Teilchen jeweils gleichartig sind, ist keine Mischungsentropie zu berücksichtigen. Dafür wollen wir den vollen Bereich der Variablen T und p untersuchen. Jeder der drei Aggregatzustände hat eine eigene Funktion $G(T, p)$, dargestellt durch eine über der T, p -Ebene ausgespannte Fläche. Für jedes Paar solcher Flächen sind zwei Fälle denkbar: Eine der Flächen liegt überall tiefer als die andere, oder die Flächen schneiden sich, und zwar in einer Kurve. Im ersten Fall liegt im Gleichgewicht für alle T und p nur der Zustand mit dem tieferen G vor. Dasselbe gilt im Fall 2 lokal bei T, p -Werten außerhalb der Schnittkurve. Auf der Schnittkurve sind dagegen beide Aggregatzustände im Gleichgewicht, z. B. kann der Dampf in beliebiger Menge mit der Flüssigkeit koexistieren. Wir erkennen die Eigenschaften des Siedepunktes wieder: Die Schnittkurve $T(p)$ der „flüssigen“ und der „gasförmigen“ G -Fläche beschreibt den Siedepunkt und seine Druckabhängigkeit.

Um die Situation quantitativ zu beherrschen, müsste man $G(T, p)$ für alle drei Aggregatzustände berechnen. Das gelingt aus dem molekularen Bild nur angenähert. Wir führen eine einfache Näherungsbetrachtung durch. In der Flüssigkeit und noch mehr im Festkörper sind die Moleküle aneinander gebunden. Diese Bindungsenergie senkt die Energie U der kondensierten Zustände, sodass

$$U_f < U_{fl} < U_g .$$

Andererseits haben die Moleküle im Gas volle Freiheit, das ganze verfügbare Orts- und Impulsraumvolumen einzunehmen. Im kondensierten Zustand steht ihnen nur das sehr viel kleinere Volumen zur Verfügung, das die Nachbarn ihnen lassen, und in dem sie Schwingungen oder langsame Wanderungen ausführen können. Das Impulsraumvolumen ist weniger

stark reduziert, denn auch hier ist die mittlere kinetische Energie pro Freiheitsgrad $\frac{1}{2}kT$. Die Entropien staffeln sich also wie

$$S_f < S_{fl} < S_g .$$

Im Wasser kann sich der Molekülschwerpunkt nur in einem Teil des Molvolumens V_{fl} verschieben. V_{fl} ist selbst schon 1 250mal kleiner als das Molvolumen V_g des Gases unter Normalbedingungen (Dichte des Wasserdampfes $0,80 \text{ kg m}^{-3}$). Diesen freien Anteil von V_{fl} müssen sich die Wassermoleküle selbst freikämpfen. Sie üben, mikroskopisch gesehen, einen $V_g/V_{fl} = 1\,250$ mal größeren Druck aus als im Dampf. Damit ergibt sich das freie Volumen

$$\Delta V \approx \kappa V_{fl} p = \kappa V_{fl} V_g V_{fl}^{-1} \cdot 1 \text{ bar} = \kappa V_g \cdot 1 \text{ bar}$$

($\kappa = 5 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$: Kompressibilität des Wassers). Die Entropiedifferenz ist $S_g - S_{fl} = kN \ln(V_g/\Delta V)$, oder für ein mol

$$s_g - s_{fl} = R \ln(V_g/\Delta V) = -R \ln(\kappa \cdot 1 \text{ bar}) = 80 \text{ J/mol K} .$$

Die Differenz messen wir direkt als Verdampfungswärme (genauer: **Verdampfungsenthalpie**); für Wasser $2,3 \cdot 10^6 \text{ J/kg} = 4 \cdot 10^4 \text{ J/mol}$. Die Gleichgewichtsbedingung $H_g - H_{fl} = T(S_g - S_{fl})$ ergibt einen Siedepunkt

$$T_s = 4 \cdot 10^4 \text{ J mol}^{-1} / 80 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 500 \text{ K} ,$$

was als grobe Schätzung nicht zu schlecht ist. In Wirklichkeit ist offenbar S_{fl} noch kleiner als geschätzt: Die Moleküle sind noch weniger frei als angenommen, besonders impulsmäßig. Für andere Flüssigkeiten ist eine Verdampfungsenthalpie $\Delta S = \Delta H/T$, durchaus typisch (**Regel von Pictet-Trouton**; sie gilt von flüssigem N_2 und O_2 bis zum Siedeverhalten von Metallen, weniger gut allerdings für H_2 und He).

5.5.8 Chemische Energie

Chemische Reaktionen sind immer noch die wichtigsten Energiequellen der Menschheit. Biologisch gesehen leben wir überwiegend von der chemischen Energie der Nahrung, technisch von fossiler organischer Substanz. Dazu kommen Tausende von Reaktionen, die biologisch oder technisch nicht wegen ihrer Energieausbeute, sondern wegen ihrer Produkte wichtig sind.

Wovon hängt es ab, ob eine gegebene chemische Reaktion von selbst abläuft? Bis wohin läuft sie, d. h. welches ist der Endzustand, den das Reaktionsgemisch schließlich annimmt? Wie viel Energie wird dabei frei und in welcher Form? Wie schnell verläuft die Reaktion, wie kann man sie ggf. beschleunigen? Die klassische Thermodynamik beantwortet alle diese Fragen in sehr einfacher Weise; nur für die letzte muss sie einige kinetische Hilfsbegriffe heranziehen.

Ob eine Reaktion spontan ablaufen kann, hängt wie bei jedem anderen Prozess davon ab, ob die freie Enthalpie G dabei abnimmt, d. h. ob G für die Endprodukte der Reaktion kleiner ist als für die Ausgangsprodukte (wir setzen konstantes T und p voraus; bei konstantem T und V entscheidet nicht G , sondern F). Die Reaktion hört auf, wenn keine weitere Möglichkeit zur G -Senkung mehr besteht. Üblicherweise rechnet man die Differenzen thermodynamischer Größen als Unterschiede zwischen End- und Ausgangszustand, genannt freie Reaktionsenthalpie $\Delta G = G_{\text{End}} - G_{\text{Ausg}}$, Reaktionsenthalpie ΔH usw.: Dann muss $\Delta G < 0$ sein, damit die Reaktion spontan (irreversibel) abläuft. Bei $\Delta G = 0$ hört sie auf.

Wir betrachten eine ganz allgemeine Reaktion, bei der die Moleküle A_1, A_2, \dots, A_k direkt oder indirekt in die Moleküle $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_l$ übergehen (eine einfachere Reaktion wird in Abschn. 5.5.7 untersucht). Die Reaktionsgleichung lautet

$$\sum_{i=1}^k \nu_i A_i = \sum_{i=k+1}^l \nu_i A_i . \quad (5.86)$$

ν_i sind die stöchiometrischen Faktoren, die angeben, wie viele Moleküle A_i am Reaktionsakt beteiligt sind. Beispiel:



Hier ist $A_1 = \text{H}_2$, $A_2 = \text{O}_2$, $A_3 = \text{H}_2\text{O}$, $\nu_1 = \nu_3 = 2$, $\nu_2 = 1$. Man kann die Endprodukte formal auch auf die linke Seite bringen, wobei allerdings ihre ν_i negativ werden:

$$\sum_{i=1}^l \nu'_i A_i = 0 . \quad (5.88)$$

Wenn von der Substanz A_i eine Menge von N_i mol vorhanden ist, enthält die freie Enthalpie G zunächst die Summe $\sum N_i g_i$ (g_i ist die freie Enthalpie von 1 mol A_i). Das wäre schon alles, wenn die Reaktionspartner ungemischt nebeneinander lägen. Wenn dann z. B. die freie Enthalpie der Endprodukte kleiner wäre als die der Ausgangsprodukte, würde alles vollständig durchreagieren, bis mindestens einer der Ausgangsstoffe (oder bei stöchiometrischem Verhältnis der N_i alle Ausgangsstoffe) vollständig verbraucht wäre. In Wirklichkeit sind die Partner, um reagieren zu können, als Gas oder als Lösung molekular gemischt. In beiden Fällen entsteht so eine Mischungsentropie, die nach (5.73) den Wert hat

$$S_m = -R \sum N_i \ln \frac{N_i}{\sum N_i} . \quad (5.89)$$

Sie ist immer positiv, verringert also den G -Wert des Gemisches um TS_m :

$$G = \sum N_i g_i + RT \sum N_i \ln \frac{N_i}{\sum N_i} .$$

Daher ist es günstiger, wenn nicht alles durchreagiert, sondern etwas von den Ausgangsstoffen übrigbleibt, um Mischung zu ermöglichen. Das Gleichgewicht, d. h. der Endzustand der Reaktion liegt da, wo G sich durch keinen Stoffumsatz mehr verringern lässt, wo G also hinsichtlich erlaubter Änderungen der Molzahlen N_i ein Minimum hat. Erlaubte Änderungen der N_i sind durch die Reaktionsgleichung miteinander gekoppelt. Wenn in (5.87) 1 mol O_2 verschwindet, müssen gleichzeitig 2 mol H_2 verschwinden und 2 mol H_2O entstehen. Allgemein führen wir versuchsweise einen „Formelumsatz“ von $\Delta \zeta$ Einheiten durch, d. h. wir lassen $\Delta N_i = \nu'_i \Delta \zeta$ mol des Stoffes A_i reagieren (wenn ν'_i negativ ist, d. h. der Stoff in (5.86) rechts steht, bedeutet das eine Entstehung von $|\nu_i| \Delta \zeta$ mol). Hierbei ändert sich G um

$$\begin{aligned} \Delta G = & \sum g_i \Delta N_i + RT \left(\sum \ln N_i \Delta N_i + \sum \Delta N_i \right. \\ & \left. - \sum \Delta N_i \ln \sum N_i - \sum N_i \frac{\sum \Delta N_i}{\sum N_i} \right) \end{aligned}$$

(man beachte $\ln(N_i / \sum N_i) = \ln N_i - \ln \sum N_i$ und $\Delta(N_i \ln f) = \ln f \Delta N_i + \Delta f N_i / f$). Das dritte und das fünfte Glied heben einander weg. Es bleibt mit Hilfe von $\Delta N_i = \nu'_i \Delta \zeta$

$$\Delta G = \left(\sum g_i \nu'_i + RT \sum \nu'_i \ln N_i - RT \sum \nu'_i \ln \sum N_i \right) \Delta \zeta . \quad (5.90)$$

Das Gleichgewicht liegt im Minimum von G , d. h. wo G sich nicht ändert, wenn eine kleine Menge $\Delta\zeta$ durchreagiert:

$$-\sum g_i v'_i + RT \sum v'_i \ln \sum N_i = RT \sum v'_i \ln N_i .$$

Wir dividieren durch RT und erheben die ganze Gleichung in den Exponenten. Dann wird die rechte Summe zum Produkt, die v'_i werden zu Exponenten der N_i :

$$\left(\sum N_i \right)^{\sum v'_i} \exp \left(-\frac{\sum g_i v'_i}{RT} \right) = \prod N_i^{v'_i} , \quad (5.91)$$

z. B. für die Reaktion (5.87), wo $\sum v'_i = 1$ ist

$$(N_{O_2} + N_{H_2} + N_{H_2O}) \cdot \exp \left(-\frac{g_{O_2} + 2g_{H_2} - 2g_{H_2O}}{RT} \right) = \frac{N_{O_2} N_{H_2}^2}{N_{H_2O}^2} . \quad (5.92)$$

Das ist das **Massenwirkungsgesetz**. Die linke Seite ist konstant, wenn die äußeren Umstände gegeben sind. Sie wird als Massenwirkungs- oder Gleichgewichtskonstante K^{-1} abgekürzt; man nimmt also das Reziproke von (5.91), sodass die Endprodukte im Zähler stehen:

$$K = \left(\sum N_i \right)^{-\sum v'_i} \cdot \exp \left(\frac{\sum v'_i g_i}{RT} \right) . \quad (5.93)$$

Der Faktor vor dem Exponenten tritt nur dann in Erscheinung, wenn $\sum v'_i \neq 0$, d. h. wenn sich bei der Reaktion die Gesamtanzahl ändert. Nur dann spielt der Druck explizit eine Rolle. $\sum N_i$ ist ja proportional dem Gesamtdruck der Reaktionspartner. Im Exponentialausdruck steckt die Differenz der freien Enthalpien der Stoffe links bzw. rechts in der üblichen Reaktionsgleichung (5.86). Ist diese Differenz positiv und groß, d. h. liegen die Endprodukte um viele RT tiefer in G , dann ist K sehr groß, d. h. das Gleichgewicht liegt „auf der rechten Seite“.

Reaktionsenthalpien usw. werden üblicherweise als Gesamtenthalpie der Stoffe auf der rechten Seite der Reaktionsgleichung minus der Gesamtenthalpie der Stoffe auf der linken Seite gerechnet. Bedingung dafür, dass sich Stoffe links in Stoffe rechts umwandeln, ist also ein negativer Wert von ΔG . Die entsprechende Festsetzung gilt auch für ΔH und ΔS .

Wir untersuchen noch, um wie viel die freie Enthalpie des Reaktionsgemisches sich ändert, wenn wir eine Formeleinheit umsetzen. Im Gleichgewicht ist diese Änderung definitionsgemäß Null. Bei beliebiger Konzentration der Partner ergibt (5.90) mit $\Delta\zeta = 1$

$$\Delta G = \sum v'_i g_i - RT \ln \sum N_i \sum v'_i + RT \sum v'_i \ln N_i ,$$

oder vereinfacht mittels der Definition (5.93) von K :

$$\Delta G = RT \ln K + RT \sum v'_i \ln N_i . \quad (5.94)$$

Je nach den Konzentrationen N_i kann dies positiv oder negativ sein. Das hängt davon ab, ob wir uns rechts oder links vom Gleichgewicht befinden, d. h. ob die rechten oder die linken Substanzen höhere Konzentrationen haben als dem Gleichgewicht entspricht. Demgemäß ändert die Reaktion ihren Richtungssinn: Sie strebt immer dem Gleichgewicht zu. Wenn alle Molzahlen N_i gleich 1 sind (d. h. gewöhnlich: Wenn alle Substanzen in der Standardkonzentration 1 mol/l vorliegen), nimmt ΔG seinen *Standardwert* an

$$\Delta G^0 = -RT \ln K . \quad (5.95)$$

Gleichgewichtskonstante K und freie Standardenthalpie ΔG^0 lassen sich also einfach durcheinander ausdrücken.

ΔG lässt sich aufspalten in ΔH und $-T \Delta S$. ΔH ist die **Reaktionswärme**, bei konstantem p gemessen (bei konstantem V , also in der festverschlossenen Kalorimeterbombe, misst man nur ΔU als Reaktionswärme; dann ist ΔF statt ΔG entscheidend für die Richtung des Ablaufes). ΔH wird nicht oder nur wenig durch die Mischung beeinflusst; es handelt sich ja um Gase oder verdünnte Lösungen, in denen die Wechselwirkung der Partner außerhalb des eigentlichen Reaktionsaktes schwach ist. Daher lässt sich ΔH als Summe der spezifischen Enthalpien der Partner darstellen: $\Delta H = \sum v_i' h_i$. In (5.93) eingesetzt:

$$K = \left(\sum N_i \right)^{-\sum v_i'} \exp \left(\frac{\sum v_i' h_i}{RT} - \frac{\sum v_i' s_i}{R} \right). \quad (5.96)$$

Man kann ΔH am einfachsten bestimmen, indem man $\ln K$ über $1/T$ aufträgt (**Arrhenius-Auftragung**). In diesem Diagramm erhält man eine Gerade mit der Steigung $\Delta H/R$:

van't Hoff-Gleichung

$$\frac{\partial \ln K}{\partial T^{-1}} = \frac{\Delta H}{R}. \quad (5.97)$$

Für die Differenzen aller Zustandsgrößen wie ΔG , ΔH usw. gilt ein Additionsgesetz, das zuerst von *Hess* für die Reaktionswärmen formuliert wurde (noch vor Aufstellung des Energiesatzes): Die molare Energie bzw. freie Enthalpie einer Reaktion ist gleich der Summe dieser Größen für aufeinander folgende Teilreaktionen, die von denselben Ausgangsstoffen zu denselben Endstoffen führen. Demnach kann man diese Größen für viele Reaktions Schritte bestimmen, die einer direkten Messung nicht zugänglich sind. Zum Beispiel ist ΔH für $2C + O_2 = 2CO$ nicht direkt messbar, weil dabei immer auch CO_2 entsteht. Die Reaktionen $2C + 2O_2 = 2CO_2$ und $2CO + O_2 = 2CO_2$ sind dagegen leicht durchführbar, und als Differenz ihrer Reaktionsenthalpien von $-2 \cdot 394 \text{ kJ/mol}$ und $2 \cdot 284 \text{ kJ/mol}$ ergibt sich ΔH für $2C + O_2 = 2CO$ zu $-2 \cdot 110 \text{ kJ/mol}$.

Wenn die Entropien von Ausgangs- und Endstoffen nicht zu verschiedenen sind, zieht ein negatives ΔG ein negatives ΔH nach sich: **Exergonische** Reaktionen ($\Delta G < 0$) sind oft auch **exotherm** ($\Delta H < 0$): Es wird Wärme frei). Manchmal kann aber die Entropieänderung die Enthalpieänderung überkompensieren. Dann ist $\Delta H > 0$ (endotherme Reaktion) trotz $\Delta G < 0$. Während $\Delta G < 0$ die allgemeinste Bedingung für das spontane Ablaufen der Reaktion ist (**endergonische Reaktionen** finden nicht statt), ist z. B. schon ein so einfacher Prozess wie Verdampfen, Schmelzen oder wie die Auflösung eines Salzes in Wasser **endotherm**: Das System kühlt sich ab. Bedingung dafür, dass eine endotherme Reaktion von selbst abläuft, ist $\Delta G < 0$ bei $\Delta H > 0$, also $\Delta S = (\Delta H - \Delta G)/T > 0$. Der Endzustand muss viel höhere Entropie haben als der Ausgangszustand. Trotzdem verliert der endotherme Prozess bei hinreichend niedriger Temperatur sein negatives ΔG . Die Temperatur, wo das eintritt, ist der Siede- bzw. Schmelzpunkt. Die meisten Salze lösen sich bei höherer Temperatur sehr viel besser als bei tieferer, weil ihr ΔG dann stärker negativ ist. Das ist besonders für Salze mit hoher (positiver) Lösungswärme der Fall. NaCl hat eine sehr geringe Lösungswärme, und dementsprechend hängt seine Löslichkeit nur schwach von T ab. Wenige Salze wie $CaCrO_4$ haben eine negative **Lösungswärme** (die Lösung erwärmt sich, das Auflösen ist exotherm), und dementsprechend lösen sie sich schlechter in wärmerem Wasser.

Exergonische Reaktionen ($\Delta G < 0$) können im Prinzip spontan ablaufen. Wie schnell sie das tun, zeigen die rein thermodynamischen Betrachtungen noch nicht.

Viele Reaktionen kommen trotz negativen ΔG praktisch nicht in Gang, außer bei sehr hohem T und p . Modellmäßig ist klar, dass Moleküle erst aufbrechen müssen, bevor sich ihre Atome neu arrangieren können. Die Reaktion rutscht also nicht einfach auf einer schiefen G -Ebene abwärts, sondern muss über einen Zwischenzustand, den **aktivierten Zustand**, der meist höheres G hat als die beiden Grenzzustände, eben weil die Bindungen in ihm aufgebrochen sind (Abb. 5.55). Relativ zu dem G -Berg dieses Zustandes stellen beide Grenzzustände stabile bzw. metastabile G -Täler dar. Die Reaktion muss über den Berg, d. h. Moleküle müssen zufällig durch thermische Stöße die **Aktivierungsenergie** auf sich versammeln, die ihre Bindungen auftrennt. Dann werden sie i. Allg. in den tieferen G -Topf fallen. Nach *Boltzmann* (5.43) ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül die Zusatzenergie W_A auf sich versammelt, proportional $e^{-W_A/(kT)}$. Die Reaktionsrate (umgesetzte Moleküle oder Mole pro Zeiteinheit) ist also proportional diesem Faktor. Arrhenius-Auftragung des Logarithmus der Reaktionsrate über $1/T$ liefert als Steigung die Aktivierungsenergie (genauer $-W_A/k$), ähnlich wie Gleichgewichtsmessungen die Reaktionsenthalpie liefern.

Katalysator und **Enzym** erleichtern das Aufbrechen der zur Reaktion nötigen Bindungen, bauen also die Aktivierungsschwelle ab. Jeder solcher Abbau um die geringfügige Höhe kT (0,18 kJ/mol bei Zimmertemperatur) steigert die Reaktionsrate um den Faktor $e \approx 2,7$. Anorganische Katalysatoren und in noch viel stärkerem und spezifischerem Maße die organischen Enzyme (meist Proteine) ermöglichen so Reaktionen, die allein nur mit unmerklicher Geschwindigkeit ablaufen würden, und steuern komplizierte technische bzw. biologische Reaktionsgefüge. Trotzdem haben sie auf die G -Werte von Ausgangs- und Endstoffen und damit auf die *Lage* des Gleichgewichts keinen Einfluss, sondern nur auf Aktivierungsenergie und Reaktionsrate.

Kinetische Betrachtungen liefern, wie man sieht, viel weitergehende Aussagen als die klassische Thermodynamik. Übrigens lässt sich auch das Massenwirkungsgesetz sehr einfach kinetisch ableiten. Die Reaktionsrate der links in der Reaktionsgleichung stehenden Moleküle ist proportional dem Produkt der Konzentrationen dieser Moleküle, wobei jedes so oft eingesetzt werden muss, wie es in der Reaktion vorkommt, also mit dem Exponenten ν_i . Entsprechendes gilt für die Rate der Rückreaktion, d. h. für die Moleküle rechts in der Gleichung. Im Gleichgewicht sind Hin- und Rückrate gleich. Damit folgt sofort (5.91).

5.5.9 Freie Energie, Helmholtz-Gleichung und 3. Hauptsatz der Wärmelehre

Wir betrachten wieder ein Gas in einem zweigeteilten Volumen, diesmal sollen sie aber durch Kräfte vorzugsweise in den einen Teil davon getrieben werden (Abb. 5.56). Weil die Dichte der Translationszustände – bei gleicher mittlerer Gesamtenergie – mit der kinetischen Energie schnell wächst, befinden sich immer mehr Teilchen in dem Teil des Kastens, der die niedrigere potentielle Energie hat. Auch die barometrische Höhenformel (3.10) ist ein Ausdruck für die erhöhte Wahrscheinlichkeit der Zustände niedrigerer Schwere-Energie.

Druck und Volumen sind die im Labor leicht zu kontrollierende thermodynamischen Größen, im Gegensatz etwa zur Entropie. Die freie Energie

$$F = U - TS \quad (5.98)$$

beschreibt diese Situation, sie strebt (im Kontakt mit der Umgebung) einem Minimum zu, das als thermodynamisches Gleichgewicht den Zustand maximaler Wahrscheinlichkeit (und damit Gesamtentropie von System und Umgebung) annimmt, sie beschreibt dabei einen scheinbaren „Wettstreit“ zwischen innerer

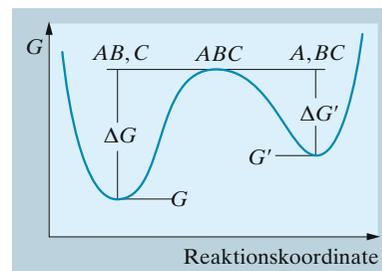


Abb. 5.55. Verlauf der freien Enthalpie für eine Reaktion $AB + C \rightleftharpoons A + BC$. Die Reaktionsrate hängt von der Höhe der Schwelle auf dem günstigsten Reaktionsweg mit dem aktivierten Komplex ABC im Sattelpunkt ab

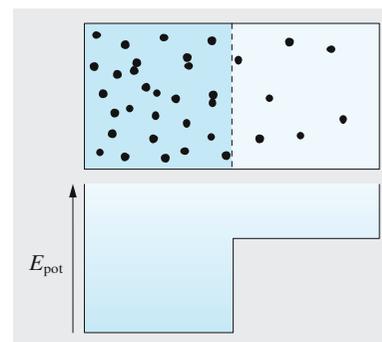


Abb. 5.56. In einem Kasten, der in zwei Hälften mit unterschiedlicher potentieller Energie geteilt ist, befinden sich im thermischen Gleichgewicht mehr Teilchen bei niedrigerer potentieller Energie. Die Zustände bei niedrigerer potentieller Energie sind bei gleicher mittlerer Gesamtenergie sehr viel zahlreicher, weil die Translationszustände zur kinetischen Energie sehr schnell mit der Geschwindigkeit zunehmen

Energie U und Entropie S . Je höher die Temperatur dabei ist, umso geringer der Einfluss der Energie U .

Eine andere wichtige Eigenschaft der freien Energie ergibt sich, wenn man ihr Differential für eine isotherme Änderung betrachtet

$$dF = dU - T dS.$$

Wir wissen, dass $T dS \geq dQ$ ist (= für reversible, $>$ für irreversible Vorgänge), also $dF \leq dU - dQ$. Nach dem 1. Hauptsatz ist aber $dU - dQ = dW$, also $dF \leq dW$. Uns interessiert der Fall, wo dW negativ ist, das System also Arbeit leistet. Umkehrung der Vorzeichen kehrt den Sinn der Ungleichung um:

$$-dW \leq -dF. \quad (5.99)$$

Die Arbeit, die ein beliebiges System bei einer reversiblen Zustandsänderung leisten kann, ist so groß wie der Betrag, um den die freie Energie zwischen Anfangs- und Endzustand abgenommen hat. Bei einem irreversiblen Vorgang gewinnt man weniger Arbeit.

Im Gleichgewicht, wo F sein Minimum angenommen hat, ist keine Änderung von F und daher keine Arbeitsleistung mehr möglich.

Eine andere Aussage über die Arbeit, die ein System leisten kann, ergibt sich mittels des Carnot-Prozesses. Wenn er zwischen den Temperaturen $T + dT$ und T arbeitet, verrichtet er bei jedem Zyklus

$$-dW = Q \frac{dT}{T}.$$

Da der Carnot-Prozess maximalen Wirkungsgrad hat, ist dies die größte Arbeit, die irgendein Vorgang verrichten kann, bei dem eine Wärmeenergie Q aus einem Körper mit $T + dT$ auf einen Körper mit T überführt wird. Nach dem 1. Hauptsatz ist andererseits $\Delta Q = \Delta U - \Delta W$. Beides zusammen ergibt die **Helmholtz-Gleichung**

$$\Delta W - \Delta U = T \frac{d \Delta W}{dT}. \quad (5.100)$$

Wie ΔU von der Temperatur abhängt, weiß man, wenn man ΔU für irgendein T und außerdem die spezifische Wärmekapazität als Funktion von T kennt. Damit ist aber ΔW als Funktion von T noch nicht festgelegt, denn bei der Integration von (5.100) tritt eine unbekannte Konstante auf. *Nernst* hat nun postuliert, dass am absoluten Nullpunkt allgemein gilt

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{d \Delta W}{dT} = 0.$$

Daraus folgt am absoluten Nullpunkt $\Delta W = \Delta U$ (siehe (5.100)), und daher auch

$$\boxed{\lim_{T \rightarrow 0} \frac{d \Delta U}{dT} = 0}. \quad (5.101)$$

Dies ist der **3. Hauptsatz der Wärmelehre**.

Hiernach müssen alle spezifischen Wärmekapazitäten bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt gegen Null streben, im Gegensatz zum klassischen Gleichverteilungssatz. Der eigentliche Grund dafür ergibt sich aus der Quantenmechanik. Sogar die Neigung dc/dT verschwindet bei $T \rightarrow 0$ (Abb. 5.5). Es folgt ferner, dass man dem absoluten Nullpunkt wohl beliebig nahe kommen, ihn aber nie exakt erreichen kann. Der 3. Hauptsatz wird auch als Satz von der Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunkts bezeichnet.

5.6 Aggregatzustände

Alle Stoffe können in drei Zuständen vorkommen, die sich energetisch unterscheiden (unter extremen Bedingungen gibt es viel mehr solche Zustände, Abschn. 8.4 und 19.3). Die Thermodynamik beschreibt das Gleichgewicht zwischen solchen Zuständen, die Kinetik den Übergang zwischen ihnen.

5.6.1 Koexistenz von Flüssigkeit und Dampf

Bringt man in ein zuvor völlig evakuiertes Gefäß eine Flüssigkeit ein, die es nur zum Teil erfüllt, so verdampft ein Teil der Flüssigkeit, und über ihr stellt sich ein für sie charakteristischer Druck ein, den man als ihren **Sättigungsdampfdruck** bezeichnet.

Man demonstriert dies am einfachsten, indem man in ein **Torricelli-Vakuum** (Abb. 5.57, links) durch die Quecksilbersäule etwas Flüssigkeit aufsteigen lässt. Diese sammelt sich über der Quecksilbersäule, während gleichzeitig deren Kuppe absinkt (Abb. 5.57, rechts). Die Flüssigkeit ist also zum Teil verdampft. h gemessen in mm gibt den Dampfdruck der Flüssigkeit in Torr an.

Verringert man bei konstanter Temperatur das Volumen eines Gefäßes, in dem sich Flüssigkeit und Dampf befinden – etwa indem man das Toricelli-Rohr tiefer einsenkt –, so ändert sich der Druck nicht. Es geht also ein Teil des Dampfes in den flüssigen Zustand über. Das Umgekehrte geschieht bei Volumenvergrößerung. Der Druck bleibt also über einen weiten Volumenbereich konstant (vgl. Abb. 5.61). Erst wenn bei Volumenvergrößerung alle Flüssigkeit verdampft ist, nimmt mit wachsendem Volumen der Druck ab, und die Eigenschaften des Dampfes nähern sich immer mehr denen der idealen Gase.

Den flüssigen und dampfförmigen Zustand bezeichnen wir als je eine **Phase** des Stoffes. Dieser Begriff wird aber nicht nur auf verschiedene Aggregatzustände, nämlich feste, flüssige und gasförmige, angewendet, sondern er bezeichnet allgemein solche homogenen Gebiete innerhalb eines Systems, die durch Trennungsf lächen gegeneinander abgegrenzt sind, z. B. nebeneinander existierende feste Modifikationen des gleichen Stoffes.

Beim Sättigungsdampfdruck sind Flüssigkeit und Dampf im Gleichgewicht. Um ein Flüssigkeitsmolekül aus dem Innern in den Außenraum zu bringen, muss eine Arbeit aufgewendet werden. Moleküle, deren kinetische Energie zur Verrichtung dieser Arbeit ausreicht, können durch die Oberfläche austreten. Moleküle, die aus dem Dampfraum auf die Oberfläche auftreffen, treten wieder ein; ihre Zahl pro Zeiteinheit ist der Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Moleküle und daher dem Dampfdruck proportional. Gleichgewicht besteht, wenn ebenso viele Moleküle ein- wie austreten. Eine Temperaturerhöhung hat zur Folge, dass mehr Moleküle die Austrittsarbeit aufbringen können; die Wahrscheinlichkeit dafür gibt die Boltzmann-Verteilung (Abschn. 5.2.9). Daher steigt der Sättigungsdampfdruck mit der Temperatur steil und immer steiler an (Abb. 5.58). Nur bei den p, T -Werten auf der Dampfdruckkurve können die beiden Phasen koexistieren. Diese Kurve teilt also die p, T -Ebene in zwei Bereiche: Oberhalb kann die Substanz nur im flüssigen, unterhalb nur im

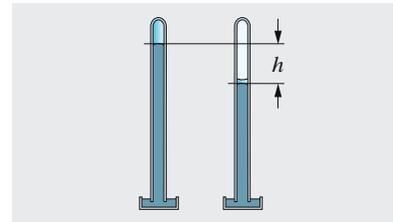


Abb. 5.57. Demonstration des Dampfdrucks einer Flüssigkeit

Tabelle 5.11. Sättigungsdampfdruck einiger Flüssigkeiten bei 20 °C

Stoff	p/mbar
Wasserdampf	23,3
Ethylalkohol	58,8
Methylalkohol	125
Benzol	100
Ethylether	586
Quecksilber	$1,6 \cdot 10^{-3}$
Kohlendioxid	56 560
Ammoniak	8 350
Propan	8 270
Butan	2 070

Tabelle 5.12. Druck des gesättigten Wasserdampfes in mbar

$T/^\circ\text{C}$	p/mbar	$T/^\circ\text{C}$	p/mbar
0	6,1	100	1 013
10	12,3	110	1 432
20	23,3	120	1 985
30	42,4	130	2 700
40	73,7	150	4 760
50	123	170	7 919
60	199	190	12 549
70	311	300	82 894
80	473	350	165 330
90	701		

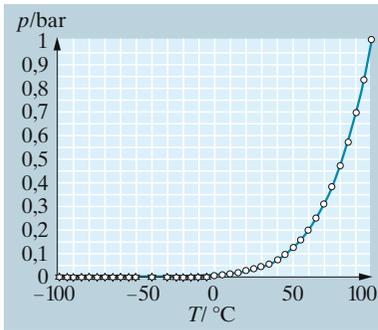


Abb. 5.58. Dampfdruckkurve des Wassers, Messpunkte: \circ für flüssiges Wasser, $*$ für Eis

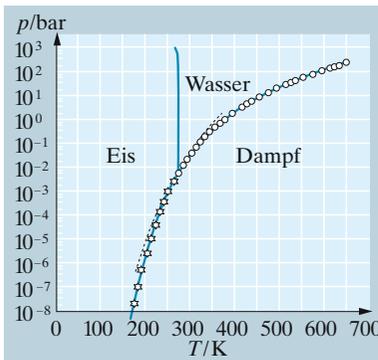


Abb. 5.59. Um die Dampfdruckkurve bis zum kritischen Punkt darstellen zu können, muss man die p -Achse stauchen, am besten durch Logarithmieren. In der Auftragung $\ln p(T)$ wird die Kurve noch nicht gerade. Die Dampfdruckkurve für Eis (Sublimationskurve) verläuft etwas steiler. Beide schneiden sich im Tripelpunkt. Von dort geht auch die Koexistenzlinie Wasser–Eis (Schmelzkurve) aus. Ihr Verhalten ist beim Wasser ungewöhnlich: Sie ist nach links geneigt

Gaszustand vorliegen. Flüssigkeit und Gas lassen sich nur unterhalb einer gewissen kritischen Temperatur T_3 unterscheiden, d. h. die $p(V)$ -Kurven zeigen bei höherer Temperatur keinen horizontalen Abschnitt mehr, und die Dampfdruckkurve endet bei T_3 (vgl. Abschn. 5.6.4).

Entsprechend ihrer kinetischen Herkunft aus der Boltzmann-Verteilung lässt sich die Dampfdruckkurve darstellen als

$$p_D = b e^{-E/(kT)} \quad (5.102)$$

E ist die Verdampfungsenergie, bezogen auf ein Molekül. Die Größe b kann noch geringfügig von der Temperatur abhängen.

a) Sieden. Wird der Dampfdruck einer Flüssigkeit gleich dem darauf lastenden Druck eines anderen Gases, so siedet die Flüssigkeit. Dann entwickelt sich Dampf nicht nur an der Oberfläche der Flüssigkeit, sondern in Form von Blasen auch im Innern. Die **Siedetemperatur** hängt demnach vom Außendruck ab. Nur bei 1 013 mbar siedet das Wasser bei 100 °C, bei vermindertem Druck darunter, bei erhöhtem darüber. Ethanol und Ethylether erreichen den Dampfdruck 1 013 mbar bei 78,3 °C bzw. 34,6 °C. Dies sind die Siedepunkte dieser Stoffe bei Normaldruck. In größeren Höhen über dem Meeresspiegel siedet Wasser unterhalb 100 °C. Aus Dampfdruckkurve und barometrischer Höhenformel kann man aus der Siedetemperatur die Höhe bestimmen, falls im betrachteten Höhenbereich $T = \text{const}$ ist (**Hypsometer**).

× Beispiel...

Warum brauchen Düsenpiloten für den Fall des Absprungs nicht nur ein Atemgerät, sondern auch einen Druckanzug? Von welcher Höhe ab ist er unentbehrlich? Hinweis: „Kochendes Blut“!

Wasser siedet schon bei 37 °C, wenn der äußere Druck 62 mbar ist. Das wäre in der isothermen Atmosphäre mit 8 km Skalenhöhe der Fall in einer Höhe von 22 km. Wenn die Troposphäre adiabatisch indifferent geschichtet ist, erreicht man diesen Druck schon bei 15 km. Der Salz- und Proteingehalt des Blutes erniedrigt seinen Dampfdruck geringfügig (um knapp 10%), wodurch man noch nicht einmal 1 km gewinnt. Die Luftblasen, die sich beim Sieden bilden, legen den Kreislauf in kurzer Zeit lahm, ähnlich wie bei der „Caisson-Krankheit“ der Taucher, die zu schnell aus großer Tiefe hochkommen und bei denen die unter hohem Druck ins Blut gepresste Luft wieder ausperlt.

b) Hygrometrie. Die atmosphärische Luft ist i. Allg. nicht mit Wasserdampf gesättigt. Zwar bildet sich in einem abgeschlossenen Raum, in dem sich Wasser befindet, schließlich immer der zur Temperatur gehörende Sättigungsdruck des Wasserdampfes aus, aber das dauert ziemlich lange, weil der Wasserdampf durch die Luft hindurchdiffundieren muss. Bei dem häufigen Temperatur- und Luftmassenwechsel in der freien Atmosphäre wird die Sättigung meist nicht erreicht.

Absolute Feuchte nennen wir die Konzentration des Wasserdampfes in g m^{-3} . Die **Sättigungsfeuchte** entspricht dem Sättigungsdruck. Die **relative Feuchte** ist absolute Feuchte/Sättigungsfeuchte. Der Zusam-

menhang zwischen absoluter Feuchte φ und dem Partialdruck p_W des Wasserdampfes ergibt sich aus (5.14):

$$p_W = n_W k T = \frac{\varphi}{m_W} k T,$$

($m_W = 2,9 \cdot 10^{-26}$ kg Masse, n_W Anzahldichte der Wassermoleküle). p_W kann höchstens gleich p_D , dem Sättigungsdampfdruck werden, außer bei Übersättigung.

Kühlt sich Luft mit einer bestimmten absoluten Feuchte so stark ab, dass sie die Dampfdruckkurve erreicht oder überschreitet, scheidet sich das überschüssige Wasser als Tau oder Nebel in flüssiger Form ab. Die Temperatur, wo $p_W = p_D$ wird, heißt daher **Taupunkt**. Im freien Luftraum bilden sich erst Nebeltröpfchen, wenn die Luft erheblich unter den Taupunkt unterkühlt, d. h. der Wasserdampf übersättigt ist. Zur Tröpfchenbildung sind außerdem Kondensationskeime, z. B. Staubteilchen oder Ionen erforderlich. Der Dampfdruck über sehr stark gekrümmten Flüssigkeitsoberflächen, wie sie sich bei sehr feinen Tröpfchen zunächst bilden müssen, ist nämlich erheblich höher als über ebenen Flächen (Aufgaben 5.7.6, 6.5.1, 18.3.18).

Apparate zur Messung der relativen Feuchte heißen **Hygrometer**. Man benutzt dabei die Abhängigkeit der elastischen Eigenschaften der Proteine vom Wassergehalt (**Haarhygrometer**) oder die Tatsache, dass Wasser umso schneller verdunstet und umso mehr Verdunstungskälte produziert, je trockener die umgebende Luft ist (**Aspirationspsychrometer**). Der Spiegel eines Taupunkthygrometers beschlägt sich bei Abkühlung unter den Taupunkt; aus der Dampfdruckkurve kann man dann die absolute Feuchte ablesen.

× Beispiel...

Warum freut sich der Gärtner, dass es taut, selbst wenn es vorher schon geregnet hat? Warum sprüht man Wasser in Obstplantagen, wenn Nachtfrost droht?

Bei 50% Feuchte und 20 °C gibt es 12 mbar, also 9 mg/l Wasserdampf in der Luft. Taupunkt 9–10 °C. Bei vollständiger Kondensation würden im Liter 20 J frei, die die 1,3 g Luft um 15 K erwärmen könnten. Bis –2 °C fällt zwar nur 1/3 davon an, aber die Abkühlung wird doch erheblich verzögert.

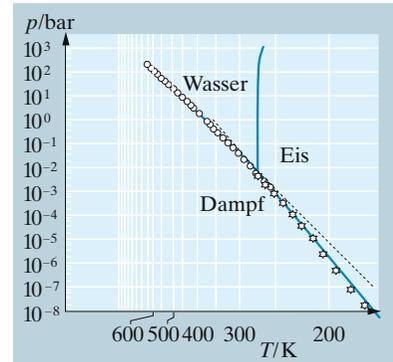


Abb. 5.60. Transformiert man auch die T -Achse und trägt $1/T$ auf, werden die Dampfdruckkurven für Wasser und Eis fast gerade. Das entspricht der Boltzmann-Verteilung $p \approx p_0 e^{-W/(kT)}$

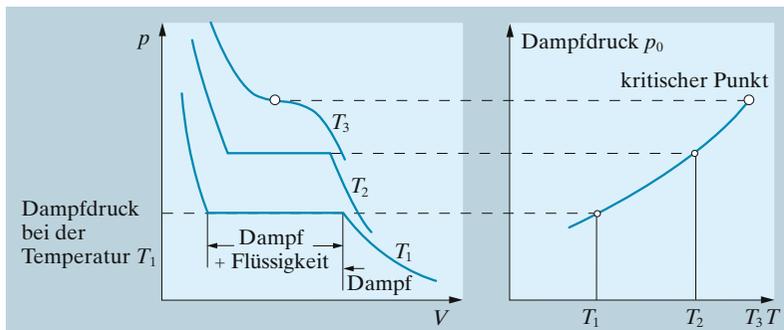


Abb. 5.61. Die Dampfdruckkurve ist die Seitenansicht eines vollständigen p, V, T -Diagramms von Flüssigkeit und Dampf, wie es Abb. 5.62 darstellt. Die Vorderansicht des gleichen räumlichen Diagramms zeigt die Isothermen mit dem waagerechten Übergang Sieden-Kondensieren unterhalb des kritischen Punktes

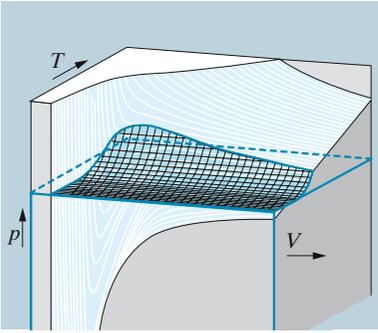


Abb. 5.62. $p(V, T)$ -Fläche für Flüssigkeit und Dampf, berechnet für ein van der Waals-Gas (Abschn. 5.6.4). Auf den waagerechten Flächenteilen erfolgt das Sieden oder Kondensieren. Die Seitenansicht dieser Fläche gibt die Dampfdruckkurve. Die punktierten Flächenteile sind nur außerhalb des Gleichgewichts teilweise realisierbar (überhitzte Flüssigkeit, übersättigter Dampf)

Tabelle 5.13. Spezifische und molare Verdampfungsenergie bei der Siedetemperatur T_S

	λ J/g	Λ J/mol	T_S
Wasser	2 253	40 590	373,2 K
Ethylether	359	26 700	307,8 K
Ethylalkohol	844	38 900	351,6 K
Quecksilber	283	59 400	630,2 K
Stickstoff	201	5 600	77,4 K
Wasserstoff	466	941	20,4 K

c) Verdampfungswärme. Wenn Moleküle aus der Flüssigkeit in den Dampfraum treten, müssen sie Arbeit gegen die Anziehungskräfte leisten, die die Flüssigkeit zusammenhalten. Zum Ersatz dieser Energie muss man Wärme zuführen. Tut man das nicht, wird sie der Flüssigkeit entnommen, diese kühlt sich durch **Verdunstungskälte** ab. Es bleiben ja nur die langsameren Moleküle zurück, den schnellsten gelingt der Austritt in den Gasraum. Wenn die Temperatur konstant bleiben soll, muss man der Flüssigkeit die **spezifische Verdampfungsenergie** λ zuführen, um ein kg davon zu verdampfen. Um 1 mol isotherm zu verdampfen, braucht man die **molare Verdampfungsenergie** $\Lambda = M\lambda/1\,000$ (M : relative Molekülmasse). Wenn Dampf kondensiert, wird natürlich die gleiche Energie als Kondensationsenergie frei.

Je größer die molare Verdampfungsenergie ist, desto steiler steigt die Dampfdruckkurve $p_D(T)$. Es handelt sich hier ja um den typischen Anwendungsfall der Boltzmann-Verteilung: Wir bieten den Molekülen zwei Energiezustände, einen tieferen in der Flüssigkeit, einen höheren im Dampf, unterschieden durch die *molekulare* Verdampfungsenergie $E = \Lambda/N_A = \lambda m$. Wenn beide Zustände, abgesehen vom Energieunterschied, gleich wahrscheinlich wären, würden sich die Moleküle auf Flüssigkeit und Dampf so verteilen, dass ihre Teilchenzahldichten sich verhalten wie

$$\frac{n_D}{n_{Fl}} = e^{-E/(kT)}.$$

Mit $p_D = n_D kT$ ergibt das

$$p_D = n_{Fl} kT e^{-E/(kT)}. \quad (5.103)$$

Dies ist eine gute Näherung für die Dampfdruckkurve. Allerdings ist n_{Fl} nicht einfach die geometrische Teilchenzahldichte in der Flüssigkeit, sondern hier muss das Wahrscheinlichkeitsverhältnis (Entropieunterschied) zwischen flüssigem und dampfförmigem Zustand berücksichtigt werden.

Die makroskopisch-thermodynamische Betrachtungsweise liefert auf kompliziertere Weise ähnliche Auskünfte. Den Zusammenhang zwischen Verdampfungsenergie und Steigung der Dampfdruckkurve beschreibt die **Clausius-Clapeyron-Gleichung**:

$$\lambda = T \frac{dp}{dT} (v_D - v_{Fl}). \quad (5.104)$$

v_D und v_{Fl} sind die spezifischen Volumina (Volumen/Masse) von Dampf und Flüssigkeit. Zum Beweis betrachten wir einen reversiblen Kreisprozess, bei dem 1 kg einer Flüssigkeit in einem Zylinder mit Kolben abwechselnd verdampft und wieder kondensiert wird, und zwar im p, T -Diagramm nahe der Dampfdruckkurve. Im Zustand 1 sei praktisch aller Dampf kondensiert, das Volumen ist v_{Fl} . Nun verdampft man bei der konstanten Temperatur $T + dT$ die Flüssigkeit, indem man das Gefäß mit der Flüssigkeit in einen Wärmebehälter mit $T + dT$ taucht und durch reversibles Zurückziehen des Kolbens alle Flüssigkeit verdampft (Zustand 2). Dabei leistet der Zylinderinhalt unter Zufuhr der Verdampfungsenergie λ die Arbeit $-\Delta W_1 = (p + dp)(v_D - v_{Fl})$. Die Wärmezufuhr dient teils zur

Loslösung der Flüssigkeitsmoleküle, teils zur Arbeitsverrichtung $-\Delta W_1$. Nun kühlt man (etwa durch adiabatische Expansion) um dT und gelangt zum Zustand 3. Man taucht den Zylinder in einen Wärmespeicher mit der Temperatur T und komprimiert langsam isotherm, bis im Zustand 4 wieder aller Dampf kondensiert ist. Wenn dT hinreichend klein ist, kann man $v_D(3) = v_D(2)$ und $v_{F1}(4) = v_{F1}(1)$ setzen. Beim Übergang von 3 nach 4 hat man die Arbeit $\Delta W_2 = p(v_D - v_{F1})$ aufzuwenden. Schließlich beendet man den Kreisprozess durch Erwärmung der Flüssigkeit von T auf $T + \Delta T$. Wie Abb. 5.63 zeigt, sind die Arbeiten bei den Übergängen $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ bei kleinem dT vernachlässigbar (wenn man $dT = 0,1 \text{ K}$ macht, sind beim Wasser diese Anteile kleiner als 0,3%). Das Gas verrichtet bei diesem Kreisprozess insgesamt die Arbeit

$$-\Delta W = -\Delta W_1 - \Delta W_2 = (v_D - v_{F1}) dp .$$

Der Wirkungsgrad eines solchen reversiblen Kreisprozesses muss

$$\eta = \frac{-\Delta W}{\Delta Q} = \frac{(v_D - v_{F1}) dp}{\lambda} = \frac{T + dT - T}{T + dT} = \frac{dT}{T}$$

sein. Daraus ergibt sich die Behauptung

$$\lambda = T \frac{dp}{dT} (v_D - v_{F1}) .$$

Man kann dies auch direkter aus der Helmholtz-Gleichung (5.100) schließen.

Im Allgemeinen ist $v_{F1} \ll v_D$; wenn λ nur wenig von T abhängt, folgt mit dem idealen Gasgesetz für 1 mol Dampf ($pV = pMv_D/1000 = RT$)

$$\lambda = \frac{RT^2}{p} \frac{dp}{dT} \quad \text{oder} \quad \frac{dp}{p} = \frac{\lambda}{R} \frac{dT}{T^2} .$$

Dies ergibt integriert das wesentliche Glied der Dampfdruckkurve

$$p \sim e^{-\lambda/(RT)} .$$

In Wirklichkeit hängt die Verdampfungsenergie von der Temperatur ab, einmal deswegen, weil sich die Molekularkräfte mit der Temperatur ändern, zum zweiten, weil die Verdampfungsenergie aus einem inneren und einem äußeren Anteil besteht. Der kleinere äußere Anteil wird dazu verbraucht, das ursprüngliche Volumen (bei Wasser 1 l/kg) auf das Volumen des Dampfes (bei Wasserdampf von 100 °C: 1 700 l/kg) auszudehnen. Beim Druck von 1 bar = 10^5 N m^{-2} wird die Arbeit gegen den äußeren Druck $p \Delta V = 170 \text{ kJ/kg}$. Die innere Verdampfungsenergie (Überwindung der Molekularkräfte) ist also viel größer: Etwa 2 080 kJ/kg. Bei 0 °C hat Wasser $\lambda = 2 525 \text{ kJ/kg}$, von 100–170 °C nimmt λ von 2 249 auf 2 015 kJ/kg ab. Bei 264 °C ist nur noch $\lambda = 614 \text{ kJ/kg}$, bei 374 °C, der kritischen Temperatur des Wassers, wird $\lambda = 0$.

5.6.2 Koexistenz von Festkörper und Flüssigkeit

Für das **Schmelzen** gelten ganz ähnliche Gesetze wie für das Sieden. Nur bei der Schmelztemperatur können Festkörper und Flüssigkeit (Schmelze)

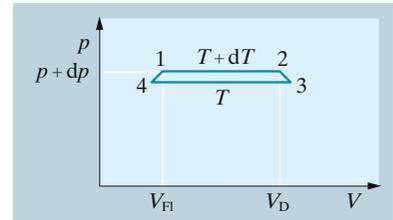


Abb. 5.63. Carnot-Kreisprozess mit einer verdampfenden Flüssigkeit als Arbeitsstoff

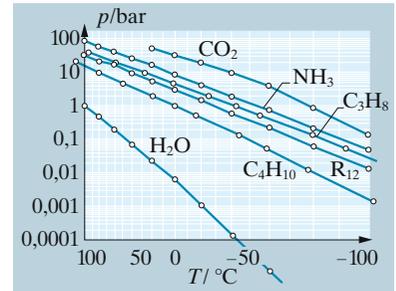


Abb. 5.64. Dampfdruckkurven technisch wichtiger Stoffe in Arrhenius-Auftragung

im Gleichgewicht koexistieren. Schmelzen bedeutet i. Allg. Dichteänderung, meist Abnahme der Dichte, denn die regelmäßig angeordneten Teilchen im Kristall nehmen weniger Platz ein als die regellosen in der Flüssigkeit. Bei den meisten Stoffen sinkt daher der Kristall in der Schmelze unter. Nur Eis und wenige andere Stoffe (Ge, Ga, Bi) zeigen beim Schmelzen eine Dichtezunahme: Die Kristalle schwimmen in der Schmelze.

Auch die **Schmelztemperatur** ist druckabhängig wie die Siedetemperatur, nur weniger stark. Im p, T -Diagramm bezeichnet die Schmelzdruckkurve die Koexistenz von Festkörper und Flüssigkeit im Gleichgewicht und trennt den festen vom flüssigen Bereich. Beim Schmelzen eines kg wird die spezifische Schmelzenergie λ' verbraucht, beim Erstarren wird sie frei. Auch hier gilt die Clausius-Clapeyron-Gleichung

$$\lambda' = T \frac{dp}{dT} (v_{\text{Fl}} - v_{\text{Fest}}). \quad (5.105)$$

Da λ' immer positiv ist, muss die Schmelzdruckkurve $p(T)$ steigen, wenn $v_{\text{Fl}} > v_{\text{Fest}}$ wie bei den meisten Stoffen, dagegen fallen, wenn $v_{\text{Fl}} < v_{\text{Fest}}$ wie beim Eis. Man kann daher Eis bei konstanter Temperatur durch Drucksteigerung schmelzen. Dies ermöglicht das Wandern der Gletscher und den Schlittschuhlauf.

Qualitativ folgt der Zusammenhang zwischen dp/dT und Δv auch aus dem **Le Chatelier-Braunschen Prinzip** der **Flucht vor dem Zwang**, das im zweiten Hauptsatz enthalten ist: Eine äußere Einwirkung, die eine Zustandsänderung des Systems zur Folge hat, ruft eine Änderung hervor, die den Zwang zu vermindern sucht. Bei Druckerhöhung weicht das Eis dem Zwang durch Schmelzen aus, weil es dadurch sein Volumen verringern kann.

5.6.3 Koexistenz dreier Phasen

Im p, T -Diagramm hat die Grenzlinie flüssig-gasförmig, die Dampfdruckkurve, eine viel geringere Steigung als die Grenzlinie fest-flüssig (Schmelzdruckkurve). Beide müssen sich also irgendwo treffen. Dieser Treffpunkt heißt **Tripelpunkt**. Unterhalb und links von ihm gibt es keinen flüssigen Zustand mehr, sondern es geht von ihm die **Sublimationskurve** aus, die den unmittelbaren Übergang fest-gasförmig bezeichnet. Nach *Clausius-Clapeyron* hat die Sublimationskurve immer positive Steigung. Nur am Tripelpunkt können alle drei Phasen im Gleichgewicht koexistieren. Für H_2O liegt er bei 6,1 mbar und 0,0075 °C, für CO_2 bei 5,1 bar und -56 °C. Die Molvolumina der drei Phasen sind natürlich am Tripelpunkt völlig verschieden; daher entsprechen ihm in der p, V -Ebene (Abb. 5.65 rechts) drei Zustände und die sie verbindende Linie.

Die drei Zweige des p, T -Diagramms trennen drei Gebiete voneinander, in denen im Gleichgewicht nur je eine Phase existieren kann. In diesem Gebiet können p und T innerhalb gewisser Grenzen beliebig gewählt werden. Man sagt, der Zustand habe hier zwei Freiheitsgrade (in einem anderen Sinne als in Abschn. 5.1.4). Sollen zwei Phasen koexistieren, ist nur noch eine Zustandsgröße frei wählbar, hier hat der Zustand nur

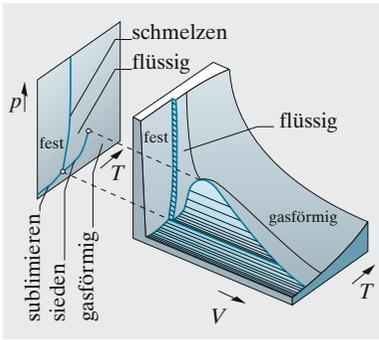


Abb. 5.65. Zustandsdiagramm der drei Phasen mit Koexistenzbereichen und Tripellinie. Die meisten Stoffe zeigen dieses Verhalten des Schmelzbereichs (Ausdehnung beim Schmelzen, Schmelzkurve nach rechts geneigt)

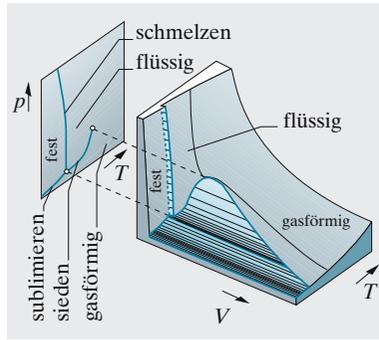


Abb. 5.66. Zustandsdiagramm eines Stoffes wie Wasser, der beim Schmelzen dichter wird und dessen Schmelzkurve infolgedessen nach links geneigt ist. Hierdurch wird das Gleiten auf Schlittschuhen sehr erleichtert

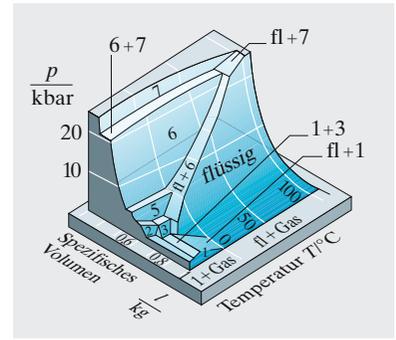


Abb. 5.67. Viele Stoffe, hier das Wasser, haben mehrere Kristallmodifikationen (hier unvollständig durchnummeriert als Eis I–Eis VII). Damit ergeben sich viele Phasenflächen und entsprechend viele Koexistenzbereiche

noch einen Freiheitsgrad. Wenn alle drei Phasen vorhanden sein sollen, was nur im Tripelpunkt möglich ist, gibt es gar keinen Freiheitsgrad mehr. Dies ist ein Spezialfall der **Phasenregel von Gibbs**. Sie gilt für Systeme aus verschiedenen chemischen Stoffen (Komponenten), deren Anzahl k sein soll. Außerdem seien p Phasen möglich (fest, flüssig, gasförmig, gelöst usw.). Dann gilt für die Anzahl der Freiheitsgrade f

$$f = k + 2 - p \tag{5.106}$$

5.6.4 Reale Gase

Die Voraussetzungen, unter denen sich ein Gas ideal verhält und die Zustandsgleichung (5.17) befolgt, nämlich: Punktförmige Moleküle, die, außer beim Stoß, nicht wechselwirken, sind umso schlechter erfüllt, je dichter das Gas ist, also je höher der Druck und je tiefer die Temperatur ist. Ein Beispiel ist CO_2 (Abb. 5.68). Bei 0°C und 1 bar hat 1 mol CO_2 fast das ideale Molvolumen von 22,4 l. Komprimiert man das mol auf 0,3 l, steigt der Druck nicht auf 75 bar wie beim Idealgas (gestrichelte Linie), sondern nur auf 47 bar (Punkt A). Bei weiterer Kompression bleibt der Druck konstant, und es bildet sich Flüssigkeit. Bei 0,075 l ist der Dampf vollständig kondensiert (E). Weitere Volumenverringerng erfordert starke Drucksteigerung, denn Flüssigkeiten haben sehr geringe Kompressibilität. Bei 20°C ist das Verhalten ähnlich, aber der Volumenbereich, in dem Gas und Flüssigkeit nebeneinander bestehen, ist nur noch etwa halb so groß. Bei $31,5^\circ\text{C}$ verschwindet dieser Bereich vollständig (K). Bei noch höheren Temperaturen gibt es keinen definierten Übergang zwischen Gas und Flüssigkeit mehr, und die Isothermen nähern sich allmählich der idealen Hyperbelform.

Die Temperatur, oberhalb der sich ein Gas durch noch so hohen Druck nicht mehr verflüssigen lässt, heißt seine **kritische Temperatur**.

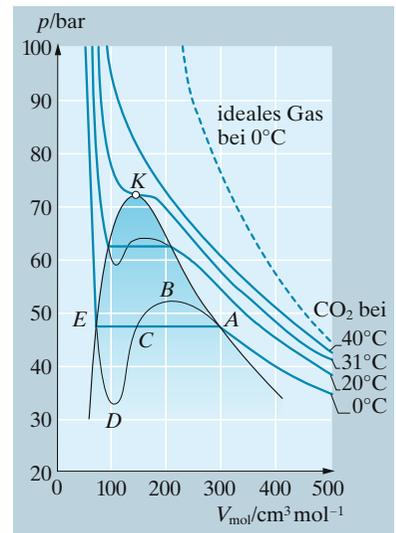


Abb. 5.68. Die Isothermen für 1 mol (44 g) Kohlendioxid (CO_2)

Tabelle 5.14. Kritische Daten einiger Gase: Kritischer Druck p_k , kritische Temperatur T_k , Siedetemperatur T_S bei 1,013 bar

	p_k/bar	T_k/K	T_S/K
Wasser	217,5	647,4	373,2
Kohlendioxid	72,9	304,2	194,7
Sauerstoff	50,8	154,4	90,2
Luft	37,2	132,5	80,2
Stickstoff	35	126,1	77,4
Wasserstoff	13	33,3	20,4
Helium	2,26	5,3	4,2

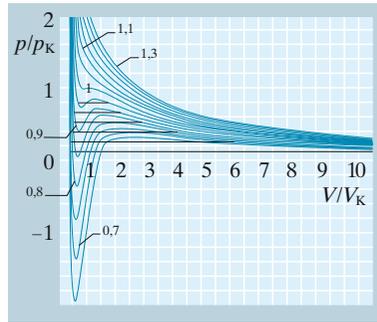


Abb. 5.69. Van der Waals-Isothermen. p , V und T sind in Bruchteilen der kritischen Werte angegeben. Bei einigen unterkritischen Isothermen sind die Maxwell-Geraden eingezeichnet, auf denen Sieden oder Verdampfen im Gleichgewicht erfolgen. Sie schneiden von den Bögen der Isothermen oben ebenso viel Fläche ab wie unten

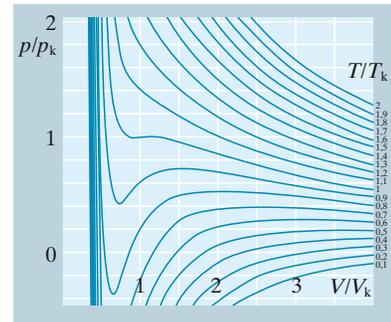


Abb. 5.70. Ausschnitt aus der Schar von der Waals-Isothermen in der Umgebung des kritischen Punktes

Sie liegt bei O_2 und N_2 weit unter Zimmertemperatur, bei Propan und Butan darüber. Deswegen gluckert es in einer Propan-Druckflasche, in der Stickstoffflasche nicht. Deswegen lässt sich flüssige Luft ohne Kühlung nicht herstellen. Im p , V -Diagramm zeichnet sich der kritische Punkt als Wendepunkt mit waagerechter Tangente der kritischen Isotherme ab, im p , T -Diagramm als Endpunkt der Dampfdruckkurve.

Dieses Verhalten der realen Gase wird, zunächst außerhalb des schraffierten Übergangsbereiches in Abb. 5.68, durch die **van der Waals-Gleichung** beschrieben:

$$\left(p + \frac{a}{V_{\text{mol}}^2} \right) (V_{\text{mol}} - b) = RT \quad (5.107)$$

Zum äußeren Druck p tritt hier der **Binnendruck** a/V_{mol}^2 , der auf den Anziehungskräften der Moleküle untereinander beruht. Vom Volumen ist das **Kovolumen** b abzuziehen, denn die Moleküle mit ihrem endlichen Radius beanspruchen ein gewisses Volumen, das nicht mehr zur freien Bewegung verfügbar ist. Bei geringer Dichte sind Binnendruck und Kovolumen zu vernachlässigen, und die van der Waals-Gleichung geht in die ideale Zustandsgleichung über. Für CO_2 findet man die Konstanten $a = 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ bar m}^6 \text{ mol}^{-2}$ und $b = 4,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$.

Im schraffierten Übergangsbereich in Abb. 5.68 folgt die Isotherme im Gleichgewicht nicht der Schleife $ABCDE$, sondern der geraden Verbindung AE . Sie ist so zu ziehen, dass sie darüber und darunter gleich große Schleifenflächen ABC bzw. CDE abschneidet (Regel von **Maxwell**; sie lässt sich mittels eines gedachten Kreisprozesses längs der Schleife und zurück längs der Geraden ableiten). Bei vorsichtigem Arbeiten kann man allerdings auch Teile der Schleife $ABCDE$ realisieren. Der Abschnitt AB entspricht einem **übersättigten Dampf**, der bei Fehlen von **Kondensati-**

onskeimen sich nicht in Tröpfchen verwandeln kann, der Abschnitt *ED* einer überhitzten Flüssigkeit, in der sich aus ähnlichen Gründen keine Dampfblasen bilden können (**Siedeverzug**; plötzliche Dampfblasebildung kann explosionsartig verlaufen und wird durch Zugabe poröser „Siedesteine“ verhütet). Der Punkt *D* liegt bei tieferen Temperaturen weit unter der $p = 0$ -Linie. Den negativen Druck dort kann man als Zerreißfestigkeit der Flüssigkeit deuten, obwohl sich die Dampfblasenbildung kaum bis dahin verhindern lässt. Trägt man den der Maxwell-Geraden entsprechenden Gleichgewichtsdruck über der Temperatur auf, erhält man natürlich wieder die Dampfdruckkurve.

5.6.5 Kinetische Deutung der van der Waals-Gleichung

Der gaskinetische Ausdruck für den Druck müsste entsprechend seiner Herkunft (Abschn. 5.2.1) eigentlich geschrieben werden

$$p = \frac{1}{6} n v'' \cdot 2m v' , \quad (5.108)$$

wobei v'' und v' verschiedene Bedeutung haben:

- v' ist die Geschwindigkeit, mit der die Teilchen auf die Wand auftreffen; der übertragene Impuls ist $2m v'$;
- v'' ist die Wandergeschwindigkeit dieses Impulses durch das Gas.

Beide Geschwindigkeiten sind im realen Gas nicht mehr gleich der mittleren Molekulargeschwindigkeit v , weil

- die Moleküle nicht mehr als Massenpunkte zu betrachten sind, sondern eine endliche Raumerfüllung haben; dadurch wird $v'' > v$;
- die Moleküle aufeinander Kräfte ausüben; dadurch wird $v' < v$.

Wenn ein Molekül auf ein anderes stößt, trägt dieses den Impuls des ersten weiter (elastischer Stoß). Dabei ist der Impuls praktisch momentan um die Strecke $2r$ (r : Molekülradius) weitergesprungen. Auf einer freien Weglänge $l = 1/(n\sigma) = 1/(4\pi r^2 n)$ erfolgt im Durchschnitt ein solcher Stoß: statt der Strecke l legt der Impuls die Strecke $l + 2r$ zurück. Die effektive Wandergeschwindigkeit des Impulses erhöht sich um den entsprechenden Faktor:

$$v'' = v \left(1 + \frac{2r}{l} \right) = v(1 + 8\pi r^3 n) .$$

Das Molekülvolumen ist $V_m = 4\pi r^3/3$. Also kann man auch schreiben

$$v'' = v(1 + 6n V_m) .$$

Da auch schiefe Stöße vorkommen, bei denen der Impuls nicht ganz die Strecke $2r$ überspringt, verringert sich bei genauerer Rechnung der Faktor etwas:

$$v'' = v(1 + 4n V_m) .$$

Wenn ein Teilchen sich inmitten aller anderen befindet, heben sich die Kräfte (i. Allg. Anziehungskräfte) seitens dieser übrigen Moleküle im Mittel auf. Macht unser Molekül aber Anstalten, das Gas zu verlassen, indem

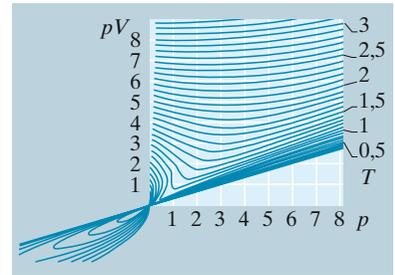


Abb. 5.71. Das $pV(p)$ -Diagramm (Amagat-Diagramm) zeigt besonders klar die Abweichungen eines Gases vom idealen Verhalten. Beim Idealgas würden sich lauter Horizontalen ergeben. Hier beginnt nur *eine* Isotherme an der pV -Achse horizontal (dies bedeutet Extrapolation $V \rightarrow \infty$); dieser horizontale Anfangspunkt heißt Boyle-Punkt. Der kritische Punkt markiert sich als Wendepunkt mit vertikaler Tangente. Bei tieferen Temperaturen ergeben sich aus der van der Waals-Gleichung halbkreisähnliche Bögen bzw. Ausläufer ins Negative. Im Gleichgewicht werden beide durch Maxwell-Vertikalen abgeschnitten

es sich der Wand nähert, so werden diese Kräfte einseitig: Es existiert eine mittlere Resultierende F , die das Molekül im Gas zurückzuhalten sucht. Diese Kraft F wird proportional der Teilchenzahldichte n sein: $F = \alpha n$. Sie entzieht dem zur Wand fliegenden Teilchen einen Impuls $\Delta p = Ft = Fd/v$, wenn es eine Zeit $t = d/v$ braucht, um das letzte Wegstück d bis zur Wand zurückzulegen. Die Auftreffgeschwindigkeit auf die Wand hat sich also auf v' reduziert, wobei $m(v - v') = \Delta p = Fd/v = \alpha dn/v$ ist, oder

$$v' = v - \frac{\alpha dn}{vm}.$$

Setzen wir die Geschwindigkeiten v' und v'' in (5.108) ein, so folgt

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}nmv(1 + 4nV_m) \left(v - \frac{\alpha dn}{vm} \right) \\ &= \frac{1}{3}nmv^2(1 + 4nV_m) - \frac{1}{3}\alpha dn^2 \end{aligned}$$

oder mit $n = N_A/V$ für ein mol Gas

$$p + \frac{1}{3} \frac{N_A^2 \alpha d}{V^2} = \frac{1}{3}nmv^2(1 + 4nV_m).$$

Nun ist nach wie vor $\frac{1}{3}nmv^2 = RT/V$ (auch für ein reales Gas ist die Temperatur ein Ausdruck für die mittlere kinetische Energie der Moleküle). Da $4nV_m \ll 1$, kann man, statt mit $1 + 4nV_m$ zu multiplizieren, auch durch $1 - 4nV_m$ dividieren und hat dann die übliche Form der van der Waals-Gleichung (5.107), deren Konstanten damit gedeutet sind:

$$\frac{a}{V^2} = \frac{1}{3}\alpha dn^2 \quad \text{Binnendruck,}$$

$b = 4N_A V_m$ vierfaches Eigenvolumen der Moleküle im Mol (**Kovolumen**).

5.6.6 Joule-Thomson-Effekt; Gasverflüssigung

Wenn die Teilchen wie beim idealen Gas keine Wechselwirkung ausüben, hängt der Energieinhalt des Gases nicht vom Volumen ab. In Wirklichkeit gibt es Wechselwirkungen, die sich in den Konstanten a und b des van der Waals-Gases ausdrücken. Der Energieinhalt eines realen Gases wird sich also bei der Entspannung ändern, selbst wenn sie ohne Wärmeaustausch (adiabatisch) und ohne Arbeitsleistung (gedrosselt) erfolgt. Dies sollte durch eine Temperaturänderung nachweisbar sein. Abbildung 5.72 zeigt schematisch die Anordnung für diesen **Joule-Thomson-Effekt**: Das in Raum 1 eingeschlossene Gas steht unter dem konstanten Druck p_1 und wird mit Hilfe eines Kolbens durch eine poröse Wand (Wattebausch), die Wirbel- und Strahlbildung verhindert, langsam in den Raum 2, der unter dem konstanten Druck $p_2 (< p_1)$ steht, hinübergepresst.

Bei realen Gasen stellt sich dann ein kleiner Temperaturunterschied zwischen 1 und 2 ein, und zwar bei CO_2 und Luft eine Temperatursenkung ($\frac{3}{4}^\circ$ bzw. $\frac{1}{4}^\circ$ pro bar Druckdifferenz), bei Wasserstoff eine Temperatursteigerung.

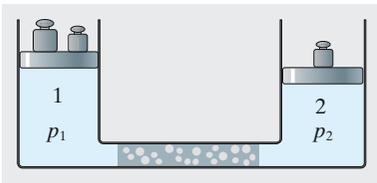


Abb. 5.72. Joule-Thomson-Effekt

Wenn ein Volumen V_1 links verschwunden ist, hat der linke Kolben dem Gas die Arbeit $p_1 V_1$ zugeführt. Diese Gasmenge taucht rechts als Volumen V_2 auf und muss dazu die Arbeit $p_2 V_2$ gegen den rechten Kolben leisten. Die Differenz ist dem Gas als innere Energie zugute gekommen:

$$p_1 V_1 - p_2 V_2 = U_2 - U_1 \quad \text{oder} \quad U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2 .$$

Die Funktion $H = U + pV$, die *Enthalpie*, ist konstant geblieben. Die innere Energie eines van der Waals-Gases enthält außer der kinetischen Energie $\frac{1}{2} f RT$ auch eine potentielle Energie $-a/V$ (Arbeit gegen die Kohäsionskräfte, die den Binnendruck $-a/V^2$ bewirken). In der Enthalpie kommt dazu das Glied pV , wobei p ebenfalls $-a/V^2$ enthält:

$$H = U + pV = \frac{f}{2} RT - \frac{a}{V} + V \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) = RT \left(\frac{f}{2} + \frac{V}{V-b} \right) - \frac{2a}{V} .$$

Wenn das konstant sein soll, ergibt sich die T -Änderung, die einer V -Änderung dV entspricht, aus dem vollständigen Differential

$$dH = \frac{\partial H}{\partial V} dV + \frac{\partial H}{\partial T} dT = 0 ,$$

also

$$dT = -dV \frac{\frac{\partial H}{\partial V}}{\frac{\partial H}{\partial T}} = dV \frac{\frac{Tb}{(V-b)^2} - \frac{2a}{RV^2}}{\frac{f}{2} + \frac{V}{V-b}} \approx \frac{RTb - 2a}{\left(\frac{f}{2} + 1\right)RV^2} dV . \quad (5.109)$$

Der Zähler ist bei hoher Temperatur positiv. Er wechselt aber sein Vorzeichen bei der **Inversionstemperatur** T_i

$$T_i = \frac{2a}{Rb} . \quad (5.110)$$

Die kritische Temperatur für ein van der Waals-Gas ist

$$T_k = 8a/(27Rb) , \quad \text{also} \quad T_i = 6,75 T_k .$$

Oberhalb von T_i erwärmt sich ein Gas bei Entspannung, unterhalb kühlt es sich ab. Für CO_2 und Luft liegt T_i weit über der Zimmertemperatur, für Wasserstoff bei -80°C .

Nach (5.109) bewirkt ein hoher Wert der van der Waals-Konstante a , dass die Temperatur bei Entspannung des realen Gases stark absinkt. Das ist verständlich, denn bei Volumenvergrößerung entfernen sich die Moleküle voneinander und müssen dabei Arbeit leisten gegen die durch a charakterisierten Anziehungskräfte (vgl. Abschn. 5.6.5). Diese Arbeit vermindert die kinetische Energie der Moleküle und damit die Temperatur des Gases.

Der Joule-Thomson-Effekt wird beim **Linde-Verfahren** zur Abkühlung von Gasen bis zur Verflüssigung benutzt, vor allem in großem Umfang zur Herstellung flüssiger Luft: In der *Linde-Maschine* (Abb. 5.73) lässt man Luft von 200 bar aus einem Kompressor sich durch ein Drosselventil (D) auf etwa 20 bar entspannen; hierbei tritt nach dem Joule-Thomson-Effekt eine Abkühlung um $(200-20) \cdot \frac{1}{4} \text{ K} = 45 \text{ K}$ ein. Die abgekühlte Luft wird zurückgeleitet und dient zur Kühlung weiterer komprimierter Luft vor ihrer Entspannung. Durch diesen **Gegenstrom-Wärmeaustauscher** wird die Luft allmählich so tief abgekühlt, dass bei 20 bar Verflüssigung eintritt.

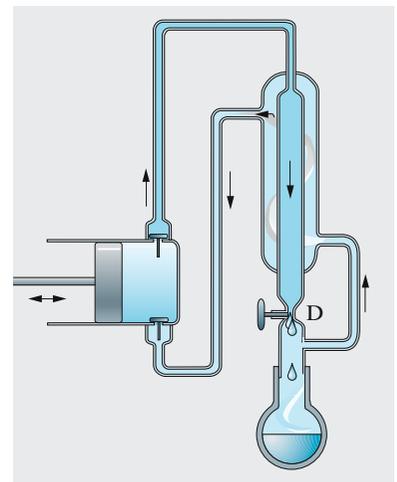


Abb. 5.73. Schema der Luftverflüssigungsmaschine von Linde

In einem offenen Gefäß nimmt **flüssige Luft** eine Temperatur von etwa -190 °C an, bei der sie unter Atmosphärendruck siedet. Das Sieden bewirkt die Beibehaltung der Temperatur, denn dadurch wird der flüssigen Luft Verdampfungswärme entzogen. Die Menge der absiedenden Luft regelt sich so ein, dass die (durch Wärmeleitung oder Einstrahlung) zugeführte Wärme gleich der verbrauchten Verdampfungswärme ist.

Um das Linde-Verfahren auf H_2 - oder He-Verflüssigung anwenden zu können, muss man diese Gase erst mit flüssiger Luft unter die Inversionstemperatur T_i vorkühlen. **Flüssiges Helium** siedet bei $4,2\text{ K}$. Durch Abpumpen des He-Gases über der siedenden Flüssigkeit erreicht man infolge der Verdunstungskälte eine Temperatursenkung. Da der Dampfdruck mit der Temperatur sehr stark abfällt, erreicht man mit diesem Verfahren keine tiefere Temperatur als $0,84\text{ K}$; zu ihr gehört der Dampfdruck $0,033\text{ mbar}$.

5.6.7 Erzeugung tiefster Temperaturen

Im Linde-Verfahren veranlasst man ein Gas, von einem Zustand geringerer in einen Zustand höherer innerer Energie überzugehen. Der expandierte Zustand hat die höhere Energie hinsichtlich der van der Waals-Kräfte, die die Moleküle zusammenzuhalten suchen; er entspricht dem gehobenen Gewicht. Ganz allgemein lässt sich, abgesehen von evtl. technischen Schwierigkeiten, jeder Stoff als Kühlmittel verwenden, wenn er zwei Zustände 1 und 2 verschiedener innerer Energie besitzt (z. B. seien die spezifischen Energien $W_1 < W_2$), zwischen denen er durch Änderung der äußeren Bedingungen (Druck, Magnetfeld o. Ä.) hin- und hergeschoben werden kann. Da jeder Wärmeaustausch den thermischen Effekt abschwächt, arbeitet man im Grenzfall, wenn es sich nur um Kühlung des „Kühlmittels“ selbst handelt wie beim Linde-Gas, adiabatisch. Dann ist die Abkühlung beim Übergang $1 \rightarrow 2$ einfach $W_2 - W_1$. Beim zyklischen Arbeiten muss die im umgekehrten Übergang frei werdende Wärme natürlich im Wärmeaustauscher abgegeben werden.

Die beiden Zustände, die man benutzt, können sein: dichtes Gas – entspanntes Gas; flüssig – gasförmig; fest – flüssig; ungelöst – gelöst; magnetisiert – entmagnetisiert usw. Der **Kühlschrank** und der **Airconditioner** nutzen neben dem Peltier-Effekt, der sich sehr langsam durchsetzt, die Verdampfung aus. Ein Stoff wie Ammoniak oder Ethylchlorid, der bei der tiefsten angestrebten Temperatur und bei Atmosphärendruck gasförmig ist, wird zyklisch im Kompressor unter Abfuhr der Verflüssigungswärme kondensiert und innerhalb des Kühlschranks hinter einem Drosselventil entspannt. Beim Absorbersystem wird die Verdampfung chemisch bewirkt. Außer durch Entspannung kann man (Nichtgleichgewichts-)Verdampfung auch durch kräftiges Abpumpen des Dampfes über einer Flüssigkeit provozieren und so die Flüssigkeit bis weit unter ihren Siedepunkt abkühlen. Anschaulich kann man sagen: Da zur Nachlieferung des Dampfes immer die schnellsten Moleküle die Phasengrenze passieren müssen, entziehen sie der Flüssigkeit Wärme. In der Folge O_2 , N_2 , Ar, He erreicht man so etwa 1 K . Eine Grenze ist dem Verfahren nur durch die ungefähr exponen-

tielle Abnahme des Dampfdrucks mit der Temperatur gesetzt: Schließlich ist praktisch kein Dampf mehr da, der abgepumpt werden könnte.

Rein statistisch ist die Analogie zwischen Verdampfen und Auflösen fast vollkommen (vgl. Abschn. 5.7.2), nur der energetische Effekt ist durch die **Solvatation** der gelösten Teilchen mehr oder weniger abgeschwächt. Die Spannweite der Kühlung durch Lösungen reicht von den Salzlaken der alten Eismaschinen bis zum **^3He - ^4He -Verfahren**. In einer Übersichtung von ^4He mit ^3He lösen sich etwa 6% ^3He im ^4He , und zwar ist diese Löslichkeit nahezu temperaturunabhängig. Die Solvatation ist hier dank des Edelgascharakters geringfügig und beeinträchtigt die Lösungswärme kaum. Durch Abpumpen des ^3He aus dem ^4He erzwingt man weitere Auflösung. Die Differenz der inneren Energien zwischen den beiden Isotopen geht allerdings entsprechend dem nernstschen Satz mit $T \rightarrow 0$ ebenfalls gegen Null, sodass man nur 0,003 K erreicht, dies allerdings kontinuierlich und gegen ziemlich große Wärmelecks.

Wir haben die Frage offengelassen: Warum geht der Zustand 1 (flüssig, ungelöst, verdichtet, magnetisiert) von selbst in den Zustand 2 (gasförmig, gelöst, entspannt, entmagnetisiert) über, obwohl dieser doch energetisch höher liegt? 1 l Wasser zu verdampfen, kostet ebenso viel Energie wie diesen 1 l Wasser 230 km hochzuheben. Warum läuft das Wasser, falls es nur heiß genug ist, von selbst „230 km bergauf“? Weil seine Entropie S im Gaszustand umso viel höher ist, dass die Differenz ΔS , mit T multipliziert, den Energieaufwand ΔH überwiegt. Entropie, Unordnung, d. h. Freiheit, ist selbst den Molekülen offenbar große energetische Opfer wert. Für die quantitative Diskussion ist die freie Enthalpie $G = H - TS$ am geeignetsten, weil sie die äußeren Parameter (Druck, Magnetfeld) einbezieht. Stabil ist der Zustand mit dem kleineren G . Dabei gilt $H = E + pV$ im Fall des Druckes, $H = E + \int M dB$ (M Magnetisierung, B Induktionsflussdichte) im Fall des Magnetfeldes. Speziell bei **Paramagnetismus**, wo $M = \chi B$ ist, gilt $H = E + \frac{1}{2}\chi B^2$. Bei tiefen Temperaturen entscheidet H , bei hohen S . Die Übergangstemperatur $T_S = (H_2 - H_1)/(S_2 - S_1)$ hängt über H von p bzw. B ab. Innerhalb der Spanne zwischen den T_S -Werten, die niederem (normalem) und hohem (Kompressor-)Druck entsprechen, kann der Kühlschrank arbeiten. Falls S und E T -unabhängig sind, ist dieses T -Intervall einfach $\Delta T = \Delta pV/(S_2 - S_1)$, wobei Δp der Überdruck des Kompressors und V praktisch das spezifische Volumen des Dampfes ist.

Auch die **Peltier-Kühlung** lässt sich nach diesem Prinzip verstehen. Hier handelt es sich um einen Elektronenstrom, der beim Übergang von einem Metall 1 zu einem Metall 2 die Lötstelle abkühlt und bei der Rückkehr von 2 zu 1 die andere Lötstelle erwärmt (Abschn. 6.6.2). Offenbar haben die Elektronen in 2 die höhere innere Energie, und ihre Hebung auf diese Energie führt die Kühlung herbei. Wenn das richtig ist, müssen die Elektronen in Abwesenheit einer äußeren Spannungsquelle wie ein Wasserfall von 2 nach 1 fließen, bis sich 1 so stark aufgeladen hat, dass weitere Nachlieferung verhindert wird. Bringt man die beiden Lötstellen auf verschiedene Temperatur, dann sind die beiden Wasserfälle verschieden stark, und es verbleibt ein effektiver Kreisstrom, der Thermostrom (Umkehrung des Peltier-Effekts, vgl. Abschn. 6.6.1).

Für die Tieftemperaturphysik wichtiger ist die **magnetische Kühlung** (Debye, 1927; Giauque, 1928). Magnetisierung eines Materials bedeutet teilweise Ausrichtung seiner Molekular- oder Atomarmagnete (Dipole) in Richtung des angelegten Feldes. Da parallel hintereinander liegende Dipole einander anziehen, liegt der magnetisierte Zustand i. Allg. energetisch tiefer als der unmagnetisierte, in dem die Dipole ziemlich regellos angeordnet sind. Gleichzeitig hat der magnetisierte Zustand mit seiner teilweisen Ordnung eine kleinere Entropie, ist also in jeder Hinsicht mit dem Zustand 1 unseres allgemeinen Schemas gleichzusetzen (er entspricht der Flüssigkeit, der unmagnetisierte dem Dampf). Beim Abschalten des Feldes „verdampft“ die magnetische Ordnung, und der damit verbundene Wärmeentzug entspricht der Wechselwirkungsenergie der Elementarmagnete. Diese Verdampfung tritt natürlich nur oberhalb des „Siedepunktes“ ein, bei dem spontane Magnetisierung durch gegenseitige Ausrichtung der Elementarmagnete im eigenen Feld einsetzt. Diese Grenztemperatur ist ebenfalls gegeben durch $T_s = (H_2 - H_1)/(S_2 - S_1)$. H ist im feldfreien Zustand proportional zur Wechselwirkungsenergie zweier Dipole p^2/r^2 (p : Dipolmoment; r : Abstand der Dipole). Kernmomente sind etwa 1000mal kleiner als die Momente der Hüllenelektronen, die den gewöhnlichen Paramagnetismus bedingen. Dementsprechend erreicht man durch **adiabatische Entmagnetisierung** geeigneter paramagnetischer Salze bestenfalls 0,003 K, durch Ausnutzung des Kernmagnetismus dagegen theoretisch $5 \cdot 10^{-7}$ K (der Faktor entspricht nicht ganz dem Verhältnis der p^2 , also 10^{-6} , weil die r - und ΔS -Werte etwas verschieden sind). Praktisch ist man z. Z. im Bereich einiger μK angelangt. In jedem Fall folgt aus der Proportionalität von T_s und ΔE mit ΔH : Je näher man dem absoluten Nullpunkt kommen will, desto kleiner wird die Kühlkapazität (Spezialfall des Satzes von Nernst).

Neuerdings wird auch der Übergang fest-flüssig in Gestalt des **Pomerantschuk-Effekts** ausgenutzt. ^3He zeigt unterhalb von 0,3 K eine noch ausgeprägtere Anomalie der Schmelzkurve als Wasser: Auch hier fällt die Grenzlinie fest-flüssig im p, T -Diagramm mit steigendem T ab, aber die feste Phase ist dichter, sodass ^3He durch Druck über 28 bar verfestigt wird. Merkwürdigerweise hat der feste Zustand die höhere Entropie (was beim Eis nicht der Fall ist). Das feste ^3He kann also die Rolle des Zustandes 2 spielen: Drucksteigerung in einem Gleichgewichtsgemisch von festem und flüssigem ^3He verfestigt einen Teil und lässt das System auf der Grenzkurve nach oben links rutschen, d. h. kühlt es ab.

Mit der noch jungen Methode der **Laserkühlung** werden Temperaturen im Nanokelvin-Bereich erzielt – allerdings bisher nur für ein gespeichertes Gas von höchstens 10^8 Atomen. In Abschn. 14.7 wird das Verfahren erläutert. Mit dieser Methode wurde es auch möglich, atomare Materiewellen (Abschn. 14.11) zu erzeugen.

5.7 Lösungen

In einem Lösungsmittel verteilte Moleküle verhalten sich in vieler Hinsicht wie im Vakuum verteilte, also wie ein Gas – aber doch nicht ganz so.

5.7.1 Grundbegriffe

In einer **Lösung** oder molekulardispersen Mischung sind die Moleküle mehrerer Stoffe fein durchmischt, in einem **Gemenge** bleiben sie jeweils in größeren Klumpen zusammen. In beiden Fällen kommen alle Kombinationen zwischen fest, flüssig und gasförmig vor, beim Gemenge zudem in allen Feinheitsgraden (Suspension, Staub, Kolloid, Emulsion, Nebel, Schaum usw.). Die Kombination Gas-Gas bildet definitionsgemäß nur eine Lösung. Wir reden hier von flüssigen Lösungen: die Gesetze für feste (Mischkristalle, Legierungen, viele Gesteine, Wasserstoff in Metallen wie Pd oder Pt) sind z. T. ähnlich, aber oft viel komplizierter.

Außer durch Druck und Temperatur ist die Lösung charakterisiert durch die Konzentration der Bestandteile. Es gibt viele Maße für die Konzentration; wir benutzen hier nur die **Molarität** (wie viele Mol Substanz in 1 l Lösung). Zwei Flüssigkeiten sind entweder in jedem Verhältnis mischbar, oder es gibt Mischungslücken. Ein Festkörper löst sich bis zu einer **Sättigungskonzentration**; der Rest bildet einen „Bodenkörper“ (der bei leichten gelösten Stoffen auch oben schwimmen kann). Ein Gas, das über einer Flüssigkeit steht, löst sich z. T. in dieser. Die Fälle $\text{CO}_2\text{-H}_2\text{O}$ und $\text{O}_2\text{-H}_2\text{O}$ sind biologisch besonders wichtig.

Das Gelöste steht zum Bodenkörper, der Dampf zum Gelösten im gleichen Verhältnis wie der Dampf zur homogenen Flüssigkeit: Die Verteilung der Teilchen über beide Phasen folgt im Gleichgewicht zwischen ein- und austretenden Teilchen der Boltzmann-Gleichung $n_1/n_2 = e^{-G/(RT)}$, wo G der Unterschied der freien Enthalpien zwischen den beiden Phasen ist. Da der Bodenkörper kompakt ist, also eine praktisch T -unabhängige Teilchenzahldichte hat, folgt für die Sättigungskonzentration direkt eine Arrhenius-Abhängigkeit, aus deren $\ln c(1/T)$ -Auftragung man die **Lösungswärme** ablesen kann: Stoffe, bei deren Auflösung Wärme frei wird, lösen sich besser im Kalten, und umgekehrt. Der Entropieanteil in G ist aber auch zu beachten. Allgemein folgt für die Verteilung eines Stoffes über zwei Phasen der **Verteilungssatz von Nernst**: n_1/n_2 , der **Verteilungskoeffizient**, hängt nur von der Temperatur ab. Spezialfälle für Lösungen von Gasen sind die Gesetze von *Henry-Dalton* und von *Raoult*: Eine Flüssigkeit löst umso mehr Gas, je höher dessen Partial-Dampfdruck über der Flüssigkeit ist: $n_{\text{Gel}} = \beta n_{\text{Gas}} = \alpha k T n_{\text{Gas}} = \alpha p$ (β , α : Absorptionskoeffizienten nach *Ostwald* bzw. *Bunsen*). Der Dampfdruck eines flüssigen Mischungsbestandteils ist proportional zu dessen molarem Anteil in der Lösung. Beide Proportionalitäten gelten streng nur für ideale Lösungen, d. h. solche, wo die Teilchen verschiedener Art gar nicht oder ebenso stark wechselwirken wie die gleicher Art, was bei der engen Lagerung in Flüssigkeiten viel verlangt ist. Abweichungen vom idealen Verhalten sind für Trenn- und Mischvorgänge oft entscheidend (Aufgabe 5.7.7).

5.7.2 Osmose

Eine Wand heißt **semipermeabel**, wenn sie für einen Lösungsbestandteil, z. B. Wassermoleküle, durchlässig ist, der andere (z. B. die größeren gelösten Moleküle) nicht durchtreten kann. Viele biologische Membranen (Zellwände usw.) sind semipermeabel.

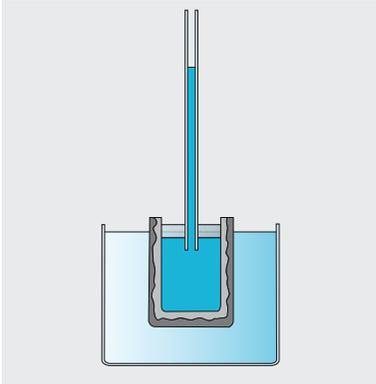


Abb. 5.74. Pfeffersche Zelle

Man schließt ein Gefäß (**pfeffersche Zelle**) mit einem Steigrohr durch eine semipermeable Wand ab, füllt es mit einer geeigneten Lösung und stellt es in ein größeres Gefäß mit reinem Wasser (Abb. 5.74). Allmählich dringt Wasser durch die Wand in die Zelle und bringt die Lösung im Rohr zum Steigen, bis der hydrostatische Druck der Flüssigkeitssäule im Rohr ein weiteres Eindringen verhindert. Dieser Druck ist dann gleich dem **osmotischen Druck** der Lösung.

Durch eine semipermeable Wand, die zwei Lösungen verschiedener Konzentration im gleichen Lösungsmittel trennt, wandert Lösungsmittel bis zum Ausgleich der Konzentrationen, d. h. der osmotischen Drücke, bis zur **Isotonie**. Diese **Dialyse** wird bei Nierenkranken angewandt oder z. B. zur Herstellung alkoholfreien Bieres. Pflanzen- und Tierzellen, die man in normales Wasser legt, schwellen an oder platzen, weil sie **hypertonisch** sind, d. h. höhere Konzentration und damit höheren osmotischen Druck besitzen. Von höher konzentrierter Lösung umspült, schrumpfen die Zellen; Pflanzen welken bei zu starker „Kopfdüngung“. **Physiologische Lösung** mit etwa 9 g/l NaCl ist isotonisch und vermeidet die **Hämolyse** z. B. für Blutzellen.

Beim Aufprall auf die semipermeable Wand üben die gelösten Moleküle genau den gleichen Druck aus, als sei das Lösungsmittel nicht vorhanden und sie schwebten als Gasteilchen im leeren Raum. Der osmotische Druck ist also genauso groß wie der Druck eines Gases gleicher Teilchenzahldichte n :

$$p_{\text{osm}} = nkT \quad (5.111)$$

Makroskopisch ausgedrückt lautet dieses **Gesetz von van't Hoff** wie die ideale Gasgleichung:

$$p_{\text{osm}}V = \nu RT \quad (5.111')$$

Wenn der gelöste Stoff in Ionen dissoziiert, ist dies bei der Angabe der Stoffmenge ν zu berücksichtigen. NaCl z. B. erzeugt den doppelten osmotischen Druck, als wenn es in Form von NaCl-Molekülen gelöst wäre.

5.7.3 Dampfdrucksenkung

Eine pfeffersche Zelle, gefüllt mit Lösung und in das reine Lösungsmittel eingetaucht, wird diesmal in ein geschlossenes Gefäß gesetzt, in dem sich nur der Dampf des Lösungsmittels befindet (Abb. 5.75). Der gelöste Stoff, z. B. ein Salz, erzeugt keinen merklichen Dampfdruck. An beiden Flüssigkeitsoberflächen, im Hauptgefäß und im Steigrohr, muss Gleichgewicht zwischen Verdunstung und Kondensation herrschen. Wäre das nicht der Fall, z. B. die Verdunstung im Steigrohr stärker, würde dort ständig Flüssigkeit verdampfen und müsste durch die semipermeable Membran nachgesogen werden. Im Prinzip könnte dieser Flüssigkeitsstrom ständig Arbeit leisten, nur auf Kosten des Wärmeinhalts des Systems. Das widerspräche dem zweiten Hauptsatz. Der Dampfdruck p muss also an beiden Flüssigkeitsoberflächen dem *dort herrschenden Außendruck* entsprechen. Dieser nimmt auf der Steighöhe h um $\Delta p = g \rho_D h$ ab, der Dampfdruck ebenfalls. Da $h = p_{\text{osm}} / (g \rho_{\text{fl}})$, folgt $\Delta p = p_{\text{osm}} \rho_D / \rho_{\text{fl}}$. Nun ist nach van't Hoff $p_{\text{osm}} / p = \rho_{\text{Gel}} / \rho_D = \mu c / \rho_D$,

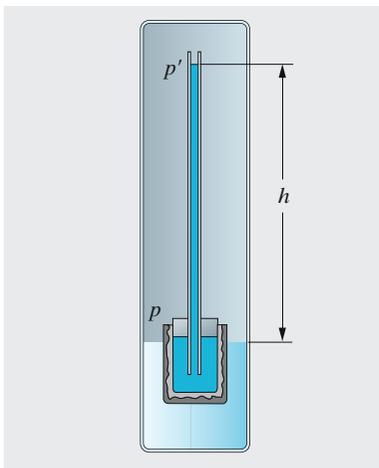


Abb. 5.75. Zusammenhang zwischen Dampfdruckerniedrigung und osmotischem Druck

wo $\varrho_{\text{Gel.}}$, c , μ Dichte, Konzentration und Molmasse (in kg) des Gelösten sind. Damit wird

$$\Delta p = p \frac{\mu}{\varrho_{\text{fl}}} c. \quad (5.112)$$

Wichtige Folgen der **Dampfdrucksenkung** sind eine **Siedepunktserhöhung** ΔT_S und eine **Gefrierpunktssenkung** ΔT_G . Qualitativ kann man sagen: Der osmotische Druck erweitert den Existenzbereich der Flüssigkeit nach beiden Seiten, falls der gelöste Stoff ebenso wenig mitverdampft, wie er in den festen Zustand mit eingefriert. Den Zusammenhang zwischen ΔT_S und Δp kann man aus der Dampfdruckkurve ablesen (Abb. 5.76) oder nach *Boltzmann* oder *Clausius-Clapeyron* ausrechnen: $\Delta p / \Delta T_S$ ist die Steigung der Dampfdruckkurve $p = p_0 e^{-\Lambda/(RT)}$, also $\Delta p / p = \Lambda \Delta T / (RT^2) = \mu \lambda \Delta T / (RT^2)$. Der Vergleich mit (5.112) liefert

$$\Delta T_S = \frac{RT_S^2}{\lambda \varrho_{\text{fl}}} c. \quad (5.113)$$

λ ist die spezifische, Λ die molare Verdampfungsenergie. Diese Abhängigkeit allein von der molaren Konzentration wurde erstmals von *Raoult* gemessen. Die Abhängigkeit vom Lösungsmittel steckt in der **ebullioskopischen Konstante** $RT_S^2 / (\lambda \varrho_{\text{fl}})$, die für Wasser den Wert $0,51 \text{ K l mol}^{-1}$ hat. Kennt man sie, dann kann man z. B. aus der bekannten g/l-Konzentration der Lösung die molare Konzentration bestimmen und damit die molare Masse des Gelösten.

Ebenso wie die **Ebullioskopie** ist die **Kryoskopie**, also die Messung der Gefrierpunktssenkung, ein elegantes Mittel zur **Molekulargewichtsbestimmung**. Beim Schmelzpunkt haben Festkörper und Flüssigkeit den gleichen Dampfdruck. Die $p(T)$ -Kurve des Festkörpers ist aber viel steiler als die der Flüssigkeit. In der Auftragung $\ln p(1/T)$ entsprechen die Steigungen der Sublimations- bzw. Verdampfungsenergie. Ihre Differenz ist die spezifische Schmelzenergie λ' . Da die gelöste Substanz den Dampfdruck der Flüssigkeit senkt, schneiden sich die Dampfdruckkurven von flüssig und fest erst bei einer tieferen Temperatur. Hier übernimmt die spezifische Schmelzenergie λ' die Rolle, die λ für den Siedepunkt gespielt hat:

$$\Delta T_G = -\frac{RT_G^2}{\lambda' \varrho_{\text{fl}}} c. \quad (5.114)$$

Für Wasser ergeben Beobachtungen und Rechnung die **kryoskopische Konstante** $RT_G^2 / (\lambda' \varrho_{\text{fl}}) = 1,86 \text{ K l mol}^{-1}$. Bei solchen kryoskopischen Messungen muss man beachten, dass sich das Gefrieren einer Lösung über einen endlichen Temperaturbereich hinzieht, weil zuerst reines Lösungsmittel erstarrt, wodurch sich die Lösung immer mehr anreichert und die Gefrieretemperatur weiter sinkt. Entscheidend ist der Beginn der Erstarrung.

5.7.4 Destillation

Da Alkohol (Ethanol) flüchtiger ist als Wasser, d. h. einen höheren Dampfdruck hat, kann man ihn durch Verdampfen und Kondensieren des Dampfes anreichern. Ähnlich trennt man reines Wasser von gelösten Feststoffen. Destillationsvorgänge diskutiert man am besten im **Dampfdruck-** oder **Siedediagramm**. Wir tragen den Dampfdruck einer binären Lösung über dem (molaren) Anteil x eines Bestandteils in der Flüssigkeit auf (Abb. 5.77). Im idealen Fall ergibt jeder Bestandteil nach *Raoult* eine Gerade von 0 bis zum Dampfdruck p_{i1} des Reinstoffes. Deren Summe, der Gesamt-Dampfdruck, ergibt ebenfalls eine Gerade von p_{A1} nach p_{B1} . Im Dampfraum herrscht dann aber ein ganz anderer Mengenanteil y des Stoffes B , außer natürlich an den Endpunkten. In der Mitte des Diagramms ist in der Flüssigkeit $x = \frac{1}{2}$, im Dampfraum $y = p_{B1} / (p_{A1} + p_{B1})$. Tragen wir auf der gleichen

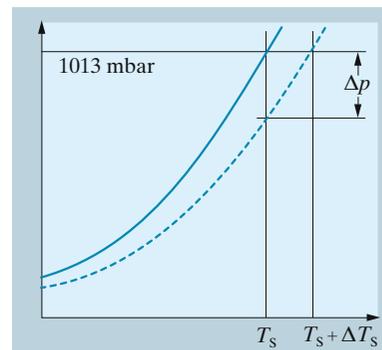


Abb. 5.76. Zusammenhang zwischen Dampfdrucksenkung und Siedepunktserhöhung (schematisch)

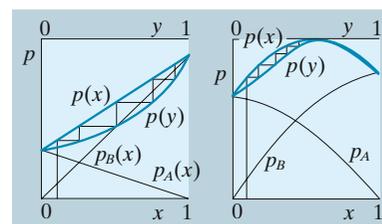


Abb. 5.77. Dampfdruck eines Gemisches (—) und seiner Bestandteile (—), aufgetragen über den Mischungsverhältnissen x in der Flüssigkeit und y im Dampf; links für ein ideales, rechts ein reales Gemisch. Fraktionierte Destillation führt links zum Reinstoff, rechts nur zum azeotropen Gemisch

Achse wie x auch y auf, ergibt sich eine Kurve (Hyperbelbogen), die nach der Seite des flüchtigen Stoffes durchhängt: Bei gegebenem Dampfdruck ist natürlich der Dampf reicher am flüchtigen Stoff als die Flüssigkeit. Lässt man das Kondensat immer wieder sieden (**fraktionierte Destillation**), kann man den Streckenzug in Abb. 5.77 bis zum reinen Stoff B durchlaufen.

x Beispiel . . .

Richten Sie sich selbst Ihre Frostschutzmischung für den Autokühler her. Warum nimmt man meist Ethylenglykol oder Glycerin? Gäbe es nicht Stoffe mit höherer Frostschutzwirkung?

1 mol/l, in Wasser gelöst, senkt den Gefrierpunkt um $1,86^\circ$. Um auf -20°C eingerichtet zu sein, muss man 1 l mol/l lösen, d. h. 670 g/l Glykol (CH_2OH)₂ oder 1 000 g/l Glycerin $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_3$. Ganz so viel braucht man praktisch nicht, denn der Eisbrei, der aus dem Gemisch bei Unterschreitung des gesenkten Gefrierpunkts entsteht, hat keine Sprengwirkung mehr. Alkohol, besonders Methylalkohol, ist billiger, und man braucht nur etwa halb so viel, aber er verdampft allmählich aus der Lösung. 320 g/l NaCl würden es auch tun, wenn die Korrosionswirkung im Kühlsystem nicht wäre.

Viele Lösungen, auch Ethanol-Wasser, sind aber nicht ideal. Wenn verschiedenartige Teilchen stärker wechselwirken als gleichartige, biegen sich die $p_i(x)$ -Kurven nach oben durch. Das kann so weit gehen, dass auch die Kurve des Gesamtdampfdrucks $p(x)$ ein Maximum hat. Dieses Maximum muss für die $p(y)$ -Kurve an der gleichen Stelle und in gleicher Höhe liegen. Jeder p -Wert auf der einen Kurve muss ja auch auf der anderen zu finden sein. Das Maximum beschreibt das **azeotrope Gemisch**. Über diesen Punkt kommt man ohne weitere Maßnahmen nicht hinaus.

5.8 Vakuum

Wenn nur noch sehr wenige Moleküle da sind, wenn sie kaum noch miteinander stoßen, sondern nur noch mit den Gefäßwänden, kommt ihr Verhalten noch klarer zum Ausdruck.

5.8.1 Bedeutung der Vakuumtechnik

Die Frage, ob das Nichts existieren könne, ist so alt wie die Philosophie. Für *Demokrit*, *Leukipp* und *Lukrez* schwebten die Atome in der absoluten Leere, für die meisten anderen, vor allem für *Aristoteles*, hatte die Natur einen unüberwindlichen „**horror vacui**“. Als *Torricelli* und *Guericke* die ersten *praktischen* Vakua als stark luftverdünnte Räume herstellten, schien die Frage zunächst erledigt. Aber so dumm war *Aristoteles* offenbar doch nicht. Heute wird der Raum zwischen den Teilchen immer erfüllter von Feldern aller Art, von den elektromagnetischen bis hin zu den Materie-Erzeugungsfeldern.

Jedenfalls leiteten *Torricelli*, *Guericke*, *Pascal* und *Boyle* eine Entwicklung ein, ohne die unsere Wissenschaft und Technik gar nicht möglich wären. Die moderne Atomphysik begann mit Gasentladungen in evakuierten Gefäßen, die technisch zur Röntgen-Röhre und Gasentladungslampe führten. Glühlampen und Fernsehrohren sind Produkte der Vakuumtechnik, die jeder braucht oder zu brauchen glaubt. Vor der Entwicklung der Halbleiterelemente lebte die Nachrichtentechnik von Vakuum-Gleichrichter- und -Verstärkerröhren. Auch die Herstellung von

Halbleiternaterialien stellt höchste Ansprüche an die Vakuumtechnik: Reinigung, Oberflächenbedampfung, Diffusion von Fremdstoffen. In die chemische und biologische Technik dringen Vakuummethoden immer mehr ein. Viele Lebensmittel werden im Vakuum verpackt, verarbeitet und besonders getrocknet; der erniedrigte Dampfdruck des Wassers erlaubt dabei, geschmacksschädigende Erhitzung zu vermeiden. Wenn auch einzelne Experimente und Produktionsprozesse ins Weltall verlagert werden, wo schon um 1 000 km Höhe Vakua herrschen, von denen man im Labor nur träumen kann, wird die Vakuumtechnik auch auf der Erde ihre Bedeutung immer mehr steigern.

Nach den physikalischen Erscheinungen und technischen Erfordernissen unterscheidet man folgende Vakuumbereiche:

Bereich	Druck/mbar	Freie Weglänge/m	Strömungsmechanismus
Großvakuum	1 000–1	10^{-7} – 10^{-4}	viskos
Feinvakuum (Vorvakuum)	1 – 10^{-3}	10^{-4} – 10^{-1}	Knudsen
Hochvakuum	10^{-3} – 10^{-7}	10^{-1} – 10^3	molekular
Ultrahochvakuum	$< 10^{-7}$	$> 10^3$	

Vakuumapparaturen baut man aus Glas, Edelstahl, Kupfer, Messing. Die Gaseinschlüsse, die von der Herstellung in Glas mit seiner amorphen Struktur bleiben, müssen sorgfältig ausgeheizt werden. Zur Dichtung von Verbindungen, Hähnen, Ventilen verwendet man Gummi, Teflon, weiche Metalle, Fett. Wesentlich ist hierbei immer der Dampfdruck des Materials. Gummiringe müssen vulkanisiert sein, nicht geklebt, denn der hohe Dampfdruck der meisten Kleber lässt sich ja schon am Geruch feststellen. Niedriger Dampfdruck ist auch wesentlich für Vakuumfette. Allerdings erzeugt man durch ständiges kräftiges Abpumpen oft einen Druck in der Apparatur, der viel geringer ist als der Dampfdruck des flüchtigsten Bestandteils, der sich ja nur im Gleichgewicht einstellen würde.

5.8.2 Vakuumpumpen

Pumpen entfernen Gas aus dem zu evakuierenden Gefäß, dem Rezipienten, indem sie es in einen anderen Raum, speziell die freie Atmosphäre befördern (mechanische Pumpen, Diffusionspumpen), oder indem sie es innerhalb der Vakuumanlage binden (kondensieren, sorbieren, chemisch binden). Mechanische Pumpen haben einen bestimmten Schöpfraum, den sie entweder abwechselnd vergrößern oder verkleinern, oder der konstant ist und abwechselnd oder kontinuierlich an der Niederdruckseite aufgefüllt und an der Hochdruckseite entleert wird. Diffusionspumpen ähneln mechanischen Pumpen mit konstantem, kontinuierlich arbeitendem Schöpfraum.

Eine wesentliche Kenngröße einer Pumpe ist der *Volumenstrom* \dot{V} , den sie fördert, genannt **Saugvermögen**, angegeben in l/s und bei mechanischen Pumpen leicht aus der Konstruktion abzulesen als Schöpfvolumen · Drehfrequenz. Davon zu unterscheiden ist die **Saugleistung**. Sie gibt den geförderten Gas-Massenstrom an. Wichtig sind noch der **Enddruck**, den die Pumpe am Ansaugstutzen erreicht, und der **Anfangsdruck**, gegen den sie das geförderte Gas ausstößt. Bei den Vorpumpen ist der Anfangsdruck gleich dem Atmosphärendruck. Die meisten Pumpen brauchen einen sehr viel kleineren Anfangsdruck, den ihnen eine Vorpumpe liefern muss.

Drehschieberpumpen und **Sperrschieberpumpen** ähneln in ihrem Aufbau dem Verbrennungsmotor, die erste dem Wankel-Motor, die zweite dem Otto-Motor. Ihr Arbeitszyklus besteht aus einem Ansaugtakt auf der Vakuumseite und einem Auspufftakt an die Atmosphäre (Abb. 5.78). Maximale und minimale Größe des

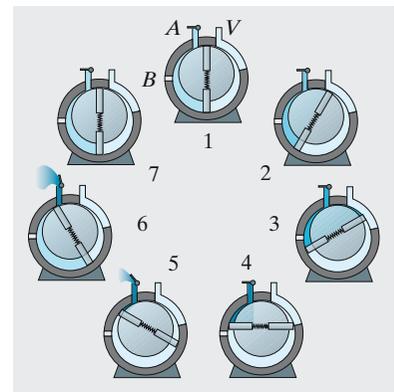


Abb. 5.78. Drehschieberpumpe. Bei V ist der Vorvakuumschlauch angeschlossen, das Ventil A öffnet den Auspuff zur Atmosphäre, wenn der Druck davor größer als 1 bar wird. Zwischen Phase 4 und 5 hat das Gasballastventil B eine dosierte Menge Luft zugelassen, damit in Phase 5 oder 6 keine Kondensation besonders von Wasserdampf eintritt. Maximaler Schöpfraum unten in Phase 4, minimaler oben links in Phase 5 (beim Öffnen des Ventils A)

www.

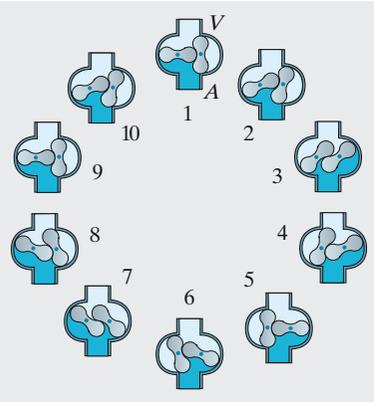


Abb. 5.79. Wälzkolbenpumpe oder Roots-Pumpe. Die beiden Kolben haben *keinen* aus lauter Kreisbögen zusammengesetzten Querschnitt, wie hier vereinfacht dargestellt. Genaues Hinschauen zeigt besonders in Phase 3 Undichtigkeit. Bei *V* saugt die Pumpe aus dem Vakuumgefäß ab, bei *A* stößt sie die geförderte Gasmenge an die Atmosphäre oder die Vorpumpe aus. Der Schöpfraum ist in Phase 8 rechts als etwa halbmondförmiger Raum besonders gut zu erkennen

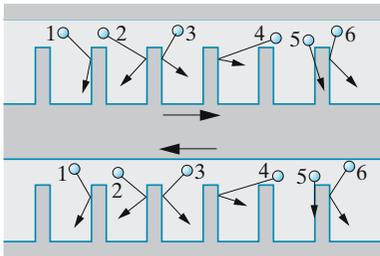


Abb. 5.80. Prinzip der Molekularpumpe (Gaede): Im Bezugssystem des Rotors (*unten*) werden die Moleküle am Rotor elastisch reflektiert (Einfallswinkel = Ausfallswinkel), im Bezugssystem des Stators (*oben*) erhält das Molekül beim Stoß die Geschwindigkeitskomponente des Rotors oder einen Teil davon hinzu. Ein thermisches Gleichgewicht der Moleküle kann sich nicht mehr einstellen, denn sie stoßen kaum noch miteinander. Molekül 5 fliegt tatsächlich geradlinig, denn im oberen Bild ist der Rotor schon entsprechend weiter, sodass das Molekül streifend längs der Wand fliegt (*unteres Bild*)

Schöpfraums V_{\max} und V_{\min} ergeben sich aus der Abbildung. Sie bestimmen nach der Gasgleichung das Verhältnis von Anfangs- und Enddruck, falls man isotherme Kompression annehmen kann: $p_a/p_e \approx V_{\max}/V_{\min}$. Mehrstufige Pumpen dieser Art, d. h. mehrere Pumpen im gleichen Gehäuse hintereinander geschaltet, steigern dieses Verhältnis, erreichen aber kaum geringere Enddrücke als 10^{-3} mbar.

Ein Problem war lange Zeit das Abpumpen kondensierbarer Dämpfe, besonders von Wasserdampf, bis *W. Gaede* es durch den **Gasballast** überwand. Damit das Auspuffventil öffnet, muss die Pumpe ja das Gas im verkleinerten Schöpfraum auf etwas mehr als Atmosphärendruck komprimiert haben. Wenn dieses Gas nun in einer fast evakuierten Apparatur mit Restfeuchtigkeit darin fast nur noch aus Wasserdampf besteht, würde dieser kurz vor dem Auspuff übersättigt sein, also vorher schon kondensieren. Der Druck im Schöpfraum steigt nach der Kondensation nicht weiter an, das Auspuffventil öffnet nicht. Außerdem kann Emulgierung des Wassers mit dem Schmieröl das Funktionieren der Pumpe beeinträchtigen. Man lässt daher, wenn der Schöpfraum gerade ganz vom Vakuum abgeschlossen ist, durch ein Ventil eine dosierte Luftmenge ein, damit das Auspuffventil schon bei geringerer Kompression öffnet, bei der der H_2O -Partialdruck noch unter dem Sättigungsdampfdruck liegt. Diese Gasballastmenge richtet sich nach dem Verhältnis von Sättigungsdampfdruck und Atmosphärendruck, also der Gastemperatur in der Pumpe, und muss bei kalter (startender) Pumpe größer sein.

Die **Roots-Pumpe** (Wälzkolbenpumpe) hat ein konstantes Schöpfvolumen (Abb. 5.79); das Saugvermögen kann sehr groß werden dank hoher Drehfrequenzen, die man erreicht, weil die Formgebung der Kolben ihre direkte Berührung untereinander und mit der Wand vermeidet. Die Schlitzbreite zwischen diesen Flächen und die Rückströmung von Gas durch diesen Schlitz bestimmen das Verhältnis Anfangsdruck/Enddruck. Bei Atmosphärendruck ist diese Rückströmung meist zu groß, hinter einer Vorpumpe erreicht man Enddrücke unterhalb 10^{-3} mbar.

Das Prinzip der **Molekularpumpen** wurde schon von *Gaede*, *Langmuir* und *Siegbahn* um 1913 angegeben, aber erst kürzlich mit der Turbopumpe allgemeiner nutzbar. Zwischen den Wänden eines sehr schnell umlaufenden Rotors und eines Statorgehäuses bleibt ein enger Schlitz. Wenn die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle größer ist als die Schlitzbreite, sodass die Moleküle fast nur noch Wandstöße ausführen, erhalten sie bei der Reflexion am Rotor dessen Geschwindigkeitskomponenten, und ihre thermische Geschwindigkeit dreht sich allmählich fast ganz in die Drehrichtung des Rotors (Abb. 5.80). Bei höherem Druck, wenn die freie Weglänge klein gegen die Schlitzbreite ist, schleppt der Rotor zwar die dann viskos strömenden Moleküle auch mit, aber nur mit der Rotorgeschwindigkeit, die viel kleiner ist als die thermische Molekülgeschwindigkeit. Molekularpumpen brauchen daher ein gutes Vorvakuum und können dann Enddrücke unter 10^{-10} mbar erreichen. Das Saugvermögen ist bei leichten Gasen besser, weil ihre Moleküle schneller fliegen; aus dem gleichen Grund, d. h. wegen ihrer verstärkten Rückdiffusion, erreicht man aber bei leichten Gasen keinen so geringen Enddruck.

Bei den **Diffusionspumpen** und **Treibmittelpumpen** ist die schnell bewegte Rotoroberfläche durch einen Dampf- oder Flüssigkeitsstrahl ersetzt. Die Wasserstrahlpumpe benutzt allerdings hauptsächlich das Unterdruckprinzip von *Bernoulli*. Im eigentlich molekularen Bereich brauchen diese Pumpen ebenfalls ein gutes Vorvakuum. Man wundert sich zunächst, warum das abzupumpende Gas aus dem bereits sehr verdünnten Vakuum in den Quecksilber- oder Öl-Dampfstrahl einwandert, obwohl dort doch der Druck sehr viel höher ist, nämlich gleich dem Dampfdruck des siedenden Treibmittels. Die molekulare Vorstellung macht aber sofort klar, dass es nicht auf diesen Totaldruck ankommt, sondern nur auf den Partialdruck. Da das Treibmittel, solange es flüssig oder frisch verdampft ist, keine Moleküle des abzupumpenden Gases enthält, diffundieren diese aus dem Gasraum

in den Treibstrahl hinein, auch gegen einen hohen Gradienten des Totaldrucks. Voraussetzung für die Beladbarkeit des Strahls ist eine hinreichende Geschwindigkeit, die manchmal Überschallwerte erreicht. Diffusionspumpen erreichen dann bei einem Vorvakuum von 10^{-2} – 10^{-3} mbar einen Enddruck um 10^{-9} mbar.

Die einfachste **Kondensationspumpe** ist die **Kühlfalle**, in der sich Wasser- oder andere Dämpfe bei Kühlung mit flüssigem Stickstoff oder anderen Kühlmitteln niederschlagen, wenn sie durch eine mechanische oder Diffusionspumpe an der kalten Wand vorbeigesaugt werden. Eine Kühlfalle lässt sich als zusätzliche Pumpe auffassen, allerdings mit einem Saugvermögen, das von der Gasart, nämlich vom Dampfdruck, abhängt. Wenn alle Dampfmoleküle, die durch die Falle gesogen werden, an der gekühlten Fläche A kondensieren, verschwinden $nv_{\text{mol}}A$ solcher Moleküle pro Sekunde aus diesem Gasstrom. nv_{mol} ist nämlich die Stoßzahl-dichte mit der Wand. Der auskondensierende Massenstrom ergibt sich durch Multiplikation mit der Molekülmasse m . Da $mn = \rho$ und der Massenstrom $\rho\dot{V}$, ergibt sich $\dot{V} = v_{\text{mol}}A$. Wenn der Partialdruck des Dampfes p_1 im Rezipienten nicht mehr klein gegen seinen Dampfdruck p_2 bei der Falltemperatur ist, reduziert die Wiederverdampfung das Saugvermögen auf $(1 - p_1/p_2)v_{\text{mol}}A$.

Bei Kühlung mit flüssigem Wasserstoff oder Helium kann man in der **Kryopumpe** auch die „permanenten“ Luftbestandteile ausfrieren. **Sorptionspumpen** binden die Gasmoleküle an oder in festen Stoffen, die entweder von Zeit zu Zeit oder kontinuierlich regeneriert werden. Gebräuchlich als Sorptionsmittel sind Alkali-Aluminosilikate wie Zeolith. Wenn die adsorbierende Schicht durch Aufdampfen immer wieder erneuert wird, spricht man von **Getterpumpen**. Stickstoff wird besonders gut durch Titan sorbiert. Um die Sorptionswirkung zu erhöhen, ionisiert man in Ionenzerstäuber-Pumpen entweder die Gasteilchen oder die adsorbierende Oberfläche und erhöht dabei die wirksame Stoßzahl durch Umlenkung in elektromagnetischen Feldern.

5.8.3 Strömung verdünnter Gase

Eine Pumpe mit dem Saugvermögen \dot{V}_P (in l/s) pumpt aus dem Rezipienten einen Volumenstrom \dot{V}_R , der immer kleiner ist als \dot{V}_P . Zwischen Rezipient und Pumpe liegt ja eine Vakuumleitung mit einem bestimmten Strömungswiderstand, an der ein Druckabfall $p_R - p_P$ herrschen muss, damit das Gas strömt. Es gibt eine Erhaltungsgröße, die am Anfang und am Ende dieser Leitung den gleichen Wert haben muss, aber das ist nicht der Volumenstrom, sondern der Massenstrom, der unter idealen isothermen Bedingungen proportional zu $p\dot{V}$ ist. Am Rezipientenausgang, wo p höher ist, muss daher \dot{V} kleiner sein. Definiert man analog zum ohmschen Gesetz den Strömungswiderstand R als Verhältnis des Druckabfalls (der „Spannung“) zum Massenstrom (analog dem elektrischen Strom), also $R = \Delta p / (p\dot{V})$, dann ergibt sich aus der Erhaltung des Massenstroms $p\dot{V}$

$$\dot{V}_R^{-1} = \dot{V}_P^{-1} + R.$$

Strömungswiderstände verhalten sich in vieler Hinsicht wie elektrische Widerstände. Bei Hintereinanderschaltung addieren sie sich, weil sich die Druckabfälle addieren, bei Parallelschaltung addieren sich die Leitwerte R^{-1} , weil sich die Massenströme addieren.

Wenn eine Pumpe einen zeitlich konstanten Volumenstrom aus dem Rezipienten erzeugt, wie das meist der Fall ist, nehmen Gasmenge m und Gasdruck p darin exponentiell mit der Zeit ab, denn der Massenstrom \dot{m} ist proportional zu p , also zu m .

Bei der Bestimmung von Strömungswiderständen im Vakuum sind molekulare Vorstellungen unerlässlich. Sowie die mittlere freie Weglänge l nicht mehr

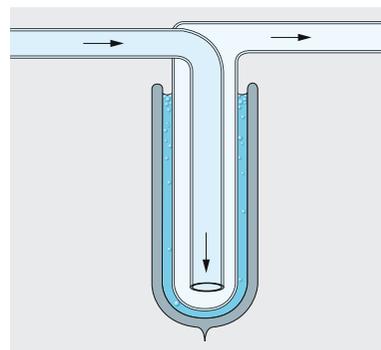


Abb. 5.81. Kühlfalle. Kondensierbare Dämpfe werden an der mit flüssiger Luft gekühlten Glaswand ausgefroren. Eine Kryopumpe leistet dasselbe auch für „permanente“ Gase bei Kühlung mit flüssigem Wasserstoff oder Helium

klein gegen den Rohrdurchmesser d ist, was um 10^{-2} mbar eintritt, folgt die Rohrströmung nicht mehr dem Hagen-Poiseuille-Gesetz $\dot{V} \sim d^4 \Delta p / (\eta L)$. Nach einem Übergangsbereich, der **Knudsen-Strömung**, folgt bei $l \gg d$ die reine **Molekularströmung**. Die Moleküle fliegen ungehindert durch ihresgleichen durch das Rohr, an dessen Wand sie prallen, wobei sie nicht elastisch, sondern ungefähr gleichmäßig nach allen Richtungen reflektiert werden. Selbst die glatteste Wand ist ja molekular immer rau. Die Molekularströmung lässt sich als Diffusion auffassen, wobei die Rolle der freien Weglänge l jetzt annähernd vom Rohrdurchmesser d übernommen wird. Der Diffusionskoeffizient wird nach (5.64) $D \approx \frac{1}{3} vd$, die Teilchenstromdichte im Gradienten $\text{grad } n = \Delta n / L$ wird nach (5.57) $j \approx \frac{1}{3} vd \Delta n / L$, der Massenstrom durch den Rohrquerschnitt $A = \pi d^2 / 4$ wird

$$m j A \approx v d^3 m \frac{\Delta n}{L}.$$

Verengungen sind nach diesem d^3 -Gesetz nicht mehr so große Hindernisse wie nach dem d^4 -Gesetz der viskosen Strömung. Der Strömungswiderstand $R = \Delta p / (p \dot{V})$ nimmt im Hagen-Poiseuille-Bereich mit abnehmendem Druck zu: $R \sim L / (p d^4)$, d. h. eine Druckdifferenz fördert einen umso geringeren Massenstrom, je besser das Vorvakuum ist. Im Molekularbereich wird R unabhängig von p , nämlich $R \sim TL / (v d^3) \sim \sqrt{T} L / d^3$.

Auch die Strömung durch ein Loch, dessen Durchmesser klein gegen die freie Weglänge ist, folgt nicht mehr dem Torricelli-Gesetz $v = \sqrt{2 \Delta p / \rho}$. Wenn sich die Moleküle nicht mehr als viskose Masse durch das Loch drängen müssen, sondern einzeln frei mit der thermischen Geschwindigkeit v_{mol} durchfliegen, wird die Strömung stärker als nach Torricelli, denn v_{mol} ist größer als $\sqrt{2 \Delta p / \rho}$.

Wichtig für alle Aufdampfungsvorgänge und für Kondensations- und Sorptionspumpen ebenso wie für die Wasseraufnahme hydrophiler Stoffe ist die *Bedeckungszeit*, d. h. die Zeit, in der sich auf einer reinen Oberfläche eine zusammenhängende monomolekulare Schicht bilden würde, wenn alle auftreffenden Gasmoleküle dort sitzen blieben. Auf die Wandfläche A treffen in der Sekunde $n v A$ Moleküle. Setzt man A gleich dem Molekülquerschnitt, ergibt sich die Bedeckungszeit als $\tau = 1 / (n v A)$. Das ist etwa die Zeit, die das Molekül zum Durchlaufen seiner freien Weglänge $l \approx 1 / (n A)$ braucht. Bei Atmosphärendruck kann es gar keine reinen Oberflächen geben, weil die Bedeckungszeit um 10^{-10} s liegt. Erst das Ultrahochvakuum erlaubt Reinhaltung von Oberflächen für Zeiten von 1 min und mehr.

5.8.4 Vakuum-Messgeräte

Mechanische Messgeräte, verfeinerte Ausgaben der üblichen Manometer, messen den Gasdruck direkt durch seine Kraftwirkung. Für höhere Vakua benutzt man den indirekten Einfluss des Druckes auf andere Größen wie Wärmeleitfähigkeit oder Entladungsströme.

Im **McLeod-Vakuumkop** wird ein kleines Vakuumvolumen V_1 durch eine Quecksilbersäule abgesperrt. Unter einem bekannten Druck, den die Hg-Säule selbst oder auch die Atmosphäre erzeugt, schrumpft das Volumen V_1 auf einen Wert V_2 , und das Verhältnis V_2 / V_1 gibt direkt den Vakuumdruck. In sehr feinen Kapillaren erreicht man so noch bei 10^{-3} mbar vernünftige Ablesegenauigkeiten. Membranmanometer und Federmanometer mit einem gekrümmten elastischen **Bourdon-Rohr** leisten annähernd Ähnliches.

Optiker haben oft Glaskolben im Schaufenster, in denen sich ein Rädchen dreht, wenn Licht darauf fällt. Dieser **Radiometereffekt** beruht nicht auf dem Lichtdruck, wie viele Leute glauben. Das geht schon aus der Abhängigkeit vom Restgasdruck im Kolben hervor. Unterhalb einer Grenze, bei der die freie Weglänge

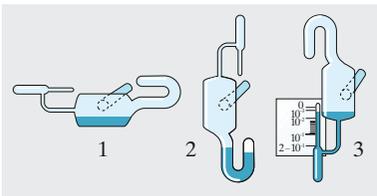


Abb. 5.82. Vakuumkop nach *McLeod* und *Gaede*. (1) Ruhestellung; (2) als verkürztes U-Rohr-Manometer für Grobvakuum; (3) als McLeod-Vakuummeter für Feinvakuum. Die feine Kapillare hat eine quadratische (besser quadratzweiförmige) Druckskala. Warum?

etwa gleich den Radabmessungen ist, dreht sich das Rad immer *langsamer*, je weniger Restgas vorhanden ist. *Knudsen* berechnete die Kraft auf die Schaufeln und nutzte sie zur Vakuummessung. Die Moleküle prallen von der durchs Licht erhitzten Schaufelseite mit größerer Geschwindigkeit ab, als sie gekommen sind, und erteilen ihr daher einen Impuls in Gegenrichtung. Im Knudsen-Vakuummeter heizt man jeweils eine Schaufelseite elektrisch und erhält eine Kraft $F \sim p \Delta TA/T$. Die Grenzen liegen bei 10^{-2} mbar (freie Weglänge zu klein) bzw. 10^{-7} mbar (Restdruck zu klein).

Die Wärmeleitfähigkeit wird druckabhängig, wenn die Moleküle stoßfrei längs des Temperaturgradienten fliegen, d. h. wieder im Feinvakuumbereich. Die Wärmestromdichte zwischen zwei Flächen mit der Temperaturdifferenz ΔT wird dann $j \approx n v k \Delta T$ (ein Molekül transportiert $\frac{3}{2} kT$, die Teilchenstromdichte ist $\frac{1}{3} n v$; der genaue Wert von j hängt davon ab, ob die Moleküle beim Stoß mit einer Wand sofort deren Temperatur annehmen oder nur teilweise, d. h. vom *Akkommodationskoeffizienten*, der auch beim Knudsen-Vakuummeter eine Rolle spielt). Bei zu geringem Druck, um 10^{-3} mbar, wird die Wärmeleitung viel kleiner als die Wärmestrahlung, die natürlich druckunabhängig ist. Man misst die Wärmeleitung meist über die Temperatur eines mit konstanter Heizleistung versorgten Thermolements oder Widerstandsthermometers (**Pirani-Vakuummeter**).

Eine Gasentladung zeigt den Restgasdruck durch Farbe und Struktur der Lichterscheinungen sowie durch den Entladungsstrom an. Unterhalb von 10^{-2} mbar erlischt aber die Entladung in einem normalen Geißler-Rohr. Wenn die freie Weglänge größer ist als der Elektrodenabstand, kann sich keine Stoßionisationslawine mehr bilden. Die einzelnen Ladungsträger, die sich zufällig irgendwo bilden, repräsentieren nur einen unmessbar kleinen Strom. Damit sie auch bei geringem Druck wieder stoßionisieren, muss man ihren Weg zwischen den Elektroden stark verlängern. Das geschieht im **Penning-Vakuummeter** oder *Philips-Vakuummeter* in einem starken Magnetfeld zwischen zwei Kathoden in Form runder Dosendeckel mit einer Ringanode dazwischen. Ein Magnetfeld senkrecht zum elektrischen zwingt die Elektronen zu engen Zykloidenbahnen (Abb. 5.83, Abschn. 6.7.5), und der verlängerte Weg ermöglicht Stoßionisation noch bis 10^{-6} mbar.

Das **Ionisations-Vakuummeter** ist gebaut wie eine Triode (Vakuumröhre mit Gitter) und nutzt einen Effekt aus, der bei der gewöhnlichen Triode meist stört, nämlich den Strom positiver Ionen zum negativ vorgespannten Gitter, die von den Elektronen auf ihrem Weg zur Anode durch Stoßionisierung erzeugt werden. Bei gegebenem Anodenstrom ist dieser Gitterstrom proportional zum Druck. Die obere Druckgrenze von 10^{-2} mbar ergibt sich aus der Lebensdauer der Glühkathode, die untere lässt sich durch elektronische Kniffe bis 10^{-11} mbar bringen. In den *massenspektrometrischen* Vakuummessern können die Ionen sogar elektronenoptisch getrennt und damit die Partialdrücke der entsprechenden Gase festgestellt werden, nicht nur der Gesamtdruck. Die Trennung erfolgt nach der Laufzeit im Linearbeschleuniger oder nach der Kreisfrequenz im Zyklotronfeld.

Die meisten Vakuummesser können auch zur **Lecksuche** dienen. Um ein Leck zu finden, kann man entweder Überdruck in die Apparatur geben und ähnlich verfahren, wie jeder das von seinem Fahrradschlauch kennt. Häufiger untersucht man im Vakuumbetrieb, ob Gas von außen eindringt, wobei man oft bestimmte Gase auf bestimmte Teile der Apparatur aufbringt (Aufsprühen, Exponieren unter Abdeckhauben). Eindringen von H_2 z. B. zeigt sich an der erhöhten Wärmeleitfähigkeit eines Pirani-Vakuummeters (größere Molekülgeschwindigkeit), Eindringen von He am Stromabfall in einem Penning- oder Ionisations-Vakuummeter (schwerer ionisierbar als Luft). Massenspektrometer zeigen die eindringende Gasart direkt an.

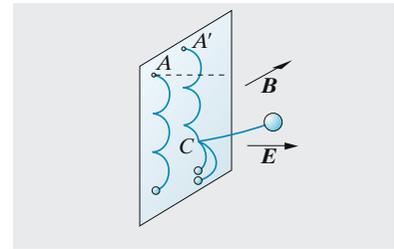


Abb. 5.83. Penning-Vakuummeter (auch Philips- oder Kaltkathoden-Vakuummeter genannt). Im Magnetfeld B parallel zur Kathodenoberfläche fliegen die bei A oder A' ausgelösten Elektronen nicht in Richtung des elektrischen Feldes E , sondern beschreiben Zykloidenbahnen mit der Ebene senkrecht zu B (elegantester Beweis dieser Tatsache Abschn. 6.7.5). Trotz der geringen Restgasdichte findet ein Elektron auf seiner so verlängerten Bahn hin und wieder ein Gasmolekül, das es stoßionisiert (bei C). Dabei verliert es einen großen Teil seiner Energie und beginnt daher eine neue, weiter von der Ausgangskathode entfernte Zykloidenbahn, ähnlich wie das durch Stoß befreite Elektron. Das Ion kann wegen seiner großen Masse auf nur schwach gekrümmter Bahn zur Anode fliegen und zum Entladungsstrom beitragen, der den Restgasdruck anzeigt



Rudolf Diesels (1858–1913) erster funktionierender Motor. Zwölf Jahre versuchte Diesel in Lindes Firma einen selbstzündenden Motor zu entwickeln, der Carnots Wirkungsgrad möglichst nahe käme. Sein 1892 patentiertes Modell lief nur eine Minute, erst 1897 lief ein industriell verwendbarer Zweizylinder-Viertakter mit 25 PS

▲ Ausblick

Lässt sich die Wärmelehre bruchlos aus der Mechanik herleiten? Muss man nur einige vielleicht komplizierte, aber eigentlich selbstverständliche statistische Überlegungen hinzufügen? Zunächst scheint es so, und *Boltzmann* widmete sein Leben diesem Nachweis. Ist der zweite Hauptsatz einfach dadurch begründet, dass die Welt immer in wahrscheinlichere Zustände übergeht? Oder besteht ein tiefer Zusammenhang mit der Gesamtstruktur der Welt? Nimmt die Entropie zu, weil die Welt expandiert, und wird die Zeit rückwärts laufen, wenn sie wieder einmal kontrahieren sollte? Ganz genau weiß das alles wohl noch niemand.

✓ Aufgaben ...

www. CD

●● 5.1.1 Molekülgröße

Überlegen Sie bei jedem Schritt der Entwicklungen in Kap. 5: Kann man aus den geschilderten Beobachtungen auf die Größe oder Masse der Moleküle, die Avogadro-Zahl, die Boltzmann-Konstante schließen? Wieso würde eine der genannten Größen genügen, um die anderen zu finden?

●● 5.1.2 Gleichverteilungssatz

Wenn zwei Kugeln frontal zusammenstoßen, erfolgt nach den Stoßgesetzen ein Energieaustausch zwischen ihnen, außer wenn der Schwerpunkt ruht. Machen Sie sich diese Tatsache klar. Sollte man daraus nicht folgern: Der Energieaustausch zwischen zwei Molekülen hört erst auf, wenn beide den gleichen *Impuls* haben? Entlarven Sie diesen Trugschluss, indem Sie nicht nur frontale Stöße, sondern auch Stöße „von hinten“ untersuchen.

● 5.1.3 Raketentreibstoffe

Wieso genügt die Kenntnis der Temperaturen, die die Brennkammerwände aushalten, zur Abschätzung der Leistungsfähigkeit chemischer Raketen? Welche Größen bestimmen den Schub? Welche Brennstoffe wären am günstigsten? Schätzen Sie Ausströmgeschwindigkeiten und Brennschlussgeschwindigkeiten. Welche Treibstoffe wird man für Kernraketen nehmen?

● 5.1.4 Bimetall

Wie hängt der Krümmungsradius eines Bimetallstreifens, bestehend aus zwei je 1 mm starken Blechstreifen mit den linearen Ausdehnungskoeffizienten α_1 und α_2 , von der Temperatur ab? Bei 0°C sei $r = 0$.

● 5.1.5 Badeofen

Ein altmodischer, mit Holz oder Kohle zu heizender Badeofen von

1,20 m Höhe und 40 cm Durchmesser des Wasserreservoirs braucht etwa 1 Stunde, um den Inhalt fast zum Sieden zu bringen. Wie viel Kohle oder Holz braucht man mindestens? Nachdem man den Ofen mit Wasser gefüllt hatte, hat man den Zulaufhahn hermetisch geschlossen. Der Ablaufhahn tropft während des Heizens ca. viermal pro Sekunde. Ein Tropfen von diesem Hahn hat etwa 0,15 ml. Wie groß ist der thermische Ausdehnungskoeffizient des Wassers?

●● 5.1.6 Thermometer

Ein Thermometer taucht meist nicht ganz in das Medium, dessen Temperatur zu messen ist, sondern ein Teil der Skala und damit der Quecksilbersäule ragt in die Raumluft. Welchen Einfluss hat das auf die Messung? Entwickeln Sie eine Korrekturformel. Wie viel kann die Korrektur höchstens ausmachen?

● 5.1.7 Gipfelhunger

Jemand steigt 2 000 m hoch, pumpt eine Wassergrube mit der Handpumpe aus, schwimmt eine Stunde, radelt 200 km (nicht alles am gleichen Tag). Auf wie viel Nahrung hat er, rein physikalisch, dabei oder danach zusätzlich Anspruch oder um wie viel nimmt er ab? Beachten Sie den Wassergehalt seines Gewebes!

●● 5.1.8 Europas Heizung

Der Hauptteil des **Golfstroms**, der Karibenstrom, kommt aus der 160 km breiten und durchschnittlich 1 000 m tiefen Meerenge zwischen Key West (Florida) und Habaña (Cuba) mit maximal 11 km/h, im Mittel etwa 5 km/h hervorgeschossen. Nördlich der Bahamas vereinigt er sich mit dem etwas schwächeren Antillenstrom. Er bringt bis an die Rockall-Schwelle (zwischen Schottland und Island) selbst im Januar Wasser von ca. 15 °C, während man sonst in ähnlicher geographischer Breite um 0 °C misst. Schätzen Sie die Wärmemenge ab, die der Golfstrom der nordostatlantischen Region zuführt (besonders im Winter), und vergleichen Sie mit der Gesamtsonneneinstrahlung auf dieses 10–20 Mill. km² große Gebiet. Beachten Sie die Richtung des Sonneneinfalls und die Tageslängen. Um wie viel werden somit England, Island, die norwegische Küste klimatisch „nach Süden verschoben“?

●● 5.1.9 Heiße Bremsen

Wie heiß können die Bremsen eines Autos bei der Abfahrt von einem Pass werden, wenn es keine Abstrahlung gäbe und man die „Motorbremse“ vergäße? Schätzen Sie den Einfluss der Wärmestrahlung bei vernünftigen Werten von Gefälle, Geschwindigkeit, Felgenfläche. Mit welcher stationären Temperatur muss man rechnen?

●● 5.1.10 c von Wasser

Wie viele Freiheitsgrade müsste das Wassermolekül im flüssigen Zustand haben, damit die richtige spezifische Wärme herauskommt? Desgleichen für die Metalle und Verbindungen nach Tabelle 5.6.

●● 5.1.11 Spezifische Wärme

Schätzen Sie die spezifischen Wärmen einiger Metalle, z. B. Kupfer, Zinn, Aluminium. Welche spezifischen Wärmen müssten Verbindungen wie Wasser, Ammoniak, Ethylalkohol usw. nach der Neumann-Koppschen Regel haben? Wo treten Abweichungen auf und wie sind sie vermutlich zu erklären? Für welchen festen oder flüssigen Stoff erwarten Sie die größte spezifische Wärme?

●● 5.1.12 Heißer Kaffee I

Während der Kellner Ihren Kaffee bringt, bittet er Sie zum Telefon. Da Sie Milch zum Kaffee nehmen, haben Sie zwei Möglichkeiten: Die Milch gleich hineinzutun, oder wenn Sie wiederkommen. In welchem Fall bleibt Ihr Kaffee wärmer?

●● 5.1.13 Heißer Kaffee II

Wenn Sie Milch und Zucker zum Kaffee nehmen, können Sie verschieden vorgehen: Erst Zucker in den Kaffee, oder erst Milch. Auf welche Weise kommen Sie zum heißesten Kaffee?

●● 5.2.1 Effusiometer nach Bunsen

Ein Gas unbekannter Art steht unter dem Kolbenüberdruck p in einem Gefäß, das durch eine sehr enge Öffnung mit der Außenwelt verbunden ist. Wie kann man aus der Zeit, in der der Kolben alles Gas herausgedrückt hat, die Molekülmasse des Gases bestimmen? Muss man die Größe des Loches kennen? Wenn man sie nicht kennt, wie eicht man das Verfahren?

●● 5.2.2 Gasthermometer

Warum nimmt man im Gasthermometer gerade H₂ und He, um die absolute Temperaturskala zu definieren?

●● 5.2.3 Luftballon

Ein Ballon, gefüllt mit Heißluft (H₂, He) soll die Nutzlast m hochtragen. Berechnen Sie alles Nötige: Ballondurchmesser usw. Wie hoch steigt Ihr Ballon? Was geschieht mit ihm in größeren Höhen? Braucht man Ballast?

●● 5.2.4 Zug im Kamin

Ein Schornstein der Höhe H ist von Luft erfüllt, die um ΔT wärmer ist als

die Außenluft. Wie groß ist der Auftrieb? Wieso kann man diese Größe als Druckdifferenz deuten, die den „Zug“ des Schornsteins ausmacht? Warum zieht ein Schornstein im Allgemeinen umso besser, je höher er ist?

●● 5.2.5 Einwecken

Ein Weckglas wird so gefüllt, dass etwas Luft unter dem Deckel bleibt. Bleibt sie immer drin? Mit welcher Kraft wird der Deckel nach dem Abkühlen angepresst? Unter welchen Umständen wird diese Kraft maximal?

●● 5.2.6 Druck in der Sonne

Schätzen Sie den Druck im Innern der Erde, der Sonne, anderer Himmelskörper. Einfachster Weg: Dimensionsbetrachtung. Ausführlicher: Jede Schicht drückt auf die darunterliegenden, angezogen lediglich durch die noch innerhalb befindliche Materie.

●● 5.2.7 Wie heiß ist die Sonne?

Schätzen Sie Temperatur und Dichte (vor allem ihr Produkt) im Sonneninnern (ideales H-Atomgas; vgl. Aufgabe 5.2.6).

● 5.2.8 Unser Luftmeer

Welche Experimente sind nötig, um die Grunddaten über die Atmosphäre zu beschaffen? Halten Sie alle diese Experimente möglichst einfach!

● 5.2.9 M. Périers Bergtour

Blaise Pascal schickte seinen Schwager mit einem U-Rohr-Barometer auf den Puy de Dôme. Wie wir wissen, ist dieser 1 463 m hoch; wusste *Pascal* das auch? Wie genau wird seine Druckmessung gewesen sein? Was konnte er daraus schließen?

● 5.2.10 Hat Mt. Everest Luft?

Rechnen Sie die Konsequenzen einer konstanten Dichte nach (homogene Atmosphäre). Speziell: Wieso wäre bei 8 km Schluss? Wo würde die Verflüssigungstemperatur erreicht?

●●● 5.2.11 Adiabatische Schichtung

Das Auf- und Absteigen von Luftmassen erfolgt adiabatisch. Was geschieht, wenn eine aufsteigende Luftmenge in dichtere bzw. weniger dichte Umgebung gerät? Was wird man unter

adiabatisch stabiler, labiler, indifferenter Schichtung verstehen? Wie hängen Dichte, Druck, Temperatur bei indifferenter Schichtung von der Höhe ab? Welches Ergebnis zwingt zu dem Schluss, dass diese Art der Schichtung nur bis zu einer bestimmten Höhe gelten kann? Welche physikalischen Prinzipien gelten oberhalb dieser Tropopause, und wie hoch liegt sie?

●● 5.2.12 Marstemperatur

Wenn das Marsgestein ein schwarzer Körper wäre, welche Temperatur würden Sie ihm bei Zenitstand der Sonne zugestehen? Welches dürfte die mittlere Temperatur in den „Tropen“ sein? Mars ist nicht ganz schwarz, sondern hat eine Albedo 0,15 (Erde 0,34). Wie ändert das die Schätzung? Was sagen Sie über den Einfluss der Atmosphäre (vgl. Kap. 11)?

● 5.2.13 Marsatmosphäre

Mariner 7 und 9 bestimmten den Atmosphärendruck in den Marstiefebenen zu 10 mbar, 25 km darüber zu 1 mbar. Kann man daraus schließen, woraus die Marsatmosphäre besteht?

●● 5.2.14 Mars-Samum

Während Mariner 9 unterwegs war, zeigten ab September 1971 terrestrische Beobachtungen auf dem Mars einen Staubsturm, der fast die gesamte Oberfläche verhüllte. Als Mariner im November ankam, konnte er keine nennenswerte Konvektion mehr feststellen. Trotzdem blieb der Staubschleier noch bis Februar 1972 merklich. Schätzen Sie die Größe der Staubteilchen. Vergleichen Sie mit der Sinkgeschwindigkeit auf der Erde. Wenn die „leuchtenden Nachtwolken“ von der Krakatau-Eruption noch 10 Jahre sichtbar waren, und zwar bis zu $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ h nach Sonnenuntergang, wie hoch und wie groß waren dann die Staubteilchen? Warum blieb in der Troposphäre der Staub nicht so lange hängen?

●● 5.2.15 Mars-Stratosphäre

Geben Sie einen kurzen Querschnitt durch die Marsatmosphäre. Gibt es eine Troposphäre, und wie dick schätzen Sie sie? Gibt es eine Ozonsphäre? Wenn nicht, was sind die Folgen

für mögliche Lebewesen auf dem Mars? Gibt es eine Ionosphäre, und wo etwa fängt sie an? Spielt der Treibhauseffekt eine Rolle?

● 5.2.16 Freie Weglänge I

Bei einem Radrennen muss ein Teilnehmer, der eine Reifenpanne hat, ausscheiden. Solche Pannen entstehen, indem man auf einen Nagel fährt. Auf 1 m^2 Straßenfläche liegen im Mittel n Nägel mit der Spitze nach oben (zum Glück $n \ll 1 \text{ m}^{-2}$). Nach welchem Gesetz nimmt die Anzahl der Teilnehmer ab? Wie lange bleibt ein Radler im Durchschnitt im Rennen?

●● 5.2.17 Freie Weglänge II

Wir haben in Abschn. 5.2.7 ein schnelles Teilchen in ein Gas aus praktisch ruhenden geschossen. Was ändert sich, wenn sich beide Stoßpartner bewegen, z. B. gleich schnell? Untersuchen Sie die Stoßfrequenz (Zahl der Stöße/s), die ein Teilchen mit Partnern erleidet, die ihm unter einem Winkel ϑ entgegenkommen. Annahme: Alle Geschwindigkeitsbeträge gleich. Mitteln Sie über die Verteilung der Winkel ϑ . Sie erhalten zwar nicht den Faktor $\sqrt{2}$ von (5.30'), aber einen sehr ähnlichen.

●●● 5.2.18 Exosphäre

In der Hochatmosphäre kann die mittlere freie Weglänge ähnlich der Skalenhöhe werden oder größer. Wie verläuft dann das Schicksal eines Moleküls, das nach oben fliegt?

●● 5.2.19 Reaktionsquerschnitt

Zwei Gase oder Lösungen mit den Molekülen A und B werden gemischt, so dass die Reaktion $A + B \rightarrow AB$ ablaufen kann. Wie hängt die Reaktionsrate, d. h. die Anzahl/s der Reaktionsakte, von den Konzentrationen der beiden Partner ab? Welche Größen sind außerdem bestimmend für die Reaktionsrate? Kann man von einem Reaktionsquerschnitt sprechen? Wieso kann er sich vom geometrischen Querschnitt unterscheiden?

●● 5.2.20 Hochvakuum

Wie hängt die freie Weglänge vom Gasdruck ab? Bei welchem Vakuum wird die freie Weglänge ebenso groß

wie die Gefäßdimensionen? Was ist die Folge?

●● 5.2.21 k -Messung

Das Drehspiegelsystem von Aufgabe 3.4.1 zeigt selbst bei vollkommenem Schutz vor Luftzug unregelmäßig zitternde Drehbewegungen. Bei längerer Aufzeichnung findet man einen quadratisch gemittelten Ausschlag von ca. 2 mm. Warum mittelt man quadratisch? Was kann man schließen? Kann man z. B. die Boltzmann-Konstante bestimmen?

●●● 5.2.22 Diffusion

Die tatsächliche Bahn eines Moleküls setzt sich aus einer Zickzackfolge freier Weglängen zusammen. Falls im Mittel jede Umlenkung um einen rechten Winkel erfolgt: Welche Gesamtverschiebung ergibt sich nach zwei bzw. drei freien Flugdauern? Verallgemeinern Sie auf n freie Flugdauern und drücken Sie das mittlere Verschiebungsquadrat durch die Gesamtflugzeit aus. Mittels (5.64) kann man dies durch den Diffusionskoeffizienten und mittels (5.42) durch die Beweglichkeit ausdrücken. Wie weit trifft dies alles auch für die sehr viel größeren mikroskopisch beobachtbaren Teilchen zu? Kann man aus Beobachtungen der brownischen Bewegung die Größe der Moleküle bestimmen?

●● 5.2.23 Perrin-Versuch

Latex-Kügelchen von $0,6 \mu\text{m}$ Durchmesser und der Dichte 1200 kg/m^3 werden in Wasser suspendiert, das durch Rohrzucker-Zusatz auf 1190 kg/m^3 gebracht ist. Nach einiger Zeit bildet sich ein Bodensatz, der nach oben allmählich ins leere Suspensionsmittel übergeht. Mit einer feinen Pipette entnimmt man aus Höhen von 2; 4; 6; 8 mm über dem Boden je eine winzige Probe und füllt davon (nach evtl. Verdünnung) in die $0,1 \text{ mm}$ tiefe, 1 mm^2 große Zählkammer eines Hämozytometers. Man findet in diesem Volumen $1,16 \cdot 10^6$; 13500 ; 95 ; 2 Kügelchen. Bestimmen Sie daraus die Avogadro-Zahl, die Boltzmann-Konstante, die Masse des H-Atoms. Welche Fehlerquellen gibt es?

●● 5.2.24 Maxwell-Verteilung I

Wie breit ist sie (Halbwerts- oder $1/e$ -Wertsbreite), wie hoch ist ihr Maximum? Entsprechen diese Werte der Forderung, dass die Gesamtfläche 1 sein muss?

●●● 5.2.25 Maxwell-Verteilung II

In einem Gas ist die am häufigsten vorkommende Molekülgeschwindigkeit etwas verschieden von der mittleren Geschwindigkeit und diese wieder von der Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat v^2 , das in der kinetischen Gastheorie die beherrschende Rolle spielt. Wie kommt es zu diesen Unterschieden? Können Sie anschaulich sagen, welche der drei Geschwindigkeiten die größte, welche die kleinste ist? Berechnen Sie die drei Geschwindigkeiten. Dabei treten Integrale der Form $I_n = \int_0^\infty z^n e^{-az^2} dz$ auf. Man kann sie aufeinander reduzieren mittels $I_{n+2} = -dI_n/da$ und braucht nur noch $I_1 = \int_0^\infty ze^{-az^2} dz = 1/(2a) \int_0^\infty e^{-x} dx = 1/(2a)$ und $I_0 = \int_0^\infty e^{-az^2} dz = 1/\sqrt{a} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Das letzte Integral haben wir in Aufgabe 1.1.8 schon bestimmt, also $I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$.

●●● 5.2.26 Reaktionsrate

Eine Oxidationsreaktion erfordert, dass Sauerstoff- und Brennstoffmolekül mindestens mit der **Aktivierungsenergie** W_A zusammenstoßen. Sind dadurch die bestehenden Bindungen gelockert, so erfolgt die Reaktion, die eine größere Energie W_R hergibt. Welcher Bruchteil der O_2 -Moleküle ist für die Reaktion verfügbar? Wie hängt dieser Bruchteil von der Temperatur ab? Wie häufig erfolgen Stöße zwischen O_2 - und Brennstoffmolekülen (Stöße überhaupt und Stöße, die zur Reaktion führen)? Welche Reaktionsenergie wird in der Sekunde freigesetzt? Schätzen Sie die Temperatur, von der ab die Reaktion genügend Energie erzeugt, um das Gemisch so zu erhitzen, dass die Reaktion von selbst weitergeht (Flammpunkt).

●● 5.2.27 Kernfusion

Kernfusionsreaktionen würden, wenn der Tunneleffekt nicht wäre, Über-

steigung einer Potentialschwelle von mehr als 1 MeV erfordern. Wie heiß müsste ein Gas (eigentlich Plasma) sein, damit wenigstens einige Stöße mit dieser Energie erfolgten? Der Tunneleffekt reduziert die effektiv erforderliche Stoßenergie auf etwa $W_{\text{eff}} = \sqrt{W_s kT}$. Wie ändert das die Abschätzung?

●● 5.2.28 Sind Planeten so selten?

Sterne fliegen mit etwa 100 km/s (vgl. Aufgabe 1.7.26). Bei engen Begegnungen tauschen sie kinetische Energie aus. Wie eng muss die Begegnung sein, damit dieser Austausch die Größenordnung ihrer ganzen kinetischen Energie erreicht? Wie groß ist die freie Weglänge für einen solchen Austausch, wie groß ist die Relaxationszeit für die Einstellung des „thermischen Gleichgewichts“ zwischen den Sternen? Welche Geschwindigkeitsverteilung haben dann die Sterne? Unsere Galaxis enthält $2 \cdot 10^{11}$ Sterne; ihr Durchmesser ist ca. 60 000 Lichtjahre, ihre mittlere Dicke ca. 10 000 Lichtjahre.

●● 5.2.29 Galaxienhaufen

In den größten Strukturen des Weltalls, Haufen aus tausenden Galaxien, sitzen die größten meist ziemlich innen. Warum?

●● 5.3.1 Ottomotor

Welches ist das optimale Mischungsverhältnis im Vergasergemisch? Der Brennwert von Benzin ist etwa $3,7 \cdot 10^7$ J/kg. Geben Sie Temperatur und Druck nach der Zündung an, falls die Wärmeverluste an Zylinder und Kolben vernachlässigbar sind. Spielt die Druckänderung infolge Molzahländerung bei der Verbrennung eine Rolle? Welcher Wirkungsgrad ergibt sich im idealen Fall? Welche Vorteile bietet der Dieselmotor?

● 5.3.2 Kühlschränk

Das Kühlaggregat eines Kühlschranks von 150 l Inhalt nimmt eine elektrische Leistung von 150 W auf. Der Kühlschrank wird zur Hälfte seines Volumens mit Lebensmitteln von 25 °C gefüllt. Wie lange würde eine *Heizung* von 150 W brauchen, um

die Lebensmittel von 5 auf 25 °C zu erwärmen? Der Kompressor des Kühlschranks läuft nach dem Einfüllen der Lebensmittel 2 Stunden und schaltet sich dann ab. Erklären Sie den Unterschied in den Zeiten quantitativ.

●● 5.3.3 Wärmepumpe

Eine Stadt soll zentral durch eine Wärmepumpe mit Heizwärme versorgt werden. Wo sind das warme und das kalte Reservoir? Welche mechanische oder elektrische Arbeit kommt ins Spiel? Wirkungsgrad? Reicht der Fluss als Wärmespende aus? Wie viel Öl spart man, verglichen mit den individuellen Ölheizungen bzw. mit vollelektrischen Raumheizungen?

●● 5.3.4 Projekt Agrotherm

Abwärme aus Kraftwerken soll zur Erwärmung des Ackerbodens benutzt werden (auch zur Heizung von Gewächshäusern und Fischzuchtbecken). Man erzielt so erhebliche Ertragssteigerungen. Wenn thermische und Kernkraftwerke mit einer oberen Kesseltemperatur von 600–700 °C arbeiten, wie viel Abwärme erzeugen dann alle Kraftwerke der BRD zusammen? Das Kühlwasser, das etwa 20 K wärmer ist als die Luft, soll durch Rohre geleitet werden, die in der Tiefe d unter dem Ackerboden verlegt sind. Diese Rohre liegen ziemlich dicht beieinander. Wie sieht die Temperaturverteilung im so geheizten Boden aus? Drücken Sie die T -Verteilung im Boden durch diese Größen aus. Damit eine merkliche Ertragssteigerung erzielt wird, müssen die Temperaturen im Wurzelbereich von Getreide, Kartoffeln, Gemüse oder Zuckerrüben um mindestens 2 °C gesteigert werden. Welche Fläche kann man nach diesem Projekt behandeln? Kann die Ackeroberfläche genau Lufttemperatur haben, oder muss sie etwas wärmer sein? Um wie viel? Beeinflusst das die bisherigen Abschätzungen? Wärmeleitfähigkeit der Ackererde $\lambda \approx 0,5 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

●● 5.3.5 Wirkungsgrad

Bestimmen Sie die Wirkungsgrade einiger Wärmekraftmaschinen aus dem

p , V - und aus dem T , S -Diagramm (Abb. 5.25). Beachten Sie dabei, in welchen Arbeitstakten Wärme ausgetauscht wird und mit wem.

● 5.3.6 Strahlungsdruck

Leiten Sie die Beziehung zwischen Energiedichte und Strahlungsdruck in einem isotropen Strahlungsfeld aus der Photonen-Vorstellung ab: Photonen sind „Teilchen“ mit der Energie $h\nu$ und dem Impuls h/λ , die mit c fliegen. Hängt diese Beziehung davon ab, ob die Strahlung schwarz ist?

●●● 5.3.7 Differentieller Carnot-Prozess

Eine Maschine, deren Arbeitssubstanz kein ideales Gas zu sein braucht, vollführe einen Carnot-Prozess aus isothermer Expansion, adiabatischer Expansion, isothermer Kompression und adiabatischer Kompression. Alle diese Änderungen seien sehr klein, speziell die isothermen Volumenänderungen, so dass der Druck auf den isothermen Ästen als konstant betrachtet werden kann. Die adiabatischen Temperaturänderungen seien sogar so klein, dass die Volumenänderungen auf den adiabatischen Ästen klein sind gegen die auf den isothermen (kann man das immer erreichen? Skizze im p , V -Diagramm!). Was ist die Folge für die Arbeitsanteile der einzelnen Takte? Die Eigenschaften der Arbeitssubstanz sind nur lückenhaft bekannt: Von einem Stoff A wisse man nur, dass seine innere Energie W nicht vom Volumen, also nur von der Temperatur abhängt (wie für ein ideales Gas nach dem adiabatischen Expansionsversuch von *Gay-Lussac*). Bei einem anderen Stoff B ist die Energie dem Volumen proportional: $W = uV$, wobei die Energiedichte u von T abhängt. Bei Stoff B sei ferner bekannt, dass $u = 3p$ (Strahlung, vgl. Aufgabe 5.3.6). Ein Stoff C hat $W \sim V^{-2/3}$ und W praktisch unabhängig von T (Fermi-Gas). Es ist klar, dass p in allen diesen Fällen von T abhängt; die Frage ist nur wie. Drücken Sie, zunächst in allgemeiner Form, den Wirkungsgrad dieser Carnot-Maschine aus durch T -Änderung dT , Gesamtarbeit d^2W ,

Wärmeaufnahme dQ bei isothermer Expansion. Drücken Sie d^2W ferner durch $p(T)$ und die Volumenänderung aus und stellen Sie dQ nach dem ersten Hauptsatz auf. Welcher allgemeine Zusammenhang ergibt sich zwischen dp/dT , T , p und dW/dV ? Spezialisieren Sie auf die Stoffe A , B und C und ziehen Sie die Folgerungen: Wie sieht $p(T)$ aus, wie $u(T)$ im Fall B ? Wie hängt W von V und T ab? Kann man die Zustandsgleichung aufstellen?

●●● 5.3.8 Sonnenatmosphäre

An der sichtbaren Sonnenoberfläche (Photosphäre) herrscht die Dichte $0,01 \text{ g/cm}^3$, in 50 000 km Tiefe etwa 1 g/cm^3 . Welche Temperatur schätzen Sie in dieser Tiefe? Was sagt die Saha-Gleichung (Abb. 8.9) über den Ionisationszustand des Wasserstoffs an der Oberfläche und in dieser Tiefe? Verfolgen Sie ein Gasvolumen, das aus der Tiefe aufsteigt, vergleichen Sie mit feuchter Luft. Woher kommt die zusätzliche Aufstiegtendenz, in welchem Fall ist sie größer? Erwarten Sie, dass in der Sonnenatmosphäre eine adiabatische stabile Schichtung möglich ist? Wenn nicht, wie stellen Sie sich die Verhältnisse dort vor? Vergleichen sie mit einem flachen Kochtopf auf der elektrischen Heizplatte, der mit sehr wenig Wasser gefüllt ist.

●● 5.4.1 Heizung

Die Heizung muss Wärmeverluste durch Luftaustausch, Wärmeleitung usw. ersetzen. Sind Doppelfenster sinnvoll? Kommt die geringe Wärmeleitfähigkeit der Luft ($0,025 \text{ W/m K}$) zur Geltung? Ist Konvektion nützlich oder schädlich? Welche Heizleistung veranschlagen Sie? Wie erzielen Sie sie: elektrisch, mit Gas, Öl, Kohle? Beachten Sie auch den ökonomischen Gesichtspunkt! Wärmeisolierstoffe leiten typischerweise mit ca. $\lambda = 0,05 \text{ W/m K}$. Nach welchem Prinzip können sie das leisten? Verwenden Sie sie sinnvoll!

●● 5.4.2 Thermische Relaxation

Welchen Temperatur-Leitwert haben Kupfer, Wasser, Luft, Fett, Stein? Ziehen Sie praktische Konsequenzen.

Wenn ein Thermik-Aufwindschlauch 100 m Durchmesser hat, wie groß ist seine thermische Relaxationszeit? Ist der Aufstieg adiabatisch?

●● 5.4.3 Mindestalter der Erde (Kelvin)

Der Temperaturgradient beim Eindringen in die Erde beträgt im Mittel $0,03 \text{ K/m}$ (geothermische Tiefenstufe 30 m/K). Wenn die ganze Erde einmal flüssig war, muss um diese Zeit die hohe Temperatur von ca. 3000 K bis zur Oberfläche gereicht haben und muss dort steil auf die ca. 0°C abgebrochen sein, die die Sonneneinstrahlung bedingt (vgl. Aufgabe 11.2.16). Wie lange muss die Abflachung bis zum jetzigen Wert des Gradienten gedauert haben (Größenordnung!)? Weshalb kommt nicht ganz das richtige Alter der Erde heraus?

●●● 5.4.4 Bodenfrost

Die tägliche und die jährliche Änderung der Lufttemperatur können grob durch Sinusfunktionen beschrieben werden. Studieren Sie das Eindringen dieser „Temperaturwellen“ in den Erdboden. In welcher Tiefe muss man Wasserrohre verlegen, um vor dem Einfrieren sicher zu sein? Wie tief müssen Sektkeller sein, in denen die Temperatur höchstens um 1°C schwanken darf? In welcher Tiefe liegt der „Permafrost“ (ewig gefrorene Schicht) in der Arktis? Kann es sein, dass manche Keller nachts wärmer sind als tags? Rechnen Sie am besten komplex. Wenn $T(t)$ am Erdboden wie $e^{i\omega t}$ geht, liegt nach dem Bau der Wärmeleitungsgleichung nahe, dass auch $T(x)$ eine e-Funktion ist, aber evtl. mit komplexen Exponenten. Erde hat eine Wärmeleitfähigkeit von ca. 2 W/m K .

●● 5.4.5 Wiener-Versuch

Diskutieren Sie die Figur in Abb. 5.40. Was kann man aus ihrer Gesamtfläche und aus der zeitlichen Änderung ihrer Höhe und Breite entnehmen?

●● 5.4.6 Druckparadoxon

In einem porösen Tongefäß ist Luft. Wenn man es außen mit Wasserstoff zu bespülen beginnt, steigt der Druck

im Gefäß plötzlich an. Warum? Bleibt er ständig höher? Was geschieht, wenn man mit dem Bspülen aufhört?

●● 5.4.7 Nackt und pudelwohl

Bei welcher Lufttemperatur kann sich ein spliternackter Mensch im Schatten ohne körperliche Bewegung aufhalten, ohne zu frieren? Warum friert er doch, wenn er schläft? Wie dick muss man sich bei gegebener Lufttemperatur anziehen? Warum wärmt Kleidung überhaupt? Sind die Verlustmechanismen beim nackten und angezogenen Menschen dieselben? Was kann der Mensch oberhalb der anfangs bestimmten Temperatur machen, um Überhitzung zu vermeiden? Hilft kühles Getränk erheblich mit, oder gibt es wirksamere Mechanismen? Wasserverlust von 3–4 l (Dehydrierung) ist für den Menschen tödlich. Wie lange kann er es in der Wüste bei 37 °C ohne Wasser aushalten?

●● 5.4.8 Brrr ...!

Bei 0 °C und Sturm friert man meist mehr als bei –20 °C und Windstille. Ist dies nur subjektiver Gefühlseindruck oder physikalisch begründbar? Wie kalt wird die Hautoberfläche eines unbedeckten Körperteils bei gegebener Lufttemperatur? Warum erfriert Nase, Finger und Zehen meist zuerst?

●●● 5.4.9 Rayleigh-Konvektion

Die Konvektion ist theoretisch äußerst schwierig, weil hier Auftrieb, Viskosität, Wärmeleitung, Oberflächenspannung in sehr komplizierter Weise zusammenspielen. In der Atmosphäre kommen noch die Höhenabhängigkeit der Zustandsgrößen und der Energieumsatz durch Kondensation hinzu, im Meer die Dichteunterschiede infolge verschiedener Salzgehalte, die sich bei der Verdunstung noch ändern, im zähplastischen Erdmantel der Energieumsatz durch Änderung der Kristallstruktur sowie die unterschiedliche Verteilung der radioaktiven Wärmequellen. Kein Wunder, dass die atmosphärische und die Ozeanzirkulation noch viele Geheimnisse bergen, noch mehr die Strömungen im Erdmantel, die Motoren der Plattentektonik. Wir studieren den einfachsten Fall, die Rayleigh-Konvektion, in der Auf-

trieb, Viskosität und Wärmeleitung zusammenspielen. Wird ein Fluid von unten geheizt wie im Kochtopf oder der Atmosphäre, sodass die Temperatur nach oben abnimmt, dann kann die Schichtung leicht instabil werden. Welche Kräfte wirken auf ein Fluidpaket, das zufällig ein Stück aufsteigt, und wie bewegt es sich also weiter? Hat seine Temperatur dabei Zeit, sich der Umgebung anzugleichen? Wie lautet die Bedingung dafür? Unter welchen Umständen bleibt also die Aufstiegstendenz erhalten?

●● 5.4.10 Schlaues Huhn

Das australische Großfußhuhn *Tallegalla* brütet seine Eier nicht in eigener Körperwärme aus, sondern benutzt dazu bakterielle Fäulniswärme. Der Hahn scharrt einen großen runden Haufen aus Laub und Humuserde zusammen. Die Henne legt die Eier in die Mitte, nachdem es kräftig gegregnet hat und die Fäulnis einsetzt. Der Hahn kommt regelmäßig wieder, um die Haufengröße je nach Außentemperatur zu regeln, sodass die Eier immer auf 35 °C–36 °C bleiben. Was muss er tun, wenn es draußen kälter wird? Denken Sie sich aus dem kugelförmig idealisierten Haufen eine konzentrische Teilkugel herausgeschnitten. Wie hängt die darin erzeugte Wärmeleistung vom Radius der Teilkugel ab? Wohin fließt sie? Wie groß ist die Wärmestromdichte? Wie hängt sie vom Radius ab? Wie groß ist der Temperaturgradient und wie hoch ist die Temperatur im Abstand r von der Haufenmitte? Die Wärmeleitfähigkeit von Laub sei $\lambda \approx 0,1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Leistungsdichte der Wärmeproduktion der Bakterien $q \approx 6 \text{ W m}^{-3}$.

●● 5.5.1 Stirling-Formel

Beweisen Sie die **Stirling-Formel** als analytische Näherung für die Fakultät: $x! \approx x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}$. Hinweis: Logarithmieren Sie $x!$ und nähern Sie die Summe von oben und von unten durch geeignete Integrale an, deren Mittelwert sie schließlich verwenden.

●● 5.5.2 Irreversibilität

Zeigen Sie, dass typisch irreversible Prozesse wie der Wärmeübergang von

einem warmen zu einem kalten Körper die Umwandlung von Arbeit in Wärme durch Reibung, die arbeitsfreie Expansion eines Gases, die Mischung zweier verschiedener Gase mit einem Anwachsen der Entropie verbunden sind.

● 5.5.3 Mischung

Wir tun nicht weißen und schwarzen Sand in die Schachtel, sondern weißen Sand und schwarze Eisenfeilspäne. Kann es jetzt vorkommen, dass Schütteln zur **Entmischung** führt, und unter welchen Umständen? (Antworten Sie so quantitativ wie möglich!)

● 5.5.4 Protein-Entropie I

Ein **Proteinmolekül** ist eine Kette von Aminosäuren in einer ganz bestimmten, für jedes Protein charakteristischen Reihenfolge. Wie viel Entropie könnte Ihr Körper gewinnen, wenn er alle seine Aminosäuren wild durcheinander würfeln? (Mittleres Molekulargewicht einer Aminosäure 100; Ihr Körper enthält ca. 20% Protein.)

●●● 5.5.5 Protein-Entropie II

Ein **Riesemolekül** bildet eine Kette aus N Gliedern, deren jedes L verschiedene Lagen (Richtungen) relativ zum vorhergehenden Glied einnehmen kann. Damit das Molekül eine bestimmte Konfiguration hat, z. B. die ganz gestreckte, muss sich jedes Glied in einer ganz bestimmten seiner L Lagen befinden. Welche Wahrscheinlichkeit und welche Entropie hat die Kette, wenn alle L Lagen gleich wahrscheinlich sind, bzw. wenn rein geometrisch ihre Wahrscheinlichkeiten verschiedene Werte p_i haben? Außerdem mögen die einzelnen Lagen verschiedene potentielle Energien ε_i haben. Welche Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Konfiguration ergibt sich jetzt? Welchen Einfluss hat die Temperatur? Wieso spielt die Freie Energie auch hier eine beherrschende Rolle?

●●● 5.5.6 Seltsame Definition

Nehmen Sie an, Sie wüssten von der Größe „Temperatur“ nur, dass sie den Wirkungsgrad einer reversiblen Wärmekraftmaschine bestimmt, nämlich dass dieser eine Funktion $\eta(T_2, T_1)$

der Temperaturen der beiden beteiligten Wärmespeicher ist. Nun versuchen Sie, die Form dieser Funktion η und die Eigenschaften der Temperatur genauer festzulegen. Sie können z. B. zwei solche Maschinen hintereinander schalten, sodass die eine den kalten Speicher der anderen als heißen für sich selbst benutzt. Was kann man daraus über η schließen? Wie kann man beweisen, dass es einen absoluten Nullpunkt der Größe T gibt? Kann man hieraus die Größe T schon vollständig mit der üblichen Kelvin-Temperatur identifizieren, oder braucht man dazu spezielle Kenntnisse über mindestens eine wirkliche Arbeitssubstanz?

●● 5.5.7 Mischbarkeit

Wenn Mischen immer Entropiegewinn einbringt, warum mischen sich dann z. B. Wasser und Öl nicht? Kann man sagen, ob Erhitzen oder Abkühlen die **Mischbarkeit** verbessert?

●● 5.5.8 Kleiner Unterschied

Das Verdampfungs- oder Schmelzgleichgewicht liegt, außer für einen Zustand auf der Siede- oder Schmelzkurve, ganz auf einer Seite, d. h. es liegt ausschließlich *ein* Aggregatzustand vor. Beim chemischen Gleichgewicht kommt das dagegen nie vor: Selbst bei einer Reaktion, die ganz ausgesprochen in eine Richtung strebt, sind immer alle beteiligten Stoffe in einer gewissen Menge vorhanden. Wie erklärt sich dieser Unterschied?

●● 5.5.9 Adsorption

An einer Grenzfläche, z. B. einer Festkörperoberfläche, steht eine gewisse Anzahl von Plätzen zur Verfügung, wo sich Gasmoleküle anlagern können. Wie ändern sich Energie und Entropie bei einer solchen Anlagerung (qualitativ und schätzungsweise quantitativ)? Wie hängt die adsorbierte Menge vom Druck des Gases ab (die rein thermodynamische Ableitung ist schwieriger als die kinetische)?

●● 5.5.10 Chromatographie

Um ein Gemisch von Gasen oder gelösten Stoffen zu trennen, lässt man am Ende einer Chromatographensäule

(Aktivkohle oder andere feindisperse Stoffe für Gase, Alaun, verschiedene Kunstharze für Lösungen) zunächst das ganze Gemisch adsorbieren. Dann lässt man ein Trägergas oder reines Lösungsmittel langsam durch die Säule strömen. Die adsorbierten Stoffe treten nach mehrfacher Desorption und Readsorption auf der anderen Seite aus, und zwar nach einer „Durchbruchzeit“, die von ihrem Adsorptionsvermögen sehr stark abhängt. Untersuchen Sie, wie eine ursprüngliche rechteckige Welle adsorbierten Stoffs in der Säule fortschreitet. Voraussetzung: An jedem Ort herrscht praktisch Adsorptionsgleichgewicht. Welchen Einfluss hat die Form der Adsorptionsisotherme?

●● 5.5.11 T-jump

In einem Reaktionsgefäß sind zwei Modifikationen eines Moleküls, A und A' , die sich ohne Beteiligung eines anderen Partners ineinander umwandeln können: $A \rightleftharpoons A'$. Bei $T = 300 \text{ K}$ findet man 90% A und 10% A' . Kann man daraus die Differenz der freien Enthalpien von A und A' ablesen? Warum gerade der freien Enthalpien? Welches Mengenverhältnis erwartet man bei 370 K? Führt man die T -Änderung sehr schnell aus, so stellt sich die neue Gleichgewichtsverteilung erst allmählich ein. Kann man aus dem Bisherigen folgern, wie schnell das geht, oder geben umgekehrt Art und Geschwindigkeit dieser Relaxation neue Aufschlüsse?

●● 5.5.12 Gaszentrifuge

In einer rotierenden Trommel sind Gase einem Fliehkraftfeld ausgesetzt, das sehr viel größer als das Erdschwerefeld ist (viele g). Wie funktioniert die Trennung von Molekülen verschiedener Masse? Welche Apparategröße ist dafür ausschlaggebend? Was lässt sich besser trennen: O_2 , N_2 oder $^{238}\text{UF}_6$, $^{235}\text{UF}_6$ (Siedepunkt $56 \text{ }^\circ\text{C}$)? Welchen Trenngrad kann man im einstufigen Betrieb erreichen? Geben Sie ein einfaches Trennkriterium an, das nur von Geschwindigkeiten spricht. Stimmt das alles auch für Teilchen in Lösung?

●● 5.6.1 Wasserstruktur

Was hat die Dichteanomalie des Wassers mit der Struktur seiner Moleküle zu tun (vgl. Abschn. 16.4.6)? Welche Eigenschaften des Wassers hängen damit noch zusammen?

●● 5.6.2 Wolkenbildung

Luft, die am Erdboden die Temperatur T und die relative Feuchte f hat, steigt auf. Wie ändern sich T und f mit der Höhe? Wo beginnt die Wolkenbildung? Wie beeinflusst die Kondensation die Aufstiegtendenz? Warum ist der Föhn so warm und trocken? Beachten Sie die Rolle der Kondensationskeime.

●●● 5.6.3 Verdampfungs-gleichgewicht

Leiten Sie Dampfdruckkurve und Clausius-Clapeyron-Gleichung kinetisch ab: Jedes Dampfteilchen, das auf die Flüssigkeitsoberfläche auftrifft, soll sich ihr anlagern; jedes Flüssigkeitsteilchen, das um weniger als δ von der Oberfläche entfernt ist und ausreichende Energie hat, verlässt die Flüssigkeit; man stelle sich vor, die Flüssigkeitsteilchen schwingen mit der Frequenz $\nu_0 \approx 10^{13}$, nehmen also alle 10^{-13} s einen Anlauf. Stellen Sie die Bilanz auf. Was bedeutet das Gleichgewicht? Kommt δ vernünftig heraus? Können Sie Verdunstungsgeschwindigkeiten angeben? Kann das die übliche Thermodynamik auch? Kommen die berechneten Verdunstungsgeschwindigkeiten praktisch jemals zur Geltung? Wenn nein, warum nicht?

● 5.6.4 Ist das möglich?

Zwei gleich große gut wärmeisolierende Becher mit gleich viel Wasser gefüllt, aber der eine mit $100 \text{ }^\circ\text{C}$, der andere mit $50 \text{ }^\circ\text{C}$ heißem, werden gleichzeitig ins Tiefkühlfach gestellt. Würden Sie an Zauberei glauben, wenn sich auf dem $100 \text{ }^\circ\text{C}$ -Becher zuerst Eis bildete?

● 5.6.5 Heizwerte

Technische Tabellen geben für Brennstoffe zwei Heizwerte an: H_u , wenn das Verbrennungswasser dampfförmig bleibt, H_o wenn es kondensiert.

Wie unterscheiden sich die beiden Werte (Beispiele)? Welcher Wert ist einzusetzen für technische Vorgänge wie Heizung, Verbrennungsmotoren, Raketenmotoren?

● 5.6.6 Druckaufschmelzung

Um wie viel verschiebt sich der Schmelzpunkt des Eises bei Druckerhöhung um 1 bar? Stimmt es, dass Skifahren und Schlittschuhlaufen durch Druckaufschmelzung erleichtert werden? Hat das Profil der Schlittschuhe einen Einfluss? Wie liefere es sich auf CO₂-Eis?

● 5.6.7 CO₂-Flasche

Studieren Sie an Hand von Abb. 5.68 die Herstellung und Anwendung von flüssigem CO₂: Mindestdruck in CO₂-Flaschen, Dichte des flüssigen CO₂? Was geschieht beim Öffnen des Ventils? Warum „schneit“ es dabei?

● 5.6.8 Freon

Kühlschränke enthalten als Kühlmittel meist Freon, einen Kohlenwasserstoff, bei dem die H-Atome durch Chlor oder Fluor ersetzt sind. Das Treibgas in Spraydosen ist ebenfalls Freon. Weshalb verwendet man für zwei so verschiedene Zwecke dieselbe Substanz? Welche Eigenschaften der Substanz sind dafür maßgebend? Oder sind die beiden Zwecke gar nicht so grundverschieden? Was geschieht in einem Kompressor-Kühlschrank mit dem Kühlmittel, während es umläuft? Was geschieht, wenn man auf den Knopf der Spraydose drückt?

●● 5.6.9 van der Waals-Konstanten

Bestimmen Sie die van der Waals-Konstanten für N₂, O₂, CO₂ aus Tabelle 5.14 und überprüfen Sie damit die Angaben über Gasverflüssigung in Abschn. 5.6.6.

●● 5.6.10 Kritische Daten

Wo liegen die kritischen Daten (Druck, Temperatur, Volumen) für ein van der Waals-Gas? Vergleichen Sie mit Abb. 5.68.

●●● 5.6.11 van der Waals-Kurve

Zeichnen Sie eine van der Waals-Kurve, z. B. für Wasser, nach den Da-

ten von Tabelle 5.14. Gibt es ein Gebiet mit negativem Druck und hat es eine physikalische Bedeutung? Beschreibt der Flüssigkeitsast die Verhältnisse quantitativ richtig? Was bedeuten die Äste *AB* und *ED* (vgl. Abb. 5.68)? Lassen sich die Zustände dort realisieren? Dieselbe Frage für *BCD*. Wo liegt der Gleichgewichtsdruck?

●● 5.6.12 Maxwell-Gerade

Der Übergang gasförmig-flüssig erfolgt nicht über das Maximum und das Minimum der van der Waals-Kurve, sondern längs einer Horizontalen, die vom van der Waals-Berg ebenso viel Fläche abschneidet wie vom Tal. Begründen Sie das mit Hilfe eines hypothetischen Kreisprozesses.

●●● 5.6.13 Das Büblein steht am Weiher . . . wer weiß?

Wie wächst die Eisdecke auf dem See? Gehen Sie von der idealisierten Situation aus, dass das Wasser bis in eine gewisse Tiefe durchweg 0 °C hat, bevor plötzlich eine Kältewelle einsetzt. Je dicker die Eisschicht wird, desto mehr erschwert sie den weiteren Wärmetransport. Welche Wärme muss nämlich transportiert werden? Drücken Sie das durch eine Differentialgleichung aus und lösen Sie sie. Unter welchen Umständen können Menschen, Autos, Eisenbahnzüge das Eis überqueren? Wie dick dürfte das Eis in der Arktis werden? Erinnern Sie sich daran, dass *Fridtjof Nansen* damit rechnete, seine „Fram“ würde von der Eisdrift in ca. 1 Jahr von NO-Sibirien über den Nordpol getrieben werden. Wenn Sie nach einer guten Meereskarte die Tiefe des Atlantik als Funktion des Abstandes vom Zentralrücken aufragen, erhalten Sie eine Kurve, die Ihnen bekannt vorkommen wird. Wie kommt das? Denken Sie an die Plattentektonik, speziell an „Rifts“ und „sea floor spreading“ (Abschn. 6.9.5). Bedenken Sie auch, dass Gesteine beim Erstarren dichter werden (etwa 10%). Wenn sich die Aktivität der Rifts und des sea floor spreading in geologischen Zeiträumen ändert, was bedeutet das für das Ozeanvolumen, das jeweils verfügbar

ist? Wo bleibt das überschüssige Wasser? Wenn sich Erdöl, Salz und andere Lagerstätten hauptsächlich in Flach- und Randmeeren bilden, in welchen geologischen Formationen sollte man dann besonders danach suchen?

● 5.7.1 Entsalzung

In den Trockengebieten der Erde, soweit sie genügend kapitalkräftig sind, baut man riesige Meerwasser-Entsalzungsanlagen, die hauptsächlich auf Umkehrosmose oder auf Destillation beruhen. Bei der Umkehrosmose presst man Salzwasser durch eine semipermeable Membran von ausreichender Festigkeit, die Wassermoleküle, aber keine Salzionen durchlässt. Welchen Druck braucht man dazu mindestens? Vergleichen Sie dieses Verfahren hinsichtlich des Energieaufwandes mit der Destillation (a) ohne, (b) mit Rückgewinnung der Kondensationsenergie.

●● 5.7.2 Maritimes Klima

Die Temperatur, bei der Wasser am dichtesten ist, verschiebt sich mit zunehmendem Salzgehalt schneller als der Gefrierpunkt. Bei 25 g/l Salz liegen beide bei –1,33 °C. Vergleichen Sie Meerwasser und Süßwasser in ihrem Konvektionsverhalten und achten Sie besonders auf die Konsequenzen für das Klima.

●● 5.7.3 Meereis

Bei welchen Temperaturen siedet bzw. gefriert Meerwasser (rechnen Sie mit 35 g NaCl/l oder schlagen die genaue Zusammensetzung nach). Verfolgen Sie das Eindampfen bzw. Gefrieren im einzelnen.

● 5.7.4 Widerspruch?

Früher kühlte der Konditor sein Eis mit einer Salzlösung. Zum Auftauen von Hydranten usw. streut man Salz darauf. Wie kann die gleiche Ursache (Salz) so entgegengesetzte Wirkungen haben?

●●● 5.7.5 Osmotisches Kraftwerk

Ein sehr langes Rohr, unten verschlossen durch eine semipermeable Membran, die Wasser, aber keine Salzionen durchlässt, wird senkrecht ins

Meer gesenkt. Zunächst bleibt das Rohr auch unter dem Wasserspiegel leer (warum?). Bei einer gewissen Eintauchtiefe aber (bei welcher?) überwindet der hydrostatische Druck den osmotischen der Ionen, und Süßwasser wird ins Rohr gepresst. Man senkt weiter. Da Salzwasser schwerer ist als Süßwasser ($\rho'/\rho \approx 1,03$), bleibt der Spiegel im Rohr nicht in der ursprünglichen Höhe stehen, sondern steigt allmählich (wieso?). Schließlich (wann?) erreicht er den Meeresspiegel und sogar mehr: Süßwasser springt am oberen Rohrende heraus. Zum Seenot-Aspekt kommt ein energetischer: Das fallende Süßwasser kann Turbinen treiben. Während Tausende solcher Rohre touristenbesuchte Buchten aus-süßen und nebenan Ausgangslake für die Salzgewinnung anreichern, erzeugen sie gleichzeitig Energie für Küche und Nachtklub. Wie weit stimmt die Geschichte?

●● 5.7.6 Kondensationskeime

Mit der gleichen Argumentation wie bei der osmotischen Dampfdrucksenkung kann man auch Aussagen über den Dampfdruck in einer engen Kapillare machen, in der eine Flüssigkeitssäule infolge der Oberflächenspannung angehoben oder abgesenkt ist. Wie hängt der Dampfdruck von der Form der Oberfläche ab? Übertragen Sie das auf die Nebelbildung: Welche Übersättigung ist nötig, damit Tröpfchen vom Radius r entstehen?

●●● 5.7.7 Mischungsdiagramm

Tragen Sie den Dampfdruck einer Mischung zweier Flüssigkeiten über dem Mengenanteil einer davon auf, zunächst für den idealen Fall (*Raoult*). Dann teilen Sie die Abszissenachse anders ein, nämlich für den Mengenanteil im Dampfgemisch. Sie erhalten zwei verschiedene Kurven; wie sehen sie aus, was bedeuten die Flächenstücke, die sie begrenzen? Rechnen Sie das Diagramm um, sodass die Ordinate jetzt die Siedetemperatur darstellt. Diskutieren Sie im Diagramm einen Destillationsvorgang, speziell eine fraktionierte Destillation.

Sättigungskonzentrationen von Gasen in Wasser, in g/mm (im Gleichgewicht mit dem reinen Gas von 1 bar Druck)

$T/^\circ\text{C}$	0	20	25	40	50	60	100
O ₂	0,0349	—	0,0207	—	0,0149	—	0,0120
CO ₂	3,48	1,77	1,45	0,97	—	0,58	—

●● 5.7.8 Luft für Fische

Die Tabelle zeigt die Sättigungskonzentration von CO₂ und O₂ in Wasser. Rechnen Sie auf Molaritäten um. Bestimmen Sie die Lösungsenthalpien und versuchen Sie sie qualitativ modellmäßig zu deuten. Wieso sind arktische Gewässer so reich an Plankton und Fischen? Kann das Meer den Treibhauseffekt durch vom Menschen erzeugtes CO₂ abpuffern?

● 5.7.9 Absorber-Kühlschrank

Ammoniak löst sich sehr gut in kaltem Wasser (1 305 g/l bei 0 °C), sehr viel schlechter in heißem (74 g/l bei 100 °C). Geben Sie zwei Gründe an, weshalb dies Verhalten für die Kältetechnik bedeutsam ist. Erklären Sie die Wirkungsweise eines Absorber-Kühlschranks.

●● 5.7.10 Kältemischung

In 1 l Wasser kann man etwa 350 g Kochsalz lösen, fast unabhängig von der Temperatur. Hierin unterscheidet sich NaCl von fast allen anderen Salzen. Zeichnen Sie ein Zustandsdiagramm für das Gemisch Wasser-Eis-Salz. Kennzeichnen Sie die Flächenstücke, die Koexistenzlinien und -punkte und diskutieren Sie die Anwendung als Kältemischung (z. B. heute noch in „Kühlakku“).

●● 5.7.11 Trockenfeldbau

Auf den Canarischen Inseln, besonders auf Lanzarote, kämpfen die Bauern erfolgreich gegen die Regenarmut mittels der reichlich vorhandenen feinporigen jungvulkanischen Lapilli („picón“). Sie pflanzen Weinstöcke, Zwiebeln usw. direkt ins Lapillfeld oder breiten eine Lapillschicht über normalen Boden („enarenado natural“ bzw. „artificial“). In den Poren kondensiert das Wasser schon bei geringerer Luftfeuchte. Wie kommt

das, und wann passiert es? Sie können eine Energiebilanz aufstellen oder an den Dampfdruck in einem Kapillarsteigrohr denken.

● 5.8.1 Radiometer

In einem evakuierten Gefäß (ca. 10^{-3} mbar) ist ein Rahmen, in den ein feines Häutchen (Kollodium o. Ä.) gespannt ist. Bei einseitiger Beleuchtung beult sich das Häutchen aus, und zwar vom Licht weg. Warum?

●● 5.8.2 Lichtmühle

In einem Glaskolben, der auf 10^{-2} bis 10^{-3} mbar evakuiert ist, steht ein Drehkreuz, dessen Schaufelchen (meist dünne Glimmerblättchen) einseitig beruht sind. Beleuchtet man es, so dreht es sich, und zwar mit den blanken Flächen voran. Das tritt auch bei allseitiger Beleuchtung ein, ebenso, wenn man den Kolben plötzlich in eine wärmere Umgebung bringt. Bei Normaldruck im Kolben dreht sich nichts, ebenso wenig bei ca. 10^{-6} mbar. Erklärung?

●●● 5.8.3 Sinkt Schweres immer abwärts?

Da Sauerstoff schwerer ist als Stickstoff, müsste doch in größerer Höhe über dem Erdboden das Mischungsverhältnis in der Atmosphäre sich immer mehr zugunsten des Stickstoffs verschieben. Die Beobachtung zeigt, dass dies nicht zutrifft. Wie ist das zu erklären?

●● 5.8.4 McLeod-Vakuummesser

Der äußere Luftdruck treibt Quecksilber in ein Volumen, das vorher mit dem Vakuumgefäß verbunden war, und von dort weiter in eine immer enger werdende zugeschmolzene Kapillare. Entwerfen Sie die Skala zum Ablesen des Druckes.

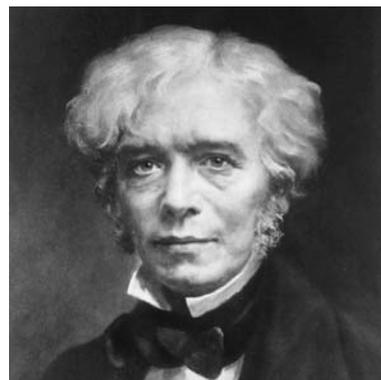
Elektromagnetismus: Ladungen und Ströme

■ Inhalt

6.1	Elektrostatik	293
6.2	Dielektrika	311
6.3	Gleichströme	318
6.4	Mechanismen der elektrischen Leitung	326
6.5	Galvanische Elemente	340
6.6	Thermoelektrizität	344
6.7	Ströme und Felder	346
6.8	Erzeugung von Magnetfeldern	353
6.9	Das Magnetfeld von Strömen	357

▼ Einleitung

Wir würden gern zu Beginn dieses Kapitels die Frage „Was ist Elektrizität?“ mit einem ebenso knappen Kernsatz beantworten wie im Fall der Wärme. Leider geht das nicht: Während sich die Wärmelehre bruchlos in die Mechanik eingliedern lässt, ist die elektrische Ladung durchaus eine Sache für sich; die Elektrodynamik ist neben der Mechanik die zweite, eigenständige Säule der klassischen Physik. Das hindert nicht, dass es zwischen diesen Säulen viele Querverbindungen gibt. In der Atomphysik schienen beide zu einem Triumphbogen zusammenzuwachsen, bis sich zeigte, dass beide Säulen, wenn sie die atomare Welt tragen sollen, gründlich umgebaut werden müssen, nämlich zur Quantenmechanik und Quantenelektrodynamik.



„Kräfte wirken offenbar aus der Ferne; ihre physikalische Natur ist uns unverständlich. Trotzdem können wir viel Wahres und Sicheres über sie erfahren, u. A. über die Eigenschaften des Raumes zwischen dem Körper, der wirkt, und dem, auf den gewirkt wird.“

Michael Faraday,
Experimental Researches
in Electricity, 1839

6.1 Elektrostatik

Ladungen erzeugen ein elektrisches Feld in ihrer Umgebung, Massen ein Schwerefeld, heiße Körper ein Temperaturfeld, Wasserquellen ein Strömungsfeld. Die Struktur aller dieser und vieler anderer Felder hängt in der gleichen Weise von der Verteilung ihrer Quellen ab.

Newton selbst war nicht sehr glücklich mit der Vorstellung einer Wirkung in die Ferne, die er für die Gravitation einführen musste. Vielleicht hätte er Faradays Idee begrüßt, dass Ladungen im ganzen Raum ein Feld erzeugen, das dann auf andere Ladungen eine Nahewirkung ausübt. Vielleicht hätte er dies, wie später Maxwell, in geschlossene mathematische Form gebracht. Das hätte auch seine eigenen Überlegungen sehr erleichtert.

6.1.1 Elektrische Ladungen

Über der scheinbaren Einfachheit der Grundtatsachen der Elektrostatik sollte man nicht vergessen, dass sie das Destillat jahrhundertelanger Beob-

achtungsarbeit darstellen, dass sie durchaus nicht selbstverständlich sind und ebenso gut auch anders sein könnten, und dass sie an die tiefsten Probleme der modernen Physik rühren.

- Es gibt *zwei Arten von Ladung*, sinnvollerweise als positiv und negativ unterschieden, da sie einander neutralisieren können. Warum gibt es nicht nur eine Art, wie bei der „Gravitationsladung“, der Masse, oder mehr als zwei Arten?
- *Ladung bleibt im abgeschlossenen System immer erhalten*. Wenn geladene Teilchen erzeugt oder vernichtet werden, dann geschieht dies immer in gleichen Quantitäten beider Vorzeichen. Die Ladungserhaltung ist sogar noch stärker als die Massenerhaltung: Die Masse eines Körpers hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab, seine Ladung nicht.
- *Ladung ist gequantelt*, d. h. sie kommt nur als ganzzahliges Vielfaches der **Elementarladung**

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C (Coulomb)} \quad (6.1)$$

vor. Den Quarks schreibt man Drittel-Ladungen zu, aber sie treten nie isoliert auf. Dem Absolutbetrag nach sind die Ladungen von Elektron und Proton exakt gleich. Dies hat man direkt mit einer Genauigkeit von 10^{-20} nachgewiesen. Schon sehr viel kleinere Abweichungen würden zwischen Körpern, die aus gleich vielen Protonen und Elektronen bestehen, Kräfte hervorrufen, die weit größer sind als die Gravitation. Niemand weiß, warum die Ladung so exakt gequantelt ist. *Dirac* hat eine Erklärung versucht, die auf der Existenz *magnetischer* Einzellaadungen oder *Monopole* beruht (vgl. Abschn. 18.4.11).

- Die elektrische Kraft zwischen zwei geladenen Elementarteilchen ist etwa 10^{40} mal größer als die Gravitation zwischen ihnen. Niemand weiß, was dieser Faktor bedeutet. *Eddington*, *Dirac* u. A. vermuteten, er habe etwas mit der Wurzel aus der Gesamtzahl der Teilchen im Weltall zu tun.
- Gleichnamige Ladungen stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an. Das könnte anders sein, wie die Gravitation zeigt (vgl. Aufgabe 18.4.20).
- Die Kraft zwischen zwei Punktladungen hat die Richtung ihrer Verbindungslinie. Dies scheint selbstverständlich, denn in welche Richtung sollte sie sonst zeigen, da doch der Raum isotrop ist, d. h. von sich aus keinerlei Richtung bevorzugen kann. Man muss mit solchen Symmetrieargumenten aber vorsichtig sein.
- Die Kraft zwischen zwei Ladungen Q und Q' ist proportional zum Produkt QQ' . Diese Aussage hat ähnlichen Charakter wie die entsprechende im Fall der Gravitation: Wenn es eine von ihren Kraftwirkungen unabhängige Methode der Ladungsmessung gibt (z. B. das „Auslöfeln“ einer Leidener Flasche), ist sie direkt verifizierbar. Sonst muss man Ladung durch die Kraft bzw. durch das Feld definieren, das sie erzeugt oder das auf sie wirkt, und Proportionalität zwischen felderzeugender und feldbeeinflusster Ladung voraussetzen. Dann wird das

Gesetz $F \sim QQ'$ selbstverständlich für eine Kraft, für die das newtonsche Reaktionsprinzip gilt.

- Die Kraft zwischen zwei Ladungen vom Abstand r ist proportional r^{-2} . Warum nicht anders? Einige wichtige Eigenschaften des elektrostatischen Feldes, z. B. sein Verschwinden im Innern einer gleichmäßig geladenen Hohlkugel, würden für ein anderes Kraftgesetz nicht zutreffen. Die Quantenfeldtheorie zeigt, dass ein r^{-2} -Kraftgesetz notwendig mit einer verschwindenden Ruhmasse der Teilchen verbunden ist, die das Feld übertragen (hier der Photonen). Hätte das Photon eine Ruhmasse, dann müsste die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum frequenzabhängig sein. Beobachtungen an Doppelsternen und Pulsars zeigen, dass die Ruhmasse des Photons höchstens 10^{-50} kg sein kann. Das r^{-2} -Gesetz muss dementsprechend mindestens bis zum Mond richtig sein (vgl. Aufgabe 12.8.8). Für Abstände kleiner als 10^{-14} m folgt die Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen nicht mehr allein dem Coulomb-Gesetz. Hier wird es von anderen Kräften mit kürzerer Reichweite überdeckt (Abschn. 18.1.1).
- Die Proportionalitätskonstante im Coulomb-Gesetz hängt von der Definition der Ladungseinheit ab. Im CGS-System gelten zwei Ladungen als Einheitsladungen (1 elektrostatische Einheit oder 1 ESL), wenn sie im Einheitsabstand (1 cm) mit der Einheitskraft (1 dyn) wechselwirken. Dann lautet das **Coulomb-Gesetz**

$$F = \frac{QQ'}{r^2} \mathbf{r}_0 . \quad (6.2)$$

(\mathbf{r}_0 ist der Einheitsvektor in Verbindungsrichtung.) Im SI, wo die Ladung durch ihre dynamische Wirkung (d. h. über den Strom) definiert ist, ist die Einheit um den Faktor $c/10 = 3 \cdot 10^7$ größer. Man erhält dann

$$F = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0 . \quad (6.3)$$

Dabei heißt

$$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ As V}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad (6.4)$$

die **Influenzkonstante**. Als Ladungseinheit ergibt sich dann

$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ C} = 1 \text{ As} . \quad (6.5)$$

- Kräfte, die von Ladungen ausgehen, sind additiv. Dies betrifft nicht nur an der gleichen Stelle vereinigte Ladungen, sondern auch beliebig angeordnete. Eine Ladung Q_1 am Ort A erfährt von zwei Ladungen Q_2 und Q_3 an den Orten B bzw. C genau die vektorielle Summe der Kräfte, die sie von Q_2 in B allein bzw. von Q_3 in C allein erfahren würde. Diese Superposition lässt aus dem Coulomb-Gesetz die gesamte Feld- und Potentialtheorie hervorwachsen. Dabei ist zu beachten, dass Ladungen i. Allg. verschiebbar sind, Massen dagegen nicht ohne weiteres. Daher lässt sich das Coulomb-Gesetz nicht so bedingungslos z. B. auf ausgedehnte Kugeln anwenden wie das Gravitationsgesetz, bei dem es genügt, den Abstand r vom Kugelmittelpunkt aus zu messen. Ladungs-

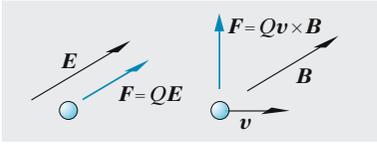


Abb. 6.1. Coulomb-Kraft und Lorentz-Kraft. Im elektrischen Feld E wirkt auf eine Ladung immer eine Kraft, im Magnetfeld B nur, wenn die Ladung sich bewegt

verschiebungen oder Influenz sind verantwortlich dafür, dass auch im Ganzen ungeladene ausgedehnte Körper durch Ladungen angezogen werden.

6.1.2 Das elektrische Feld

Der historische Ausgangspunkt für die Theorie des elektrischen Feldes war das Coulomb-Gesetz (6.2). Wir wollen jetzt eine viel breitere Grundlage schaffen, aus der sich u. A. auch das Coulomb-Gesetz als Spezialfall ergeben wird.

Erfahrungsgemäß gibt es Raumgebiete, in denen elektrisch geladene Körper Kräfte erfahren, die sich nicht als Nahwirkungskräfte (Stoß, Reibung u. Ä.), aber auch nicht als Trägheits- oder Gravitationskräfte erklären lassen. Es gibt zwei Arten solcher Kräfte:

Kräfte, die auch dann auftreten, wenn der geladene Körper ruht. Wir nennen sie elektrische Kräfte oder **Coulomb-Kräfte** und sagen, in dem Gebiet, wo sie auftreten, herrsche ein **elektrisches Feld**.

Kräfte, die nur auftreten, wenn der geladene Körper sich bewegt. Diese Kräfte sind proportional zur Geschwindigkeit des Körpers, stehen aber senkrecht auf dieser. Wir nennen sie **Lorentz-Kräfte** und sagen, in dem Gebiet, wo sie auftreten, herrsche ein **Magnetfeld**.

In diesem Kap. 6 befassen wir uns nur mit dem elektrischen Feld und diskutieren das magnetische im Kap. 7.

Trägt ein Körper die Ladung Q und erfährt eine elektrische Kraft F , dann definieren wir die **elektrische Feldstärke** E , die an dieser Stelle herrscht, als

$$E = \frac{F}{Q}. \quad (6.6)$$

Diese Definition ist möglich, weil diese Art Kraft sich tatsächlich als proportional zur Ladung erweist:

$$F = QE. \quad (6.7)$$

Die elektrische Feldstärke hat nach dieser Definition die Einheit

$$[E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} \quad \text{oder auch} \quad \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Die Einheit V (Volt) ist hierdurch festgelegt:

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}.$$

Näheres über den Zusammenhang von Feldstärke und Spannung in Abschn. 6.1.3.

Man kann also mittels einer Probeladung den ganzen Raum abtasten und feststellen, welche Kraft dort wirkt. An jedem Ort kann man dementsprechend einen Vektor E antragen. Diese E -Vektoren schließen sich zu Feldlinien zusammen, deren Tangentialvektoren sie bilden. Alle Versuche, sich über dieses Feldlinienbild hinaus eine „anschauliche“ Vorstellung

vom elektrischen Feld zu machen, es z. B. als Spannungszustand eines elastischen Mediums, des „Äthers“, darzustellen, sind gescheitert. Man sollte daher hinter dem Feldbegriff nichts anderes suchen als was er ist, nämlich ein bequemes Darstellungsmittel für die Kräfte, die auf Ladungen wirken.

Jetzt müssen wir noch feststellen, wie elektrische Felder *erzeugt* werden. Sie treten immer in der Umgebung von Ladungen auf. Genauer erfahren wir mittels des Begriffs des Flusses.

Der **elektrische Fluss** ϕ durch eine gegebene Fläche hängt mit der Feldstärke E genauso zusammen wie der Volumenstrom einer Flüssigkeit mit der Strömungsgeschwindigkeit v . Steht die Fläche senkrecht zum Feld E und ist E überall auf der Fläche gleich, dann gilt einfach

$$\phi = AE . \quad (6.8)$$

Steht E unter einem Winkel α zur Flächennormale und ist E noch konstant, dann gilt

$$\phi = AE \cos \alpha = A \cdot E , \quad (6.8a)$$

wenn man die Fläche wie üblich durch einen Vektor A vom Betrag A und mit der Richtung der Normalen kennzeichnet. Ändert sich E längs der Fläche, muss man über die Beiträge der einzelnen Flächenstücke dA integrieren:

$$\phi = \iint E \cdot dA . \quad (6.8b)$$

Nun können wir das Grundgesetz über die Erzeugung von Feldern durch Ladungen, den *Satz von Gauß-Ostrogradski* (oder kürzer den *gaußschen Satz*), formulieren:

Der elektrische Fluss, der aus einer beliebigen in sich geschlossenen Fläche hervorquillt, ist proportional zu der Gesamtladung Q , die innerhalb dieser Fläche sitzt:

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0} Q , \quad (6.9)$$

gleichgültig ob diese Ladung punktförmig oder über größere Raumbereiche verteilt ist. Diese **Flussregel** drückt aus, dass Feldlinien nur in positiven Ladungen beginnen und in negativen enden. Alle Feldlinien, die von den eingeschlossenen Ladungen ausgehen, müssen also durch die einschließende Fläche treten, sofern sie nicht von ebenfalls drinnen befindlichen negativen Ladungen aufgeschluckt werden. Die Proportionalitätskonstante ϵ_0 hat den in (6.4) angegebenen Wert. Man kann sie am einfachsten mit der Kirchhoff-Waage (Abschn. 6.1.5b) oder aus der Kapazität eines Kondensators messen.

Aus (6.9) kann man bereits die Struktur des Feldes um die wichtigsten Ladungsverteilungen erschließen, wenn man einige Symmetriebetrachtungen hinzuzieht und die Fläche, über die der Fluss zu ermitteln ist, geschickt

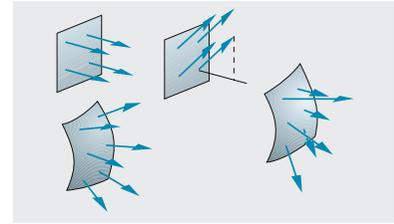


Abb. 6.2. Elektrischer Fluss ϕ . Wenn das Feld E senkrecht auf einer Fläche A steht und überall konstant ist, gilt für den elektrischen Fluss $\phi = EA$. Die Fläche darf dabei auch gekrümmt sein. Steht E schräg, gilt $\phi = E \cdot A = EA \cos \alpha$, falls E noch konstant ist. Im allgemeinen Fall muss integriert werden

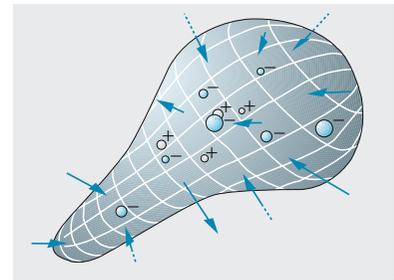


Abb. 6.3. Satz von *Gauß-Ostrogradski*: Der elektrische Fluss, der aus einer geschlossenen Fläche tritt, ist proportional zur Gesamtladung, die darin sitzt

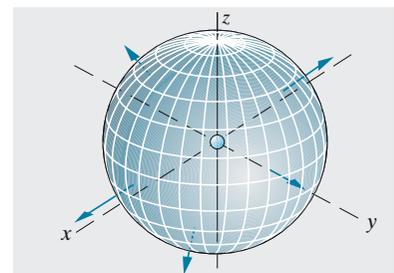


Abb. 6.4. Das Feld einer Punktladung ist radialsymmetrisch. Durch jede Kugelfläche tritt der gleiche Feldfluss $\phi = Q/\epsilon_0$. Daraus folgt das Coulomb-Gesetz

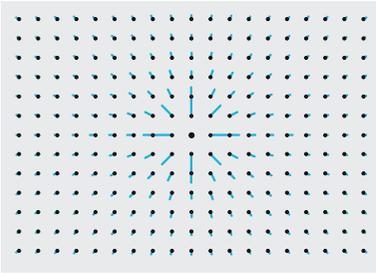


Abb. 6.5. Das Feld einer positiven Punktladung. Die Strichlängen stellen $|\mathbf{E}|$ dar. Die Feldlinien ergeben sich, wenn man solche Linienstücke zusammensetzt

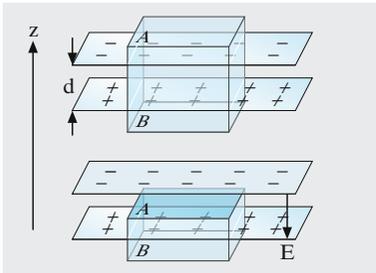


Abb. 6.6.

legt. Zum Beispiel folgt das Coulomb-Gesetz (6.2) für eine Punktladung sofort: Um die Punktladung Q legt man eine Kugel vom Radius r . Durch ihre Oberfläche $A = 4\pi r^2$ tritt nach (6.9) der Fluss $\phi = Q/\epsilon_0$. Da er sich gleichmäßig über die Kugeloberfläche verteilen muss, und da \mathbf{E} sicher überall radial auswärts zeigt, ist $\phi = 4\pi r^2 E$. Vergleich mit (6.9) liefert

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (6.10)$$

Mit (6.7) finden wir dann die Kraft, die dieses Feld auf eine andere Ladung Q' ausübt:

$$F = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Andere Anwendungen der gleichen Idee bringt Abschn. 6.1.4.

× Beispiel ...

Wir wenden den Gaußschen Satz auf den Plattenkondensator mit Plattenabstand d an (Abb. 6.6). Auf den unendlich ausgedehnten Platten soll sich die Flächenladungsdichte σ befinden, zu einer ausgewählten Fläche der Größe F gehört also die Ladung $Q = \sigma F$. Wir wählen ein quaderförmiges Volumen mit zwei Flächen parallel zum Kondensator (A, B) und vier Flächen orthogonal dazu. Aus Symmetriegründen kann das elektrische Feld nur in z -Richtung orientiert sein, d. h. durch die 4 senkrechten Flächen kann kein Feld hindurch treten, deren Beitrag kann vernachlässigt werden. Im oberen Bild liegen A und B außerhalb des Kondensators, die Gesamtladung im Quader volumen verschwindet, es existiert daher auch kein Feld. Im unteren Bild liegt A zwischen den Kondensatorplatten, und weil wir schon wissen, dass durch B kein elektrisches Feld hindurch tritt, muss gelten $F \cdot E = Q/\epsilon_0 = \sigma F/\epsilon_0$, d. h. es gilt $E = \sigma/\epsilon_0$ (s. auch Abschn. 6.1.5).

6.1.3 Spannung und Potential

Im elektrischen Feld \mathbf{E} wirkt auf eine Ladung Q die Kraft $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$. Verschiebt man die Ladung um $d\mathbf{r}$, muss man gegen diese Kraft eine Arbeit

$$dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

aufbringen. Das Minuszeichen deutet an, dass die Kraft selbst Arbeit leistet, dass also negative Arbeit aufzubringen ist, wenn \mathbf{E} und $d\mathbf{r}$ gleichgerichtet sind. Eine Verschiebung von \mathbf{r}_1 nach \mathbf{r}_2 erfordert die Arbeit

$$W_{12} = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -Q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.11)$$

Offenbar ist es zweckmäßig, die Eigenschaft der Punktladung (Q) und die Eigenschaft des Feldes ($\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$) zu trennen und diesem Integral einen eigenen Namen beizulegen, nämlich **Spannung** ▶

zwischen den Punkten r_1 und r_2 . Ohne die Präposition „zwischen“ hat das Wort Spannung überhaupt keinen Sinn, ebenso wenig wie das Wort Strom ohne die Präposition „durch“.

Wir definieren

$$U_{12} = - \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \tag{6.12}$$

und erhalten als Energiebilanz für eine solche Verschiebung:

$$\Delta E = W_{12} = QU_{12} \tag{6.13}$$

ist die Energie, die die Ladung Q aufnimmt, wenn sie von r_1 nach r_2 wandert.

Wenn die Verschiebungsenergie zwischen r_1 und r_2 immer dieselbe ist, gleichgültig auf welchem Weg man von r_1 nach r_2 gelangt, sagt man, das Feld \mathbf{E} habe ein eindeutiges **Potential** $U(r)$. Zunächst sind durch die Beziehung

$$U_{12} = U(r_2) - U(r_1)$$

nur Potentialdifferenzen (Spannungen) festgelegt. Man kann aber wie beim Gravitationsfeld (Abschn. 1.7.2) das Potential auf ein geeignetes Niveau als Nullniveau *normieren*, z. B. auf unendlich ferne Punkte oder auf ein bestimmtes Bezugsniveau, die „Erde“ (elektrisch verstanden). Für das Feld um eine Punktladung ergibt sich bei Normierung auf $r = \infty$ durch Integration von (6.10) längs eines Radius

$$U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \tag{6.14}$$

denn diese Funktion verschwindet tatsächlich im Unendlichen.

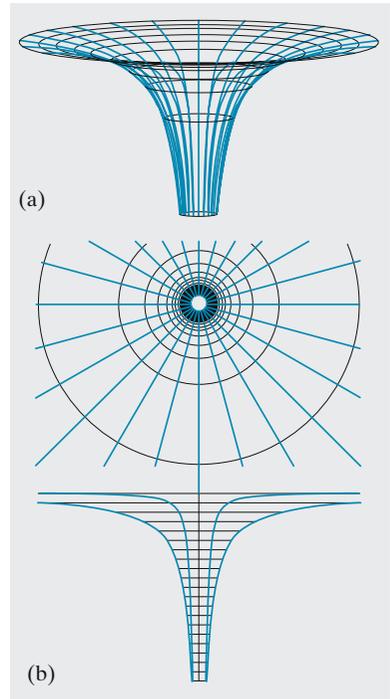


Abb. 6.7a,b. Potential einer Punktladung. Die Kreise (eigentlich Kugeln) sind Niveauflächen. Potential (—), Feldlinien (—)

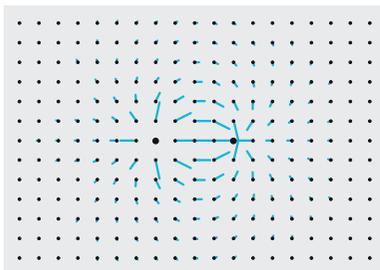


Abb. 6.8. Feld einer positiven und einer negativen Ladung gleicher Größe. Ein Dipolfeld entsteht daraus, wenn die Ladungen immer mehr zusammenrücken, dabei immer größer werden, sodass das Dipolmoment $p = Qd$ endlich bleibt

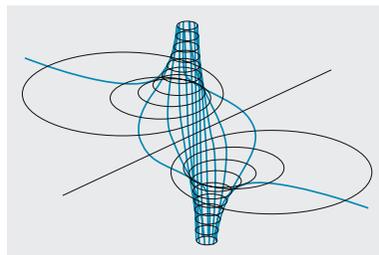


Abb. 6.9. Potential des Feldes zweier paralleler, entgegengesetzt geladener Drähte. Abbildung 6.10 ist die Draufsicht auf dieses Bild

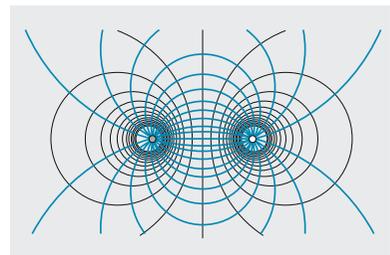


Abb. 6.10. Potentialflächen (—) und Feldlinien (—) für zwei parallele, entgegengesetzt geladene Drähte

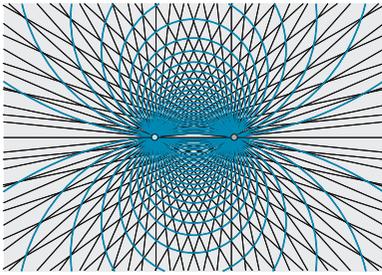


Abb. 6.11. Man kann das Feld einer Ladungsverteilung aus den Feldern der Einzelladungen konstruieren, indem man in den Vierecken, in die die Einzelfeldlinien die Ebene aufteilen, Diagonalen zieht. Abbildung 6.13 entsteht ähnlich, nur muss man dort die andere Diagonale nehmen. Allerdings erhält man so nur „zweidimensionale“ Felder, hier das Feld zweier entgegengesetzt geladener paralleler Drähte (nicht zwei Punktladungen)

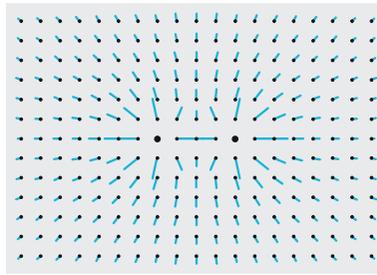


Abb. 6.12. Feld von zwei gleich großen positiven Ladungen

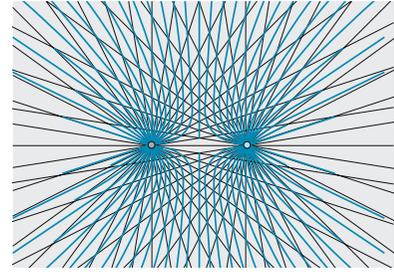


Abb. 6.13. Konstruktion des Feldes von zwei parallelen Drähten mit gleicher Ladung aus den Einzelfeldern. Die Konstruktion ist ähnlich wie in Abb. 6.11

x Beispiel ...

Wie verlaufen die Feldlinien eines homogenen Feldes, d. h. eines Feldes, das überall gleiche Feldstärke hat? Was bedeutet es, wenn Feldlinien divergieren oder konvergieren? Konstruieren Sie Abb. 6.11 und Abb. 6.13 ausgehend von Abb. 6.5.

Die Feldlinien eines homogenen Feldes sind parallel und überall gleich dicht. In einer Richtung, in der die Feldlinien konvergieren, wird das Feld stärker. Graphische Überlagerung von Feldern: Man zeichne hinreichend dicht die Feldlinienscharen der Einzelfelder. Sie zerlegen, in zwei Dimensionen betrachtet, die Zeichenfläche in parallelogrammähnliche Figuren. Die Feldlinien des Gesamtfeldes setzen sich aus den Diagonalen dieser Parallelogramme zusammen, und zwar nehme man diejenige der beiden Diagonalen, die dem Richtungssinn der Einzelfeldlinien entspricht (Vektoraddition). Diese Konstruktion gibt Größe und Richtung des Gesamtfeldes richtig wieder (erstere durch die Dichte der entstehenden Feldlinien).

Offenbar ergibt sich aus einem gegebenen Potential $U(\mathbf{r})$ das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ durch Differentiation, genauer durch Gradientenbildung:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } U, \quad (6.15)$$

Wir können also das elektrische Feld wahlweise durch das Vektorfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ oder durch das Skalarfeld $U(\mathbf{r})$ beschreiben. $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ liefert direkter die Kräfte auf Ladungen, $U(\mathbf{r})$ ist mathematisch einfacher (eine Ortsfunktion statt dreier, der drei Komponenten von \mathbf{E}) und ist außerdem vorzuziehen, wenn nach der Energie von Ladungen im Feld gefragt ist.

Zwischen \mathbf{E} -Feld und U -Feld gelten weiterhin folgende Beziehungen:

Die Flächen konstanten Wertes U , die **Potentialflächen** oder **Niveauflächen**, stehen überall senkrecht auf den Feldlinien.

Das folgt daraus, dass $\mathbf{E} = -\text{grad } U$ immer die Richtung stärkster Neigung der $U(\mathbf{r})$ -Funktion angibt; in den Richtungen senkrecht dazu kann sich U gar nicht ändern.

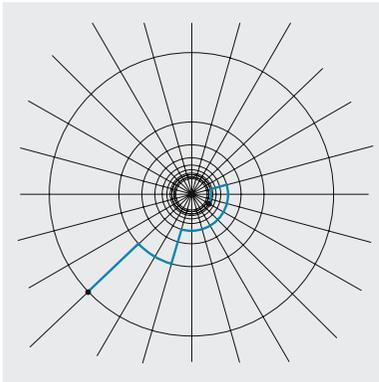


Abb. 6.14. In einem kugel- oder zylindersymmetrischen Feld ist die Verschiebungsarbeit wegunabhängig. Solche Felder besitzen ein Potential

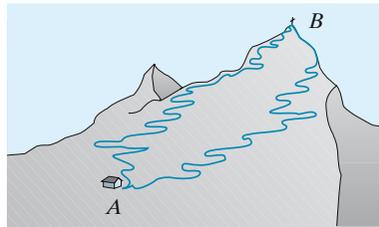


Abb. 6.15. Wenn die Verschiebungsarbeit zwischen zwei Punkten A und B wegunabhängig ist, hat das Kraftfeld ein Potential. Im Fall des Erdschwerefeldes ist das banal, denn das Potential ist nur abhängig von der Höhe. Auf einem geschlossenen Weg ist die Verschiebungsarbeit 0, wenn es dem Bergsteiger auch nicht so scheint

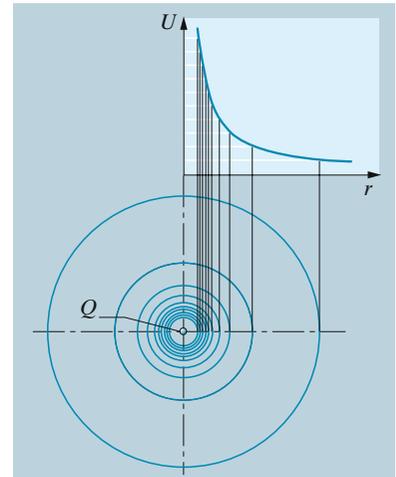


Abb. 6.16. Potential und Niveauflächen einer Punktladung

Ein Feld besitzt ein eindeutiges Potential, wenn die Verschiebungsarbeit wegunabhängig ist.

Aus zwei solchen Wegen s_1 und s_2 , die die Punkte r_1 und r_2 verbinden, kann man einen geschlossenen Weg s zusammensetzen. Schiebt man längs s_1 und dann zurück längs des umgekehrten Weges s_2 , muss die Gesamtarbeit Null sein. Man kann also sagen: Ein Feld hat ein Potential, wenn die Verschiebungsarbeit längs jedes geschlossenen Weges verschwindet. Jedes elektrostatische Feld hat ein Potential. Dies folgt daraus, dass das Punktladungsfeld ein Potential hat, und aus dem Superpositionsprinzip: Jede beliebige Ladungsverteilung lässt sich aus Punktladungen zusammengesetzt denken. Dass durchaus nicht *jedes* Feld ein Potential besitzt, zeigen elektrische Wirbelfelder und Magnetfelder (Kap. 7). Sie haben in sich geschlossene Feldlinien. Beim Umlauf auf solchen geschlossenen Feldlinien kann eine Ladung beliebig viel Energie gewinnen. Die Verschiebungsarbeit hängt dann vom Weg zwischen zwei gegebenen Punkten ab.

Für ein kleines Volumenelement dV lautet die Flussregel

$$\operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} dQ = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho dV,$$

wo dQ die Ladung innerhalb dV ist, die sich auch durch eine **Ladungsdichte**

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

ausdrücken lässt. Mittels (6.15) lässt sich die **Flussregel** auch durch $U(\mathbf{r})$ ausdrücken:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} U = -\Delta U = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (6.16)$$

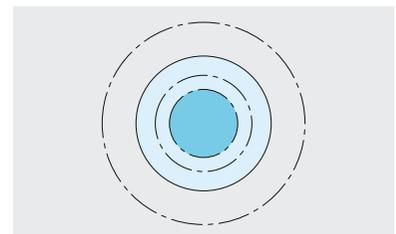


Abb. 6.17. Der Fluss durch die äußere Kugel ist der gleiche, ob eine Punktladung in der Mitte sitzt oder ob diese Ladung über eine Kugel verteilt ist. Daher ist auch das Feld draußen das gleiche. Der Fluss durch eine innere Kugel stammt nur von der darin sitzenden Ladung

Dabei ist Δ , der **Laplace-Operator**, eine Abkürzung für

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Die Gleichung $\Delta U = -\rho/\varepsilon_0$ heißt **Poisson-Gleichung**, ihr Spezialfall $\Delta U = 0$ für den leeren Raum, wo $\rho = 0$ ist, heißt **Laplace-Gleichung**. Dies ist die mathematisch eleganteste Darstellung der **Flussregel**. Die Ladungsdichte ρ ergibt eine **Quelldichte** ρ/ε_0 des elektrischen Feldes.

6.1.4 Berechnung von Feldern

Mit der Poisson-Gleichung (6.16) oder dem **Satz von Gauß** (6.9) kann man sehr oft schon raten, wie das Feld einer gegebenen Ladungsverteilung aussieht. Das Raten wird legalisiert durch folgende wichtige Tatsache:

Jede Lösung der Poisson-Gleichung, d. h. jede Ortsfunktion $U(\mathbf{r})$, für die $\Delta U = -\rho/\varepsilon_0$ ist, und die die Randbedingungen des Problems erfüllt, ist eindeutig bestimmt.

Hat man eine solche Lösung auf irgendeinem Weg gefunden, dann muss sie *die* Lösung sein. Die folgenden Beispiele werden mit verschiedenen äquivalenten Mitteln behandelt.

a) Feld einer beliebigen kugelsymmetrischen Ladungsverteilung. Auch das Feld muss kugelsymmetrisch sein, d. h. alle Feldlinien müssen ein- oder auswärts zeigen und auf einer konzentrischen Kugeloberfläche konstanten Betrag haben. Der Fluss durch die Kugeloberfläche vom Radius r ist also $\Phi = 4\pi r^2 E$. Andererseits ist Φ gleich eingeschlossene Ladung Q geteilt durch ε_0 , also $E = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, als ob die ganze Ladung im Mittelpunkt säße.

b) Feld im Innern einer gleichmäßig geladenen Hohlkugel. Auch hier muss das Feld kugelsymmetrisch sein. Im Innern sitzt aber keine Ladung. Durch eine konzentrische Kugeloberfläche innerhalb der Hohlkugel kann kein Fluss treten. Beides ist nur möglich, wenn das Feld innen überall Null ist.

c) Feld eines gleichmäßig geladenen unendlich langen geraden Drahtes. Der Draht habe die „lineare“ Ladungsdichte $\lambda \text{ C m}^{-1}$. Sein Feld muss radial senkrecht zum Draht zeigen. Durch einen konzentrischen Zylinder, Radius r , Länge l , tritt der Fluss $2\pi r l E$ (Grund- und Deckfläche leisten keinen Beitrag), der gleich $l\lambda/\varepsilon_0$ sein muss. Es folgt $E = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 r)$. Das Potential ergibt sich durch Integration zu $U = -\lambda/(2\pi\varepsilon_0) \cdot \ln r/R + U_0$, wobei $R = \text{Drahtradius}$. Dieses Potential verschwindet im Unendlichen *nicht*. Die speziellen Eigenschaften dieses Feldes werden in einem berühmten Experiment zum Nachweis der Wellennatur des Elektrons ausgenutzt (vgl. Abschn. 13.2.2).

d) Feld einer gleichmäßig geladenen unendlich ausgedehnten ebenen Platte. Die Flächenladung sei $\sigma \text{ C m}^{-2}$. Das Feld steht senkrecht zur Platte. Durch zwei gleiche Flächen A beiderseits parallel zur Platte, die irgendwie zur geschlossenen Fläche verbunden sind, tritt der Fluss $2AE = A\sigma/\varepsilon_0$,

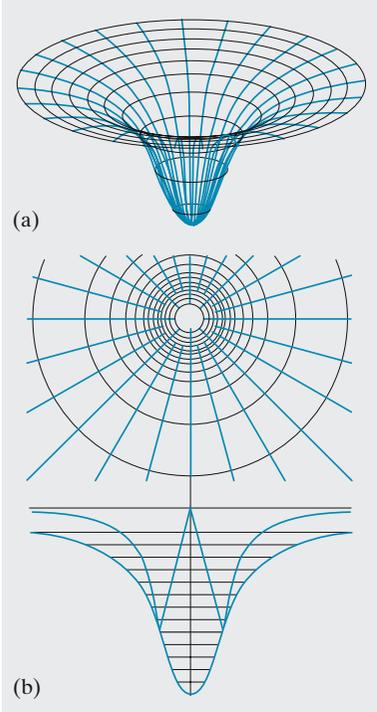


Abb. 6.18a,b. Potential und Feld einer gleichmäßig geladenen Kugel. Außen: Coulomb-Potential $\sim 1/r$, innen: Parabelpotential

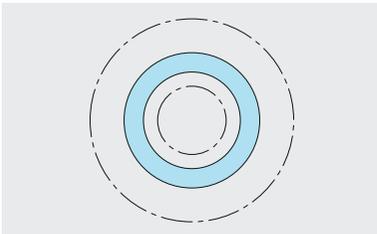


Abb. 6.19. Im Innern einer geladenen Hohlkugel kann kein Feld herrschen, denn durch die Testkugel tritt kein Fluss, weil keine Ladung darin ist

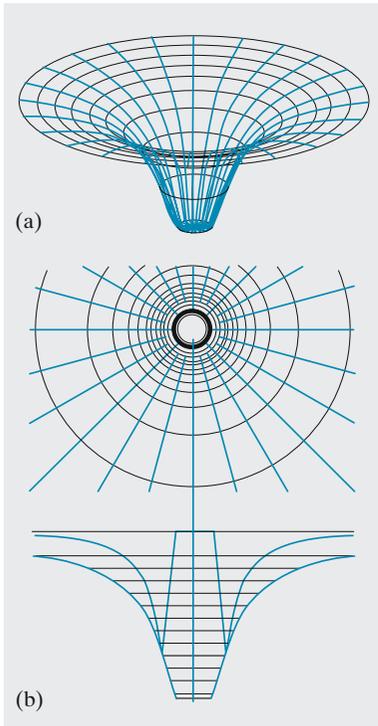


Abb. 6.20a,b. Potential und Feld einer geladenen Hohlkugel

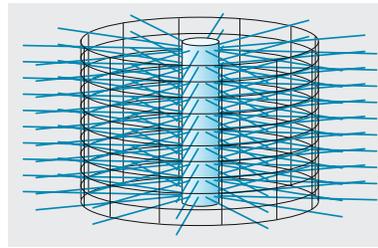


Abb. 6.21. Der Fluss durch jede Zylinderfläche gegebener Höhe um den geladenen Draht ist der gleiche. Daher nimmt das Feld wie $1/r$, das Potential wie $\ln r$ ab

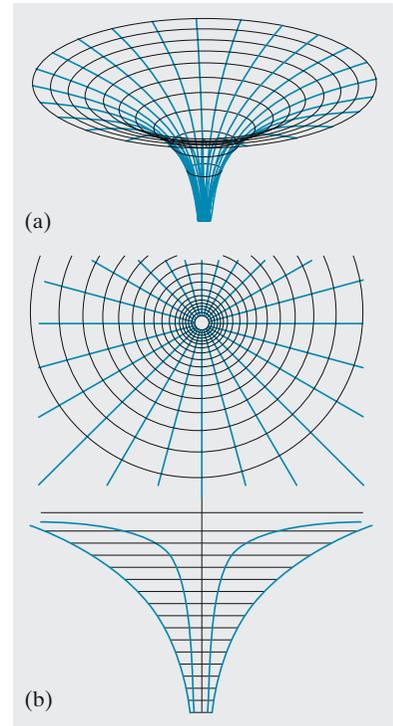


Abb. 6.22a,b. Potential und Feld eines geladenen Drahtes. Der Trichter ist viel flacher als ein $1/r$ -Trichter

also $E = \frac{1}{2}\sigma/\epsilon_0$. E hat überall den gleichen Betrag und zeigt immer von der Platte weg, falls sie positiv geladen ist. Beim Durchtritt durch die Platte erfolgt also ein Feldsprung von $-\frac{1}{2}\sigma/\epsilon_0$ auf $+\frac{1}{2}\sigma/\epsilon_0$, d. h. um σ/ϵ_0 . Das lässt sich verallgemeinern: Jede flächenhaft verteilte Ladung, unabhängig von der Form der Fläche und der Ladungsverteilung auf ihr, sieht von einem hinreichend nahe gelegenen Punkt eben aus. Auch beim Durchtritt durch eine beliebige Fläche springt also das Feld (genauer seine Komponente senkrecht zur Fläche) um σ/ϵ_0 , wo σ die lokale Flächenladungsdichte ist. Dagegen ändert sich die Tangentialkomponente bei einem solchen Durchgang nicht (Abb. 6.23, 6.24). Aus diesen Tatsachen folgt sofort die Kapazität eines Kondensators (vgl. Abschn. 6.1.5).

e) Feld eines beliebigen Metallkörpers. In einem Leiter sind elektrische Ladungen frei beweglich. Sie können somit nur dann in Ruhe, d. h. im Gleichgewicht sein, wenn sie keiner Kraft, d. h. keiner Feldstärke, also keinem Potentialgefälle ausgesetzt sind. Einem eventuell auftretenden Feld folgen sie sofort, bis das Feld der sich bildenden Ladungshäufung das ursprüngliche kompensiert. Das bedeutet (abgesehen von solchen meist kurzzeitigen Nichtgleichgewichtszuständen): Überall im Innern und auf der Oberfläche eines Leiters hat das Potential den gleichen Wert.

Jede leitende Fläche ist Äquipotentialfläche.

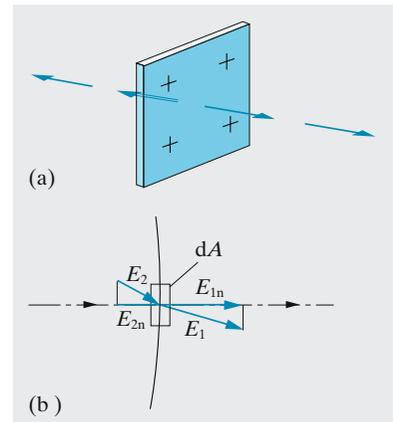


Abb. 6.23a,b. Eine geladene Ebene erzeugt ein abstandsunabhängiges, nach beiden Seiten gerichtetes Feld. Wenn die Ebene nicht allein im Raum ist, bleibt immer noch richtig, dass die Normalkomponente der Feldstärke dort einen Sprung macht. Das stimmt auch für gekrümmte Flächen, denn aus nächster Nähe sehen sie eben aus

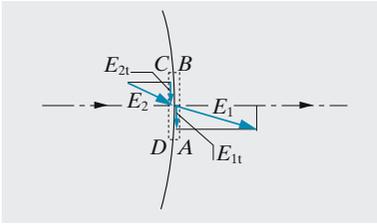


Abb. 6.24. Die Tangentialkomponente der Feldstärke bleibt beim Durchgang durch eine geladene Fläche stetig

Wenn an der Oberfläche eines Leiters ein elektrisches Feld besteht, muss es senkrecht zu ihr gerichtet sein; jede Tangentialkomponente würde sich durch entsprechende Ladungsverschiebungen selbst vernichten.

Die Innenwand eines Metallkörpers beliebiger Form ist Äquipotentialfläche.

Wenn im Innern keine Ladungen sind, gilt dort überall $\Delta U = 0$. Eine Funktion $U(\mathbf{r})$, für die dies alles zutrifft, ist $U = \text{const}$. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist diese trivial erscheinende Lösung auch die richtige. Konstantes Potential bedeutet aber verschwindendes Feld innerhalb *jedes* leitenden Hohlkörpers.

× Beispiel...

Leiten Sie die Aussagen über den Feldstärkesprung an einer geladenen Fläche aus der Beziehung (6.9) über den Gesamtfluss durch eine geschlossene Fläche her (flache Trommel, die die Fläche umschließt).

Eine Trommel der Grundfläche A und der sehr kleinen Höhe dh umschließe ein Stück A der geladenen Fläche und damit eine Ladung σA . Der gesamte Feldfluss durch die Trommeloberfläche muss daher $\sigma A / \epsilon_0$ sein. Da die Seitenflächen beliebig klein gemacht werden können, ohne dass sich dieser Fluss ändert, muss er gänzlich durch Boden und Deckel strömen. Die Feldstärken dort seien E_B und E_D . Dann ist $A(E_B - E_D) = \sigma A / \epsilon_0$, also $\Delta E = E_B - E_D = \sigma / \epsilon_0$.

Will man eine elektrische Ladung, die sich auf einem Leiter befindet, vollständig abgeben, so berührt man mit ihm die Innenwand eines leitenden Hohlkörpers. Die Ladung fließt dann auf die äußere Oberfläche. Zur vollständigen Abgabe einer Ladung ist also ein metallischer Becher geeignet (**Faraday-Becher**), den man zur Messung der Ladung mit einem Elektrometer leitend verbindet (Abb. 6.25).

Ein Raum kann gegen äußere statische elektrische Felder dadurch abgeschirmt werden, dass man ihn mit metallischen Wänden umgibt; häufig genügt dafür auch ein ziemlich enges Drahtnetz, ein **Faraday-Käfig**. Dieser Abschirmungseffekt ist auf die Superposition der Felder zurückzuführen, welche von den auf der Oberfläche des Käfigs influenzierten Ladungen herrühren.

Auf einer Metallkugel verteilen sich die Ladungen immer so, dass die Kugeloberfläche Äquipotentialfläche wird. Eine Metallkugel hat daher gleichmäßige Oberflächenladung, im Außenraum erzeugt sie das gleiche Potential wie ihre im Zentrum vereinigte Gesamtladung:

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (6.17)$$

Zwei Kugeln mit den Radien R_1 und R_2 haben das gleiche Potential, wenn ihre Ladungen Q_i und ihre Flächenladungsdichten $\sigma_i = Q_i / (4\pi R_i^2)$ sich verhalten wie

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (6.18)$$

(vgl. Abb. 6.26). Hinreichend nahe vor einer gekrümmten Metalloberfläche stammt das Feld nur von dem benachbarten Teil der Oberfläche mit der dort herrschenden Krümmung. Eine feine Spitze wirkt wie eine kleine Kugel vom entsprechenden Radius r . Potentialgleichheit auf der ganzen Oberfläche ist nur gesichert, wenn die Flächenladungsdichte nach (6.18) in der Spitze viel größer ist als in schwächer gekrümmten Gebieten. Entsprechend größer ist nach Abschn. 6.1.4d auch das lokale Feld vor der Spitze. Es kann so groß werden, dass spontan elektrischer Durchschlag der umgebenden Luft einsetzt (**Spitzenentladung**).

Wie elegant die potentialtheoretischen Methoden sind, weiß man erst richtig zu schätzen, wenn man versucht, die gleichen Felder nach dem verallgemeinerten Coulomb-Gesetz

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r^2} dV \mathbf{r}_0 \quad (6.19)$$

auszurechnen. Dieses Gesetz ergibt sich nach dem Superpositionsprinzip durch Summation über die Felder der Einzelladungen ρdV . Dabei ist r der Abstand von diesem Volumenelement, \mathbf{r}_0 der Einheitsvektor in Richtung dieses Abstandes.

Folgende Anekdote ist in vieler Hinsicht lehrreich: *Newton* hatte das vollständige Gravitationsgesetz schon 1665 gefunden, aber nicht veröffentlicht, weil er noch nicht beweisen konnte, dass eine Kugel so anzieht, als sei ihre Masse im Mittelpunkt vereinigt. Dies ist entscheidend für die Gleichsetzung $g = GM/r^2$. Viele Jahre später diskutierte man in der Londoner Royal Society, welches Kraftgesetz eine elliptische Planetenbahn erzeugen würde. *Halley* fuhr zu *Newton* nach Cambridge und fragte ihn. *Newton* sagte sofort „ r^{-2} “. Erst daraufhin löste er unser Problem der kugelsymmetrischen Ladungsverteilung (Abschn. 6.1.4a) mittels (6.19) und betrachtete seine Theorie als veröffentlichungsreif.

6.1.5 Kapazität

Das Potential U einer Punktladung oder einer Metallkugel ist ihrer Ladung Q proportional. Diese Proportionalität zwischen U und Q gilt für jede Ladungsverteilung. Verdoppelt man überall die Ladungsdichte, ohne die Geometrie der Verteilung zu ändern, dann bleibt auch die Geometrie des Feldes erhalten, aber der Fluss durch jede Fläche verdoppelt sich. Das ist nur möglich, wenn die Feldstärke und damit auch das Potential sich überall verdoppelt haben (vorausgesetzt, dass man das Potential dort auf Null normiert hat, wo das Feld verschwindet, also i. Allg. im Unendlichen). Zwischen Gesamtladung Q und Potential U , bezogen z. B. auf eine unendlich entfernte Wand, die „Erde“, gilt also allgemein

$$Q = CU . \quad (6.20)$$

Die Konstante C hängt nur von der Gestalt des Leiters ab und heißt seine **Kapazität**. Ihre Dimension ist Ladung/Spannung, ihre Einheit

$$1 \text{ Farad} = 1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}} . \quad (6.21)$$

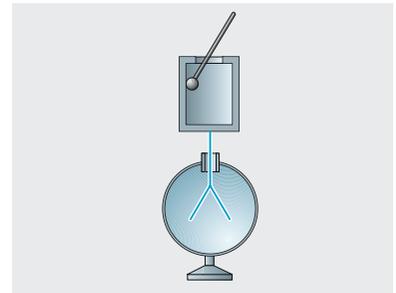


Abb. 6.25. Im Innern des Metallbechers (Faraday-Becher) herrscht kein Feld. Daher lässt sich das Elektrometer von dort aus immer weiter aufladen, selbst wenn schon viel Ladung darauf ist

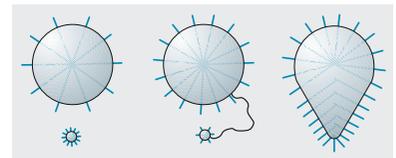


Abb. 6.26. Von zwei Metallkugeln mit gleicher Ladung hat die kleinere das größere Potential an der Oberfläche und erst recht die größere Feldstärke. Aber auch bei gleichem Potential ist das Feld an der kleinen Kugel größer. An feinen Spitzen können daher sehr hohe Felder herrschen

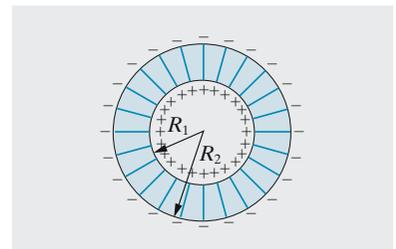


Abb. 6.27. Kugelkondensator

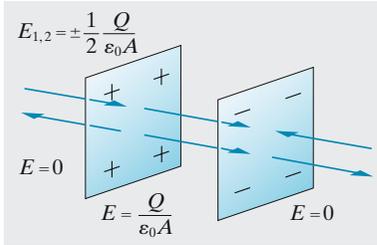


Abb. 6.28. Jede der geladenen Ebenen erzeugt ein abstands unabhängiges Feld (*oben* für die negative, *unten* für die positive Ebene). Zwischen den Ebenen verstärken sich die Einzelfelder zum Kondensatorfeld, im Außenraum heben sie einander auf

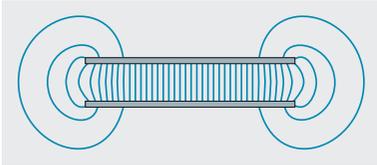


Abb. 6.29. Das elektrische Feld eines geladenen Plattenkondensators

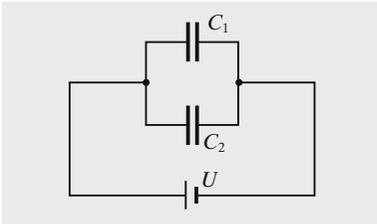


Abb. 6.30. Parallelgeschaltete Kondensatoren addieren ihre Ladungen, also ihre Kapazitäten

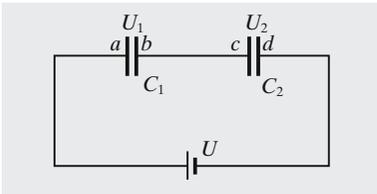


Abb. 6.31. Hintereinandergeschaltete Kondensatoren addieren ihre Spannungen, also ihre reziproken Kapazitäten

Die Kapazität einer Kugel vom Radius R ist nach (6.17)

$$C = 4\pi\epsilon_0 R.$$

Auch jedes Elektrometer (Abschn. 6.1.5c) hat seine Kapazität. Die ihm zugeführte Ladung bringt es auf eine bestimmte Spannung; beide sind durch (6.20) verknüpft. Jedem Ausschlag sind eine bestimmte Ladung und eine bestimmte Spannung zugeordnet. Das Elektrometer kann als Coulomb-Meter wie als Voltmeter verwendet werden.

× Beispiel...

Welche Kapazität haben ein Stecknadelkopf, ein stanniolbedeckter Fußball, die Erde?

Stecknadelkopf, Fußball, Erde haben die Kapazitäten 0,11 pF, 16 pF, 0,7 mF.

Zwei ebene Metallplatten der Fläche A stehen einander im kleinen Abstand d gegenüber (Abb. 6.29). Sie haben entgegengesetzt gleiche Gesamtladung, wie dies notwendig eintreten muss, wenn man die Platten durch eine Spannungsquelle verbindet, die ja Ladungen nicht erzeugt, sondern nur verschieben kann. Welche Kapazität hat dieser **Plattenkondensator**? Durch eine geschlossene Fläche, die beide Platten mit ihren Ladungen Q und $-Q$ in hinreichendem Abstand umfasst, tritt kein Fluss. Umfasst die Fläche nur eine Platte, läuft also zwischen beiden Platten durch, dann ist der Fluss Q/ϵ_0 . Offenbar existiert ein Feld nur zwischen den Platten (am Rand greift es etwas in die Umgebung hinaus, umso weniger, je kleiner d ist; Abb. 6.29). Zwischen den Platten ist das Feld nach Abschn. 6.1.4d homogen und senkrecht zur Platte. Der Fluss ist also $AE = Q/\epsilon_0$, das Feld $E = Q/(\epsilon_0 A)$, d. h. die Potentialdifferenz zwischen den Platten

$$U = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}.$$

Der Plattenkondensator hat also die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \quad (6.22)$$

a) Parallel- und Serienschaltung von Kondensatoren. Parallel geschaltete Kondensatoren (Abb. 6.30) addieren ihre Kapazitäten

$$C = C_1 + C_2, \quad (6.23)$$

hintereinander oder in Serie geschaltete (Abb. 6.31) addieren ihre reziproken Kapazitäten

$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}. \quad (6.24)$$

Begründung: Ein durchlaufender Draht hat überall das gleiche Potential (sein Widerstand ist vernachlässigt). Also muss in Abb. 6.30 die Spannung zwischen den Platten von C_1 gleich der zwischen den Platten von C_2 sein, nämlich gleich der Batteriespannung U . Die Ladungen addieren sich: $Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U = CU$. In Abb. 6.31 addieren sich die Spannungen U_1 und U_2 zu U . Zwischen den Platten b und c und ebenso zwischen a und d kann die Ladung nur verschoben worden sein, also haben C_1 und C_2 die gleiche Ladung Q , d. h. $U = U_1 + U_2 = Q(C_1^{-1} + C_2^{-1})$.

b) Kirchhoff-Waage. Wenn an einem Plattenkondensator die Spannung U liegt, herrscht zwischen den Platten das homogene Feld $E = U/d$. Dieses Feld stammt von einer Ladung $\pm Q = \pm CU = \pm \epsilon_0 AU/d$ auf den Platten. Umgekehrt übt dieses Feld E auf die Ladungen eine Kraft aus. Wenn man eine kleine Ladung dQ auf die andere Seite des Kondensators bringt, wird die potentielle Energie um $dE_{\text{pot}} = E \cdot d \cdot dQ = (Q/C)dQ$ erhöht, die Gesamtenergie beträgt also

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} U^2.$$

Daraus können wir die Kraft, mit der sich die Platten anziehen, durch den Gradienten berechnen (1.56),

$$F = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{x} U^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{x^2} U^2 = \frac{1}{2} QE.$$

F , A , d und U sind direkt messbar, woraus sich eine Bestimmung von ϵ_0 ergibt. Bei gegebenem ϵ_0 kann man die Kirchhoff-Waage auch zur „absoluten Spannungsmessung“ ausnutzen. Entfernt man die Platten weit voneinander, lässt also den Plattenabstand von d auf ∞ wachsen, wobei die angelegte Spannung konstant bleibt, dann erfordert die Überwindung dieser Kraft die Arbeit

$$W = E_{\text{pot}} = \int_d^\infty F dx = -\frac{1}{2} \epsilon_0 AU^2 \int_d^\infty \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} U^2 = \frac{1}{2} CU^2.$$

Wie zu erwarten wird die schon bekannte gespeicherte Energie reproduziert. Wir werden in Abschn. 6.2.4 sehen, dass man diese Energie auch im elektrischen Feld zwischen den Platten lokalisieren kann.

c) Elektrometer. Der Plattenkondensator dient häufig zur Herstellung eines homogenen elektrischen Feldes, dessen Feldstärke aus Spannung und Plattenabstand gegeben ist: $|E| = U/d$.

Eine im Feld befindliche Ladung Q erfährt eine Kraft $F = QU/d$; die Messung der Kraft kann also zur Bestimmung der Ladung dienen. Beim **Fadenelektrometer** (Abb. 6.33) wird die zu messende Ladung auf einen isoliert befestigten, einige μm dicken Metallfaden gebracht. Dieser befindet sich im Feld eines Plattenkondensators. Es greift also an der Ladung eine Kraft an, die dem Produkt aus Ladung und Feldstärke proportional ist und eine Durchbiegung des Fadens bewirkt. Seine Verschiebung wird mikroskopisch beobachtet, sie ist der Ladung proportional. Solche Elektrometer erreichen Empfindlichkeiten von einigen 10^{-14} Coulomb pro Skalenteil im Okularmikrometer des Ablesemikroskops. Das entspricht bei der geringen Kapazität des Gerätes einigen mV.

d) Schwebekondensator, Millikan-Versuch. Als Ladungsträger wird ein kleines Flüssigkeitströpfchen zwischen die Platten des horizontal gelagerten Kondensators gebracht. Im feldfreien Raum sinkt es unter dem Einfluss der Schwere und des Reibungswiderstandes mit gleichförmiger Geschwindigkeit, aus der nach dem Stokes-Gesetz (3.35) der Radius und damit auch das Gewicht mg bestimmt werden kann. Legt man eine veränderliche Spannung an den Kondensator, so kann man diese so regulieren, dass das Tröpfchen in der Schwebelage gehalten wird. Dann ist seine Ladung Q

$$Q = \frac{mg}{|E|} = \frac{mgd}{U}.$$

Damit ist die zu messende Ladung direkt durch bekannte Größen ausgedrückt (Aufgabe 6.1.14).

Mit dieser Methode fand *Millikan*, dass die Ladung solcher Tröpfchen stets ein niedriges ganzes Vielfaches von $1,6 \cdot 10^{-19}$ C beträgt, d. h. wenige Elementar-

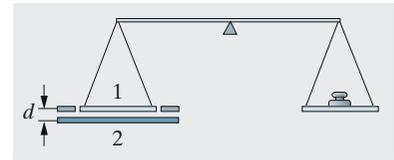


Abb. 6.32. Kirchhoff-Waage zur Absolutmessung von Ladung oder Spannung aus der Kraft auf die Waagschale im Feld. Wenn man den Satz von *Gauß* voraussetzt, kann man so auch ϵ_0 direkt bestimmen

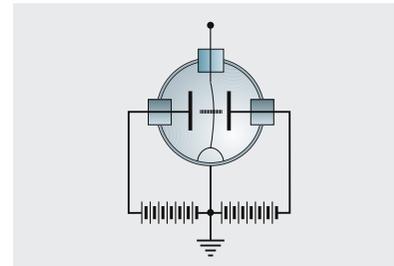


Abb. 6.33. Fadenelektrometer

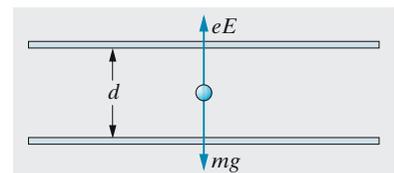


Abb. 6.34. Versuch von Millikan: Ein Öltröpfchen, das eine Elementarladung trägt, schwebt im Kondensatorfeld

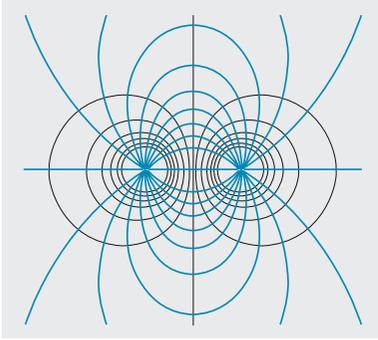


Abb. 6.35. Feldlinien und Potentialflächen zweier entgegengesetzter Ladungen. In großem Abstand von diesen Ladungen herrscht ein Dipolfeld

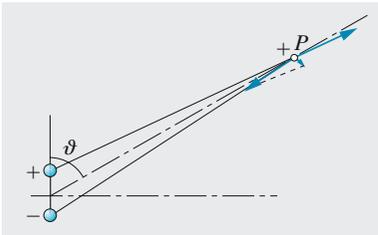


Abb. 6.36. Die positive Ladung ist um $l \cos \vartheta$ näher am Punkt P . Daher ist ihr Feld E_+ um $2Ql \cos \vartheta / (4\pi\epsilon_0 r^3)$ stärker als das Feld E_- der negativen Ladung. Diese Differenz ist die Radialkomponente des Dipolfeldes. Die andere Komponente ergibt sich aus den Richtungen von E_+ und E_- , die um $l \sin \vartheta / r$ verschieden sind (Sehwinkel). Also $E_{\perp} = El \sin \vartheta / r = p \sin \vartheta / (4\pi\epsilon_0 r^3)$

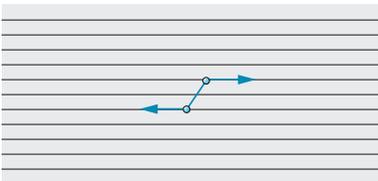


Abb. 6.37. Dipol im homogenen Feld. Die Gesamtkraft ist 0, aber es entsteht ein Drehmoment $T = p \times E$ mit dem Betrag $T = pE \sin \alpha$. Stabiles Gleichgewicht herrscht erst bei $\alpha = 0$. Gegenüber dieser Einstellung ist die potentielle Energie $W = -p \cdot E = -pE \cos \alpha$

ladungen e enthält (Abschn. 6.1.1). Er konnte e so mit hoher Genauigkeit direkt bestimmen. Heutiger Wert:

$$e = (1,602\,176\,46 \pm 0,000\,000\,06) \cdot 10^{-19} \text{ C} .$$

6.1.6 Dipole

Ein statischer **Dipol** ist ein Paar sehr nahe benachbarter Ladungen. Wenn diese gegeneinander schwingen, weil sie durch elastische Kräfte aneinander gebunden sind, z. B. in einem Atom oder einer Dipolantenne, kommen wir zum dynamischen Dipol. Das Feld eines statischen Dipols zeigt Abb. 6.35 (man beachte den Unterschied zu Abb. 6.8–6.11).

Wir entfernen uns um r vom Dipol im Winkel ϑ zu seiner Achse, wobei r groß gegen den Abstand l der Ladungen $+Q$ und $-Q$ sei. Von diesem Punkt P (Abb. 6.36) ist die positive Ladung um r entfernt, die negative Ladung um $r + \Delta r = r + l \cos \vartheta$. Das Potential im Punkt P ergibt sich als Differenz der beiden Punktladungspotentiale $U_0 = Q / (4\pi\epsilon_0 r)$:

$$U = \frac{dU_0}{dr} \Delta r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} l \cos \vartheta . \quad (6.25)$$

Hier kann man die Eigenschaften Q und l des Dipols einschließlich seiner Richtung (von $-$ nach $+$) zum **Dipolmoment** p zusammenfassen:

$$p = Ql . \quad (6.26)$$

Dann lautet das Potential

$$U = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cdot r}{4\pi\epsilon_0 r^3} . \quad (6.27)$$

Wie der Faktor $\cos \vartheta$ zeigt, ist U auf der Symmetrieebene des Dipols Null. Das Feld E verschwindet dort aber durchaus nicht. Wir zerlegen E am besten in seine radiale Komponente E_r , (in Richtung r) und seine meridionale Komponente E_{ϑ} (senkrecht zu r). Die dritte Komponente verschwindet aus Symmetriegründen. E_r ergibt sich genau wie U als Differenz der Punktfelder $E_0 = Q / (4\pi\epsilon_0 r^2)$:

$$E_r = \frac{dE_0}{dr} l \cos \vartheta = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} l \cos \vartheta = \frac{p \cos \vartheta}{2\pi\epsilon_0 r^3} .$$

Bei E_{ϑ} sind die verschiedenen Richtungen der Einzelfelder zu beachten, die auf „ihre“ Ladung bzw. von ihr weg zeigen. Beide bilden einen Winkel, der gleich dem Sehwinkel ist, unter dem der Dipol von P aus erscheint, nämlich $l \sin \vartheta / r$. Damit liest man ab

$$E_{\vartheta} = E_0 \frac{l \sin \vartheta}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{l \sin \vartheta}{r} = \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3} . \quad (6.28)$$

Man kann E_r und E_{ϑ} nach (6.15) auch durch Differentiation von $U(r, \vartheta)$ nach r bzw. ϑ erhalten: $E_r = -\partial U / \partial r$, $E_{\vartheta} = -r^{-1} \partial U / \partial \vartheta$.

Ein Dipol werde in ein *äußeres* elektrisches Feld E gebracht. Wenn E homogen ist, sind die Kräfte auf die beiden Ladungen entgegengesetzt gleich, ergeben also keine Gesamtkraft, aber ein Drehmoment

$$\boxed{\mathbf{T} = Ql \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}} \quad (6.29)$$

Dieses Drehmoment versucht den Dipol in die Feldrichtung zu stellen; erst dann wird es Null.

Die Drehung des Dipols erfordert Energie. Seine potentielle Energie ist die Summe der Energien der Einzelladungen:

$$E_{\text{pot}} = Q \frac{dU}{dr} l \cos \alpha = -QEl \cos \alpha = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (6.30)$$

Nur wenn das äußere Feld inhomogen ist, erfahren die Einzelladungen verschiedene Kräfte und der Dipol eine Gesamtkraft. x bezeichne die Richtung von \mathbf{E} , der Dipol liege um α gegen diese Richtung schief (Abb. 6.39). Dann ist die resultierende Kraft

$$\mathbf{F} = \frac{dE}{dx} Ql \cos \alpha = \frac{dE}{dx} p \cos \alpha \quad (6.31)$$

6.1.7 Influenz

Bringt man eine positive Punktladung in die Nähe einer leitenden Metallplatte, so krümmen sich die Feldlinien (Abb. 6.40). Sie müssen das tun, damit sie auf die Metallfläche senkrecht münden. Man kann sich vorstellen, dass die Tangentialkomponente, die bei der ursprünglich radialen Feldrichtung aufträte, negative Ladung in die Gegend gegenüber der positiven Punktladung gezogen hat. Da alle Feldlinien der positiven Ladung, wenn auch teilweise auf großem Umweg, auf der Platte münden, ist die so durch **Influenz** gebundene negative Gegenladung ebenso groß wie die influenzierende. Wie ein Vergleich mit Abb. 6.35 zeigt, ist das entstehende Feld, wenigstens vor der Platte, identisch mit dem Feld eines Dipols aus der positiven Ladung und einer negativen **Spiegelladung** hinter der Grenzfläche. Wie beim Dipol hat die Metalloberfläche als Symmetrieebene das Potential Null. In Wirklichkeit ist keine Spiegelladung da, sondern die Influenzladung sitzt in der Oberfläche, wo ihre Flächendichte σ nach Abschn. 6.1.4d den Feldstärkesprung auf den Wert $E = 0$ im Metallinnern

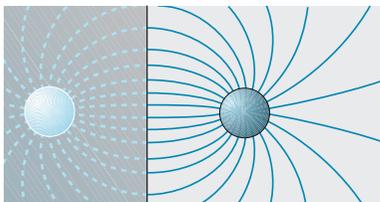


Abb. 6.40. Das Feld einer Punktladung vor einer großen Metallplatte wird so verzerrt, als sitze im Spiegelpunkt eine entgegengesetzte Ladung (Bildladung)

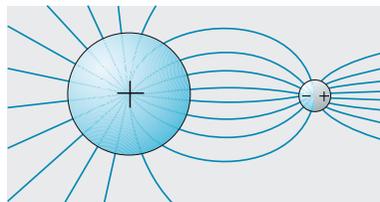


Abb. 6.41. Influenzierte Ladungen auf einer im ganzen ungeladenen Metallkugel und Feldverzerrung durch diese Ladungen

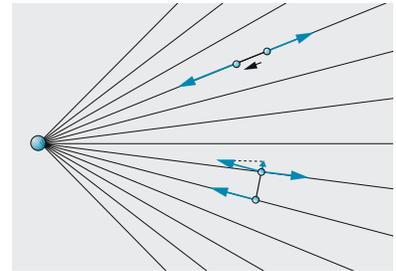


Abb. 6.38. Dipol im inhomogenen Feld (hier im Feld einer Punktladung). Die Kraft hängt nicht nur von Dipolmoment und Inhomogenität des Feldes ab, sondern auch von der Einstellung des Dipols. Auf den oberen Dipol wirkt eine Kraft vom doppelten Betrag wie auf den unteren

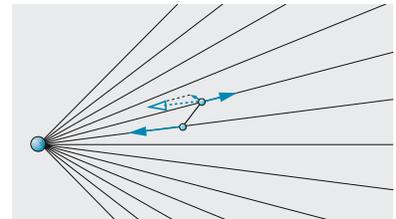


Abb. 6.39. Die Kraft auf einen Dipol im inhomogenen Feld ist nur ausnahmsweise parallel zur Dipolrichtung

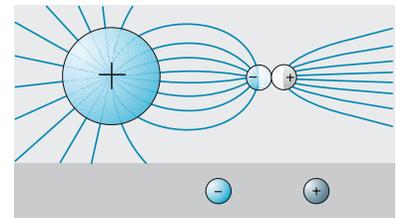


Abb. 6.42. Auf den sich berührenden Metallkugeln a und b werden im elektrischen Feld Ladungen verschoben. Nach der Trennung bleiben die Kugeln auch außerhalb des Feldes geladen

regelt. Auf die positive Ladung wirkt jedoch entsprechend der Feldverteilung in ihrer Umgebung eine Kraft, wie sie die Spiegelladung ausüben würde:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4d^2}. \quad (6.32)$$

Man nennt sie **Bildkraft**.

Für einen isolierten Metallkörper beliebiger Form gilt Entsprechendes. Die Influenz zieht negative Ladungen dorthin, wo die Feldlinien auf den Körper zukommen; die kompensierenden positiven Ladungen wandern nach der anderen Seite (die Gesamtladung ändert sich ja durch Influenz nicht). Auch hier bleibt die Feldstärke im Innern des Leiters Null, das Potential konstant. Zwei vorher neutrale Metallkörper, die man in einem Feld zur Berührung bringt und dann wieder trennt, tragen danach entgegengesetzt gleiche Ladungen. Allerdings muss zum getrennten Herausführen aus dem Feld eine Arbeit geleistet werden, die gleich der potentiellen Energie der aufgeladenen Körper im feldfreien Raum ist (Prinzip der **Influenzmaschine**).

6.1.8 Energie einer Ladungsverteilung

Wir bringen eine Ladung Q in kleinen Schritten dq auf einen Leiter (Abb. 6.43). In einem Zwischenstadium sei die Ladung q erreicht, die nach (6.20) dem Leiter ein Potential $u = q/C$ gibt. Gegen diese Spannung die nächste Teilladung dq heranzuführen, erfordert die Arbeit

$$dW = u dq = \frac{q dq}{C}.$$

Die Gesamtarbeit ergibt sich durch Integration

$$W = \int_0^Q \frac{q dq}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (6.33)$$

Diese Arbeit ist als potentielle Energie im geladenen Leiter gespeichert. Man kann sie mit (6.20) auch durch das Potential ausdrücken:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} CU^2. \quad (6.34)$$

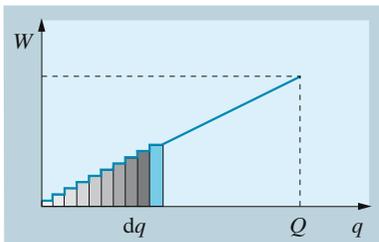


Abb. 6.43. Die Energie eines geladenen Leiters (Kondensators) lässt sich schrittweise aus der Energie kleiner Ladungsbeträge zusammensetzen

Bei einer leitenden Kugel mit $C = 4\pi\epsilon_0 R$ entspricht diese Energie $E_{\text{pot}} = Q^2/(8\pi\epsilon_0 R)$ einer Ladung, die nur auf der Oberfläche sitzt. Erfüllt die Ladung die Kugel mit gleichmäßiger Dichte, so ist ihre potentielle Energie $E_{\text{pot}} = \frac{3}{5} Q^2/(4\pi\epsilon_0 R)$, also größer (Aufgabe 6.1.6). Die Ladungen sind ja auch im Mittel einander näher. Auch aus energetischen Gründen werden die Ladungen zur Oberfläche streben.

6.1.9 Das elektrische Feld als Träger der elektrischen Energie

Wo sitzt die Energie einer Ladungsverteilung, z. B. eines geladenen Plattenkondensators? Man kann sagen: In den getrennten Ladungen. Man kann

aber auch sagen, sie sei im Feld zwischen den Platten verteilt. Wenn am Kondensator die Spannung U liegt, enthält er die Energie

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{\varepsilon_0 A}{2 d} U^2 = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2 d^2} A d = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 V, \quad (6.35)$$

wo $E_{\text{pot}} = U/d$ die Feldstärke im Plattenzwischenraum und $V = Ad$ dessen Volumen ist. Wenn die Energie im Feld verteilt ist, ergibt sich die Energiedichte e (Energie in einem hinreichend kleinen Volumen geteilt durch dieses Volumen) als

$$e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2. \quad (6.36)$$

Diese Deutung gilt auch für inhomogene Felder.

Wie die elastische Deformationsenergie überall im deformierten Medium verteilt ist (Abschn. 3.4.5), soll nach *Faraday* und *Maxwell* der felderfüllte Raum Sitz der elektrischen Energie sein. Dies ist nicht nur eine formale Auslegung von (6.35); die Energie steckt wirklich im Feld und kann mit ihm durch den Raum wandern. Das ist grundlegend für das Verständnis der elektromagnetischen Wellen (Abschn. 7.4).

6.2 Dielektrika

Wie ein elektrisches Feld von Materie beeinflusst wird, hängt natürlich von ihrem atomaren Aufbau ab, speziell von Lage und Verschiebbarkeit der Ladungen darin. Wo entgegengesetzte Ladungen sich verschieben, schwächen oder vernichten sie das Feld zwischen sich.

6.2.1 Die Verschiebungsdichte

Das elektrische Feld steht in doppelter Beziehung zur Ladung:

- Das Feld wird von Ladungen erzeugt; diese sind Quellen oder Senken des Feldes; aus jedem Volumenelement, das eine Ladungsdichte ϱ hat, kommen Feldlinien heraus oder enden dort:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho. \quad (6.37)$$

- Das Feld übt auf Ladungen Kräfte aus:

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{E}. \quad (6.38)$$

Aus der zweiten Beziehung haben wir die Definition von \mathbf{E} bezogen. Um die felderzeugende Rolle der Ladung stärker zu betonen, ist es zweckmäßig, einen zweiten Feldvektor \mathbf{D} einzuführen, sodass in (6.37) die Proportionalitätskonstante wegfällt, also

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho. \quad (6.39)$$

Offenbar muss dazu sein, wenigstens im Vakuum

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (6.40)$$

Die Vorzüge dieser Definition zeigen sich besonders, wenn man das elektrische Feld in Materie behandelt.

Tabelle 6.1. Dielektrizitätskonstanten einiger Stoffe

Material	Dielektrizitätskonstante
Glas	5–10
Schwefel	3,6–4,3
Hartgummi	2,5–3,5
Quarzglas	3,7
Nitrobenzol	37 (15 °C)
Ethylalkohol	25,8 (20 °C)
Wasser	81,1 (18 °C)
Petroleum	2,1 (18 °C)
Luft	1,000 576 (0 °C, 1 bar)
Wasserstoff	1,000 264 (0 °C, 1 bar)
SO ₂	1,0099 (0 °C, 1 bar)
N ₂	1,000 606 (0 °C, 1 bar)

6.2.2 Dielektrizitätskonstante

Eine geerdete Metallplatte, die man zwischen eine geriebene Plastikstange und ein aufgehängtes Holundermarkkugeln stellt, beseitigt die Anziehung zwischen beiden, eine Platte aus einem isolierenden Material (Glas, Plastik) dagegen nicht. Das elektrische Feld greift durch einen Isolator hindurch. Isolierende Stoffe heißen deswegen auch **Dielektrika** (di = durch).

Wir füllen den Plattenzwischenraum eines Kondensators mit einer Isolierplatte aus. Die Wirkung hängt davon ab, ob der Kondensator vor oder nach dem Einschleiben der Platte von der Spannungsquelle getrennt wurde. Im ersten Fall ist die *Ladung* Q des Kondensators konstant; das statische Voltmeter (z. B. Elektrometer, Abschn. 6.1.5.c) zeigt ein Absinken der Spannung U , wenn man die Platte einschleibt. Wenn man sie wieder herauszieht, steigt die Spannung auf den ursprünglichen Wert. Der Kondensator hat also keine Ladung verloren. Trennt man ihn erst nach dem Einschleiben der Platte von der Spannungsquelle, ist die *Spannung* U konstant. Bei der Entladung über ein ballistisches Galvanometer (Abschn. 7.3.5a) misst man eine *größere* Ladung als ohne Dielektrikum. Beide Befunde lassen sich nach $Q = CU$ zusammenfassen:

Das Dielektrikum vergrößert die Kapazität des Kondensators.

Als **Dielektrizitätskonstante** ε (abgekürzt DK) des Isolators bezeichnet man das Verhältnis der Kapazität eines Kondensators mit diesem Isolator bzw. mit Vakuum im Plattenzwischenraum:

$$\varepsilon = \frac{C}{C_{\text{Vak}}} . \quad (6.41)$$

Im Gegensatz zu ε_0 ist ε dimensionslos.

Ein materiegefüllter Plattenkondensator hat also die Kapazität

$$C = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{A}{d} . \quad (6.42)$$

Bei gegebener Ladung auf den Platten sei die Spannung zwischen den Platten im Vakuum U_0 , das Feld ist $E_0 = U_0/d$. Mit Dielektrikum zwischen den Platten sind Spannung und Feld verringert auf $U_D = U_0/\varepsilon$ bzw. $E_D = E_0/\varepsilon$. Unser Grundgesetz, der Satz von *Gauß* (6.9), gilt aber immer noch: Der Feldfluss $\phi = E_D A$ durch irgendeine Fläche zwischen den Platten muss gleich Q_D/ε_0 sein, wo $\pm Q_D$ die effektiv beiderseits sitzende Ladung ist. Wenn das Feld E_D mit Dielektrikum um den Faktor ε^{-1} kleiner geworden ist, muss dasselbe für die Ladung gelten: $Q_D = Q_0/\varepsilon$. Die Platten selbst enthalten aber immer noch die Ladung Q_0 . Der Unterschied muss von Ladungen herrühren, die auf den Oberflächen des Dielektrikums angrenzend an die Kondensatorplatten sitzen, nämlich

$$Q_P = Q_0 - Q_D = Q_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) = A \varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} . \quad (6.43)$$

Füllt die dielektrische Platte den Kondensator in der Dicke nicht ganz aus, entsteht an ihrer Oberfläche trotzdem die gleiche Ladung Q_P wie

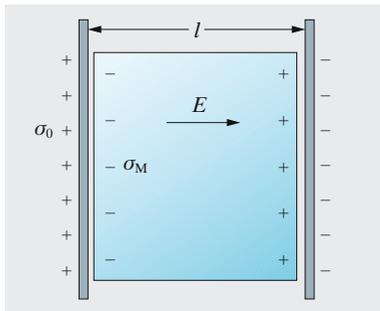


Abb. 6.44. Die freien Oberflächenladungen auf einem Dielektrikum schwächen das E -Feld und die Spannung bei gegebener Ladung der Platten, erhöhen also die Kapazität des Kondensators

oben. Sie verringert das Feld im Innern des Isolators überall auf E_0/ε . Wenn der Isolator aus mehreren parallelen Einzelplatten mit Luftspalten dazwischen besteht, tragen auch diese Platten die gleiche Flächenladung. Eine solche Flächenladung ist auf den Stirnflächen *jedes* Volumenelements im Isolator anzunehmen. Ein solches Volumenelement $dV = dA dl$ trägt ein **Dipolmoment** (Ladung · Abstand)

$$dp = dQ_P dl = dA \varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} dl = \varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} dV. \quad (6.44)$$

Die Richtung des Dipolmoments ist gleich der Feldrichtung E_0 , also

$$d\mathbf{p} = \varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} dV. \quad (6.45)$$

Wir nennen das Dipolmoment pro Volumeneinheit **dielektrische Polarisation P** :

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \varepsilon_0 \mathbf{E}_0, \quad (6.46)$$

oder ausgedrückt durch das Feld $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0/\varepsilon$, das im Dielektrikum wirklich herrscht

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (6.47)$$

Manchmal fasst man $\chi_P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0$ auch als neue Materialkonstante, die **dielektrische Suszeptibilität**, zusammen.

Wir wollen jetzt zwischen „wahren“ Ladungen, z. B. zusätzlichen oder fehlenden Elektronen im Metall der Kondensatorplatte, und „scheinbaren“ Ladungen unterscheiden, wie sie durch dielektrische Polarisation an den Oberflächen der Isolatorplatte entstanden sind. Beide Ladungssorten sind Anfangs- oder Endpunkte von \mathbf{E} -Linien und gehen daher in das Q im Satz von *Gauß* ein. Das ballistische Galvanometer misst dagegen nur wahre Ladungen. Wir konstruieren ein Feld, dessen Linien nur in *wahren* Ladungen beginnen oder enden, und nennen es das \mathbf{D} -Feld. \mathbf{D} -Linien treten demnach ungestört in ein Dielektrikum ein, wenn sie senkrecht darauf treffen.

Dies ist der Fall, wenn man festsetzt

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (6.48)$$

oder auch $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$.

So lässt sich auch das Verhalten von Feldlinien beschreiben, die schräg auf eine Grenzfläche zwischen $\varepsilon = \varepsilon_1$ und $\varepsilon = \varepsilon_2$ einfallen: Von der Grenzfläche gehen keine neuen \mathbf{D} -Linien aus, aber \mathbf{E} -Linien (nur scheinbare Ladungen). Die Normalkomponente von \mathbf{D} ändert sich daher an der Grenzfläche nicht, und eben deswegen muss die Normalkomponente von \mathbf{E} um den Faktor $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ springen. Für die Tangentialkomponenten gilt genau das Umgekehrte: Die von \mathbf{E} tritt stetig durch die Grenzfläche, die von \mathbf{D} springt um den Faktor $\varepsilon_1/\varepsilon_2$. So ergibt sich das Brechungsgesetz für die Feldlinien:

Die Tangens der Winkel zwischen Feldlinien und Lot auf der Grenzfläche verhalten sich wie die DK der beiden Medien (vgl. Abschn. 6.1.4d).

Die Kräfte auf Ladungen hängen vom E -Feld ab und werden daher im Dielektrikum um den Faktor ε geschwächt, ebenso auch die Wechselwirkungsenergien zwischen Ladungen. Dies ist, besonders im Fall des Wassers, fundamental für die Chemie: Die Anziehung ungleichnamiger Ionen wird im Wasser so geschwächt, dass i. Allg. schon die thermische Bewegung zur Dissoziation ausreicht.

6.2.3 Mechanismen der dielektrischen Polarisation

Molekular gesehen beruhen die dielektrischen Eigenschaften auf zwei Hauptmechanismen: Verschiebungspolarisation und Orientierungspolarisation.

a) Verschiebungspolarisation. Die Ladungen, aus denen atomare Teilchen bestehen (Kerne, Elektronen, Ionenrümpfe), sind nicht starr verbunden, sondern durch Kräfte, die in erster Näherung elastisch (proportional zur Auslenkung) sind, an ihre Ruhelage gebunden: $F = -kx$. Ein äußeres elektrisches Feld E übt auf eine solche Ladung Q eine Kraft QE aus und lenkt sie um $x = F/k = QE/k$ aus. Dadurch entsteht ein induziertes Dipolmoment

$$p = Qx = \frac{Q^2}{k} E = \alpha E . \quad (6.49)$$

Die **Polarisierbarkeit** $\alpha = Q^2/k$ ist charakteristisch für das Atom. Bedenkt man, dass die Rückstellkraft ungefähr dem Coulomb-Gesetz $F = Q^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ folgt ($r \approx$ Atomradius), also $k \approx dF/dr \approx Q^2/(2\pi\varepsilon_0 r^3)$, so wird $\alpha \approx 2\pi\varepsilon_0 r^3$: Bis auf den Faktor ε_0 ist die Polarisierbarkeit größenordnungsmäßig gleich dem Volumen des Atoms.

Die potentielle Energie einer solchen Auslenkung ist

$$W = \frac{1}{2} Fx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\alpha} \frac{p^2}{Q^2} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\alpha} = \frac{1}{2} pE \quad (6.50)$$

(halb so groß wie (6.30), weil der Dipol erst im Feld erzeugt werden muss).

Wenn jedes Teilchen im homogenen Feld so polarisiert ist, heben sich die Ladungen im Innern jedes Volumenelements auf. An jeder freien Oberfläche bleiben aber Flächenladungen im Sinne von Abb. 6.45. Bei der Anzahldichte n der Teilchen ergibt sich eine Polarisation (Dipolmoment/Volumen)

$$P = np = n\alpha E .$$

Die makroskopische Größe ε und die mikroskopische α (Vergleich mit (6.47)) hängen daher so zusammen:

$$(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 = n\alpha \quad (6.51)$$

Die Teilchendichte n lässt sich auch durch die Molmasse μ bzw. das Molvolumen μ/Q ausdrücken, in dem N_A Teilchen sind: $n = N_A Q/\mu$, also

$$\varepsilon_0(\varepsilon - 1) \frac{\mu}{Q} = N_A \alpha . \quad (6.51')$$

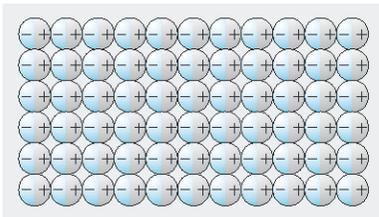


Abb. 6.45. Die Polarisation der Atome als Ursache der freien Oberflächenladungen

Für Gase stimmt das gut. Für Materie höherer Dichte muss man die Wechselwirkung zwischen den Dipolen berücksichtigen. An die Stelle von (6.51') tritt dann die **Clausius-Mosotti-Beziehung**

$$\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{3} N_A \alpha, \quad (6.52)$$

die für $\varepsilon \approx 1$ in (6.51') übergeht.

b) Orientierungspolarisation. Manche atomare Teilchen besitzen infolge ihres Baus auch im feldfreien Raum schon ein permanentes Dipolmoment (polare Moleküle, besonders Wasser, Alkohole, Säuren usw.). Da aber die Wärmebewegung die Richtungen einer großen Anzahl solcher Dipolteilchen i. Allg. regellos verteilt, besteht ohne angelegtes Feld keine makroskopische dielektrische Polarisierung. Ein elektrisches Feld zwingt die Momente etwas in die Vorzugsrichtung, und zwar umso mehr, je stärker das Feld und je tiefer die Temperatur ist, denn die Wärmebewegung stört die Einstellung der Dipole. Allerdings wird bei Raumtemperatur auch in starken Feldern effektiv nur 1 von ca. 100 Molekülen ausgerichtet: Die Größe eines typischen mikroskopischen Dipolmoments können wir aus $p = ea_0$ gewinnen, wobei $a_0 = 0,5 \cdot 10^{-10}$ m der Bohrsche Radius ist. Ein sehr starkes Feld liefert vielleicht $E = 100$ kV/cm, dann beträgt die Einstellenergie des ausgerichteten Dipols $U = pE = ea_0E \approx 0,5$ meV. Das ist viel kleiner als thermische Energien (25 meV bei 300 K), deshalb bleiben alle Orientierungen bis auf einen kleinen Rest gleichverteilt. Eine ähnliche Situation tritt bei der Kernspinresonanz für magnetische Momente auf (vgl. Abschn. 14.9.3).

Diese teilweise Einstellung in Feldrichtung braucht eine messbare Zeit, umso länger, je viskoser das umgebende Medium ist. In hochfrequenten Wechselfeldern kann es daher vorkommen, dass die Dipoleinstellung dem Feld nachhinkt (**dielektrische Relaxation**). Das führt zu den technisch wichtigen **dielektrischen Verlusten**. Die Einstellung der Verschiebungspolarisation geht dagegen so schnell, dass sie selbst dem Feld einer Lichtwelle folgen kann. Daher wird die Brechzahl n nach der maxwellschen Relation $n = \sqrt{\varepsilon_V}$ i. Allg. nur durch den Verschiebungsanteil ε_V der DK bestimmt (vgl. Abschn. 7.4.3). Die Brechzahl liefert also nach *Clausius-Mosotti* (6.52) den Verschiebungsanteil α der effektiven Polarisierbarkeit. Was nach Abzug dieses Anteils von der Gleichspannungs-Suszeptibilität übrigbleibt, hängt wie T^{-1} von der Temperatur ab. Die Theorie liefert

$$\chi = \varepsilon_0(\varepsilon - 1) = n \left(\alpha + \frac{p_p^2}{3kT} \right), \quad (6.53)$$

wo p_p das permanente Dipolmoment des Einzelmoleküls, n die Anzahldichte dieser Moleküle und k die Boltzmann-Konstante ist. Aus der Temperaturabhängigkeit der DK lässt sich so das molekulare Dipolmoment bestimmen. Für stark polare Moleküle wie H_2O findet man ein Dipolmoment, das ungefähr einer Trennung zweier Elementarladungen durch den Abstand eines Atomdurchmessers (1 \AA) entspricht. Dielektrische Messungen können so dem Chemiker wichtige Beiträge zur Aufklärung der Molekülkonstitution liefern.

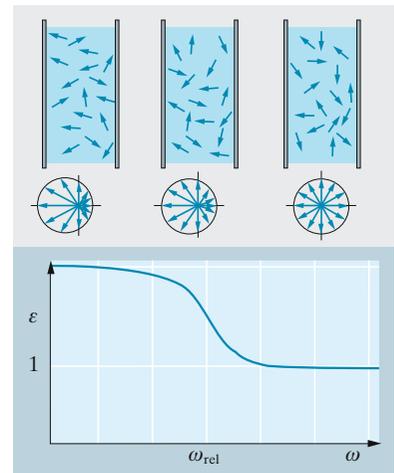


Abb. 6.46. Dielektrische Orientierungspolarisation: (Zur Verdeutlichung wurde der Ausrichtungseffekt um den Faktor 1000 oder mehr übertrieben.) *Oben:* Einstellung der molekularen Dipole bei drei verschiedenen Feldfrequenzen. *Mitte:* Richtungsverteilung der Dipole (die Pfeillänge entspricht der Einstellwahrscheinlichkeit in dieser Richtung). *Unten:* Resultierende Relaxationskurve der DK

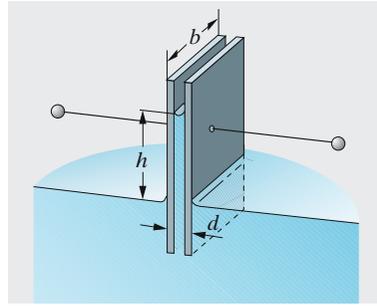


Abb. 6.47. Eine dielektrische Flüssigkeit wird in das Feld eines Plattenkondensators gehoben

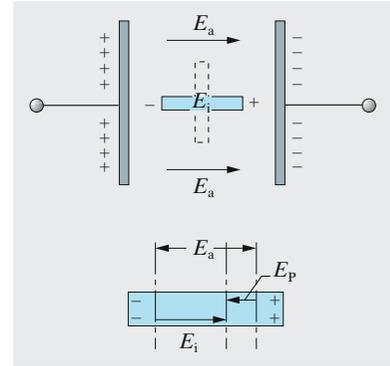


Abb. 6.48. Ein dielektrischer Stab dreht sich in die Richtung der Feldlinien, weil die Feldenergie in dieser Stellung minimal ist (man beachte den „Entelektrisierungsfaktor“, Abschn. 7.2.1)

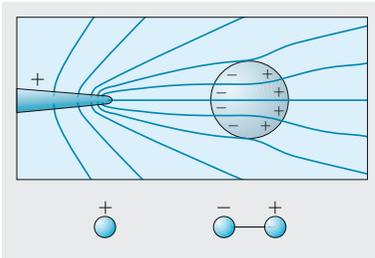


Abb. 6.49. Eine dielektrische Kugel wird im inhomogenen elektrischen Feld dorthin getrieben, wo dieses stärker ist, ähnlich wie der Dipol

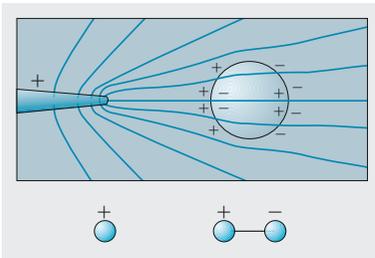


Abb. 6.50. Eine Gasblase in einer dielektrischen Flüssigkeit wird vom inhomogenen Feld dorthin geschoben, wo dieses kleiner ist, ähnlich wie der Dipol

6.2.4 Energiedichte des elektrischen Feldes im Dielektrikum

Die Energie $E_{el} = \frac{1}{2}CU^2$ eines mit einem Dielektrikum gefüllten Kondensators ist um den Faktor ε größer als die des leeren Kondensators, denn seine Kapazität ist umso viel größer. Entsprechend ist auch die **Energiedichte** gegenüber (6.36) gewachsen:

$$e_{el} = \varepsilon \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 = \frac{1}{2} ED \quad (6.54)$$

E und D sind Feldstärke und Verschiebungsdichte im Dielektrikum. In dieser Form gilt der Ausdruck für die elektrostatische Energiedichte ganz allgemein.

Modellmäßig versteht man (6.54) so: Zur üblichen Feldenergiedichte $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ tritt im Dielektrikum noch die Gesamtenergie aller Dipole hinzu, die die Polarisation $P = np$ ausmachen. Nach (6.50) hat ein Dipol die Energie $\frac{1}{2}pE$, die n Dipole der Volumeneinheit haben die Energie $\frac{1}{2}npE = \frac{1}{2}PE = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E^2$ (vgl. (6.51)). Beide Energiedichteanteile zusammen ergeben genau (6.54).

Ein ungeladenes Hartgummikügelchen wird von einer geladenen Metallspitze angezogen (Abb. 6.49). Im elektrischen Feld wird das Kügelchen zum Dipol, und dieser sucht nach Abschn. 6.1.6 im inhomogenen Feld der Spitze dorthin zu wandern, wo das Feld möglichst groß ist. Umgekehrt werden Gasblasen, die in einer dielektrischen Flüssigkeit aufsteigen, von der geladenen Spitze abgestoßen (Abb. 6.50). Die DK des Gases ist kleiner als die der umgebenden Flüssigkeit; daher hat die Ladungsverteilung beiderseits der Blasenoberfläche die umgekehrte Polung wie der Dipol in Abb. 6.49. Man kann auch sagen: Das fehlende dielektrische Material wirkt wie ein „Antidipol“.

6.2.5 Elektrostriktion; Piezo- und Pyroelektrizität

Bringt man einen Isolator in ein elektrisches Feld E , dann verschieben sich die Ladungen darin, und die Folge ist eine mechanische Deformation bzw. eine me-

chanische Spannung. Beides nennt man **Elektrostriktion**. Umgekehrt kann eine mechanische Deformation die Ladungen so verschieben, dass eine elektrische Polarisation, also ein elektrisches Feld entsteht. Ob ein solcher **Piezoeffekt** auftritt, hängt davon ab, ob der Isolator eine polare Achse hat oder nicht. Um eine polare Achse herrscht zwar Rotationssymmetrie, aber die beiden Richtungen der Achse sind nicht gleichwertig. Die Achse einer Flasche in einem großen Stapel von Bierkästen ist eine vierzählige Symmetrieachse (wenn man von den Kastenwänden absieht): Jede Flasche hat vier nächste Nachbarn in 90° Winkelabstand voneinander, aber Flaschen sind oben und unten verschieden. Gase und Flüssigkeiten haben überhaupt keine Symmetrieachse, aber auch die Symmetrieachsen vieler Kristalle, z. B. NaCl, sind nicht polar. Solche Stoffe können nicht piezoelektrisch sein, denn wer sollte entscheiden, in welche Richtung das elektrische Feld zeigen soll? Aus dem gleichen Grund kann in solchen Stoffen die elektrostriktive Deformation nur proportional zu E^2 sein. Wäre sie proportional zu E , dann müsste bei einer Vorzeichenumkehr von E auch die Deformation von einer Stauchung in eine Dehnung übergehen oder umgekehrt. Ohne polare Achse kann es aber wieder keinen Unterschied zwischen den beiden Feldrichtungen geben.

In Stoffen mit polarer Achse ist das anders: Eine relative Deformation um $\varepsilon = \Delta x/x$ erzeugt ein elektrisches Piezofeld E , das proportional zu dieser Deformation ist, d. h. eine Spannung $U = Ex$ zwischen den Stirnflächen, die proportional zu Δx ist:

$$E = \delta \frac{\Delta x}{x} \quad \text{oder} \quad U = \delta \Delta x. \quad (6.55)$$

δ heißt piezoelektrischer Koeffizient und ist für die verschiedenen Kristallrichtungen oft sehr verschieden. Die Deformation beruht darauf, dass die in der Feldrichtung hintereinander liegenden Dipole einander anziehen. Benachbarte Schichten werden durch diese Kräfte so lange einander genähert, bis elastische Gegenkräfte die elektrischen kompensieren. Die Deformation erfolgt gegen die Coulomb-Felder zwischen Elementarladungen; diese Felder haben die Größenordnung $e/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, wo $r \approx 10^{-10} - 10^{-9}$ m ein typischer Teilchenabstand ist. Dieselbe Größenordnung des Feldes von $10^9 - 10^{11}$ V m $^{-1}$ hat auch δ .

Die gebräuchlichsten Piezomaterialien sind **Quarz**, **Turmalin**, **Bariumtitanat** (BaTiO_3) in seiner tetragonalen Kristallform, Piezokeramiken meist aus Ba- und Ti-Salzen mit isotropem Piezoeffekt. Wichtig sind auch organische Salze wie NaK-Tartrat (**Seignette-Salz** und **Rochelle-Salz**), in denen die Polarisation nicht auf einer Verschiebung von Elektronen beruht, sondern von Protonen in Wasserstoffbrücken; gleichzeitig haben diese Salze eine sehr hohe DK und verhalten sich ferroelektrisch (Abschn. 7.2.8). Abbildung 6.54 zeigt den transversalen Piezoeffekt am Quarz (Feldrichtung senkrecht zur Deformationsrichtung; daneben gibt es auch einen longitudinalen Effekt).

Die Umkehr des Piezoeffekts besteht in einer Verlängerung oder Verkürzung der Quarzplatte, je nach der Polung der Spannung, die man an die Belegungen legt. Eine Wechsellspannung, die in der Frequenz mit einer mechanischen Eigenschwingung der Quarzplatte übereinstimmt, regt diese zu Resonanzschwingungen an. Der Schwingquarz ist als Ultraschallsender und zur Stabilisierung der Frequenz von Schwingkreisen in Quarzuhren und Sendern sehr wichtig.

Ein Stoff ohne polare Achse kann keine zum äußeren Feld E proportionale Deformation zeigen, denn sonst müsste er in Umkehrung dieses Effekts auch piezoelektrisch sein. Die Deformation kann höchstens proportional zu E^2 sein. Eine solche quadratische Elektrostriktion ist viel kleiner als die lineare bei polaren Stoffen, denn die Felder E sind immer ins Verhältnis zu den mindestens 10^5 mal größeren Coulomb-Feldern zwischen den Kristallbausteinen zu setzen.

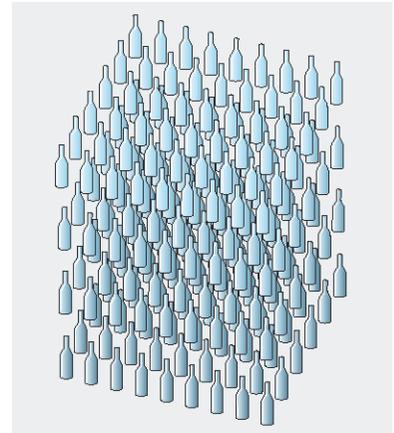


Abb. 6.51. Ein System mit polarer vierzähliger Achse

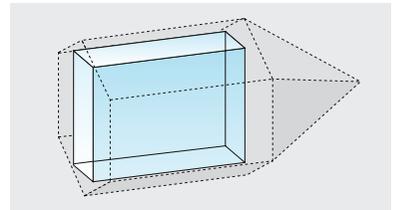


Abb. 6.52. Orientierung einer piezoelektrischen Quarzplatte zum Kristall, aus dem sie herausgeschnitten ist

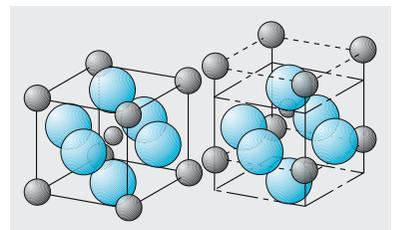


Abb. 6.53. Bariumtitanat, eines der wichtigsten Ferroelektrika und Piezoelektrika. Die kubische Perowskit-Struktur ohne polare Achse deformiert sich unterhalb des ferroelektrischen Curie-Punktes spontan in die tetragonale Struktur (*rechts*), in der Anionen und Kationen in einer der sechs möglichen Richtungen verschoben sind und eine spontane elektrische Polarisation erzeugen. Einen anderen Mechanismus der Ferroelektrizität zeigt Abb. 7.35

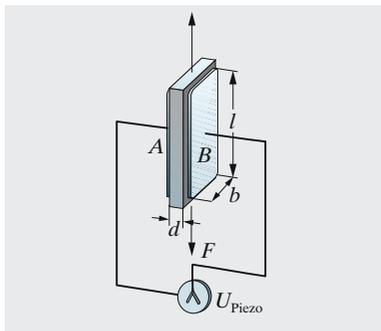


Abb. 6.54. Transversaler Piezoeffekt

Die beiden Richtungen einer polaren Achse unterscheiden sich meist in der Anordnung der positiven und negativen Ionen im Kristall. Solche Stoffe wie Quarz und Turmalin haben daher eine spontane elektrische Polarisation. Die Aufladung der Oberflächen ist allerdings normalerweise durch freie Ladungen aus der Umgebung kompensiert. Bei plötzlicher Temperaturänderung tritt die Aufladung in Erscheinung (**Pyroelektrizität**), erstens weil sich die innere Polarisation geändert hat und nicht sogleich durch fremde Ladungen ausgeglichen wird, zweitens wegen des Piezoeffekts infolge der thermischen Längenänderung.

6.3 Gleichströme

Selbst der schwächste Gleichstrom, wie ihn die elektrochemischen Elemente von *Luigi Galvani* und *Alessandro Volta* lieferten (1794), transportiert in ganz kurzer Zeit viel mehr Ladung, als man in den größten Elektrysiermaschinen durch Reibung erzeugen konnte.

6.3.1 Stromstärke

In der **Elektrostatik**, wo Ladungen als ruhend, also im Gleichgewicht angenommen werden, ist es richtig, dass längs eines Leiters keine Potentialdifferenz bestehen kann. Im täglichen Leben legt man dagegen ständig Spannung an Leiter mit der Folge, dass sich die Ladungen bewegen, also Ströme fließen. Freilich können diese Ströme nur auf Kosten äußerer Energiequellen aufrechterhalten werden; sich selbst überlassen, würde der Leiter sehr schnell den von der Elektrostatik geforderten Zustand konstanten Potentials annehmen.

Wenn während der Zeit dt durch den Querschnitt eines Leiters, z. B. einen Draht, die Ladungsmenge dQ fließt, so sagt man, es fließe ein Strom mit der **Stromstärke**

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (6.56)$$

Im internationalen System ist die Einheit der Stromstärke dementsprechend $1 \text{ C s}^{-1} = 1 \text{ A}$ (Ampere).

Der Strom durch einen Leiter kann nur dann zeitlich konstant, also ein **Gleichstrom** sein, wenn die Spannung zwischen den Leiterenden und überhaupt zwischen je zwei Leiterpunkten konstant ist. Umgekehrt: In einem geschlossenen Stromkreis, in dem ein Gleichstrom fließt, ist die Stromstärke für jeden Querschnitt dieselbe, denn sonst gäbe es Teile des Leiters, wo ständig Ladung abgezogen wird oder sich anhäuft. Das wäre höchstens der Fall, wenn der betrachtete Querschnitt zwischen den Platten eines Kondensators durchläufe. Sieht man den Kondensator als ein Ganzes an, dann fließt auch durch ihn der gleiche Strom wie überall sonst im Stromkreis.

Bedenkt man, dass die Ladung einem Erhaltungssatz gehorcht und dass das elektrostatische Feld ein Potential besitzt, dann ergeben sich sofort die Grundregeln zur Analyse beliebiger Schaltungen:

Kirchhoffs Knotenregel

An jedem Verzweigungspunkt (Knoten) in einer Schaltung muss ebenso viel Ladung zu- wie abfließen. Die Summe aller Ströme in den einzelnen Zweigen, die in den Knoten münden, ist Null:

$$\sum I_i = 0. \quad (6.57)$$

Man kann die Stromrichtungen auch beliebig festlegen, muss dann aber natürlich die Ströme, die dem Knoten zufließen, positiv zählen, die abfließenden negativ, oder umgekehrt.

Überall in einer Schaltung gilt der Satz von der Wegunabhängigkeit der Potentialdifferenz. Die Spannungen längs zweier verschiedener Zweige der Schaltung, die zwei Punkte A und B verbinden, müssen also gleich sein. Dies gilt auch, wenn Spannungsquellen dazwischenliegen.

Kirchhoffs Maschenregel

Die Gesamtspannung längs einer geschlossenen *Masche* einer Schaltung, d. h. die Summe aller Spannungsabfälle an den einzelnen Elementen, aus denen die Masche besteht, ist Null:

$$\sum U_i = 0, \quad (6.58)$$

sofern man in einem beliebigen, aber konstanten Sinn umläuft. Spannungsquellen, die in der Masche liegen, kann man auch ausschließen und erhält dann für den Rest der Elemente in der Masche eine Summe der Spannungsabfälle, die gleich der negativen Summe der Spannungen ist, die die Spannungsquellen liefern.

Spannungsquellen arbeiten entweder magnetisch und erzeugen elektrische Felder durch **Induktion**, also durch Änderung eines Magnetfeldes, oder sie arbeiten elektrochemisch, stellen also eine Art Kondensator mit ständiger chemischer Nachlieferung von Ladung dar.

Mit den beiden Kirchhoff-Regeln kann man jede beliebige Schaltung analysieren, wenn noch die **Strom-Spannungs-Kennlinien** $I(U)$ der einzelnen Elemente bekannt sind. Sie folgen häufig, aber durchaus nicht immer dem ohmschen Gesetz. Die Kirchhoff-Regeln gelten für die Momentanwerte von Strömen und Spannungen, sinngemäß also auch für Wechselströme.

6.3.2 Das ohmsche Gesetz

Bei vielen wichtigen Leitern, z. B. Metalldrähten oder auch Elektrolytlösungen, beobachtet man eine Proportionalität zwischen dem Strom I , der durch den Leiter fließt, und der angelegten Spannung U . Der Proportionalitätsfaktor heißt Leitwert des Leiters, sein Kehrwert heißt sein Widerstand R :

$$I = \frac{U}{R} \quad R = \frac{U}{I} \quad U = RI. \quad (6.59)$$

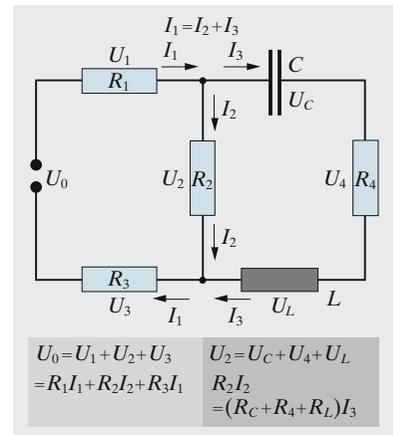


Abb. 6.55. Die Kirchhoff-Regeln verknüpfen die Einzelspannungen und Einzelströme miteinander. Kennt man noch die Strom-Spannungs-Kennlinien der einzelnen Elemente, kann man alle Spannungen und Ströme durch U_0 ausdrücken. Allerdings sind U , I und R für C und L als komplexe Werte aufzufassen

Tabelle 6.2. Spezifische Widerstände einiger Metalle und Isolatoren bei 18 °C

Stoff	$\rho/\Omega \text{ m}$
Silber	$0,016 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$0,017 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$0,028 \cdot 10^{-6}$
Eisen	$0,098 \cdot 10^{-6}$
Quecksilber	$0,958 \cdot 10^{-6}$
Konstantan	$0,50 \cdot 10^{-6}$
Manganin	$0,43 \cdot 10^{-6}$
Quarzglas	$5 \cdot 10^{16}$
Schwefel	$2 \cdot 10^{15}$
Hartgummi	$2 \cdot 10^{13}$
Porzellan	$\approx 10^{12}$
Bernstein	$> 10^{16}$

Durchaus nicht alle Leiter folgen dem **ohmschen Gesetz** (6.59). Wichtige Ausnahmen sind Gasentladungsstrecken (Bogenlampe, Leuchtstoffröhren, Vakuumröhren) und viele Halbleiterelemente.

Bei einem homogenen ohmschen Material ist der **Widerstand** R proportional zur Länge l und umgekehrt proportional zum Querschnitt A des Leiters:

$$R = \frac{\rho l}{A} . \quad (6.60)$$

ρ heißt **spezifischer Widerstand** des Materials (Tabelle 6.2), sein Kehrwert $\sigma = 1/\rho$ heißt elektrische Leitfähigkeit (Einheiten $\Omega \text{ m}$ bzw. $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$).

Liegt an einem Draht der Länge l die Spannung U , dann misst man an einem Teilstück der Länge l' die kleinere Spannung $U' = U l'/l$. Das ist die Grundlage der **Kompensationsmethode** und des **Potentiometers** (Abschn. 6.3.4e). Mit dem Begriff der Feldstärke ist dieser Zusammenhang sofort klar: Im homogenen Draht ist die Feldstärke $E = U/l = U'/l'$ überall gleich.

Die Feldstärke erleichtert auch die Behandlung von Strömen in Leitern komplizierter Gestalt oder Flüssigkeiten, ebenso in Fällen, wo die elektrischen Eigenschaften von Ort zu Ort verschieden sind. Hier muss man eine ebenfalls von Ort zu Ort wechselnde **Stromdichte** j definieren.

j ist ein Vektor, der die Richtung des Ladungstransports angibt, und verhält sich zum Strom I wie die Strömungsgeschwindigkeit v zum Volumenstrom \dot{V} oder wie die Feldstärke E zum elektrischen Fluss ϕ :

$$dI = j \cdot dA \quad \text{bzw.} \quad I = \iint j \cdot dA . \quad (6.61)$$

Erstreckt man das Integral über den ganzen Leiterquerschnitt, kommt der ganze Strom durch den Leiter heraus. Man kann dann das ohmsche Gesetz, falls es überhaupt gilt, nur noch für sehr kleine Bereiche formulieren, z. B. für einen kleinen Würfel, dessen Kanten der Länge a parallel bzw. senkrecht zur Feldrichtung an dieser Stelle liegen. Wenn die Feldstärke E ist, liegt zwischen den Stirnflächen des Würfels die Spannung $U = aE$. Der Strom durch den Würfel ist dann $I = \sigma a^2 U/a = \sigma a^2 E$, die Stromdichte ist $j = I/a^2 = \sigma E$. Dies gilt ganz allgemein:

$$j = \sigma E . \quad (6.62)$$

Eigentlich muss dies vektoriell geschrieben werden, denn das Feld könnte schief zum Würfel stehen. Jedenfalls folgt die Stromrichtung in einem homogenen isotropen Medium der Feldrichtung, also

$$\boxed{j = \sigma E} . \quad (6.63)$$

Vielfach ist die gesamte Ladungsdichte ρ (nicht zu verwechseln mit dem spezifischen Widerstand), die sich an einer Stelle befindet, in Bewegung. Strömt sie mit der Geschwindigkeit v , dann ergibt sich die Stromdichte

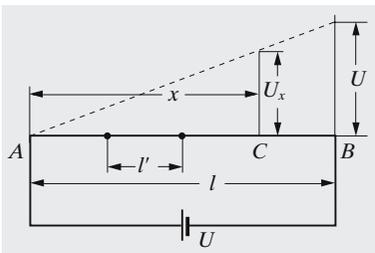


Abb. 6.56. In einem homogenen Draht herrscht konstante Feldstärke, also lineare Spannungsverteilung

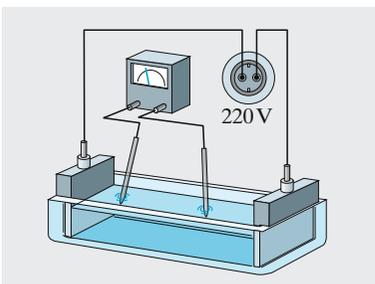


Abb. 6.57. Auch in einer rechteckigen Elektrolytlösung ist das Feld konstant und die Spannungsverteilung linear

$$\boxed{j = \rho v} . \quad (6.64)$$

Kommt aus einem Volumen mehr Strom heraus als hineinfließt, dann nimmt die eingeschlossene Ladung ab. An jeder Stelle gilt daher die **Kontinuitätsgleichung**

$$\boxed{\operatorname{div} j = -\dot{\rho}} \quad (6.65)$$

(vgl. Abschn. 3.3). Wenn die Ladungsverteilung zeitlich konstant bleibt, muss das j -Feld divergenzfrei sein. Die kirchhoffsche Knotenregel ist ein Spezialfall hiervon.

Kombination von Widerständen. Wir betrachten jetzt wieder Schaltungen der klassischen Form, wo einzelne Elemente (hier Widerstände) durch Drähte verbunden sind, deren Widerstand vernachlässigbar ist. Solche Widerstände können hintereinander (in Reihe oder in Serie) liegen oder parallel zueinander. Zur Behandlung genügen die Kirchhoff-Regeln.

Durch reihengeschaltete Widerstände fließt der gleiche Strom I . Die Spannungen U_i an den Einzelwiderständen ergeben sich als Spannungsabfälle $U_i = IR_i$ und addieren sich zur Gesamtspannung

$$U = \sum U_i = \sum IR_i . \quad (6.66)$$

Damit folgt als Gesamtwiderstand der Schaltung

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = \sum R_i} . \quad (6.67)$$

In der **Reihenschaltung** addieren sich die Widerstände.

An parallel geschalteten Widerständen liegt die gleiche Spannung U . Der Strom durch den i -ten Widerstand ist $I_i = U/R_i$. Im Ganzen fließt der Strom

$$I = \sum I_i = \sum \frac{U}{R_i} . \quad (6.68)$$

Damit folgt der Gesamtwiderstand der Schaltung

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sum R_i^{-1}}} . \quad (6.69)$$

In der **Parallelschaltung** addieren sich die Leitwerte R_i^{-1}

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i} . \quad (6.69')$$

6.3.3 Energie und Leistung elektrischer Ströme

Wenn eine Ladung Q sich zwischen zwei Orten verschiebt, zwischen denen die Spannung U herrscht, wenn sie also im Potential um U absinkt, wird eine Energie

$$\boxed{E = QU} \quad (6.70)$$

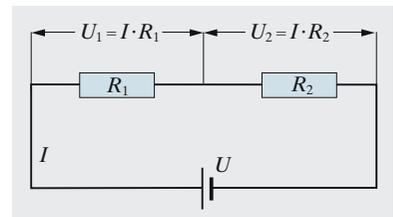


Abb. 6.58. Hintereinander geschaltete Widerstände addieren sich, weil die Spannungsabfälle sich addieren

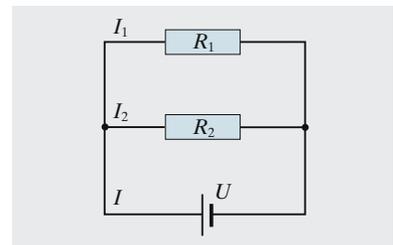


Abb. 6.59. Bei Parallelwiderständen addieren sich die Ströme, also die Leitwerte

frei. Diese Energie kann der Ladung selbst zugutekommen und ihre kinetische Energie erhöhen. Das ist allerdings nur bei ganz ungehinderter Bewegung der Fall, d. h. vor allem im Vakuum. Dort lässt sich die Energie eines geladenen Teilchens, z. B. eines Elektrons oder Protons ($Q = e$ Elementarladung) sehr einfach durch die vom Ruhezustand aus durchlaufene Spannung in Volt ausdrücken, d. h. in der Einheit eV (Elektronvolt). Da $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, ergibt sich

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} . \quad (6.71)$$

In einem üblichen Leiter dient die Energie W nicht oder so gut wie nicht zur Beschleunigung der Ladungsträger. Deren Geschwindigkeit ist fast immer sehr klein gegen die thermische, und die thermische Energie ist ihrerseits nur ein kleiner Bruchteil eines eV. Vielmehr geht die Energie $E = QU$, falls keine mechanische oder chemische Arbeit verrichtet wird, ganz in Wärmeenergie des Leiters oder seiner Umgebung über. Die entsprechende Heizleistung ergibt sich aus der Definition des Stromes:

$$\text{Gesetz von Joule} \\ P = \dot{E} = U \dot{Q} = UI . \quad (6.72)$$

Dieses Gesetz gilt auch für Wechselströme, nur muss man es dort durch die Momentanwerte der ständig wechselnden Größen Strom und Spannung ausdrücken (Abschn. 7.3.3). Für einen ohmschen Leiter kann man auch schreiben

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} . \quad (6.73)$$

Bei ortsabhängiger Leitfähigkeit muss man das Joule-Gesetz differentiell formulieren. Die Leistungsdichte (Leistung/Volumen) ist dann

$$p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} , \quad (6.74)$$

für ohmsche Leiter

$$p = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma} .$$

6.3.4 Gleichstromtechnik

a) Messgeräte; Messbereichsumschaltung. Da die wichtigsten Amperemeter und Voltmeter auf magnetischen Kräften beruhen, besprechen wir ihre Wirkungsweise erst in Abschn. 7.3.5. Hier behandeln wir einige Prinzipien, die für alle Typen und ebenso für **Gleich-** wie für **Wechselstrom** gelten. Der Zeigerausschlag der meisten Messgeräte (Drehspul- und Weicheiseninstrument) hängt nur von dem Strom ab, der durch die Messspule fließt. Eine Spannung muss erst in einen entsprechenden Strom übersetzt werden. Das geschieht mittels des Innenwiderstandes R_i . Wenn die Spannung U an den Klemmen des **Voltmeters** liegt, fließt

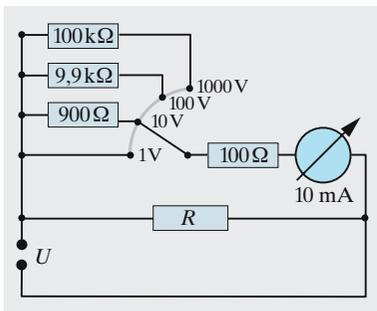


Abb. 6.60. Ein umschaltbares Voltmeter (verschiedene Vorwiderstände) misst die Spannung am Verbraucher R

der Strom $I = U/R_i$ durch die Messspule. Übergang zu einem höheren Spannungsmessbereich erfolgt also einfach durch Vergrößerung von R_i (Verzehnfachung von U durch Vorschalten des neunfachen Vorwiderstandes). Will man mit einem **Amperemeter** größere Ströme messen, als die Messspule verträgt, muss man einen Teil des Stroms durch einen Parallelwiderstand (Shunt) vorbeileiten. Verzehnfachung des I -Messbereichs heißt Parallelschalten eines neunmal kleineren Widerstandes.

x Beispiel ...

Ein Vertreter bietet Ihnen einen elektrischen Durchlauferhitzer an, der 8 l heißes Wasser pro Minute liefern soll. Der Hauptvorteil sei, dass Sie nicht einmal Ihre 10 A-Sicherung auszuwechseln brauchen. Kaufen Sie das Gerät oder werfen Sie den Kerl hinaus (beides mit technischer Begründung)?

Wenn die 10 A-Sicherung nicht durchbrennen soll, kann man höchstens 2,2 kW entnehmen. Das entspricht $2,2 \text{ kJ/s} \approx 130 \text{ kJ/min}$. Die 8 l/min würden also bei Verlustfreiheit höchstens um $3,5^\circ\text{C}$ „aufgeheizt“ werden. Elektrische Durchlauferhitzer sind im normalen Haushalt kaum realisierbar.

Der Einbau des Messgeräts in die auszumessende Schaltung soll die Größen, die man bestimmen will, möglichst wenig beeinflussen. Für ein Amperemeter trifft das zu, wenn sein Gesamtwiderstand R_i (einschließlich eventueller Shunts) sehr klein gegen den Gesamtwiderstand R der zu messenden Schaltung ist. Der Strom wird durch Einbau des Amperemeters um den Faktor $R/(R + R_i)$ verringert.

Amperemeter müssen niederohmig sein.

Umgekehrt darf ein Voltmeter den Gesamtstrom aus der Spannungsquelle möglichst wenig beeinflussen, denn sonst würde sich wegen des Innenwiderstandes der Spannungsquelle auch deren Klemmenspannung ändern (Abschn. 6.3.4d). Der Innenwiderstand R_i des Voltmeters muss also groß gegen den Widerstand R des Verbrauchers sein, längs dessen die Spannung gemessen wird.

Voltmeter müssen hochohmig sein.

b) Brückenschaltungen. Im Prinzip kann man einen Widerstand messen, indem man die Spannung U an ihm und den Strom I durch ihn bestimmt und beide durcheinander teilt. Die endlichen Innenwiderstände der Messgeräte würden ein solches Verfahren aber sehr ungenau machen. Man vermeidet diesen Einfluss, wenn man *stromlos* misst. In einer **Wheatstone-Brücke** schaltet man den zu bestimmenden Widerstand R_x mit drei anderen bekannten Widerständen zusammen (Abb. 6.63), von denen mindestens einer verstellbar ist. Man stellt R_3 so ein, dass durch das Instrument G kein Strom fließt (**Abgleich der Brücke**). Das ist der Fall, wenn die Spannung zwischen C und D verschwindet, d. h. die Spannungsabfälle an R_x und R_3

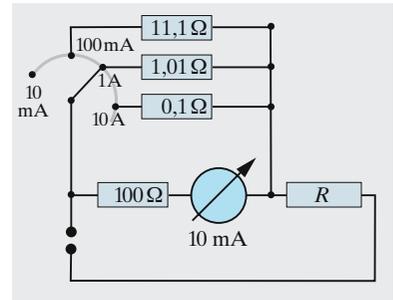


Abb. 6.61. Ein umschaltbares Amperemeter (verschiedene Parallelwiderstände oder Shunts) misst den Strom durch den Verbraucher R

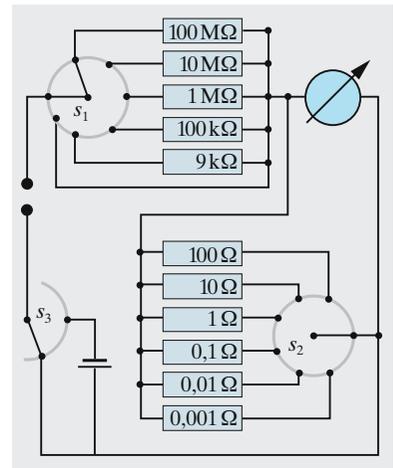


Abb. 6.62. Vielfachmesser für Strom, Spannung, Widerstand (schematisch)

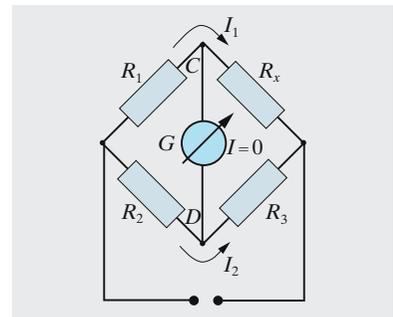


Abb. 6.63. Wheatstone-Brücke zur Messung des unbekanntes Widerstandes R_x

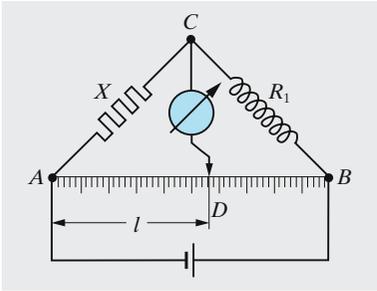


Abb. 6.64. Wheatstone-Brücke mit Schleifdraht. Die beiden Abschnitte des Schleifdrahts ersetzen die Widerstände R_2 und R_3

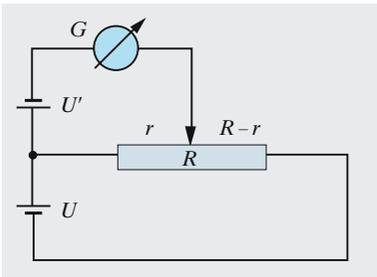


Abb. 6.65. Kompensationsschaltung zur Messung der Spannung U'

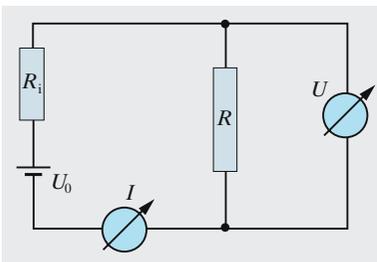


Abb. 6.66. Das Ersatzschaltbild einer Spannungsquelle enthält deren Innenwiderstand R_i

gleich sind (womit natürlich auch die Spannungsabfälle an R_1 und R_2 ihrerseits gleich sein müssen). Eben weil durch G kein Strom fließt, geht der Strom I_1 bei C vollständig weiter durch R_x . Damit ergibt sich

$$I_2 R_3 = I_1 R_x \quad \text{und} \quad I_1 R_1 = I_2 R_2$$

und durch Division dieser beiden Gleichungen

$$R_x = R_3 \frac{R_1}{R_2}.$$

Damit ist R_x auf die bekannten Widerstände zurückgeführt. Die Spannung U der Spannungsquelle ist unwichtig und darf durchaus zeitlich schwanken. Schon daraus ergibt sich, dass die Wheatstone-Brücke ebenso gut für Wechselstrom geeignet ist. Beachtet man auch die Phasenlage der Wechselströme, dann kann man mit ähnlichen Brücken auch Kapazitäten, Induktivitäten und Frequenzen sehr genau messen.

c) Kompensationsmethode. Auch eine unbekannte Spannung U' (in Abb. 6.65 symbolisiert durch eine Spannungsquelle U') lässt sich am genauesten stromlos messen, und zwar durch Vergleich mit einer gegebenen Spannung U , die im Beispiel größer als U' und hier allerdings sehr genau bekannt sein muss. Durch Änderung des Widerstandes R erreicht man Abgleich, d. h. Stromlosigkeit des Instruments G . Dies tritt ein, wenn

$$U' = \frac{r}{R} U$$

(Prinzip des unbelasteten Potentiometers). Die meisten zu messenden Größen in Physik und Technik werden zunächst in Spannungen übersetzt und dann von automatischen Registriergeräten (Messschreibern) als Funktionen der Zeit aufgezeichnet. Solche **Schreiber** arbeiten meist nach dem **Kompensationsprinzip**. Das Instrument G ist durch einen Stellmotor ersetzt, der durch den Strom I angetrieben wird und selbst den Widerstand R verstellt, gekoppelt mit dem Schreibstift. Motor und Stift bleiben erst stehen, wenn Kompensation eintritt, also der Strom sich automatisch zu Null abgeglichen hat.

d) Innenwiderstand einer Spannungsquelle; Leistungsanpassung. Belastet man eine Spannungsquelle, d. h. entnimmt man ihr einen Strom, dann sinkt ihre **Klemmenspannung** U unter den Wert U_0 , die **Leerlaufspannung**, die man an der unbelasteten Spannungsquelle messen würde. Dieses Verhalten lässt sich vielfach hinreichend genau dadurch beschreiben, dass die Spannungsquelle einen **Innenwiderstand** R_i hat. Er ist für eine Steckdose realisiert durch die Widerstände von Zuleitungen und Generatorwicklung, bei einer Batterie durch den Widerstand des Elektrolyten (Aufgabe 6.5.3). Der Widerstand R_i im Ersatzschaltbild (Abb. 6.66) ist natürlich i. Allg. weder direkt zugänglich noch beeinflussbar. Die messbare Klemmenspannung U bleibt gegen die Leerlaufspannung U_0 um den Spannungsabfall IR_i zurück, wenn der Strom I entnommen wird:

$$U = U_0 - IR_i. \quad (6.75)$$

Die Spannungsquelle hat also eine fallende Spannungs-Strom-**Kennlinie** mit der Neigung R_i . Man kann ihr höchstens den Maximalstrom

$$I_m = \frac{U_0}{R_i} \tag{6.76}$$

entnehmen. Durch einen gegebenen Verbraucherwiderstand R fließt der Strom

$$I = \frac{U_0}{R_i + R} \tag{6.77}$$

Im Verbraucher wird die Leistung

$$P = UI = (U_0 - R_i I) \frac{U_0}{R_i + R}$$

verzehrt. Einsetzen von I nach (6.77) ergibt

$$P = \frac{U_0^2 R}{(R_i + R)^2} \tag{6.78}$$

Für $R \ll R_i$ ist die Leistung klein (Klemmenspannung wegen der großen Strombelastung fast ganz zusammengebrochen) und steigt wie R . Bei $R \gg R_i$ ist der Strom so klein, dass die Leistung wie R^{-1} abfällt. Dazwischen hat die Leistung ein Maximum, das sich aus $dP/dR = 0$ ergibt:

Bei $R = R_i$ ist

$$P = P_{\max} = \frac{U_0^2}{4R_i} \tag{6.79}$$

Aus der Spannungsquelle kann man höchstens die Leistung P_{\max} entnehmen. Bestimmung des entsprechenden Verbraucherwiderstandes, der gleich dem Innenwiderstand der Spannungsquelle ist, heißt **Leistungsanpassung**.

e) Vorwiderstand und Potentiometer. Wenn ein Verbraucher geringere Spannung verlangt, als in der Form einer Spannungsquelle zur Verfügung steht, kann man die Spannung auf zwei Arten reduzieren (die Wechselstromtechnik bietet noch zahlreiche andere, energetisch ökonomischere Möglichkeiten):

Man schaltet einen **Vorwiderstand** R' vor den Verbraucher R . Dann teilen sich die Spannungen im Verhältnis R/R' auf beide auf, da ja durch beide der gleiche Strom fließt. Ebenso teilt sich allerdings auch die Gesamtleistung auf: Nur ein Teil wird im Verbraucher genutzt. Leuchtstoffröhren, Bogenlampen und andere Gasentladungen verlangen einen Vorwiderstand oder besser eine „Drosselung“ durch eine Spule, damit ihre Strom-Spannungs-Kennlinie steigend, also stabil wird (Abschn. 8.3.3).

Ein Widerstand mit verschiebbarem Mittelabgriff (Abb. 6.69) eignet sich als **Potentiometer**. Solange man nicht belastet, d. h. solange $R \gg R' - r$ ist, fällt am Teilstück $R' - r$ genau der Bruchteil

$$U' = U \frac{R' - r}{R'} \tag{6.80}$$

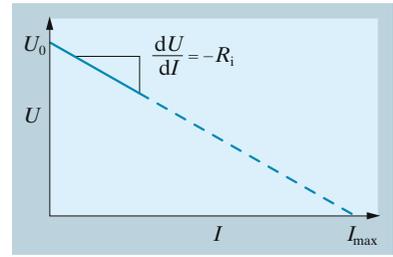


Abb. 6.67. Infolge des Innenwiderstandes R_i sinkt die Klemmenspannung der Spannungsquelle mit dem entnommenen Strom

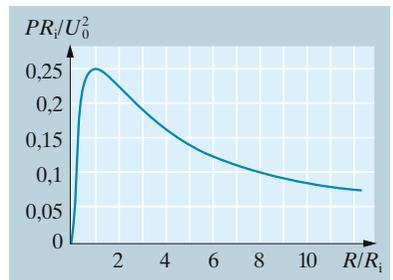


Abb. 6.68. Leistungsanpassung: Aus einer Spannungsquelle kann man maximale Leistung entnehmen, wenn der Widerstand des Verbrauchers gleich dem Innenwiderstand ist

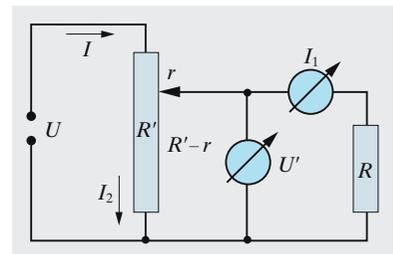


Abb. 6.69. Potentiometer- oder Spannungsteiler-Schaltung

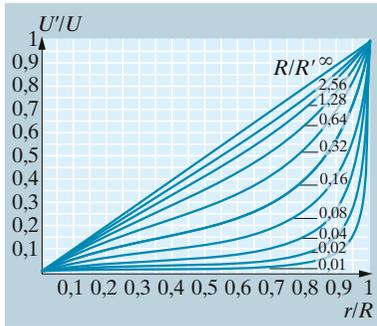


Abb. 6.70. Bei Belastung ändert sich die Spannung des Potentiometers nicht mehr linear mit dem abgegriffenen Teilwiderstand

der Eingangsspannung U ab. Beim belasteten Potentiometer muss man beachten, dass sich der Strom I am Mittelabgriff in I_1 und I_2 aufteilt. Die Knotenregel liefert natürlich

$$I = I_1 + I_2,$$

die Maschenregel für die beiden Maschen der Schaltung

$$U = rI + (R' - r)I_2 \quad U' = RI_1 = (R' - r)I_2.$$

Kombination aller drei Gleichungen ergibt folgenden Zusammenhang zwischen der abgegriffenen Spannung U' und dem Teilstück r :

$$U' = \frac{R(R' - r)}{RR' + r(R' - r)}U. \quad (6.81)$$

Natürlich geht die Kurve $U'(r)$ durch die Punkte $(U, 0)$ und $(0, R')$, ebenso wie ohne Belastung, aber verglichen mit der Geraden (6.80) hängt sie umso weiter durch, je kleiner R/R' ist, je stärker also der Verbraucher das Potentiometer belastet.

Ein Potentiometer verschwendet noch mehr Leistung als ein Vorwiderstand. Bei gegebenen Werten U und U' folgt dies schon daraus, dass $I > I_1$ ist. Diesen Nachteil vermeidet weitgehend eine *Spule* mit Mittelabgriff. Man kann sie als Transformator auffassen, bei dem eine der Wicklungen ganz eingespart ist, und nennt sie daher **Spartransformator**.

6.4 Mechanismen der elektrischen Leitung

Schon als 18jähriger Buchbinderlehrling, bevor ihn *Humphrey Davy* als Assistenten einstellte, entdeckte *Michael Faraday* mit einfachsten Mitteln die wesentlichsten Tatsachen über die Elektrolyse.

6.4.1 Nachweis freier Elektronen in Metallen

Über die Natur der Träger des elektrischen Stroms in Metallen gibt der Versuch von *Tolman* Auskunft, dem folgende Überlegung zugrunde liegt: Wenn der Strom durch frei wandernde Teilchen der Ladung e und der Masse m , also der **spezifischen Ladung** e/m getragen wird, so werden diese bei einer Beschleunigung a des Metallkörpers, d. h. des starren Ionen-gitters, nicht mitbeschleunigt. Wird er z. B. gebremst, so bewegen sich die freien Teilchen auf Grund ihrer Trägheit weiter. Vom Metall aus gesehen werden sie durch „Trägheitskräfte“ in der Richtung beschleunigt, die der Beschleunigung des Metalls entgegengerichtet ist. Das sind die gleichen Kräfte, die an einem Mitfahrer in einem bremsenden Wagen angreifen. Die Elektronen mit ihrer negativen Ladung häufen sich also an der einen, die positiven Restladungen an der anderen Stirnseite des Metallstücks an. Diese Ladungstrennung erzeugt analog zum Fall des Plattenkondensators ein Feld E , das schließlich eine weitere Ladunganhäufung verhindert. Das ist der Fall, d. h. Gleichgewicht tritt ein, wenn die Trägheits- und die elektrostatische Kraft auf den Ladungsträger entgegengesetzt gleich sind: $-eE = ma$. Im Innern des beschleunigten Leiters herrscht also ein Feld

$$\mathbf{E} = -\frac{m}{e} \mathbf{a}. \quad (6.82)$$

Das gilt für lineare wie für Zentrifugalbeschleunigungen: Man kann Elektronen zentrifugieren. *Tolman* konnte die entsprechenden Effekte für schnell rotierende Metallteile messen. Daraus ergibt sich das Feld \mathbf{E} und mittels (6.82) die spezifische Ladung $e/m \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$. Dies ist annähernd der gleiche Wert, den man für freie Elektronen im Vakuum findet (8.16).

× Beispiel ...

Kann man aus dem Ergebnis des **Tolman-Versuchs** Rückschlüsse auf andere Größen als e/m , z. B. auf die Gesamtzahl oder Anzahldichte von freien Elektronen ziehen?

Der Tolman-Versuch misst nur e/m , unabhängig von Konzentration oder Beweglichkeit der Träger. Löcher (Defektelektronen) würden allerdings ein anderes Vorzeichen für die erzeugte Spannung liefern. Meines Wissens ist der Versuch noch nicht mit einem löcherleitenden Halbleitermaterial wiederholt worden, wahrscheinlich wegen der rein mechanisch-geometrischen Schwierigkeiten.

Dieses Experiment beweist, dass Metallatome, die im Gaszustand elektrisch neutral sind, Elektronen abspalten, wenn sie sich zum Festkörper (oder auch zur Metallschmelze) vereinigen. Die abgespaltenen Elektronen gehören dann nicht mehr dem einzelnen Atom, sondern dem ganzen kondensierten System. Sie können dieses System nicht verlassen, weil dazu eine ziemlich hohe Austrittsarbeit erforderlich ist (Abschn. 8.1.1). Im Innern bewegen sie sich nach ähnlichen Gesetzen wie die Atome eines Gases in einem geschlossenen Gefäß (Elektronengas, Abschn. 17.3.1). Allerdings sind für die Elektronen quantenmechanische Gesetze maßgebend. Sie bilden ein Fermi-Gas (Abschn. 17.3.2). Die Teilchenzahldichte n des Elektronengases ist von Metall zu Metall etwas verschieden, hat aber meist die Größenordnung, die einem abgespaltenen Elektron pro Atom entspricht. Da der Atomabstand wenige Å beträgt, ergibt sich $n \approx (\text{einige Å})^{-3} \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$.

6.4.2 Elektronentransport in Metallen

Der Strom in einem Metall kommt so zustande, dass die Elektronen ($q = -e$) sich längs des elektrischen Feldes bewegen (genauer: in Gegenrichtung zu ihm). n Elektronen/ m^3 , die die mittlere Geschwindigkeit v haben, transportieren in der Sekunde durch den Leiterquerschnitt 1 m^2 eine Ladungsmenge $nve \text{ C m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ (Abb. 6.72). Dies ist die gleiche Größe, die wir in Abschn. 6.3.2 als Stromdichte j definiert haben:

$$\boxed{j = nve}. \quad (6.83)$$

Nach dem ohmschen Gesetz ist die Stromdichte proportional zur Feldstärke: $j = \sigma E$. Da n und e konstant sind, folgt daraus $v \sim E$, ausführlich

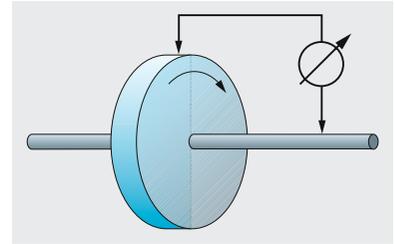


Abb. 6.71. Der Tolman-Versuch lässt sich besser mit einem rotierenden Leiter ausführen (Elektronenzentrifuge)

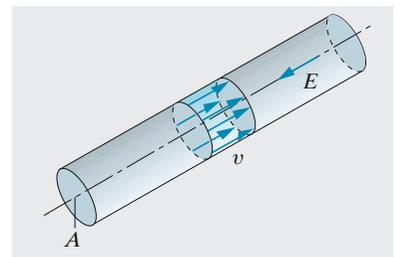


Abb. 6.72. Wenn n Elektronen/ m^3 mit der Geschwindigkeit v im Feld wandern, transportieren sie eine Stromdichte $j = env$

$$v = \mu E . \quad (6.84)$$

μ heißt **Beweglichkeit** der Ladungsträger. Ihre Einheit ist sinngemäß $\text{m}^2/\text{V s}$.

Die Leitfähigkeit σ hängt nach (6.83) mit μ so zusammen:

$$\sigma = en\mu . \quad (6.85)$$

Das ohmsche Gesetz gilt also z. B. im Vakuum bestimmt nicht. Dort werden die Elektronen im Feld frei beschleunigt, und ihre Geschwindigkeit hängt nicht nur vom Feld E ab, sondern auch von der Dauer t seiner Einwirkung: $v = -eEt/m$. Damit die Elektronen im Metall mit zeitunabhängiger Geschwindigkeit $v \sim E$ driften, muss der Feldkraft eE eine Reibungskraft F_R entgegenstehen, die proportional v ist. Auf ein Elektron (Ladung $-e$) wirkt keine Beschleunigung, also keine Gesamtkraft: $-eE + F_R = -eE - kv = 0$, also $v = -eE/k$. Eine solche Proportionalität von F_R und v ergab sich für die Bewegung eines kleinen Körpers in einer zähen Flüssigkeit (Stokes-Gesetz, Abschn. 3.3.3). Wie es für Metallelektronen zu diesem Gesetz kommt, wird in Abschn. 17.3.1 erklärt.

Elektronen laufen auch in gut leitenden Metallen erstaunlich langsam (keineswegs etwa mit c). Meist spaltet jedes Atom ein Leitungselektron ab. Dann ergibt sich z. B. n für Kupfer:

$$n = 8\,900 \text{ kg m}^{-3} / (63,6 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} .$$

Aus dem spezifischen Widerstand $\varrho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ folgt dann eine Beweglichkeit $\mu = 1/(ne\varrho) = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{V s}$. Bei vernünftigen Stromdichten (einige A/mm^2) und den entsprechenden Feldstärken von $E = j/\sigma \approx 10^{-2} \text{ V}/\text{m}$ laufen die Elektronen also nur mit $0,04 \text{ mm}/\text{s}$. Die große Geschwindigkeit der elektrischen Nachrichtenübertragung beruht also nicht auf der Verschiebung der Elektronen im Draht, sondern auf der Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektrischen Feldes im und um den Draht, die gleich der Lichtgeschwindigkeit ist (Abschn. 7.4.3).

6.4.3 Elektrische Leitfähigkeit

Die Leitfähigkeit eines ohmschen Leitermaterials

$$\sigma = en\mu \quad (6.85')$$

hängt von verschiedenen Einflüssen ab, denen das Material ausgesetzt ist, besonders von Temperatur, Lichtintensität, Magnetfeld und Druck.

a) Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit. Metalle leiten umso schlechter, je heißer sie sind, bei Halbleitern ist es umgekehrt. Für kleinere Temperaturbereiche kann man eine lineare Abhängigkeit annehmen:

$$\sigma = \sigma_0(1 - \alpha T) \quad \text{oder} \quad \varrho = \varrho_0(1 + \alpha T) .$$

α heißt Temperaturkoeffizient des Widerstandes. Er ist positiv für Metalle (PTC-Leiter mit „positive temperature coefficient“), negativ für Halbleiter

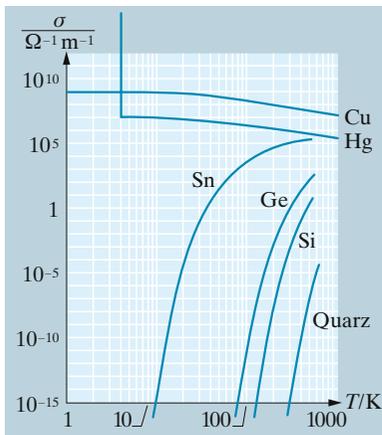


Abb. 6.73. Die Leitfähigkeit σ von Metallen steigt bei Abkühlung bis zu einem Restwiderstand, außer bei Supraleitern, die unterhalb des Sprungpunktes T_c praktisch unendliche Leitfähigkeit haben. Bei anderen Stoffen fällt σ bei Abkühlung nach einem Boltzmann-Gesetz, dessen Steilheit von der Befreiungsenergie der Ladungsträger abhängt

(NTC-Leiter). Die Gründe für dieses Verhalten sind qualitativ aus (6.85') leicht abzulesen: In Metallen ist die Ladungsträgerdichte n fest vorgegeben, denn alle Valenzelektronen der Metallatome sind i. Allg. als „Elektronengas“ durch das Grundgitter der Ionenrümpfe beweglich. Je heißer aber das Metall wird, desto stärker schwingen die Ionenrümpfe, und desto mehr behindern sie die Elektronenbewegung: Die Beweglichkeit nimmt mit steigendem T ab. In Halbleitern ist dies auch der Fall. Eine viel stärkere, steigende T -Abhängigkeit hat aber die Ladungsträgerdichte n , denn die Träger müssen erst mittels thermischer Energie *geschaffen*, d. h. aus ihrem normalerweise gebundenen Zustand in einen beweglichen angehoben werden. Wie in Abschn. 17.3 und 17.4 gezeigt wird, geht dies nach dem **Boltzmann-Arrhenius-Gesetz** $n = n_0 e^{-A/T}$.

Bei manchen Metallen findet man $\alpha \approx 1/273 \text{ K}^{-1}$. Wie bei idealen Gasen der Druck, ist dann $\rho \sim T$. Häufiger sind Abhängigkeiten wie $\rho \sim T^{3/2}$. **Widerstandsthermometer** nutzen solche Abhängigkeiten zur Temperaturmessung aus. Sie haben den Vorzug geringer Wärmekapazität, also geringer Trägheit, und sind auch bei sehr hohen und sehr tiefen Temperaturen brauchbar. Sehr verbreitet sind heute die Widerstandsdrähte Pt 100 und Pt 1 000, das sind Platinspiralen, die bei 0°C den Widerstand 100Ω bzw. $1\,000 \Omega$ haben.

b) Innerer Photoeffekt. Statt durch thermische Energie kann man in Halbleitern bewegliche Ladungsträger auch durch Lichtenergie erzeugen. Solche Stoffe steigern ihre Leitfähigkeit bei Bestrahlung mit Licht geeigneter Frequenzbereiche, es sind **Photoleiter**. Seit langem kennt man die **Selenzelle**: Die metallische Modifikation des Se steigert ihre Leitfähigkeit im Licht um mehrere Größenordnungen. Heute sind CdS-Photoleiter in Belichtungsmessern besonders verbreitet. Von diesem inneren Photoeffekt (Anhebung von Ladungsträgern eines Kristalls in leitende Zustände) ist der **äußere Photoeffekt** zu unterscheiden, wie er in Photozellen ausgenutzt wird. Hier werden Elektronen durch das Licht aus der Oberfläche bestimmter Metalle und Oxide ins Vakuum oder den Gasraum herausgeschlagen. Etwas anders ist auch der Mechanismus der **Photoelemente** oder **Photodioden**, in denen Belichtung keine Leitfähigkeitsänderung, sondern eine Spannung hervorruft. Umgekehrt senden **Leuchtdioden** Licht aus, wenn man Strom durch sie schickt.

Andere Strahlungsarten, besonders Röntgen- und radioaktive Strahlung können ebenfalls Ladungsträger in bewegliche Zustände heben und lassen sich daher über Widerstandsänderungen von **Halbleiterdetektoren** nachweisen.

c) Magnetoresistenz. Bringt man einen Leiter in ein Magnetfeld, dann werden die Ladungsträger in ihrer Bewegung durch die Lorentz-Kraft (Abschn. 6.7.2) abgelenkt. Ihre Bahnen setzen sich nicht mehr aus Geradenstücken, sondern angenähert aus Kreisstücken zusammen. Das führt bei manchen Metallen, besonders beim „Halbmetall“ Wismut, zu einer Abnahme von Beweglichkeit μ und Leitfähigkeit σ . Magnetsonden führen die Magnetfeldmessung auf eine Widerstandsmessung zurück. Wichtig ist auch, dass ein Magnetfeld den Sprungpunkt von **Supraleitern** senkt

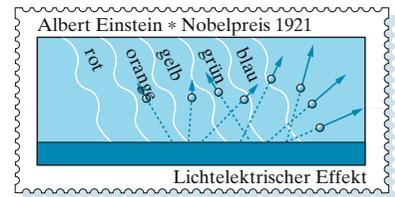


Abb. 6.74. Äußerer Photoeffekt: Die einzelnen Frequenzen (hier alle mit gleicher Wellenlänge gezeichnet) lösen Elektronen verschiedener Energie aus. Unterhalb der Grenzfrequenz gelingt gar keine Auslösung

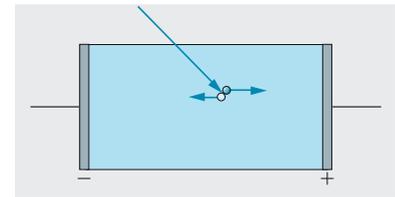


Abb. 6.75. Photoleiter oder Halbleiter-Detektor. Licht oder ionisierende Strahlung erzeugt Ladungsträger im Kristall, meist paarweise (innerer Photoeffekt). Das angelegte Feld trennt die Ladungsträger: Photostrom

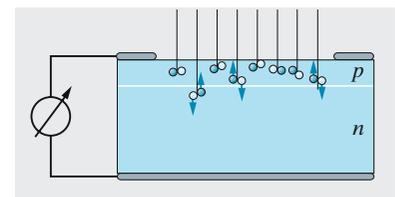


Abb. 6.76. Photodiode. Licht hinreichender Frequenz erzeugt Elektron-Loch-Paare, die i. Allg. bald wieder rekombinieren, außer in der Nähe der p-n-Grenzschicht, deren starkes Feld sie auseinander reißt. Die entstehende Aufladung fließt über den Verbraucher ab, wenn dessen Widerstand kleiner ist als der der Grenzschicht

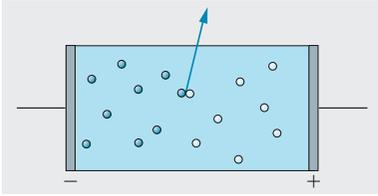


Abb. 6.77. Leuchtdiode (LED = light emitting diode). Von einer Seite werden Elektronen in den Kristall injiziert, von der anderen Defektelektronen oder Löcher. Die Trägersorten vernichten einander paarweise, die Vernichtungsenergie wird als Licht emittiert

(Abschn. 17.7). Das war bis vor kurzem ein entscheidendes Hindernis für den Bau von supraleitenden Magneten und Generatoren, die wegen ihres verschwindenden Widerstandes energetisch äußerst wirtschaftlich sind.

d) Druckabhängigkeit des Widerstandes. Mechanische Spannungen deformieren das Kristallgitter und beeinflussen deshalb die Beweglichkeit von Ladungsträgern. Manche Metall- und Legierungsbleche eignen sich besonders gut als **Dehnungsmessstreifen** zur Messung solcher mechanischen Spannungen:

e) Elektrische und Wärmeleitfähigkeit. Gute elektrische Leitfähigkeit geht oft mit guter **Wärmeleitfähigkeit** parallel. Bei nicht zu tiefen Temperaturen gilt für viele Metalle das *Gesetz von Wiedemann-Franz*:

$$\frac{\text{Wärmeleitfähigkeit}}{\text{elektrische Leitfähigkeit}} = \frac{\lambda}{\sigma} = aT \quad (6.86)$$

Die Konstante a hat dabei für alle Metalle annähernd den gleichen Wert

$$a \approx 3 \frac{k^2}{e^2} \quad (6.86')$$

Dass Metalle Elektrizität und Wärme so gut leiten, beruht also auf dem gleichen Mechanismus, nämlich den freien Leitungselektronen (Abschn. 17.3.4).

f) Supraleitung. Bei manchen Metallen und Legierungen sinkt bei Abkühlung unter etwa 10 K der Widerstand sprunghaft auf unmessbare kleine Werte. Solche Metalle werden bei der Sprungtemperatur *supraleitend* (Genauerer in Abschn. 17.7).

g) Elektrische Relaxation. In einem Medium mit der Leitfähigkeit σ und der DK ε sollen sich irgendwo Ladungen der Dichte ρ angesammelt haben. Infolge ihres eigenen Feldes werden sich diese Ladungen wieder zu zerstreuen suchen, umso schneller, je größer die Leitfähigkeit ist. Um die Zerstreuzzeit zu ermitteln, brauchen wir nur die Grundgleichungen (6.16), (6.64) und (6.67) zu kombinieren:

Fluss aus Volumenelement \sim Ladung darin: $\text{div } \mathbf{E} = \rho / (\varepsilon \varepsilon_0)$. Wenn mehr Strom aus- als eintritt, geht Ladung verloren: $\text{div } \mathbf{j} = -\dot{\rho}$. ohmsches Gesetz: $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Es folgt $\dot{\rho} = -\sigma \rho / (\varepsilon \varepsilon_0)$. Die Ladung baut sich also nach einer e-Funktion ab: $\rho = \rho_0 e^{-t/\tau}$ mit der **Relaxationszeit**

$$\tau = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\sigma} \quad (6.87)$$

Wie erwartet, dauert der Ladungsabbau in Isolatoren sehr lange (in Bernstein einige Stunden), in Metall erfolgt er sehr schnell (10^{-19} s). Diese **elektrische Relaxation** erklärt viele Effekte von der Reibungselektrizität (Abschn. 6.4.6) bis zur Ausbreitung von Radiowellen (Abschn. 7.4.7).

Der Elektroniker kennt diese Relaxationszeit in seinen Schaltungen unter dem Namen *RC*. Ein Kondensator der Kapazität C entlädt sich mit dieser Zeitkonstante über einen Widerstand R . Wenn der Kondensator ($C = \varepsilon \varepsilon_0 A / d$) mit einem Dielektrikum der Leitfähigkeit σ , also dem Widerstand

$R = d/(\sigma A)$ gefüllt ist, entlädt er sich in der Zeit $\tau = RC = \varepsilon\varepsilon_0/\sigma$, auch ohne äußere leitende Verbindung. Ein realer Kondensator ist durch eine Parallelschaltung von C und R darzustellen. Nur bei Frequenzen $\omega \gg 1/(RC)$ spielt der Widerstand keine Rolle.

6.4.4 Elektrolyse

In einen Trog mit destilliertem Wasser tauchen zwei Bleche (Elektroden) aus Platin oder Nickel, die über eine Glühlampe oder ein Amperemeter mit den Klemmen einer Spannungsquelle verbunden sind (Abb. 6.78). Reines Wasser ist ein sehr schlechter Leiter. Sobald aber z. B. ein Tropfen Schwefelsäure zugegeben wird, schlägt das Amperemeter aus bzw. die Glühlampe leuchtet auf. Dass ein Strom durch die Lösung fließt, ließe sich auch durch die Wärmeentwicklung oder magnetisch nachweisen.

Anders als bei der metallischen Leitung ist aber hier der Stromdurchgang mit einer chemischen Zersetzung verbunden. Sowohl zu der Elektrode **A**, der **Anode**, die am positiven Pol der Spannungsquelle hängt, als auch an der **Kathode K** scheiden sich Gase ab, deren Analyse Sauerstoff bzw. Wasserstoff ergibt. Verwendet man eine Lösung von CuSO_4 in Wasser, so scheidet sich an der Kathode metallisches Kupfer ab.

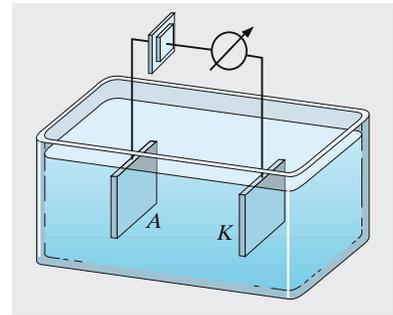


Abb. 6.78. Stromdurchgang durch eine elektrolytische Lösung

× Beispiel ...

Ist die Versuchsbeschreibung vom Anfang von Abschn. 6.4.4 realistisch? Was für eine Spannungsquelle, Glühlampe usw. müsste man verwenden?

Ein Tropfen (etwa maximal $0,05 \text{ cm}^3$) H_2SO_4 bringt die Konzentration in einem 100 cm^3 -Trog auf etwa $0,1 \text{ g/l}$, d. h. $0,01 \text{ mol/l}$. Die Anzahl-dichte der H-Ionen ist dann $n \approx 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Vergleich mit Tabelle 6.5 zeigt, dass dies schon fast als unendliche Verdünnung anzusehen ist. Nach Tabelle 6.4 ergibt sich dann eine hauptsächlich durch H^+ getragene Leitfähigkeit $\sigma = en\mu \approx 0,01 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$. Ein kubischer Trog hat dann etwa 30Ω , d. h. eine 6 V - $0,2 \text{ A}$ -Taschenlampenbirne leuchtet tatsächlich schwach auf.

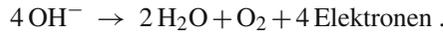
Stoffe, deren Lösungen oder Schmelzen den elektrischen Strom in dieser Weise leiten, heißen **Elektrolyte**; chemisch sind sie Salze, Säuren oder Basen. Die Zersetzungen bzw. Abscheidungen, die der Stromdurchgang besonders an den Elektroden mit sich bringt, nennt man **Elektrolyse** bzw. **galvanische Abscheidung**.

Elektrolyte sind *heteropolare* Verbindungen, aufgebaut aus geladenen Atomen oder Radikalen, genannt **Ionen**. Zum Beispiel besteht CuSO_4 auch im Kristall aus Cu^{++} - und SO_4^{--} -Ionen. Beim Auflösen des Kristalls werden diese Ionen durch Zwischenschieben von Wassermolekülen getrennt. Die Ionen umgeben sich mit einer Hülle von Wasser-Dipolmolekülen, sie werden **hydratisiert**. Die bei der Anlagerung der Wasserdipole freiwerdende Energie reicht zur Abtrennung der Ionen aus dem Kristallgitter aus. Beide Ionen sind in der Lösung bis auf einen Reibungswiderstand frei beweglich. Das elektrische Feld treibt die positiven Ionen, die **Kationen** zur

Kathode, die negativen **Anionen** zur Anode. Kationen sind die Metallionen einschließlich NH_4^+ und H^+ , Anionen die Säurerest- und OH^- -Ionen (eigentlich sind viele dieser Ionen als größere Komplexe aufzufassen, z. B. H_3O^+ statt H^+ usw.). An den Elektroden neutralisieren sich die Ionen: Kationen nehmen Elektronen auf, Anionen geben welche ab. Damit ändern sie völlig ihren chemischen Charakter. H^+ -Ionen werden zu H-Atomen und diese zu H_2 -Molekülen, die als Gas entweichen. Metalle, deren Ionen weniger leicht in Lösung bleiben als H^+ -Ionen, scheiden sich als Niederschlag auf den Elektroden ab. Metallionen, die sich kräftig hydratisieren, besonders Alkali-Ionen, haben aber eine stärkere Lösungstendenz als H^+ -Ionen. An ihrer Stelle scheiden sich daher an der Kathode H^+ -Ionen ab, wie sie im Wasser infolge Dissoziation von H_2O immer vorhanden sind. Die Elektrolyse einer KOH-Lösung z. B. führt an der Kathode zu:



An der Anode scheidet sich Sauerstoff ab:



Die Konzentration der Kalilauge ändert sich nicht, es zersetzt sich nur das Wasser.

Das chemische Ergebnis der Elektrolyse hängt auch vom Elektrodenmaterial ab. Elektrolysiert man CuSO_4 mit Kupferelektroden, so wird die Kathode ebenso wie eine Platinkathode durch Kupferniederschlag schwerer. Die SO_4 -Ionen ziehen aber, anders als beim Platin, Kupfer aus der Anode. CuSO_4 geht wieder in Lösung, seine Konzentration ändert sich nicht; effektiv wandert nur Kupfer von der Anode zur Kathode.

Die Physik ist wieder einmal viel einfacher als die Chemie. Zwischen abgeschiedener Stoffmasse m (gleichgültig welcher chemischen Art) und transportierter Ladung (Stromstärke \cdot Zeit) $Q = It$ gelten allgemein die beiden Gesetze von *Faraday*:

1) Die abgeschiedene Masse m ist proportional der durchgegangenen Ladung $Q = It$:

$$m = AIt. \quad (6.88)$$

A ist das **elektrochemische Äquivalent** des untersuchten Stoffes. Es gibt an, wie viel Gramm Ionen durch ein Coulomb abgeschieden werden.

2) Die elektrochemischen Äquivalente verschiedener Stoffe verhalten sich wie die Massen ihrer Grammäquivalente.

Ein Grammäquivalent (abgekürzt 1 val) eines Stoffes ist 1 mol (bzw. 1 Grammatom) dividiert durch die Wertigkeit des Stoffes.

Zum Beispiel hat 1 mol Kupfer 63,6 g und die Wertigkeit 2 (das Chlorid heißt CuCl_2); 1 Grammäquivalent Cu hat 31,8 g. Entsprechend hat 1 Grammäquivalent Silber (einwertig) 107,9 g. Die elektrochemischen Äquivalente sind $A_{\text{Cu}} = 0,329 \text{ mg/C}$, $A_{\text{Ag}} = 1,118 \text{ mg/C}$. Um 1 Grammäquivalent eines beliebigen Stoffes abzuscheiden, braucht man immer

die gleiche Ladung, nämlich z. B. $107,9 \text{ g val}^{-1}/A_{\text{Ag}} = 31,8 \text{ g val}^{-1}/A_{\text{Cu}}$, allgemein

$$F = 0,6(96\,485,3) \text{ C/val} . \quad (6.89)$$

F heißt **Faraday-Konstante**.

Diese Beziehungen eignen sich gut zur Absolutmessung von Ladungen. Früher war das Coulomb definiert als die Ladung, deren Durchgang unter genau vorgeschriebenen Versuchsbedingungen aus einer wässrigen Lösung von Silbernitrat 1,1180 mg Silber abscheidet (Abschn. 7.3.5). Beide Faraday-Gesetze folgen aus der Annahme, dass ein Ion so viele Elementarladungen trägt, wie seine Wertigkeit Z angibt: Ein Ion Ze , ein Mol Ionen $N_A Ze$, ein Grammäquivalent $N_A e$. Das ist definitionsgemäß die Faraday-Konstante:

$$F = N_A e \quad \text{oder} \quad e = F/N_A . \quad (6.90)$$

Elektrolytische Präzisionsmessungen liefern für e den Wert

$$e = (1,6020 \pm 0,0004) \cdot 10^{-19} \text{ C} .$$

Moderne Messmethoden, z. B. der Josephson-Effekt (Abschn. 17.7), sind viel genauer:

$$e = (1,602\,176\,46 \pm 0,000\,000\,06) \cdot 10^{-19} \text{ C} . \quad (6.91)$$

6.4.5 Elektrolytische Leitfähigkeit

In der Lösung zwischen hinreichend großen planparallelen Platten (Abb. 6.79) herrscht das homogene Feld $E = U/l$. An einem Z -wertigen Ion greift die Kraft $F = ZeE = ZeU/l$ an. Wie im Metall führt das nicht zu einer beschleunigten, sondern nur zu einer gleichförmigen Bewegung, da eine geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft F_R vorhanden ist. Die Ionen wandern so schnell, dass $F = -F_R$ wird. Ihre Geschwindigkeit ist also proportional zum Feld, nämlich für

$$\text{Kationen } v_+ = \mu_+ E , \quad \text{Anionen } v_- = -\mu_- E .$$

μ_+ und μ_- sind die Beweglichkeiten der Ionen. Man definiert sie i. Allg. als positive Größen, auch für die Anionen, die entgegen der Feldrichtung laufen; dann muss im Ausdruck für v_- ein Minuszeichen stehen.

Wenn die Teilchenzahldichten von Kationen und Anionen n_+ und n_- sind, ergeben sich Stromdichten von

$$j_+ = Z_+ e v_+ n_+ = Z_+ e \mu_+ E n_+ , \\ j_- = -Z_- e v_- n_- = +Z_- e \mu_- E n_- .$$

Beide Ionensorten liefern einen positiven Beitrag zum Strom: Der „rückwärts“ laufende Strom der negativen Anionen ist auch positiv zu werten. Die Gesamtstromdichte ist

$$j = j_+ + j_- = e(Z_+ \mu_+ n_+ + Z_- \mu_- n_-) E . \quad (6.92)$$

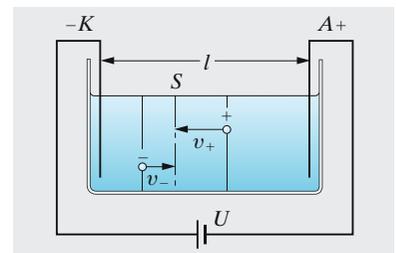


Abb. 6.79. Beide Ionensorten eines binären Elektrolyten tragen entsprechend ihrer Beweglichkeit zum Gesamtstrom bei

Tabelle 6.3. Spezifischer Widerstand von NaCl-Lösungen verschiedener Konzentrationen bei 18 °C

Konzentration mol/m ³	$\rho/\Omega\text{ m}$
10 ⁻¹	930
1	94
10	9,8
10 ²	1,09
10 ³	0,135

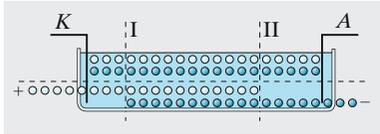


Abb. 6.80. Konzentrationsänderungen in der Umgebung der Elektroden in Abhängigkeit von den Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen

Tabelle 6.4. Beweglichkeiten von Ionen in wässriger Lösung bei 18 °C und unendlicher Verdünnung

Ion	$\mu/10^{-8}\text{ m}^2\text{ V}^{-1}\text{ s}^{-1}$
<i>Kation</i>	
H	33
Li	3,5
Na	4,6
K	6,75
Ag	5,7
NH ₄	6,7
Zn	4,8
Fe	4,8
<i>Anion</i>	
OH	18,2
Cl	6,85
Br	7,0
J	6,95
NO ₃	6,5
MnO ₄	5,6
SO ₄	7,1
CO ₃	6,2

Die Leitfähigkeit des Elektrolyten ist also

$$\sigma = \frac{j}{E} = e(Z_+\mu_+n_+ + Z_-\mu_-\bar{n}_-) \quad (6.93)$$

Bei einem Plattenquerschnitt A ist der Gesamtstrom

$$I = jA = Ae(Z_+\mu_+n_+ + Z_-\mu_-\bar{n}_-) \frac{U}{l} \quad (6.94)$$

Den Widerstand von Elektrolytlösungen muss man mit Wechselspannung messen, weil sich bei Gleichspannung die Elektroden „polarisieren“, was die Feldverhältnisse ändert. Tabelle 6.3 gibt einige Messwerte für NaCl-Lösungen.

Bei verdünnten Lösungen ist offenbar die Leitfähigkeit proportional zur NaCl-Konzentration. Das entspricht der Annahme, dass *alles* NaCl in Ionen dissoziiert ist. Bei einer Konzentration c in mol/m³ bedeutet das $n = N_A c$ Ionen jedes Vorzeichens im m³, z. B. bei $c = 0,1\text{ mol/m}^3$ wird $n = 6 \cdot 10^{22}\text{ m}^{-3}$. Damit ergibt sich aus (6.93)

$$\mu_+ + \mu_- = \frac{\sigma}{en} = 11,1 \cdot 10^{-8}\text{ m}^2/\text{V s}.$$

Aus der Widerstandsmessung kann man nur die Summe der Beweglichkeiten aller Ionen bestimmen. Sie beträgt, wie der Vergleich mit Abschn. 6.4.2 zeigt, etwa 10^{-4} der Elektronenbeweglichkeit in Metallen.

Um die Beweglichkeiten einzeln zu erhalten, braucht man eine zweite unabhängige Beziehung zwischen ihnen. Sie wird z. B. durch die Abnahme der Menge des gelösten Elektrolyten während des Stromdurchganges gegeben, vorausgesetzt natürlich, dass sich beide Ionenarten an den Elektroden abscheiden.

Man denke sich die Kationen und die Anionen zu Ketten geordnet, die sich allmählich zu ihrer Elektrode vorschieben (Abb. 6.80). In Wirklichkeit herrscht keine solche Ordnung, aber im Prinzip ändert das nichts an der Überlegung. Der Strom fließe so lange, bis sich die Kationenkette um fünf Ionen nach links, die Anionenkette um drei nach rechts verschoben hat, entsprechend einem Beweglichkeitsverhältnis $\mu_+/\mu_- = \frac{5}{3}$. Die jenseits der Elektroden gezeichneten Ionen haben sich bereits abgeschieden. Die Situation Abb. 6.80 unten ist aber nicht so möglich, wie sie gezeichnet ist, denn die Ladungsträger jenseits von I und II, die keine neutralisierenden Partner haben, würden ein riesiges Feld hervorrufen, das sie sofort zu ihrer Elektrode risse. Drei Anionen sind aus dem Bereich der Kathode abgewandert, die drei zurückgebliebenen Kationen scheidet sich ebenfalls ab, also verliert die Lösung vor der Kathode drei ganze Moleküle. Entsprechend verliert der Anodenbereich fünf Moleküle. Es ist also

$$\frac{\text{Abnahme der Zahl gelöster Moleküle an der Kathode}}{\text{Abnahme der Zahl gelöster Moleküle an der Anode}} = \frac{\mu_-}{\mu_+}.$$

Die linke Seite gibt auch das Verhältnis der verschwundenen Massen oder der Konzentrationsabnahmen Δc_K und Δc_A vor den Elektroden an. Man kann sie messen, wenn man z. B. durch poröse Zwischenwände die Durchmischung der drei Bereiche verhindert. Die Zahlen

$$\frac{\Delta c_K}{\Delta c_A + \Delta c_K} = \frac{\mu_-}{\mu_+ + \mu_-} = \nu_- \quad (6.95)$$

und

$$\frac{\Delta c_A}{\Delta c_A + \Delta c_K} = \frac{\mu_+}{\mu_+ + \mu_-} = v_+$$

heißen **Hittorf-Überföhrungszahlen** des Anions bzw. des Kations. Natürlich ist immer $v_- + v_+ = 1$. Die Überföhrungszahlen geben auch den Beitrag des jeweiligen Ions zum Gesamtstrom an. Eine Messung der Überföhrungszahlen gibt die zweite Beziehung zur getrennten Bestimmung von μ_+ und μ_- . Man findet i. Allg. die Beweglichkeit eines Ions als unabhängig davon, mit welchem Ion es ursprünglich in Elektrolyten verbunden war. Tabelle 6.4 gibt einige Beweglichkeiten.

Die Wanderungsgeschwindigkeit kräftig gefärbter Ionen wie MnO_4^- kann man direkt beobachten: In einem U-Rohr (Abb. 6.81) unterschichtet man eine KNO_3 -Lösung mit einer violetten KMnO_4 -Lösung so vorsichtig, dass sich scharfe Grenzflächen bilden. Während des Stromdurchanges wandert die Grenzfläche im rechten Schenkel nach oben, im linken nach unten.

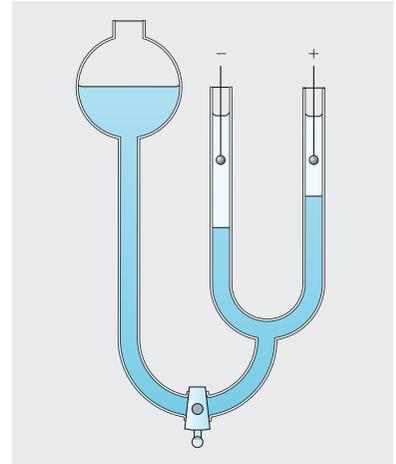


Abb. 6.81. Messung der Beweglichkeit von MnO_4^- -Ionen

Die Äquivalentleitfähigkeit. Für höhere Elektrolytkonzentrationen gelten kompliziertere Gesetze, wie folgender Versuch zeigt. In einem Trog mit rechteckigem Querschnitt befindet sich eine konzentrierte KCl -Lösung (Abb. 6.82). Die Elektroden sind Platinbleche, die je eine Seitenwand völlig bedecken. Bei gegebener Spannung fließt ein am Amperemeter A ablesbarer Strom. Gießt man destilliertes Wasser hinzu, so wächst der Strom. Dies ist überraschend, denn durch die Verdünnung wird die Gesamtmenge des zwischen den Elektroden gelösten KCl nicht geändert. Wohl nimmt die Teilchenzahldichte n ab, aber der Querschnitt A der Lösung nimmt zu, und zwar so, dass das Produkt nA konstant bleibt. Auch die Feldstärke im Elektrolyten wird nicht geändert. Da also nAU/l konstant bleibt, sollte nach (6.94) der Strom konstant bleiben. Anders ausgedrückt: Die Leitfähigkeit σ sollte sich halbieren bei Verdünnung auf die Hälfte. Das Verhältnis σ/n sollte konstant sein.

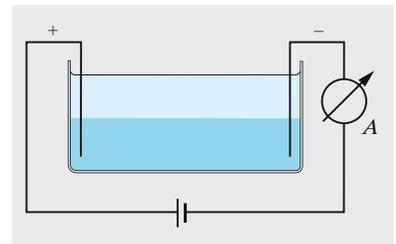


Abb. 6.82. Bei Verdünnung ohne Mengenänderung des Elektrolyten nimmt der Strom zu, weil die Äquivalentleitfähigkeit steigt

Statt mit der Ionenzahldichte n (in m^{-3}) rechnet der Chemiker meist mit der **Molarität** η der Lösung, d. h. der Anzahl gelöster Grammäquivalente dividiert durch das Lösungsvolumen in Litern. Es ist also

$$\eta = 10^{-3} \frac{n}{N_A} .$$

$\Lambda = \sigma/\eta$ heißt **Äquivalentleitfähigkeit**.

Sie sollte ebenso wie σ/n konzentrationsunabhängig sein. Das Experiment zeigt dagegen, dass Λ mit wachsender Verdünnung zunimmt (Tabelle 6.5).

Es gibt zwei Deutungsmöglichkeiten für die Zunahme von Λ :

- Bei höheren Konzentrationen sind nicht alle Moleküle in Ionen gespalten. Der **Dissoziationsgrad**

$$\alpha = \frac{\text{Zahl der in Ionen gespaltenen Moleküle}}{\text{Gesamtzahl der gelösten Moleküle}}$$

Tabelle 6.5. Äquivalentleitfähigkeit von KCl und Essigsäure $\Omega^{-1} \text{m}^{-1} \text{mol}^{-1} \text{l}$

$c/\text{mol l}^{-1}$	KCl (18 °C)	CH_3COOH (25 °C)
1	9,82	0,146
10^{-1}	11,2	0,515
10^{-2}	12,3	1,66
10^{-3}	12,7	4,9
10^{-4}	12,9	16,6
0 (extrapoliert)	13,0	38,8

sollte nach dem **Massenwirkungsgesetz** mit wachsender Verdünnung zunehmen. Für einen 1 – 1-wertigen Elektrolyten wie KCl hat man für die Konzentrationen von Ionen und undissoziierten Molekülen

$$\frac{[\text{K}^+][\text{Cl}^-]}{[\text{KCl}]} = \kappa .$$

Da $[\text{K}^+] = [\text{Cl}^-]$, und $[\text{K}^+] + [\text{Cl}^-] + [\text{KCl}] = c$ die Gesamtelektrolytkonzentration ist, erhält man für den Dissoziationsgrad

$$\alpha = \frac{\kappa}{2c} \left(\sqrt{1 + \frac{4c}{\kappa}} - 1 \right) \quad (6.96)$$

(**ostwaldsches Verdünnungsgesetz**). Diese Deutung gilt für schwache Elektrolyte.

- Starke Elektrolyte wie KCl sind selbst bei hohen Konzentrationen vollständig dissoziiert ($\alpha = 1$). In (6.92) bleibt zur Erklärung der Konzentrationsabhängigkeit von Λ nur die Ionenbeweglichkeit. Sie muss mit wachsender Verdünnung zunehmen. Die **Theorie von Debye-Hückel-Onsager** erklärt das so: In einer Elektrolytlösung sind die Ionen nicht völlig ungeordnet verteilt. In der Nähe eines negativen Ions findet man mehr positive Ionen als anderswo und umgekehrt. Jedes Ion ist so von einer Gegenionenwolke umgeben. Wenn ein Ion wandern muss, schleppt seine Gegenionenwolke etwas nach, weil zu ihrem Aufbau eine gewisse Relaxationszeit nötig ist. Die Gegenionenwolke erzeugt also ein hemmendes Feld, das umso stärker ist, je dichter die Wolke ist, d. h. je höher die Konzentration und je größer der Ordnungszustand, also je niedriger die Temperatur ist. Erst bei „unendlich großer Verdünnung“ wirkt allein das äußere Feld auf die Ionen, und diese erreichen hier ihre größte Beweglichkeit. Mit wachsender Temperatur werden die Wolken lockerer, und daher leiten Elektrolytlösungen im Gegensatz zu den Metallen bei höherer Temperatur besser; außerdem nimmt die Viskosität des Lösungsmittels bei wachsender Temperatur ab.

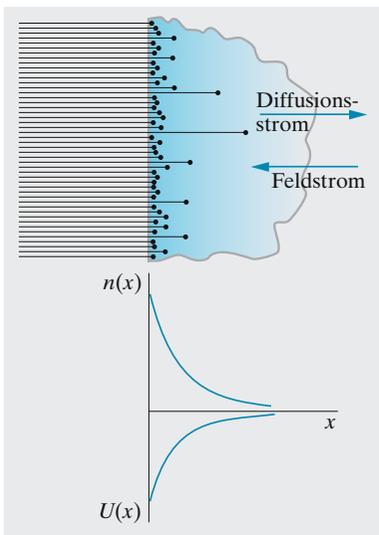


Abb. 6.83. *Oben*: Die Elektronenverteilung im Feld ergibt sich aus dem Gleichgewicht zwischen Feldstrom und Diffusionsstrom. *Unten*: Resultierende Verteilung von Teilchenzahldichte und Potential

6.4.6 Ionenwolken; elektrochemisches Potential

Wie stellen sich bewegliche geladene Teilchen in einem elektrischen Feld ein? Wir betrachten einen Stoff, der nur Ladungsträger eines Vorzeichens enthält (Metall, Halbleiter). Er sei z. B. als ebene Kondensatorplatte ausgebildet (Abb. 6.83). Bisher haben wir angenommen, die Elektronen folgten den Feldlinien bis ganz zur Oberfläche und schirmten so das Innere völlig gegen das Feld ab. Dies würde aber einen Sprung der Elektronenkonzentration gleich hinter der Oberfläche bedeuten, dessen Folge nach (5.57) ein unendlich großer Diffusionsstrom wäre.

Die Elektronen werden sich also in einer Schicht *endlicher* Dicke anreichern, in die das Feld von links noch etwas eindringt. Dieses abgeschwächte Feld ruft einen Strom hervor, aber der Diffusionsstrom im Konzentrationsprofil ist ihm entgegengerichtet. Gleichgewicht besteht

dann, wenn beide Ströme einander genau kompensieren. Die Gleichgewichtsverteilung ergibt sich also aus der Gleichheit von Feld- und Diffusionsstromdichte:

$$j_{\text{Feld}} = e\mu En = -j_{\text{Diff}} = eD \frac{dn}{dx} . \quad (6.97)$$

Dividiert man beide Seiten durch n und benutzt die Einstein-Beziehung $\mu = eD/(kT)$ (5.42) zwischen Beweglichkeit und Diffusionskoeffizient, so erhält man

$$eE = -e \frac{dU}{dx} = kT \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} = kT \frac{d \ln n}{dx}$$

oder integriert

$$\boxed{U + \frac{kT}{e} \ln n = \text{const}} . \quad (6.98)$$

$U + kTe^{-1} \ln n$ heißt das **elektrochemische Potential** der Elektronen. *Im Gleichgewicht (bei Stromlosigkeit) hat es überall den gleichen Wert.*

Diese Beziehung ist grundlegend für so verschiedene Gebiete wie die Halbleiterphysik, die Elektrochemie und die Membranphysiologie. Sie ist einfach eine weitere Verkleidung der Boltzmann-Verteilung: Am Ort mit dem Potential U hat ein Elektron die potentielle Energie $-eU$, also ist die Elektronenkonzentration im Gleichgewicht $n \sim e^{eU/(kT)}$.

Die Potentialverteilung wird andererseits durch die Elektronenverteilung wesentlich mitbestimmt: Ladungen verzehren Feldlinien entsprechend der Poisson-Gleichung (6.16)

$$-\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{dE}{dx} = -\frac{1}{\epsilon\epsilon_0} en .$$

Relativ wenige Überschusselektronen reichen aus, um jedes praktisch erzeugbare Feld zu verzehren. An jeder Stelle ist also die Elektronenkonzentration n gleich dem konstanten Wert n_∞ im ungestörten Material plus einem sehr kleinen Zusatz n_1 . Nur n_1 geht in die Poisson-Gleichung ein. Andererseits verteilen sich die Elektronen über ihre verschiedenen durch $E = -eU$ gegebenen Energiezustände an den verschiedenen Stellen nach *Boltzmann*:

$$\frac{n}{n_\infty} = 1 + \frac{n_1}{n_\infty} = e^{-E/(kT)} = e^{+eU/(kT)} . \quad (6.99)$$

Da $n_1 \ll n_\infty$ und entsprechend $eU \ll kT$, braucht man die e-Funktion nur bis zum zweiten Glied zu entwickeln:

$$1 + \frac{n_1}{n_\infty} = 1 + \frac{eU}{kT} \Rightarrow n_1 = n_\infty \frac{eU}{kT} .$$

In die Poisson-Gleichung eingesetzt ergibt das

$$\frac{d^2 n_1}{dx^2} = \frac{e^2 n_\infty}{\epsilon\epsilon_0 kT} n_1 .$$

Die Lösung stellt einen exponentiellen Abfall (oder Anstieg) der Überschusskonzentration von ihrem Wert n_{10} direkt an der Oberfläche dar:

$$n_1 = n_{10}e^{-x/d}, \quad \text{wobei} \quad d = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 kT}{e^2 n_\infty}} \quad (6.100)$$

die „Skalenhöhe“ der Überschusselektronen ist, d. h. der Abstand von der Oberfläche, längs dessen ihre Konzentration auf e^{-1} absinkt. d heißt auch **Debye-Hückel-Länge**.

Wenn Ladungsträger beider Vorzeichen vorhanden sind, reichern sich die einen in der Grenzschicht an, die anderen werden weggedrängt. Um ein Ion einer Elektrolytlösung bildet sich eine Wolke von Gegenionen, deren Radius ebenfalls d ist; dabei ist für n_∞ die *Gesamt*konzentration von Anionen und Kationen einzusetzen.

Reibungselektrizität. In verschiedenen Stoffen herrschen, wenn sie getrennt sind, verschiedene Teilchenzahldichten n der Ladungsträger. Bei inniger Berührung müssen Ladungsträger über die so entstehende Konzentrationsstufe fließen. Sie laden die beiden Stoffe entgegengesetzt auf, bis die elektrochemischen Potentiale $U + kT e^{-1} \ln n$ beiderseits gleich geworden sind. Trennt man die beiden Stoffe wieder, kann diese Aufladung erhalten bleiben. Erfahrungsgemäß ist sie umso größer, je schlechter die Stoffe leiten; Metalle laden sich überhaupt nicht merklich durch Reibung auf. Die Dicke der aufgeladenen Schicht ist wieder eine Debye-Hückel-Länge, also nach (6.100) umso größer, je kleiner die Ladungsträgerdichte n_∞ und damit die Leitfähigkeit σ ist. Zwischen Cu mit $\sigma \approx 10^{+8} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ und Glas mit $\sigma \approx 10^{-16} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ besteht ein Schichtdickeunterschied von 12 Zehnerpotenzen. Im Metall sitzen die Überschussladungen nur auf der ersten Atomschicht und gleichen sich kurz vor der Trennung wieder aus, beim Isolator bleibt die Aufladung erhalten. Solange das Feld homogen bleibt, behält es bei der Trennung seine Feldstärke bei, d. h. die Spannung nimmt proportional zum Abstand zu und kann Werte erreichen, die zu Funken- und Büschelentladungen führen.

Die moderne Festkörperphysik ersetzt die hier benutzte Boltzmann-Verteilung durch die Fermi-Verteilung (Abschn. 17.3.2 und 19.3.3), die Größe $kTe^{-1} \ln n$ durch die Fermi-Grenze, d. h. die Energie, bis zu der die Zustände mit Elektronen gefüllt sind. Ein Stoff mit leicht abtrennbaren Elektronen (flache Fermi-Grenze) wird beim Reiben positiv. Solche flachen Elektronen sind auch im äußeren elektrischen Feld leichter verschiebbar oder sogar abtrennbar und ergeben somit eine höhere DK (Regel von *Coehn*: Stoffe mit hoher DK werden meist positiv). Glas wird i. Allg. positiv, weil es viele Alkali- und Erdalkaliatome mit flachen (leicht ionisierbaren) Elektronenzuständen hat, Schwefel wird aus dem entgegengesetzten Grund negativ. Natürliche und synthetische organische Stoffe werden positiv oder negativ, je nachdem ob in ihrer Molekülstruktur die basischen NH_2 -Gruppen oder die sauren COOH -Gruppen vorherrschen. Man kann die Stoffe zu einer reibungselektrischen Spannungsreihe ord-

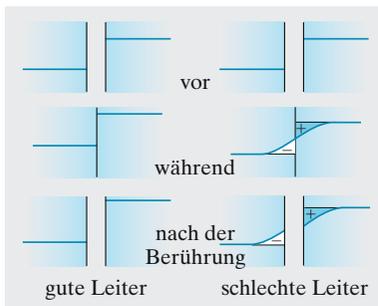


Abb. 6.84. Bei verschiedenen Stoffen sind die Elektronenzustände bis zu verschiedenen Niveaus aufgefüllt. Bei inniger Berührung fließt ein Diffusionsstrom, bis die Aufladung durch fehlende bzw. überschüssige Elektronen weiteren Transport verhindert. Das bedeutet Konstanz des elektrochemischen Potentials. Die Dicke des aufgeladenen Oberflächenbereichs, die Debye-Hückel-Länge, hängt von σ , ε und T ab

nen, in der der voranstehende positiv, der folgende negativ aufgeladen wird: Katzenfell, Elfenbein, Quarz, Flintglas, Baumwolle, Seide, Lack, Schwefel. Diese Spannungsreihe stimmt teilweise mit der elektrochemischen und der thermoelektrischen überein (Abschn. 6.5.2 und 6.6.1). Die statische Aufladung stört zwar Schallplattenfreunde und erschreckt aussteigende Autofahrer, wird aber in vielen Geräten wie Fernsehkamera, Photokopierer und van der Graaff-Generator ausgenutzt.

Unipolare Ströme in Flüssigkeiten; Elektrophorese. Da in verschiedenen Stoffen die Elektronen- oder Ionenkonzentrationen nie ganz übereinstimmen, führt der Ausgleich des elektrochemischen Potentials stets zu einer Doppelschicht von Ladungen und zu einem starken, wenn auch sehr engräumigen Feld in der Grenzschicht. Eine Flüssigkeit, die an einen Festkörper angrenzt, führt, wenn sie strömt, einen Teil dieser Ladungen mit; ein anderer Teil haftet an der Wand (Abschn. 3.3.2).

Ein Rohr enthalte einen aus porösem Material bestehenden Pfropfen. An den Wänden der feinen Hohlräume bilden sich Doppelschichten, deren nichthaftender Teil durch die Ionen darin in einem elektrischen Feld zum Strömen gebracht wird (Abb. 6.85). Diese Ionen eines Teils der Doppelschicht sind alle gleichsinnig geladen und schleppen durch Hydratisierung angelagerte Wassermoleküle mit. Die innere Reibung bringt die ganze Lösung in Bewegung, und die Flüssigkeit steigt in einem Schenkel an. Im Gegensatz zur Elektrolyse handelt es sich hier um eine einsinnige Wanderung (**Elektroosmose**).

Drückt man umgekehrt Flüssigkeit durch einen porösen Körper hindurch, so fließt die Ladung der Doppelschicht durch die Kapillarkanäle, und ein an die Elektroden angeschlossenes Galvanometer zeigt einen Strom an (Strömungsstrom).

In einer nichtleitenden Flüssigkeit suspendierte Partikel werden von einem elektrischen Feld in Bewegung gesetzt (Abb. 6.86; **Elektrophorese**). Ihr Bewegungssinn hängt nicht nur von ihrer Gesamtladung ab, sondern auch von deren Verteilung; die Oberflächenladung influenziert nämlich eine eng anliegende, die im Innern sitzende Ladung eine weiter ausgedehnte Gegenionenwolke. So ist jedes geladene Teilchen von einer Gegenionenwolke umgeben, die ein ruhendes Teilchen ladungsmäßig neutralisiert. Im homogenen Feld kommt eine resultierende Kraft auf das System Teilchen + Gegenionenwolke erst zustande, wenn man die endliche Ausdehnung der Wolke und das Abstreifen ihrer äußeren Schichten bei der Bewegung beachtet. Die elektrophoretische Beweglichkeit eines Teilchens hängt daher nicht nur von seiner Ladung, sondern auch entscheidend von der Ionenkonzentration (besonders dem pH-Wert) des Suspensionsmittels ab, die den Debye-Hückel-Radius der Ionenwolke bestimmt.

Sind die in einer Flüssigkeit suspendierten Teilchen so klein, dass sie mit ihr scheinbar eine einzige Phase bilden, obgleich sie nicht molekular mit ihr gemischt sind wie in einer echten Lösung, so spricht man von einer **kolloidalen Lösung** oder einem **Sol**. Die Flüssigkeit heißt **Dispersionsmittel**, die in ihr enthaltenen Teilchen bilden die **disperse Phase**. Ist das Dispersionsmittel Wasser, so nennt man die kolloidale Lösung ein **Hydrosol**. So lösen sich z. B. Eiweiß, manche Metall-

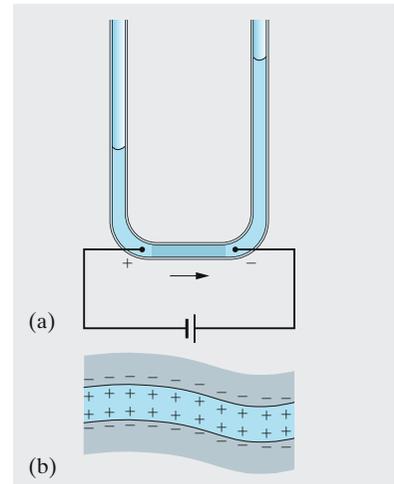


Abb. 6.85a,b. Elektroosmose

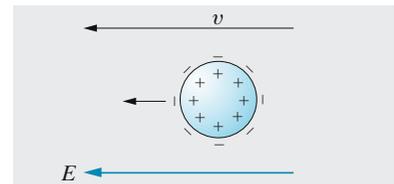


Abb. 6.86. Elektrophorese. Suspendierte geladene Teilchen wandern im elektrischen Feld, aber die influenzierte Gegenionenwolke im Lösungsmittel wandert größtenteils mit

Tabelle 6.6. Aufladung der Teilchen in Hydrosolen

Positiv	Negativ
Fe(OH) ₃	Au, Ag, Pt
Al(OH) ₃	S, As ₂ O ₃
Cr(OH) ₃	Stärke
ZnO ₂	SiO ₂ , SnO ₂

sulfide, hochmolekulare organische Verbindungen als *Hydrosole*. Schwer lösliche Stoffe (reduzierte Metalle [Gold], Hydroxide [Fe(OH)₃], Sulfide [As₂S₃]) scheiden sich häufig kolloidal aus. Durch hochfrequente mechanische Erschütterung mit Ultraschall lässt sich Quecksilber in Wasser kolloidal verteilen. Viele Metalle lassen sich kolloidal lösen, indem man im Dispersionsmittel zwischen Elektroden aus diesen Metallen einen elektrischen Lichtbogen (Abschn. 8.3.5) „brennen“ lässt. Die Durchmesser dieser kolloidalen Partikel liegen in den Grenzen von 10⁻⁷ bis 10⁻⁵ cm, während die Durchmesser der Atome oder kleiner Moleküle einige 10⁻⁸ cm betragen. Diese kolloidalen Teilchen sind entweder positiv oder negativ geladen; die entgegengesetzt gleichen Ladungen befinden sich dann im angrenzenden Wasser (s. Tabelle 6.6).

Schichtet man über solche Hydrosole reines Wasser in einem U-Rohr wie in Abb. 6.81, so verschiebt sich die Grenzschicht bei positiver Aufladung zur Kathode, bei negativer zur Anode.

Die Aufladung der kolloidalen Teilchen kann auf den oben beschriebenen Grenzschichteffekt zurückzuführen sein. Wenn die disperse Phase und das Dispersionsmittel Nichtleiter (Nichtelektrolyte) sind, so lädt sich der Stoff mit der höheren Dielektrizitätskonstanten positiv auf (vgl. Coehnsche Regel). Sie kann aber auch ihren Grund in der Abgabe von Ionen an das Dispersionsmittel haben.

Wenn das Dispersionsmittel Ionen enthält, so kann die Aufladung durch **Adsorption** von Ionen an der Oberfläche der kolloidalen Partikel zustande kommen.

In alle diese Effekte spielen komplizierte physikochemische Faktoren hinein. In der Biochemie haben sie entscheidende Bedeutung gewonnen (Elektrophorese, Chromatographie).

6.5 Galvanische Elemente

Eigentlich war es ja Signora Lucia Galvani, die ihren Mann 1789 auf die zuckenden Froschschenkel zwischen kupfernen Haken und verzinktem Balkongitter aufmerksam machte. Ihr verdanken wir, dass wir unsere Autos ohne Kurbel starten können. Frauen beobachten oft besser, Männer machen Theorien daraus, manchmal falsche, wie Dottore *Galvani*, der erst an tierische Elektrizität dachte, bis Conte *Volta* mit einem nassen Lappen zwischen Kupfer und Zink dasselbe erreichte.

6.5.1 Ionengleichgewicht und Nernst-Gleichung

Wenn zwei Bereiche mit verschiedenen Konzentrationen c_1 und c_2 eines bestimmten Ions aneinander grenzen, herrscht an der Grenzfläche zwischen ihnen ein Potentialsprung $\Delta U = U_1 - U_2$, der sich nach der Boltzmann-Verteilung aus

$$\frac{c_1}{c_2} = e^{-e \Delta U / (kT)}$$

ergibt, also

$$\Delta U = -\frac{kT}{e} \ln \frac{c_1}{c_2} \quad (\text{Nernst-Gleichung}) \quad (6.101)$$

Dies gilt für positive Ionen; bei negativen ist das Vorzeichen umzukehren. Dasselbe folgt natürlich auch aus der Konstanz des elektrochemischen Potentials. Von dieser Art sind alle Potentiale in elektrochemischen Batterien, aber auch biologische Membranpotentiale in Nerven und Muskeln.

Die beiden Bereiche mit den verschiedenen Ionenkonzentrationen müssen in sich trotzdem neutral sein, d. h. der Überschuss an positiven Ionen auf einer Seite muss durch einen ebenso großen Überschuss an negativen Ionen auf der gleichen Seite neutralisiert werden. Sonst würden nach (6.16) viel zu große Spannungen auftreten. Die Aufladung, die den Potentialsprung erzeugt, beschränkt sich auf eine Doppelschicht von der Dicke der Debye-Hückel-Länge.

6.5.2 Auflösung von Metallionen

Wir tauchen ein Metall, z. B. Zink in eine Elektrolytlösung. Das Metall besteht aus einem Grundgitter aus Zn^{++} -Ionen, umgeben von der Wolke der Leitungselektronen. Einige Zn-Ionen können in die Lösung übergehen, ähnlich wie in einem Salz. Wie viele das tun, hängt von der Energie der Zustände ab, die sie im Metall zwischen den Leitungselektronen bzw. in der Lösung zwischen den H_2O -Molekülen einnehmen. Die H_2O -Dipole wenden vorzugsweise ihr negatives Ende (O-Atom) dem Zn^{++} zu und bilden so einen Potentialtopf mit abgesenkter Energie. Seine Tiefe heißt **Solvations-**, speziell **Hydratationsenergie**. Die Leitungselektronen im Metall als freie Ladungsträger sind hierin viel wirksamer und erzeugen einen tieferen Potentialtopf. Daher lösen sich Metalle so schlecht; die Ionenkonzentration c_0 im Metall ist viel höher als c in der Lösung. Die Folge ist nach *Boltzmann-Nernst* eine Potentialdifferenz $\Delta U = -kTe^{-1} \ln c_0/c$, die das Metall negativ macht. Diese Differenz baut sich in einer Doppelschicht auf, bis Gleichgewicht zwischen aus- und eintretenden Zn-Ionen erreicht ist.

Ein anderes Metall hat eine andere Energiedifferenz zwischen Ionen in Lösung und Metall, ein anderes Verhältnis c_0/c und eine andere Potentialdifferenz gegen die Lösung. Diese Potentialdifferenz zwischen Metall und Elektrolyt ist nicht direkt messbar, weil man für eine solche Messung eine zweite metallische Zuführung braucht. Was man dann misst, ist die *Differenz* der beiden Potentialdifferenzen Metall–Elektrolyt. Um trotzdem solche Potentialdifferenzen absolut angeben zu können, setzt man willkürlich die Spannung einer mit Wasserstoff umspülten Platin-Elektrode (**Wasserstoff-Elektrode**) gegen eine 1-normale Säure als Nullpotential fest. Dann ergeben sich die Spannungen der anderen Metalle gegen eine 1-normale Elektrolytlösung, die das gleiche Metallion enthält, wie in Tabelle 6.7 angegeben.

6.5.3 Galvanische Elemente

Wir tauchen jetzt zwei verschiedene Metalle in die gleiche Elektrolytlösung, z. B. Zn und Cu in CuSO_4 . Zwischen beiden besteht eine Potentialdifferenz (und zwar wird Zn negativ, weil es weniger „edel“ ist und sich besser löst). Verbindet man die beiden Elektroden durch einen

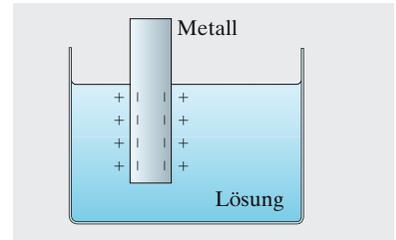


Abb. 6.87. Aus einem Metall treten so viele Ionen in das Lösungsmittel, bis das Feld der entstehenden Doppelschicht den weiteren Austritt verhindert

Tabelle 6.7. Spannungsreihe einiger chemischer Elemente und ihre Normalspannungen gegen die Normal-Wasserstoffelektrode (Konzentration der Elektrolytlösungen: 1 mol Ionen/l)

Elektrode	U/V
Li	-3,02
K	-2,92
Na	-2,71
Mg	-2,35
Zn	-0,762
Fe	-0,44
Cd	-0,402
Ni	-0,25
Pb	-0,126
H_2	0
Cu	+0,345
Ag	+0,80
Hg	+0,86
Au	+1,5

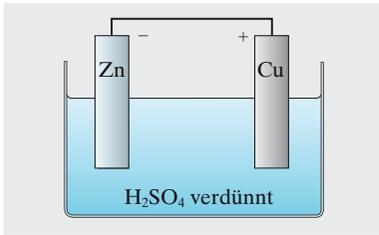


Abb. 6.88. Galvanisches Element

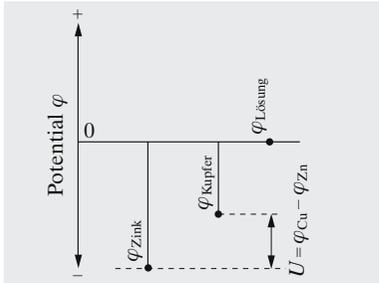


Abb. 6.89. Die Spannung eines galvanischen Elements ist die Differenz der Einzelspannungen der Elektroden gegen den Elektrolyten

Draht, fließt ein Strom von Elektronen vom Zn zum Cu. Zum Ausgleich fließt auch durch den Elektrolyten ein Strom von positiven Ionen, ebenfalls vom Zn zum Cu: Zn-Ionen lösen sich, Cu-Ionen scheiden sich ab. Das Zinkblech wird immer dünner, das Cu-Blech immer dicker. Der dazu notwendige Übertritt von Zn^{++} in die Lösung und von Cu^{++} aus der Lösung ist jetzt nicht mehr durch die Doppelschicht-Potentiale gehemmt, denn für jedes in Lösung gehende Zn^{++} scheidet sich zum Ladungsausgleich ein Cu^{++} an der Cu-Elektrode ab und wird dort entladen. Solange noch Cu in der Lösung ist, kann das Element einen Strom liefern. Erst wenn alles Cu verbraucht ist, versiegen Spannung und Strom, weil sich die Cu-Elektrode jetzt mit Zn überzieht, also auch als Zn-Elektrode wirkt.

Entnimmt man dem Element einen Strom, dann macht sich der Innenwiderstand des Elektrolyten geltend: Ein Teil der Leerlaufspannung fällt im Elektrolyten selbst ab (Abschn. 6.3.4d). Der Innenwiderstand wird wie der Elektrolytwiderstand (Abschn. 6.4.5) durch Beweglichkeit und Konzentration der Ionen sowie die Geometrie des Elements bestimmt.

Bietet man dem Metall mit der größeren **Lösungstension** $\ln(c/c_0)$ kein entsprechendes Ion im Elektrolyten an, hängt z. B. Eisen in eine CuSO_4 -Lösung, dann überzieht es sich spontan mit Kupfer: Auch hier werden Auflösung und Abscheidung von Ionen nicht mehr durch die Doppelschicht gehemmt, weil für jedes auftretende Fe^{++} -Ion sich ein Cu^{++} niederschlagen kann.

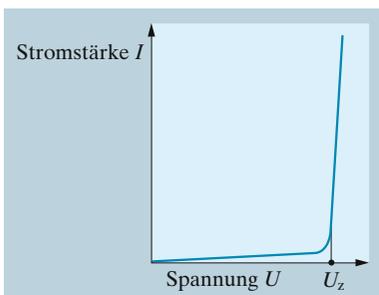
6.5.4 Galvanische Polarisation

Eine elektrolytische Zelle mit Platinelektroden sei mit angesäuertem Wasser gefüllt. Legt man an sie eine Spannung von 1 Volt, so nimmt die Stromstärke sehr bald bis auf den Wert Null ab, obwohl der Widerstand im äußeren Kreis sowie die Leitfähigkeit des Elektrolyten unverändert bleiben. Der Grund dafür ist eine Spannungsabnahme an den Elektroden. An der Kathode scheiden sich H_2 , an der Anode O_2 ab. Die mit diesen Gasen beladenen Elektroden bilden nunmehr ein galvanisches Element, das der von außen an die Zelle gelegten Stromquelle entgegengeschaltet ist. An dem Elektrolyten liegt also bei Stromdurchgang eine Spannung, welche um die Spannung dieses Wasserstoff-Sauerstoffelementes verringert ist, sodass der durchtretende Strom kleiner ist, als man nach dem ohmschen Gesetz erwartet. Oberhalb der Spannung, bei der eine sichtbare Zersetzung des Elektrolyten auftritt, der **Zersetzungsspannung** U_z , ist die Stromstärke durch

$$I = \frac{U - U_z}{R}$$

gegeben, wenn R der Widerstand der Zelle ist (Abb. 6.90). Diese Veränderung der Elektroden bezeichnet man als *galvanische* oder **elektrolytische Polarisation**.

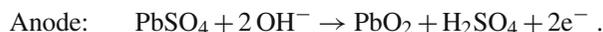
Eine derartige Spannungserniedrigung infolge *elektrolytischer Polarisation* (nicht zu verwechseln mit der dielektrischen Polarisation, Abschn. 6.2.2) tritt bei den *inkonstanten* galvanischen Elementen auf. Entnimmt man solchen Elementen einen Strom, der im Elektrolyten durch Ionen getragen wird, die sich an den Elektroden abscheiden, so werden die Elektroden verändert. Gegen die Spannung des

Abb. 6.90. Einfluss der elektrolytischen Polarisation auf den Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung. Die lineare Extrapolation des steil ansteigenden Kurventeils zum Wert $I = 0$ gibt die Zersetzungsspannung U_z

Elementes schaltet sich die Spannung der „neuen Elektroden“; die Spannung des Elementes wird dadurch bei Stromentnahme immer geringer. Da es sich häufig um eine Abscheidung von H_2 an der positiven Elektrode handelt, vermeidet man die Polarisation durch Beigabe von oxidierenden Chemikalien zum Elektrolyten oder zur positiven Elektrode, z. B. von Kaliumbichromat oder Braunstein (MnO_2), durch welche der entstehende Wasserstoff sofort oxidiert wird. Solche Elemente nennt man *konstant*.

Das Daniell-Element (Zink und Kupfer in CuSO_4 mit einer porösen Tonwand zwischen dem anodischen und dem kathodischen Teil des Elektrolyten) ist ein konstantes Element, weil z. B. an der Cu-Elektrode bei Stromentnahme nur das Element, aus dem die Elektrode besteht, aus der umgebenden CuSO_4 -Lösung abgeschieden wird.

In **Akkumulatoren** nutzt man die Polarisationserscheinungen aus, um aus zwei ursprünglich gleichen Elektroden ein **Sekundärelement** herzustellen. Im Bleiakkumulator tauchen zwei Bleiplatten in H_2SO_4 und überziehen sich mit einer PbSO_4 -Schicht. Beim Aufladen, einem elektrolytischen Vorgang, wird Spannung von außen angelegt, und es entsteht an der Kathode metallisches Pb, an der Anode PbO_2 :



Nach der Aufladung liefern diese Platten eine Spannung von 2,02 V (PbO_2 positiv). Bei der Stromentnahme laufen die Reaktionen genau umgekehrt, bis der depolarisierte Zustand (beiderseits PbSO_4) fast wieder hergestellt ist. Man bezieht so 70–80% der beim Laden investierten Energie zurück. Akkumulatoren haben gegenüber galvanischen Elementen einen sehr viel geringeren Innenwiderstand (höhere Elektrolytkonzentration), liefern also höhere Spitzenströme, und sie sind außerdem wieder aufladbar, wenn auch nicht unbegrenzt.

x Beispiel ...

Wieso und wie kann man den Ladungszustand eines **Akkumulators** durch Dichtemessung der Säure kontrollieren?

Mit einer Aräometer-Pipette saugt man etwas Säure hoch, bis ein meist mit Schrot beschwerter Schwimmkörper schwimmt. Seine Eintauchtiefe zeigt direkt die Säuredichte und damit den Ladezustand. Beim Entladen scheidet sich nämlich für jede transportierte Elementarladung ein SO_4 -Ion an einer der Platten ab und macht die Säure leichter. Ohne störende Nebenreaktionen könnte man durch lineare Interpolation zwischen der vollen Säuredichte ($1,20\text{--}1,25 \text{ g/cm}^3$) und 1 g/cm^3 den noch verfügbaren Anteil der Amperestunden ablesen. In der Praxis muss man spätestens bei $1,15 \text{ g/cm}^3$ wieder aufladen.

6.5.5 Polarisation und Oberflächenspannung

Nach Abschn. 3.2 ist die **Oberflächenspannung** einer Flüssigkeit eine Folge der einseitig in das Innere der Flüssigkeit gerichteten Molekularkräfte. Überschichtet man Quecksilber mit einer verdünnten Elektrolytlösung, so entsteht an der

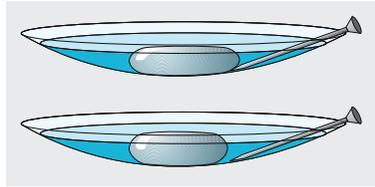


Abb. 6.91. Ein Quecksilbertropfen wird im Uhrglas mit Schwefelsäure überschichtet. Schiebt man einen Nagel in die Nähe, baut die Spannung des galvanischen Elements eine Ladung auf, die den Tropfen abflacht. Sowie er den Nagel berührt, entlädt sich der Tropfen. Er zuckt so periodisch vor und zurück

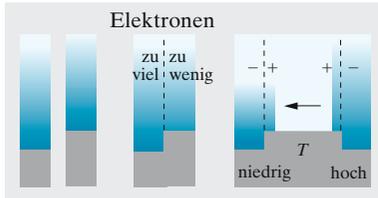


Abb. 6.93. Bei verschiedenen Stoffen liegt das Grundniveau der Elektronen verschieden hoch. Darüber türmt sich eine Elektronenatmosphäre, deren Skalenhöhe proportional zu T ist. Bei Berührung erfolgt Ausgleich durch einen Diffusionsstrom, bis die Aufladung so groß ist, dass das elektrochemische Potential konstant wird. Die Dichteunterschiede, also die Aufladungen, sind umso schwächer, je höher T ist

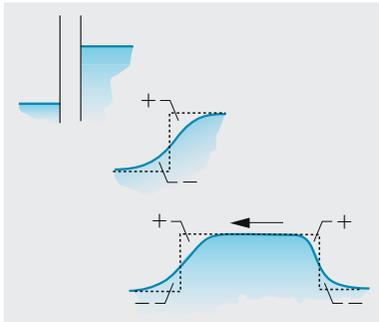


Abb. 6.94. Nach der Fermi-Statistik ist die Lage sogar einfacher. Die Elektronenzustände sind bis zu einem gewissen Niveau (Oberfläche des Fermi-Sees, Fermi-Grenze, elektrochemisches Potential) aufgefüllt, das für verschiedene Stoffe verschieden hoch liegt. Bei Berührung erfolgt Ausgleich der elektrochemischen Potentiale durch Diffusion. Je höher T , desto enger die Übergangsschicht, desto geringer also die Aufladung

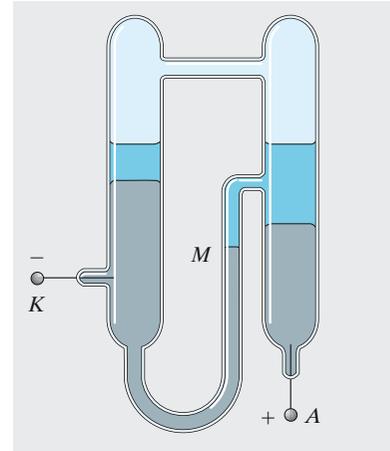


Abb. 6.92. Kapillarelektrometer (Quecksilber ist mit verdünnter Schwefelsäure überschichtet)

Grenzfläche die Doppelschicht, die der Träger einer **Voltspannung** ist. Die an den Atomen der Quecksilberoberfläche angreifenden, nach außen gerichteten elektrischen Kräfte verringern die Oberflächenspannung: Der Tropfen wird flacher.

Kapillarelektrometer (Abb. 6.92). Legt man an die Elektroden A und K eine Spannung, so wird die Oberflächenspannung des Quecksilbers um einen Betrag verkleinert, der von außen angelegten elektrischen Spannung proportional ist, solange diese kleiner als $1/10$ Volt bleibt. Wegen der Änderung der Oberflächenspannung verschiebt sich der Meniskus M , dessen Ansteigen durch ein Mikroskop beobachtet wird. Das Kapillarelektrometer ist zur Messung kleiner Spannungen, vor allem als Nullinstrument geeignet.

6.6 Thermoelektrizität

Bei *Galvani* und *Volta* durften die beiden verschiedenen Metalle sich natürlich nicht direkt berühren, *Thomas Johann Seebeck* lötete 1821 zwei Drähte zum Ring zusammen und fand: Auch eine Temperaturdifferenz zwischen den beiden Lötstellen treibt einen Strom an.

6.6.1 Der Seebeck-Effekt

Wenn zwei verschiedene Metalle einander berühren, gehen einige Elektronen vom einen (2) zum anderen (1) über. Wie bei der Reibungselektrizität ist hierfür die Tiefe der höchsten besetzten Elektronenzustände (**Fermi-Grenze**), d. h. die Austrittsarbeit der Elektronen verantwortlich. Das Metall mit der geringeren Austrittsarbeit gibt Elektronen ab und wird positiv. Der Übertritt hört erst auf, wenn sich eine **Kontaktspannung** eingestellt hat, die entgegengesetzt gleich der Differenz der Fermi-Niveaus ist. Dann treten in beiden Richtungen gleich viele Elektronen über: Von 2 nach 1 durch Diffusion, von 1 nach 2 infolge des elektrischen Feldes in der Grenzschicht, die wieder eine Doppelschicht ist. Könnte man die beiden Elektronengase

streng nach der Boltzmann-Statistik behandeln (in Wirklichkeit gilt für so dichte Gase die Fermi-Statistik), ergäbe sich die Kontaktspannung wieder aus dem Verhältnis der Teilchenzahldichten:

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-e \Delta U / (kT)} \Rightarrow \Delta U = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_1} . \tag{6.102}$$

Biegt man die beiden Metalle zum offenen Ring, so herrscht zwischen den freien Enden ein elektrisches Feld (Abb. 6.96). Bringt man die Enden zur Berührung, bildet sich dort die gleiche Kontaktspannung aus. Da beide Spannungen aber gegeneinander geschaltet sind, fließt im Ring kein Strom. Erwärmt man aber die eine Kontaktstelle, dann werden die beiden Kontaktspannungen nach (6.102) trotz gleichen Verhältnisses n_2/n_1 *verschieden*, und es fließt ein **Thermostrom**. Die dafür benötigte Energie wird der Wärmequelle entnommen.

Lötet man also zwei Drähte aus verschiedenen Metallen an beiden Enden zusammen und schaltet in den einen Draht ein Voltmeter, so zeigt dieses eine **Thermospannung** an, die außer von den Eigenschaften der beiden Metalle nur von der Temperaturdifferenz ΔT zwischen den beiden Lötstellen abhängt. Solche **Thermoelemente**, deren eine Lötstelle auf eine konstante Temperatur gebracht wird (z. B. durch Eintauchen in ein Eis-Wasser-Gemisch), haben als Thermometer den Vorzug großer Empfindlichkeit, geringer Wärmekapazität und daher sehr geringer Trägheit. Die Thermospannung sollte nach (6.102) als Differenz der beiden Kontaktspannungen

$$U_{th} = \frac{k}{e} \ln \frac{n_2}{n_1} \Delta T$$

sein. Für manche Metallkombinationen, z. B. Kupfer-Konstantan oder Eisen-Konstantan, gilt das auch in einem weiten Bereich. Allgemeiner liefert die Fermi-Verteilung auch höhere Potenzen von ΔT :

$$U_{th} = a \Delta T + b \Delta T^2 . \tag{6.103}$$

Die Änderung der Thermospannung mit der Temperatur bestimmt die Empfindlichkeit des Thermoelements oder die **Thermokraft**

$$\frac{dU_{th}}{dT} = a + 2b \Delta T .$$

Da $k/e = 1/11\,600 \text{ J C}^{-1} \text{ K}^{-1} = 86 \mu\text{V K}^{-1}$, erwartet man nach (6.102) Thermokräfte von der Größenordnung einiger $\mu\text{V/K}$. In der **thermoelektrischen Spannungsreihe** (Tabelle 6.8) steht ein Metall weit oben, wenn es eine hochliegende Fermi-Grenze hat. Die Extreme bilden Sb und Bi, die schon am Übergang zu den Nichtmetallen liegen. Einige Halbleiter ergeben noch höhere Thermospannungen, da die Unterschiede ihrer Fermi-Grenzen größer sind.

Die Thermospannung wurde schon 1822 von *Seebeck* entdeckt. Heute gewinnt sie besondere Bedeutung im Rahmen der Direktumwandlung von Wärmeenergie in elektrische (im Gegensatz zu den herkömmlichen Kraftwerken, wo immer der Umweg über die mechanische Energie dazwischenliegt). Abbildung 6.98 zeigt das Prinzip eines **Thermogenerators**.



Abb. 6.95. Der Thermostrom ist ein Elektronen-Antimonsun

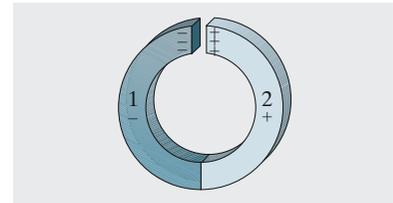


Abb. 6.96. Kontaktspannung zwischen zwei sich berührenden Metallen

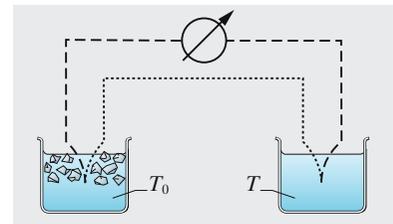


Abb. 6.97. Temperaturmessung mittels Thermoelement

Tabelle 6.8. Stellung einiger Elemente in der thermoelektrischen Spannungsreihe bei der Temperatur 0 °C. (Für Pb ist die Thermokraft willkürlich gleich Null gesetzt)

Element	Thermokraft $\mu\text{V K}^{-1}$
Sb	+35
Fe	+16
Zn	+ 3
Cu	+ 2,8
Ag	+ 2,7
Pb	0
Al	- 0,5
Pt	- 3,1
Ni	-19
Bi	-70

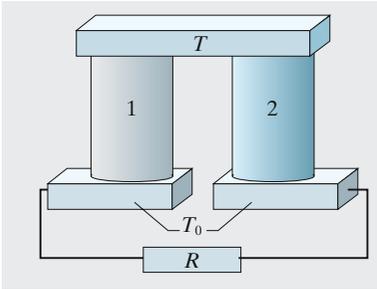


Abb. 6.98. Thermogenerator, schematisch

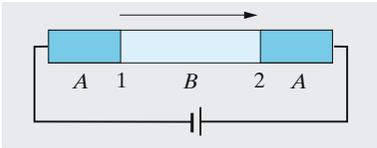


Abb. 6.99. Peltier-Effekt

Die Schenkel aus den Materialien 1 und 2 nehmen die Wärme über einen großflächigen Brückenkontakt oben auf. Die unteren Enden werden auf der Temperatur T_0 gehalten. R symbolisiert den Verbraucher der elektrischen Energie. Der Wirkungsgrad ist allerdings aus thermodynamischen Gründen klein, viel kleiner als $(T - T_0)/T$. Mit p - bzw. n -leitenden Halbleitern erzielt man Wirkungsgrade von 8–10%.

Andere Versuche zur Direktumwandlung arbeiten mit **Brennstoffzellen**, bei denen chemische Energie, die in Gestalt flüssiger Brennstoffe zugeführt wird, ohne eigentliche Verbrennung direkt in elektrische Energie umgesetzt wird. Hier hat man im Labor schon Wirkungsgrade um 80% erreicht.

6.6.2 Peltier-Effekt und Thomson-Effekt

An die Enden eines Metallstabes B sind zwei Stäbe aus einem anderen Metall A gelötet. Wenn man durch ABA einen Strom schickt, kühlt sich die eine Lötstelle ab, die andere erwärmt sich, und zwar viel stärker als durch die Joule-Wärme allein. Die Wärmeleistung in der Kontaktstelle ist proportional zum Strom I :

$$P = \Pi I . \quad (6.104)$$

Π ist der **Peltier-Koeffizient**. Zwischen ihm und der Thermokraft η besteht der Zusammenhang

$$\Pi = \eta T . \quad (6.105)$$

Seebeck- und Peltier-Effekt sind also eng verwandt. Ein Peltier-Element von der Bauart von Abb. 6.99 lässt sich in einer Wärmepumpe oder einem Kühlschranks ausnutzen. Je nach der Polung kann die Brücke an einer Lötstelle heizen oder kühlen, die andere tut das Gegenteil.

Auch in einem homogenen Leiter wird bei Stromfluss Wärme erzeugt, wenn man darin ein Temperaturgefälle $\Delta T/l$ aufrechterhält (**Thomson-Effekt**). Diese Wärmeleistung ist $P = -\sigma I \Delta T$ und dadurch von der Joule-Leistung zu unterscheiden, die proportional zu I^2 ist. Der **Thomson-Koeffizient** ist von der Größenordnung $\mu\text{V}/\text{K}$ und thermodynamisch eng mit Peltier-Koeffizient und Thermokraft verknüpft.

6.7 Ströme und Felder

Als *Christian Oersted* 1820 eine Magnetnadel neben einen stromführenden Draht hielt, wurde klar, dass die beiden bisher völlig getrennten Phänomene Elektrizität und Magnetismus eine Einheit bilden.

6.7.1 Elektrostatik

Wir gehen davon aus, dass wir wissen, was elektrische Ladungen sind. Sie können realisiert sein durch Elektronen oder andere geladene Elementarteilchen, aber auch durch größere Teilchen. Wir wissen außerdem, dass es Raumgebiete gibt, wo auf solche Ladungen Kräfte wirken. Zunächst reden wir von Kräften, die *unabhängig*

vom Bewegungszustand der Teilchen sind. Wo eine solche Kraft F , eine **Coulomb-Kraft**, auf eine Ladung Q wirkt, sagen wir, es bestehe ein Feld E , definiert durch

$$\boxed{F = QE} . \quad (6.106)$$

Von unserem Standpunkt aus ist dies eine Definitionsgleichung für E , denn ohne das Verhalten von Probeladungen zu beobachten, wüsste man nichts über Existenz und Verteilung des E -Feldes. Wir können jetzt E im ganzen Raum ausmessen, indem wir eine Probeladung umherführen.

Wo ein Feld E herrscht, sind andere Ladungen meist nicht weit, die es erzeugen. Ladungen stehen in doppelter Beziehung zum Feld: Sie werden von ihm beschleunigt ($F = QE$), und sie erzeugen ein Feld. Die Felderzeugung durch eine räumlich verteilte Ladung der Dichte ρ wird beschrieben durch die **Poisson-Gleichung**

$$\boxed{\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} . \quad (6.107)$$

Diese beiden Gleichungen (6.106) und (6.107) enthalten die ganze Elektrostatik im Vakuum. Wenn man noch das ohmsche Gesetz in Differentialform

$$\boxed{j = \sigma E} \quad (6.108)$$

hinzunimmt, das in vielen (aber längst nicht allen) Materialien gilt, hat man auch die Theorie der Gleichströme. Dabei ist offenbar vorausgesetzt, dass alle Ströme in geschlossenen Kreisen fließen, denn sonst würden sich Ladungen anhäufen, Ladungs- und Feldverteilung wären nicht mehr statisch.

Die zweite Feldgröße D ist in diesem Zusammenhang eigentlich entbehrlich. Sie wird eingeführt, damit man zwei Arten von Ladung unterscheiden kann: Freie und gebundene Ladungsdichten, ρ_f und ρ_g . Der Anteil ρ_g stammt von der Polarisation der Materie. In gleichmäßig polarisierter Materie ist $\rho_g = 0$. Nur an der Grenzfläche zwischen Gebieten mit verschiedener Polarisation, oder wo gleiche Enden von Dipolen zusammentreffen, entsteht ρ_g :

$$\rho_g = -\operatorname{div} P . \quad (6.109)$$

Nur ρ_f erzeugt D , aber $\rho_f + \rho_g$ erzeugt E . Dabei ist D so definiert, dass schon im Vakuum $\operatorname{div} D = \rho_f$ gilt, also $D = \varepsilon_0 E$. Mit (6.109) folgt dann

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho_f + \rho_g}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} D - \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} P ,$$

also

$$\boxed{D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon \varepsilon_0 E} . \quad (6.110)$$

Man kann die Einführung zweier Feldgrößen rechtfertigen, indem man sagt: E beschreibt die Wirkung des Feldes auf Ladungen ($F = QE$), D die Art, wie es durch freie Ladungen erzeugt wird ($\operatorname{div} D = \rho_f$).

6.7.2 Lorentz-Kraft und Magnetfeld

Im elektrischen Feld E verhalten sich geladene Teilchen sehr einfach: Sie werden parallel oder antiparallel zu E abgelenkt. Ein geladenes Teilchen kann auch in eine Gegend geraten, wo es sich ganz anders verhält. Beobachtung von Elektronen in Vakuumröhren zeigt, dass es eine Kraft mit folgenden Eigenschaften gibt:

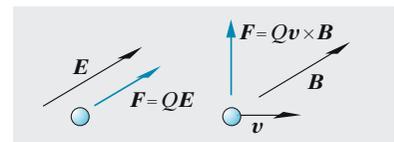


Abb. 6.100. Coulomb-Kraft und Lorentz-Kraft. Im elektrischen Feld E wirkt auf eine Ladung immer eine Kraft, im Magnetfeld B nur, wenn die Ladung sich bewegt

- Sie tritt nur auf, wenn sich das geladene Teilchen *bewegt*, und ist proportional der Geschwindigkeit und auch proportional der Ladung selbst.
- Sie wirkt immer *senkrecht* zur Geschwindigkeit \mathbf{v} des geladenen Teilchens, lenkt es also *seitlich* ab.
- Wenn man das geladene Teilchen in anderer Richtung einschießt, ändern sich Größe und Richtung der Kraft. Kehrt man die \mathbf{v} -Richtung um, dann kehrt sich auch die \mathbf{F} -Richtung um.
- Es gibt eine \mathbf{v} -Richtung, für die $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ist, also keine Ablenkung auftritt. Für alle anderen \mathbf{v} -Richtungen ist \mathbf{F} nicht nur senkrecht zu \mathbf{v} , sondern auch senkrecht zu dieser ausgezeichneten Raumrichtung. Hierdurch ist die Richtung von \mathbf{F} festgelegt (nicht aber Betrag und Richtungssinn).
- Wenn \mathbf{v} zur ausgezeichneten Raumrichtung den Winkel α bildet, ändert sich der Betrag der ablenkenden Kraft wie $v \sin \alpha$.

Alle diese Eigenschaften der ablenkenden Kraft lassen sich zusammenfassen durch ihre Darstellung als Vektorprodukt von $Q\mathbf{v}$ mit einem Vektor \mathbf{B} :

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (6.111)$$

Eine solche Kraft heißt **Lorentz-Kraft**. Wo bewegte Ladungen solche Kräfte erfahren, sagt man, es herrsche ein Magnetfeld. Der Vektor \mathbf{B} ist parallel zur ausgezeichneten \mathbf{v} -Richtung, in der keine Ablenkung auftritt. Der Richtungssinn ergibt sich aus der Definition des Vektorprodukts: Rechte Hand, Daumen \mathbf{v} , Zeigefinger \mathbf{B} , Mittelfinger \mathbf{F} . Dieser Richtungssinn von \mathbf{B} ist willkürlich. Man hätte ebenso gut definieren können $\mathbf{F} = Q\mathbf{B} \times \mathbf{v}$, und dann ergäbe sich für \mathbf{B} der entgegengesetzte Sinn. Auch sämtliche sonstigen physikalischen Wirkungen des Magnetfeldes bleiben dieselben, wenn man \mathbf{B} anders herum definiert. Der Betrag von \mathbf{B} ist mit (6.111) festgelegt, ebenso seine Einheit:

$$\frac{\text{N}}{\text{C m s}^{-1}} = \frac{\text{J m C m s}^{-1}}{=} \text{V s m}^{-2} = \text{T} = \text{Tesla} = 10^4 \text{ Gauß} . \quad (6.112)$$

Wir haben das Magnetfeld \mathbf{B} durch seine Kraftwirkung auf bewegte Ladungen definiert, ebenso wie wir das elektrische Feld \mathbf{E} durch seine Kraftwirkung auf Ladungen (von beliebigem Bewegungszustand) definierten. Gewöhnlich geht man von der *Erzeugung* des Feldes aus. Wir können schon vermuten, dass \mathbf{B} durch *bewegte* Ladungen, also Ströme erzeugt wird, ebenso wie \mathbf{E} durch Ladungen von beliebigem Bewegungszustand (Abschn. 6.8).

6.7.3 Kräfte auf Ströme im Magnetfeld

Durch ein Drahtstück mit der Länge l und dem Querschnitt A fließe ein Strom I , d. h. es herrsche eine Stromdichte vom Betrag $j = I/A$ und mit der Richtung der Drahtachse. Wenn der Draht geladene Teilchen, z. B. Elektronen mit der Ladung $Q = -e$ in der Anzahldichte n enthält, müssen diese sich mit einer mittleren Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegen, sodass

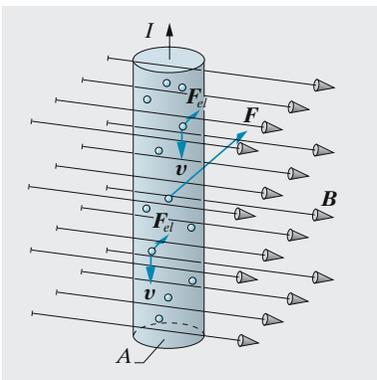


Abb. 6.101. Die Kraft auf einen Draht der Länge l , der den Strom I führt, im Magnetfeld \mathbf{B} ist $\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, unabhängig davon, wie viele Ladungen nötig sind, um den Strom zu transportieren, und wie schnell sie sich bewegen

$$\mathbf{j} = -env \quad \text{und} \quad I = -envA \quad (6.113)$$

(vgl. Abschn. 6.4.2). Das ganze Drahtstück enthält nIA Elektronen. Auf jedes dieser bewegten Elektronen wirkt die Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, auf die nIA Elektronen im Draht die Gesamtkraft

$$\mathbf{F} = -enIA\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Nach (6.113) kann man das durch den Strom ausdrücken:

$$\boxed{\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}}. \quad (6.114)$$

l kennzeichnet nicht nur die Länge des Drahtes (durch seinen Betrag l), sondern auch seine Richtung; der Richtungssinn ist so, dass der Strom als positiv zählt, wenn er in l -Richtung fließt.

Bemerkenswert an (6.114) ist, dass die Kraft *nicht* von den mikroskopischen Einzelheiten des Leitungsmechanismus abhängt. Gäbe es weniger Ladungsträger, müssten sie schneller laufen, um den gegebenen Strom I zu erzeugen. In \mathbf{F} geht aber nur das Produkt $n\mathbf{v}$ ein. Auch wenn die Ladungsträger das andere Vorzeichen hätten, würde sich \mathbf{F} nicht ändern: Die Vorzeichen von Q und \mathbf{v} kehrten sich gleichzeitig um. Es spielt auch keine Rolle, ob es mehrere Gruppen von Trägern mit verschiedenen Ladungen und Geschwindigkeiten gibt. \mathbf{F} hängt nur vom makroskopischen Strom I ab.

Noch einfacher als (6.114) ist die Beziehung zwischen Stromdichte \mathbf{j} und Kraftdichte \mathbf{f} (Kraft auf die Volumeneinheit des Leiters):

$$\boxed{\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}}. \quad (6.115)$$

Sie ergibt sich aus (6.114) sofort durch Division durch das Drahtvolumen Al .

(6.114) bzw. (6.115) ist die Grundlage der Technik der Elektromotoren und der elektrischen Messgeräte. Hier handelt es sich meist um **Leiterschleifen** im Magnetfeld. Eine Rechteckschleife mit den Seitenlängen a , b , drehbar um die Mitte der b -Seiten, werde von einem Strom I durchflossen und befinde sich in einem homogenen Magnetfeld, dessen \mathbf{B} parallel zur Schleifenfläche und senkrecht zur Drehachse steht. In den beiden a -Stücken fließt der Strom I in entgegengesetzten Richtungen. Die Lorentz-Kräfte bilden also ein Kräftepaar $\pm IaB$ senkrecht zur Schleifenfläche, d. h. ein Drehmoment $bIaB$, dessen Vektor in Achsenrichtung liegt und das die Schleife um diese Achse zu drehen sucht. Wir kennzeichnen die Größe und Stellung der Schleife durch den Normalvektor \mathbf{A} , dessen Betrag die Fläche ab ist und der so senkrecht zur Schleifenfläche steht, dass der Strom im Rechtsschraubensinn umläuft (Rechte-Hand-Regel: Wenn die gekrümmten Finger die Stromrichtung angeben, zeigt der ausgestreckte Daumen in \mathbf{A} -Richtung). Wenn \mathbf{A} einen Winkel α zur \mathbf{B} -Richtung bildet, sind die beiden Lorentz-Kräfte noch ebenso groß wie bei $\alpha = 90^\circ$, aber der „Kraftarm“ ist nur noch $b \sin \alpha$, das Drehmoment hat den Betrag $IabB \sin \alpha$. Offenbar lassen sich Beträge und Richtungen vollständig darstellen durch

$$\boxed{\mathbf{T} = I\mathbf{A} \times \mathbf{B}}. \quad (6.116)$$

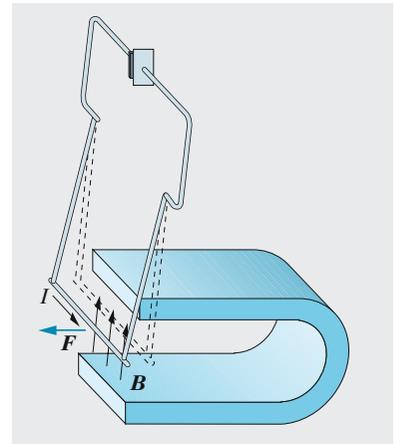


Abb. 6.102. Lorentz-Schaukel. Der Draht wird seitlich weggedrückt, sobald ein Strom durchfließt. Änderung der Stromrichtung kehrt auch die Auslenkung um

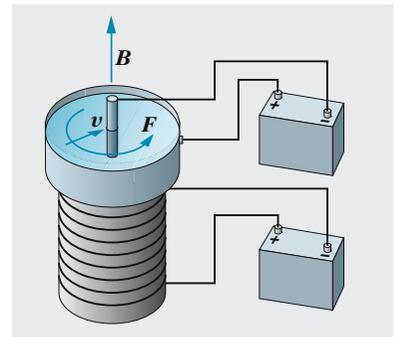


Abb. 6.103. Lorentz-Karussell. Auf einem Elektromagneten steht eine Wanne z. B. mit verdünnter Schwefelsäure, durch die zwischen zentraler und äußerer Elektrode ein Strom in radialer Richtung fließt. Die Flüssigkeit setzt sich in rotierende Bewegung, denn überall wirkt eine Lorentz-Kraft im gleichen tangentialen Sinn. Will man den Versuch mit Wechselspannung betreiben, nehme man den Eisenkern aus dem Elektromagneten (warum?) und lege einen geeigneten regelbaren Widerstand vor die Spule (wozu?). Denken Sie an diesen Versuch, wenn Sie Asynchronmotor, Wechselstromzähler u. Ä. studieren

Die Schleife möchte sich so stellen, dass $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ wird, d.h. dass der Strom das Feld nach der Rechte-Hand-Regel umkreist. Dies ist eine stabile Gleichgewichtslage, denn $\mathbf{T} = \mathbf{0}$, und jede Verdrehung erzeugt ein Rückstellmoment. Der \mathbf{A} -Vektor stellt sich ein wie eine Kompassnadel. Manchmal fasst man daher I und \mathbf{A} zum **magnetischen Moment** $\boldsymbol{\mu}$ der Stromschleife zusammen:

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{T} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}} \quad (6.117)$$

6.7.4 Der Hall-Effekt

Die Lorentz-Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld wirkt primär auf die Ladungsträger, die sich darin bewegen. Sie werden relativ zum Leiter seitlich abgelenkt, senkrecht zu ihrer Flugrichtung und zu \mathbf{B} . An beiden Seitenflächen des Leiters häufen sich entgegengesetzte Ladungen an. Nach sehr kurzer Zeit (Beispiel, s. unten) hat das Querfeld \mathbf{E}_H , das diese Ladungen erzeugen, einen Wert erreicht, der die Lorentz-Kraft genau kompensiert:

$$e\mathbf{E}_H = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.118)$$

Dann laufen die Träger wieder gerade durch den Leiter, d.h. parallel zu seinen Seitenflächen. Es bleibt die Kraftdichte $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = -en\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ auf den Leiter selbst.

In einem Leiter der Dicke b im transversalen \mathbf{B} -Feld ($\mathbf{j} \perp \mathbf{B}$, Abb. 6.105) bedingt das Querfeld $\mathbf{E}_H = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ eine Querspannung

$$U_H = -bvB, \quad (6.119)$$

die **Hall-Spannung** (Edwin Hall, 1879). Im Gegensatz zur Lorentz-Kraft auf den gesamten Leiter ist die Hall-Spannung nicht nur von der Gesamtstromdichte $\mathbf{j} = en\mathbf{v}$ abhängig, sondern von der Trägergeschwindigkeit \mathbf{v} allein, und erlaubt daher, die Faktoren im Ausdruck $en\mathbf{v}$ getrennt zu bestimmen. Drückt man die Hall-Spannung durch den Gesamtstrom $I = dbj = dbenv$ aus, dann wird

$$\boxed{U_H = -\frac{1}{en} \frac{IB}{d} = -A_H \frac{IB}{d}} \quad (6.120)$$

$A_H = 1/(en)$ heißt Hall-Koeffizient des Materials. Aus seinem Vorzeichen ergibt sich das der Ladungsträger, sein Betrag ist umso größer, je kleiner n ist. Bei gut leitenden Metallen ist der **Hall-Effekt** daher sehr klein, seine Bedeutung gewinnt er erst bei Halbmetallen wie Wismut und besonders bei den Halbleitern. Ganz speziell kommen die 3–5-Halbleiter (Verbindungen aus einem Element der dritten und einem der fünften Spalte des Periodensystems, z. B. InAs und InSb) zum Bau von Hall-Generatoren in Betracht. Bei ihnen laufen die Ladungsträger im gegebenen elektrischen Feld besonders schnell (hohe Beweglichkeit v/E).

Mit **Hall-Generatoren** aus solchen 3–5-Verbindungen kann man die Messung eines Magnetfeldes auf einfache elektrische Messungen von I

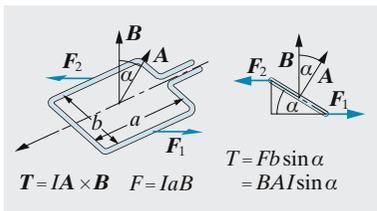


Abb. 6.104. Das Drehmoment auf eine Leiterschleife im Magnetfeld hängt ab von Strom I , Fläche A , Feld B und dem Winkel α zwischen Schleifennormale und Feld: $T = IAB \sin \alpha$

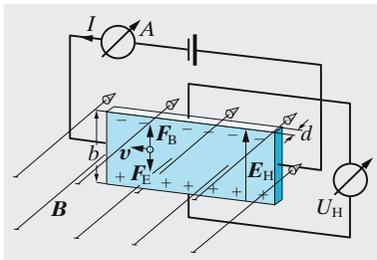


Abb. 6.105. Hall-Effekt. Die Lorentz-Kraft treibt die Ladungsträger im Magnetfeld B seitlich ab, bis sich ein Querfeld $\mathbf{E}_H = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ aufbaut, das die Lorentz-Kraft kompensiert. Die entsprechende Querspannung erlaubt also \mathbf{v} direkt zu messen. Sind Ladungsträger beider Vorzeichen vorhanden, treiben beide zur gleichen Seite ab (ihre elektrischen Driftgeschwindigkeiten sind ja entgegengesetzt), und ihre Querfelder subtrahieren sich

und U_H zurückführen: Hall-Sonde. Die Hall-Spannung U_H ist proportional zum Produkt von I und B . Im Allgemeinen wird das Feld B durch einen anderen Strom I' erzeugt, der z. B. durch eine Spule fließt, die den Hall-Generator umgibt. Dann ist $U_H \sim I I'$. Messung der Hall-Spannung liefert das *Produkt* zweier Ströme. Mit einem Hall-Generator kann man in Analogrechnern multiplizieren. Wenn der eine Strom, etwa I' , proportional der anliegenden Spannung U ist, misst U_H die Leistung IU (Hall-Wattmeter).

x Beispiel...

Wenn man quer zum elektrischen Feld ein Magnetfeld einschaltet, dauert es im Prinzip eine gewisse Zeit, bis sich durch Ladungsträgerverschiebung das Hall-Feld senkrecht zu beiden Feldern ausbildet. Schätzen Sie diese Zeit. Sie werden eine bereits bekannte Größe wiederfinden.

Das Querfeld $E_{\perp} = vB$ setzt eine Flächenaufladung $\rho d = \varepsilon_0 \varepsilon E$ voraus. Diese Ladung wird durch eine Stromdichte j in der Zeit $\varepsilon_0 \varepsilon E_{\perp} / j$ aufgebaut. Diese Stromdichte lässt sich als $j = \sigma E_{\perp}$ ausdrücken, also ist die Aufbauzeit $\tau = \varepsilon \varepsilon_0 / \sigma$, die elektrische Relaxationszeit (Abschn. 6.4.3g), die für Metalle und selbst für Halbleiter sehr kurz ist, nur selten größer als 10^{-10} s.

6.7.5 Relativität der Felder

Die folgenden Überlegungen sind grundlegend für ein tieferes Verständnis der begrifflichen Struktur der Elektrodynamik, z. B. des **Induktionsgesetzes** und des **Verschiebungsstromes**, aber auch so handfester Dinge wie Elektromotoren und Generatoren.

Wir betrachten wieder ein Elektron, das mit der Geschwindigkeit v z. B. von uns weg durchs Labor fliegt. In einem bestimmten Gebiet beginne das Elektron nach links von seiner bisher geraden Bahn abzuweichen. Das könnte zunächst zwei Ursachen haben: Ein nach *rechts* gerichtetes E -Feld oder ein nach *oben* gerichtetes B -Feld (man beachte die negative Ladung des Elektrons). Genauere Betrachtung zeige, dass das Elektron mit gleichförmiger Geschwindigkeit einen Kreis zu beschreiben beginnt, was auf eine Kraft immer senkrecht zu v schließen lässt. In einem homogenen E -Feld würde das Elektron eine Parabel beschreiben und Geschwindigkeit gewinnen. Es handelt sich also um ein B -Feld.

Ein ungeladenes Atom fliege anfangs parallel zu unserem Elektron, z. B. etwas rechts davon. Ein Beobachter, der auf diesem Atom säße, würde zunächst ein *ruhendes* Elektron in gewissem Abstand sehen. Nach einer Weile (der Labor-Beobachter würde sagen: Wenn die Teilchen ins B -Feld eintreten) beginnt das Elektron sich *beschleunigt* vom Atom-Beobachter zu entfernen. Dafür muss eine Kraft verantwortlich sein. Größe und Richtung dieser Kraft sind dieselben, die wir auch messen. Der Atom-Beobachter kann sie aber nicht als Lorentz-Kraft deuten, denn das Elektron ruht ja für ihn. Die einzige Kraft, die auf ruhende Elektronen wirkt, ist eine Coulomb-Kraft $-eE'$ (Gravitationskräfte sind für atomare Teilchen fast immer vernachlässigbar, Kernkräfte und dgl. wirken nur in subatomaren Bereichen). Getreu unserem Standpunkt, die Felder durch ihre Kraftwir-

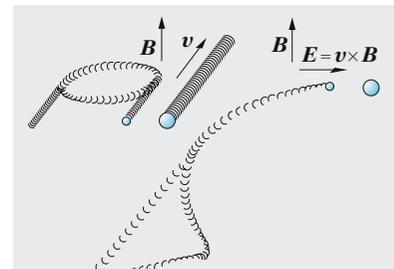


Abb. 6.106. Im Laborsystem beginnt das Elektron einen Kreis zu beschreiben, sobald es ins Magnetfeld B eintritt. Im mitbewegten System muss diese Ablenkung zunächst allein von einem elektrischen Feld $E = v \times B$ stammen, weil das Elektron anfangs ruht. Erst später, wenn das Elektron in Fahrt gekommen ist, kann sich auch das B -Feld auswirken und erzeugt eine Zykloidenbahn des Elektrons

kungen auf Ladungen zu definieren, folgert also der Atombeobachter die Existenz eines elektrischen Feldes \mathbf{E}' im fraglichen Gebiet. Dieses Feld erzeugt genau die gleiche Kraft, die der Labor-Beobachter als Lorentz-Kraft deutet, also

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.121)$$

(gestrichene Größen: Atom-System; ungestrichene Größen: Labor-System).

Wenn man sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} gegen ein System bewegt, in dem ein \mathbf{B} -Feld herrscht, aber kein \mathbf{E} -Feld, empfindet man ein \mathbf{E}' -Feld gemäß $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Man kann also wahlweise sagen: Das geladene Teilchen wird abgelenkt, weil es sich im \mathbf{B} -Feld bewegt, oder: Das Teilchen wird von dem \mathbf{E}' -Feld beschleunigt, das in seinem Eigensystem herrscht.

Diese Betrachtung gilt zunächst nur kurz nach dem Eintritt ins \mathbf{B} -Feld, d. h. solange das Elektron relativ zum Atom-Beobachter A noch praktisch ruht. Später nimmt das Elektron auch für A eine Geschwindigkeit an, und seine Bewegung wird dann auch für A von *zwei* Kräften beherrscht, nämlich der Coulomb-Kraft im Feld \mathbf{E}' und der Lorentz-Kraft im Feld \mathbf{B}' , das auch für A existiert und für nicht zu schnelle Bewegungen ($v \ll c$) ebenso groß ist wie das \mathbf{B} im Laborsystem. Kinematisch ist sofort klar, was für eine Bahn das Elektron für den Atom-Beobachter A beschreibt: Eine Zykloide. Der stationäre Kreis, den man vom Labor aus beobachtet, rollt für ihn mit der Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ nach hinten weg. Wir wissen daher ohne jede Rechnung auch, was ein anfangs ruhendes Elektron tut, wenn es im Laborsystem einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} und einem dazu senkrechten Feld \mathbf{E} ausgesetzt ist: Es beschreibt ebenfalls eine Zykloide (Aufgabe 6.7.8).

Die Symmetrie zwischen \mathbf{E} und \mathbf{B} , die bisher überall herrschte, lässt vermuten, dass aus einem \mathbf{E} auch ein \mathbf{B} herauswächst, wenn man sich bewegt. Im Laborsystem L herrsche kein \mathbf{B} , nur ein \mathbf{E} . Beobachtet man in einem System, das sich mit \mathbf{v} gegen L bewegt, nur ein \mathbf{E}' oder auch ein \mathbf{B}' ? Wenn ein \mathbf{B}' auftritt, wird es sicher auch proportional zu \mathbf{v} sein. Wir vermuten analog zu (6.121)

$$\mathbf{B}' = k\mathbf{v} \times \mathbf{E} .$$

Aus Dimensionsgründen muss die Konstante k ein reziprokes Geschwindigkeitsquadrat sein, denn andererseits ist ja $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. k ist eine *universelle* Konstante. Die einzige universelle Naturkonstante dieser Dimension, die nicht von der atomaren Struktur der Materie bedingt wird, ist c^{-2} . Wir postulieren also

$$\mathbf{B}' = -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} . \quad (6.122)$$

Diese Beziehung, einschließlich des Vorzeichens, wird in Abschn. 6.8.2 aus einer etwas komplizierten Betrachtung abgeleitet. Wir erheben sie

zunächst zum Postulat vom gleichen Rang wie $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ oder wie die damit äquivalente Existenz der Lorentz-Kraft.

6.8 Erzeugung von Magnetfeldern

Biot und *Savart* fanden gleich nach *Oersted* 1820 die $1/r$ -Abhängigkeit der Magnetkraft um einen Draht. *Andrè Marie Ampère*, von dem man sagt, dass er mit 12 Jahren die gesamte damalige Mathematik beherrschte, formulierte 1823 allgemein das Durchflutungsgesetz für den Zusammenhang zwischen Strom und Feld.

6.8.1 Das Feld des geraden Elektronenstrahls oder des geraden Drahtes

Eine Elektronenquelle emittiere ständig Elektronen in eine bestimmte Richtung. Durch den Raum fliegt also ein praktisch kompakter Zylinder vom Querschnitt A aus Elektronen mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} und der Anzahldichte n . Er repräsentiert eine Stromdichte $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}$ in Achsrichtung und einen Strom $I = -en\mathbf{v}A$. Zweifellos erzeugt dieser Strom ein Magnetfeld \mathbf{B} um den Strahl. Um es zu bestimmen, verlassen wir das Laborsystem und fliegen mit den Elektronen mit. Dann ruhen für uns die Elektronen, repräsentieren keinen Strom und erzeugen kein Magnetfeld. Ein \mathbf{E} -Feld erzeugen sie aber bestimmt. Dieses ist leicht anzugeben, z. B. mittels des Satzes von *Gauß* (6.9): Ein Zylinder vom Radius r und der Länge l , der den Strahl umschließt, enthält die Ladung $-enAl$. Der elektrische Fluss durch seine Oberfläche $2\pi rl$ ist $2\pi rlE' = -enAl/\epsilon_0$, also

$$E' = -\frac{enA}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 v r}. \quad (6.123)$$

E' zeigt überall radial auf den Strahl zu (negative Teilchen).

Jetzt begeben wir uns zurück ins Laborsystem. Dazu müssen wir die Transformation (6.122) rückwärts anwenden. Im System der Elektronen herrscht ja nur das \mathbf{E} -Feld (6.123). Welches \mathbf{B} -Feld wächst daraus hervor, wenn man sich mit $-\mathbf{v}$ dagegen bewegt, wie es das Labor tut? Das \mathbf{B} -Feld hat den Betrag

$$B = \frac{vE'}{c^2} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (6.124)$$

und steht überall senkrecht auf \mathbf{E}' (der Radialrichtung) und \mathbf{v} (der Strahlrichtung). Die \mathbf{B} -Linien können daher nur in konzentrischen Kreisen um den Strahl laufen. Sie haben keinen Anfang und kein Ende, im Gegensatz zu den \mathbf{E} -Linien, die in Ladungen beginnen und enden. \mathbf{B} ist divergenzfrei:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0}. \quad (6.125)$$

Wir werden sehen, dass dies eine ganz allgemeine Eigenschaft des \mathbf{B} -Feldes ist. Sie drückt aus, dass es keine magnetischen Ladungen gibt.

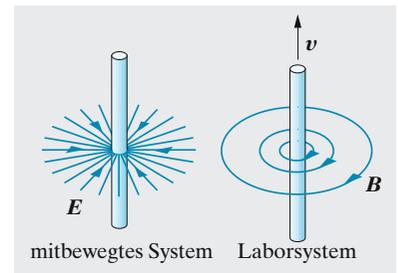


Abb. 6.107. Der mit \mathbf{v} fließende Elektronenstrahl erzeugt im mitbewegten System nur ein radiales \mathbf{E} -Feld. $E = neA/(2\pi\epsilon_0 r)$. Im Laborsystem wächst aus diesem \mathbf{E} -Feld ein tangentiales \mathbf{B} -Feld vom Betrag $B = vE/c^2 = neAv/(2\pi\epsilon_0 c^2) = \mu_0 I/(2\pi r)$

Außerdem lesen wir aus (6.124) ab: Das Linienintegral von \mathbf{B} über jeden Kreis um die Strahlachse hat den gleichen Wert

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}. \quad (6.126)$$

Das gilt überhaupt für jede geschlossene Kurve, die den Strahl umschließt. Jede geschlossene Kurve, die den Strahl draußen lässt, ergibt Null als Linienintegral. Nach dem Satz von Stokes (3.25) bedeutet das

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{überall außerhalb des Strahls}. \quad (6.127)$$

Innerhalb des Strahls kann $\text{rot } \mathbf{B}$ nicht verschwinden, sondern es muss sein

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (6.128)$$

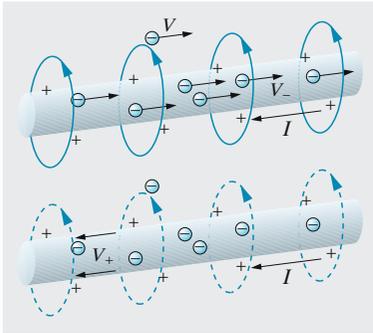


Abb. 6.108. Oben: Eine einzelne Ladung q fliegt mit der Geschwindigkeit v an einem stromdurchflossenen Leiter entlang. Unten: Die Ladung ruht, der Leiter bewegt sich mit der Geschwindigkeit $-v$ in der Gegenrichtung

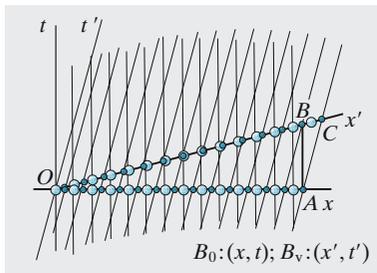


Abb. 6.109. Im Laborsystem ist ein stromführender Draht ungeladen (gleich dichte Ionen und Elektronen). In dem System, das sich mit den Elektronen mitbewegt (Geschwindigkeit hier weit übertrieben), liegen die Elektronen weniger dicht als die Ionen (schräge x' -Achse = Jetzt-Achse des mitbewegten Systems), also ist der Draht in diesem System positiv geladen. Die Ladungsdichte lässt sich aus den Dreiecken OAB bzw. OAC ablesen

Wenn es für die Erzeugung des Magnetfeldes nur auf den Strom ankommt, muss ein *gerader Draht*, durch den der Strom I fließt, das gleiche \mathbf{B} erzeugen wie der Elektronenstrahl. Das ist auch der Fall, obwohl die Ladungsverteilung im Draht anders ist. Der Elektronen-„Strahl“ bewegt sich hier durch ein Gitter aus ebenso vielen positiven Metallionen. Wir werden diese Situation studieren und dabei die Transformation (6.122) und die Feldformel (6.124) direkt ableiten. Wem das zu schwierig erscheint, der kann (6.122) als Postulat betrachten.

6.8.2 Der gerade Draht, relativistisch betrachtet

Aus der Relativitätstheorie brauchen wir nur die Weltliniendarstellung und die Relativität der Gleichzeitigkeit (Abschn. 12.2.4 und Abschn. 12.3). Es handelt sich hier um den Übergang vom Laborsystem B_0 , in dem die Elektronen im Draht mit der Geschwindigkeit v fliegen, zum System B_v , das sich mit den Elektronen mitbewegt, in dem also die positiven Metallionen die Geschwindigkeit $-v$ haben.

Im System B_0 kompensieren sich die Ladungen von Elektronen und Ionen genau. Beide haben gleiche Anzahldichten $n_- = n_+$, der Draht ist neutral, es herrscht kein \mathbf{E} -Feld (abgesehen von dem vernachlässigbar kleinen Feld, das die Elektronen durch den Draht treibt). Es herrscht aber ein \mathbf{B} -Feld, das wir bestimmen müssen. Wenn im B_0 -System ein \mathbf{B} -Feld herrscht, ergibt sich nach (6.121) im B_v -System ein \mathbf{E}' -Feld $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Das ist überraschend. Woher kann es kommen? Ist der Draht im B_v -System etwa geladen?

Wir zeichnen die so genannten Weltlinien der Elektronen und Ionen im B_0 -System (Abb. 6.109). Die Elektronenlinien laufen unter dem Winkel $\alpha \approx v/c$ gegen die t -Achse, die Ionenlinien vertikal. Beide sind gleich dicht gelagert: Jeder Elektronenlinie entspricht eine Ionenlinie. Die t' -Achse des B_v -Systems ist auch um α gegen die t -Achse geneigt (das ist klar, denn ein bestimmtes Elektron ist immer auf ihr). Aber auch die x' -Achse (auf der für B_v gleichzeitige Ereignisse liegen) ist um α gegen die x -Achse geneigt, und zwar im entgegengesetzten Sinn. Auf dieser Achse liegen die Ionen *dichter* als die Elektronen, d. h. der B_v -Beobachter sieht in jedem Moment tatsächlich mehr Ionen als Elektronen. Der Draht ist für ihn positiv geladen.

Die Anzahldichten der Teilchen im System B_v sind umgekehrt proportional zu ihren Abständen auf der x' -Achse. Für die kleinen Winkel $\alpha \approx v/c$, die hier in Betracht kommen, liest man aus Abb. 6.109 ab

$$\frac{n'_+}{n'_-} = \frac{OC}{OB} = \frac{OB+BC}{OB} = 1 + \frac{BC}{OB} \frac{AB}{OB} = 1 + \frac{v^2}{c^2}. \quad (6.129)$$

Im B_v -System hat der Draht also die positive Ladungsdichte $\rho' = e(n'_+ - n'_-) = en_-v^2/c^2$. Sie erzeugt im Abstand r ein E -Feld vom Betrag

$$E' = \frac{\rho' A}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{en_-v^2 A}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

oder mit dem Strom $I = en_- Av$

$$E' = \frac{Iv}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}.$$

Dieses Feld zeigt überall nach außen. Es muss aus dem zu bestimmenden B -Feld im B_0 -System entstanden sein als $E' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Daher hat B den Betrag

$$B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r},$$

wie in Abschn. 6.8.1 behauptet. Auch die Richtungen ergeben sich zutreffend. Damit bestätigt sich auch die Transformation $\mathbf{B}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2$, aus der wir B für den zum Draht äquivalenten Elektronenstrahl abgeleitet hatten.

6.8.3 Allgemeine Eigenschaften des Magnetfeldes

Wir nehmen an, es gebe ein Bezugssystem, in dem alle Ladungen ruhen, also nur E -Felder herrschen. Die Ladungsdichteverteilung sei $\rho(\mathbf{r})$. In einem anderen System, das sich mit \mathbf{v} gegen das Ruhssystem bewegt, fliegen alle Ladungen mit der Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ und repräsentieren die Stromdichteverteilung $\mathbf{j} = -\rho\mathbf{v}$. In diesem System gibt es auch B' -Felder, nämlich $\mathbf{B}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2$. Nun bilden wir rot \mathbf{B}' . Nach einer allgemeinen Formel der Vektoranalysis (Aufgabe 6.7.5) ist bei konstantem \mathbf{a}

$$\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \text{ div } \mathbf{b}$$

also

$$\text{rot } \mathbf{B}' = -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{E}.$$

Nach der Poisson-Gleichung ist $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ und daher

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{B}' = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \rho \mathbf{v} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}}. \quad (6.130)$$

Diese Gleichung beschreibt ganz allgemein, auch ohne Übergang zu anderen Bezugssystemen, welches Magnetfeld eine gegebene Stromverteilung erzeugt. Wir werden in den Anwendungen von dieser oder der äquivalenten Gleichung in Integralform

$$\boxed{\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} I} \quad (6.131)$$

ausgehen. Dabei ist irgendeine geschlossene Kurve zugrunde gelegt, um die integriert wird. I ist der Strom, der durch irgendeine von dieser Kurve aufgespannte Fläche tritt (Abb. 6.110).

Ganz analog bilden wir die Divergenz von \mathbf{B}' :

$$\text{div } \mathbf{B}' = -\frac{1}{c^2} \text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{E}.$$

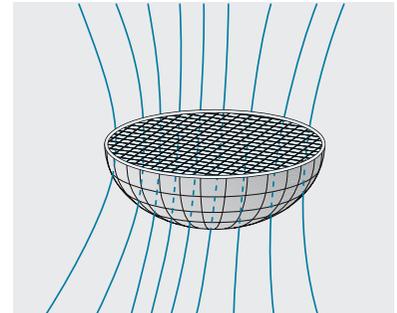


Abb. 6.110. Wenn längs des dick gezeichneten Ringes ein Strom fließt, ist der Magnetfluss durch jede vom Ring begrenzte Fläche der gleiche, weil B -Linien keine Enden haben. Das gilt für jede Kurve, nicht nur für den stromdurchflossenen Ring. Durch eine in sich geschlossene Fläche ist der Gesamt magnetfluss daher Null

Das E -Feld, wenigstens im hier betrachteten statischen Fall, besitzt aber ein Potential und ist daher rotationsfrei. Damit wird

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B}' = 0} . \quad (6.132)$$

Das \mathbf{B} -Feld ist quellenfrei. Das gilt allgemein, bis man eventuell freie magnetische Ladungen (Monopole) entdecken wird. Praktisch würden die Monopole auch keine Rolle spielen (Abschn. 18.4.11), und (6.132) bliebe richtig.

Wie in Abschn. 6.1.2 kann man die differentielle Beziehung $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ auch auf ein Raumstück endlicher Größe übertragen, indem man in Analogie zum elektrischen Fluss den **Magnetfluss**

$$\boxed{\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}} \quad (6.133)$$

über eine beliebige Fläche einführt. Wenn \mathbf{B} homogen ist und unter dem Winkel α zur Normale der Fläche \mathbf{A} steht, ist $\Phi = BA \cos \alpha$. Für die geschlossene Grenzfläche, die ein Raumstück einschließt, ist

$$\Phi = \oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \iiint \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0 . \quad (6.134)$$

Daraus folgt (Abb. 6.110): Der Magnetfluss durch *jede* Fläche, die in einer gegebenen geschlossenen Kurve aufgespannt ist, hängt nur von dieser Kurve, nicht von der Form der Fläche ab.

Jedes Vektorfeld $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ lässt sich aus einem wirbelfreien Quellenfeld \mathbf{a}_1 und einem quellenfreien Wirbelfeld \mathbf{a}_2 zusammensetzen. Es ist dann $\operatorname{rot} \mathbf{a}_1 = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{a}_2 = 0$, und \mathbf{a}_1 besitzt ein Potential φ , sodass $\mathbf{a}_1 = -\operatorname{grad} \varphi$ ist. Andererseits leitet sich das Quellenfeld \mathbf{a}_1 aus einer Queldichte $q(\mathbf{r})$ her durch $\operatorname{div} \mathbf{a}_1 = q$, das Wirbelfeld \mathbf{a}_2 leitet sich aus einer Wirbeldichte $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ her durch $\operatorname{rot} \mathbf{a}_2 = \mathbf{w}$. Offenbar ist das \mathbf{B} -Feld ein quellenfreies Wirbelfeld mit der Wirbeldichte $\mathbf{j}/(\varepsilon_0 c^2)$, das elektrostatische Feld ein wirbelfreies Quellenfeld mit der Queldichte ρ/ε_0 .

Im elektrischen Fall führt man ein zweites Feld \mathbf{D} ein. Im Vakuum läuft der Unterschied zwischen beiden auf eine Multiplikation mit ε_0 hinaus: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Die Quellgleichung schreibt sich dann noch einfacher

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho .$$

Eine anschauliche Deutung erfährt \mathbf{D} sich erst aus der Unterscheidung von freien und gebundenen Ladungen in Materie. Ganz entsprechend kann man im Vakuum den Faktor $1/(\varepsilon_0 c^2)$ in (6.128) beseitigen durch die Festsetzung

$$\mathbf{H} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (6.135)$$

mit

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = \frac{4\pi}{10^7} \frac{\text{V m}}{\text{A s m}^2 \text{ s}^{-2}} = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1} , \quad (6.136)$$

sodass aus (6.130) wird

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}} . \quad (6.137)$$

Seiner Definition entsprechend hat \mathbf{H} die Einheit $\text{C}/(\text{V m}) \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{V s}/\text{m}^2 = \text{A}/\text{m}$. In Materie bleibt (6.137) richtig und beschreibt, wie das \mathbf{H} -Feld durch freie, d. h.

makroskopisch in Drähten usw. fließende Ströme \mathbf{j} erzeugt wird. Für das \mathbf{B} -Feld gilt (6.130) nur, wenn man in \mathbf{j} auch alle mikroskopischen Ströme einbezieht, die in den Teilchen der Materie zirkulieren. Unter einfachen Umständen gilt dann zwischen \mathbf{B} und \mathbf{H} ein ähnlicher Zusammenhang wie zwischen \mathbf{E} und \mathbf{D} :

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad (6.138)$$

μ_r heißt **Permeabilität** des Materials. In ferromagnetischen Materialien gilt die Proportionalität zwischen \mathbf{B} und \mathbf{H} nicht allgemein (Abschn. 7.2).

(6.132) und (6.137) sind zwei der vier Maxwell-Gleichungen. Das vollständige Gleichungssystem werden wir in Abschn. 7.4.2 entwickelt haben. Wie bisher werden wir bei dieser Entwicklung nichts brauchen als die Existenz der Coulomb- und Lorentz-Kraft sowie die Relativität der Gleichzeitigkeit.

6.8.4 Bezeichnungen elektromagnetischer Felder

Wir stellen hier noch einmal wichtige Begriffe der elektromagnetischen Felder (im Vakuum, $\varepsilon_r = \mu_r = 1$) zusammen, um vorzustellen, welche Bezeichnungen heute verwendet werden und um ihre Systematik vorzustellen.

Symbol	Bezeichnung	SI-Einheit	Deutung
\mathbf{E}	Elektrisches Feld	V/m	übt auf Ladungen Kräfte aus
$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$	Elektrische Erregung	As/m ²	wird aus Ladungen erzeugt
\mathbf{B}	Magnetisches Feld	Vs/m ²	übt auf Ströme Kräfte aus
$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$	Magnetische Erregung	A/m	wird aus Strömen erzeugt

Vor allem beim Studium älterer Bücher muss man beachten, dass sich die historischen Bezeichnungen geändert haben. Wenn man sich aus der Affäre ziehen will, spricht man einfach von „H-Feld“ etc. Für \mathbf{D} wird am häufigsten die Bezeichnung „dielektrische Verschiebung“ verwendet, und insbesondere die Bezeichnung von \mathbf{B} als magnetisches Feld (und nicht \mathbf{H}) stiftet noch häufig Verwirrung.

6.9 Das Magnetfeld von Strömen

Aus (6.131), (6.132) oder (6.137) kann man für jede beliebige räumliche Verteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ von Strömen angeben, welches Magnetfeld entsteht. Vielfach gelingt dies ohne jede Rechnung, wenn man zwei Prinzipien dazu nimmt, die man als fast selbstverständlich im Gefühl hat, die aber doch zu den tiefsten Naturgesetzen gehören: Das **Symmetrieprinzip** und das **Superpositionsprinzip**.

Das Symmetrieprinzip ist schwer allgemein und präzise zu formulieren. In unserem Fall besagt es, dass die Feldverteilung in ihrer Symmetrie der Stromverteilung entsprechen muss, die sie erzeugt. Das Superpositionsprinzip beruht mathematisch darauf, dass die Gleichung (6.130) linear ist. Es besagt: Wenn sich eine Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ additiv in zwei andere Verteilungen zerlegen lässt, $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_2(\mathbf{r})$, dann ist das von \mathbf{j} erzeugte Feld die Summe der von \mathbf{j}_1 und \mathbf{j}_2 einzeln erzeugten Felder. Für Ladungsverteilung und elektrostatisches Feld gilt das auch.

Wir betrachten zunächst den statischen Fall. Es sollen Ströme fließen, und zwar von zeitlich unveränderlicher Stärke, ohne dass die Ladungs-

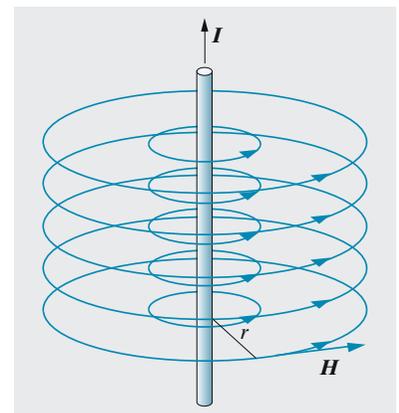


Abb. 6.111. Magnetische Feldlinien um einen geraden stromdurchflossenen Leiter

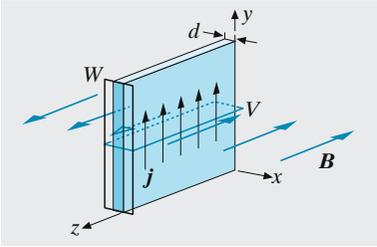


Abb. 6.112. Ein sehr großflächiges Blech der Dicke d , in dem die Stromdichte j fließt, also ein Strom jd pro m, erzeugt beiderseits ein Magnetfeld $B = \pm \frac{1}{2} \mu_0 jd$, das unabhängig vom Abstand ist. Wenn das Blech nicht die einzige Feldquelle ist, kann man nur sagen: Am Blech springt die Tangentialkomponente von \mathbf{B} um $\mu_0 jd$. Vergleiche das geladene Blech Abb. 6.23

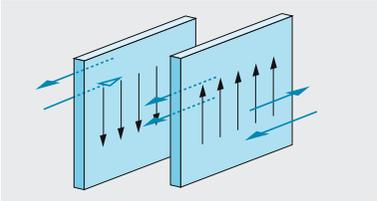


Abb. 6.113. Zwischen sehr großflächigen Blechen mit entgegengesetzter Stromrichtung verstärken sich die Felder zu $B = \mu_0 jd$, im Außenraum heben sie sich auf. Vergleiche den Plattenkondensator Abb. 6.28

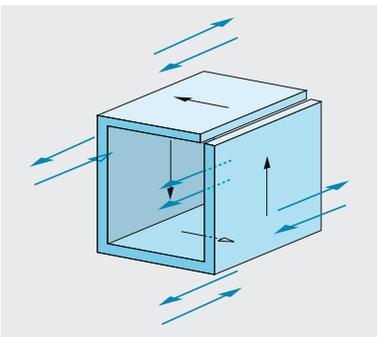


Abb. 6.114. In einem sehr langen Blechkasten herrscht das Feld $B = \mu_0 jd$, außerhalb herrscht keines. Denkaufgabe: Wenn die Bleche in Abb. 7.80 nicht sehr großflächig sind, sondern nur so groß wie dort dargestellt, ist dann das Feld zwischen ihnen auch $\mu_0 jd$ oder wie groß sonst?

verteilung sich dadurch ändert. Die Ströme fließen also in geschlossenen Kreisen, angetrieben durch die Spannungen von Gleichstromgeneratoren, Batterien o. dgl. Es werden keine Kondensatoren ge- oder entladen.

Wie sieht \mathbf{H} aus, wenn nirgends Strom fließt? Dann muss nicht nur $\text{div } \mathbf{B} = 0$, sondern auch $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$ sein. An sich gibt es ein Feld, das divergenz- und rotationsfrei ist, nämlich das homogene: \mathbf{H} überall gleich. Wenn dabei $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$ ist, zeichnet es aber eine Richtung aus. Wenn die Bedingungen des Problems keine solche Richtung vorschreiben, d. h. wenn wirklich nirgends Ströme fließen, bleibt also \mathbf{H} nichts weiter übrig, als überall 0 zu sein.

Feld des geraden Leiters. Durch einen sehr langen geraden Draht fließt der Gleichstrom I . Auf einem Zylindermantel mit dem Radius r um den Draht muss \mathbf{H} nach dem Symmetrieprinzip überall gleich sein. Kann es eine Radialkomponente haben? Nein, denn die müsste überall auswärts oder überall einwärts zeigen. Beides würde die Gleichung $\text{div } \mathbf{B} = 0$ verletzen, denn über den Zylindermantel wäre $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \neq 0$, d. h. im Zylinder müssten \mathbf{B} -Quellen oder -Senken sitzen, und die gibt es nicht. Kann es eine Komponente in Drahtrichtung geben? Wenn ja, müsste sie unabhängig vom Abstand r sein, denn nur dann ist $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$ gesichert (Abb. 6.111). Dann wäre diese Komponente noch in unendlicher Entfernung vom Draht ebenso groß, was absurd ist, denn so weit kann der Draht nicht wirken. Jetzt möchte man fast sagen: Eine Tangentialkomponente kann auch nicht da sein, denn das Problem ist zylindersymmetrisch. Aber die Stromrichtung zeichnet eine Raumrichtung vor der andern aus, und daher sind auch die Richtungen auf einem Kreis um den Draht nicht mehr gleichwertig: Die eine geht im Rechtsschraubensinn um den Strom, die andere im Linksschraubensinn.

Jetzt erst setzen wir die Gleichung $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ ein. Sie liefert, was noch fehlt: Die Abhängigkeit $B(r)$. Da \mathbf{H} überall auf dem Kreis vom Radius r gleichen Betrag hat und tangential zeigt, ist $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi Hr$. Das muss gleich dem umlaufenden Strom sein, also

$$\boxed{H = \frac{I}{2\pi r}} \quad (6.139)$$

Das Feld nimmt nach außen ab, damit $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$ auf jedem Kreis gleich, nämlich gleich I ist. Der Richtungssinn von \mathbf{H} ergibt sich aus der Definition des rot-Vektors. Seine z -Komponente ist $\text{rot}_z \mathbf{H} = -\partial H_x / \partial y + \partial H_y / \partial x$. Wenn B_y nach rechts zunimmt, ist $\text{rot}_z \mathbf{H}$ positiv, zeigt also $\text{rot } \mathbf{H}$ und damit \mathbf{j} auf uns zu. Folglich rotiert \mathbf{H} rechtsherum, in Stromrichtung gesehen, wie die gekrümmten Finger der rechten Hand um den abgespreizten Daumen.

Stromdurchflossenes Blech. In einem Blech der Dicke d fließe eine Stromdichte j überall in gleicher Richtung (natürlich parallel zur Blechebene, sonst würde sich überall Ladung an den Oberflächen anhäufen). Auf einer Ebene parallel zum Blech ist $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0$ aus Symmetriegründen überall gleich (Abb. 6.112). Wenn es eine Normalkomponente B_x gibt, dann muss sie auf entgegengesetzten Seiten des Bleches verschie-

dene Vorzeichen haben. Das verletzt aber die Gleichung $\text{div } \mathbf{H} = 0$, also ist $H_x = 0$, und zwar überall. Der Fluss durch die Parallelflächen eines flachen, breiten Kastens, der das Blech eng einschließt, würde dann die wesentlichen Beiträge zum Gesamtfluss in den Kasten liefern, der andererseits verschwinden muss.

Für H_y und H_z betrachten wir in Abb. 6.112 zwei Rahmen, einen (W) in der xy -Ebene und einen (V) in der xz -Ebene. Das Linienintegral (6.131) entlang W muss verschwinden, denn der Strom kann nicht hindurch fließen. Bei $H_x = 0$ heben sich die Beiträge der y -Strecken genau dann auf, wenn ein homogenes Magnetfeld in y -Richtung herrscht, das jedoch aus anderen Quellen als dem Strom im Blech stammen muss. Es bleibt H_z . Der Umlauf V umkreist einen Strom $I = dlj$, das Umlaufintegral hat auch diesen Wert, also $H_z l - H'_z l = jd$ oder

$$H_z - H'_z = jd. \tag{6.140}$$

Am Blech springt die z -Komponente um jd . Das gilt auch, wenn noch andere Ströme da sind als im Blech. Wenn die im Blech die einzigen sind, verlangt die Symmetrie, dass \mathbf{H} rechts vom Blech entgegengesetzte Richtung wie links und beide Mal den Betrag $\frac{1}{2}jd$ hat. Die Definition von rot (Rechtsschraube) liefert den Drehsinn von Abb. 6.112. Auf jeder Seite ist \mathbf{H} unabhängig vom Abstand, sonst wäre nicht $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$.

Die lange Spule. Wir rollen aus dem stromführenden Blech ein sehr langes Rohr, und zwar so, dass der Strom um die Rohrachse kreist. Diese Stromverteilung wird einfacher durch einen Draht erreicht, den man um einen Zylinder wickelt. Vom ebenen Blech her wissen wir: Die H -Komponente parallel zur Achse, senkrecht zum Strom, macht an der Spulenwicklung einen Sprung um jd , oder, wie für die Spule angemessener ist, um In (I Strom durch den Draht, n Anzahl der Drahtwindungen/Meter). Im Außenraum ist $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. Wenn nicht, müsste \mathbf{H} bis zu unendlichen Abständen den gleichen Wert haben, und dann handelte es sich nicht um das Feld der Spule. Folglich ist innen $H = In$, und \mathbf{H} zeigt in Achsrichtung, so dass die Stromrichtung es nach der Rechtehandregel umfasst. Hier sieht man deutlich, warum die Techniker die Einheit von \mathbf{H} nicht A/m, sondern Amperewindungen/m aussprechen.

Rohr mit Längsstrom in der Wand. Man kann das stromführende Blech auch so rollen, dass der Strom in Achsrichtung fließt. \mathbf{H} muss wieder quer zum Strom stehen, also um die Achse laufen. Am Rohrmantel erfolgt der Sprung um jd . Diesmal muss *innen* $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ sein, sonst würde ein Kreisintegral den Wert $2\pi rH$ ergeben, obwohl es keinen Strom umfasst. Also ist außen, dicht am Rohr, $H = dj$. In größerem Abstand muss H abnehmen, sonst wäre $\text{rot } \mathbf{H} \neq \mathbf{0}$. Wir wissen vom geraden Draht, wie H abfällt: $H \sim 1/r$. Der Anschluss an die Rohrwand ($r = R$) verlangt $H = djR/r$. Durch den Gesamtstrom $I = 2\pi Rdj$ ausgedrückt, ist das dasselbe Feld wie beim Draht: $H = I/(2\pi r)$. Was das Feld im Außenraum betrifft, könnte man das Rohr auch auf einen Draht zusammenziehen, ähnlich wie man die geladene Kugel auf den Mittelpunkt zusammenziehen kann, ohne ihr elektrisches Feld zu verändern.

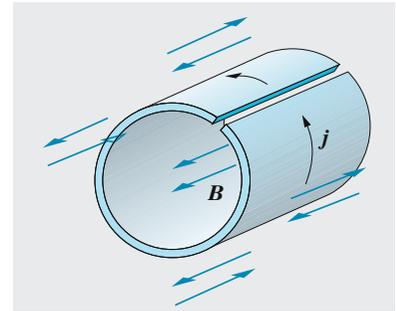


Abb. 6.115. Das Feld in einem runden Rohr ist ebenfalls konstant $B = \mu_0 jd$

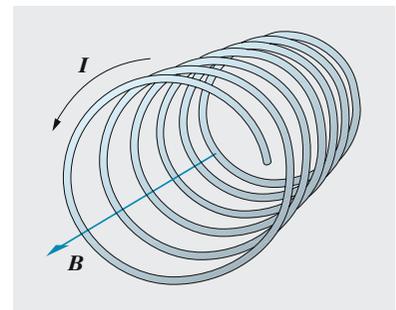


Abb. 6.116. Das Feld der Spule ist innen konstant $B = \mu_0 jd = \mu_0 In$ (n : Windungszahl/m). Außen ist es viel kleiner

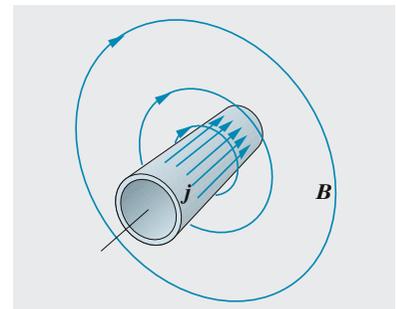


Abb. 6.117. Das Feld eines längs durchströmten Rohres ist außen gleich dem Feld eines Drahtes. Wie groß ist es innen?

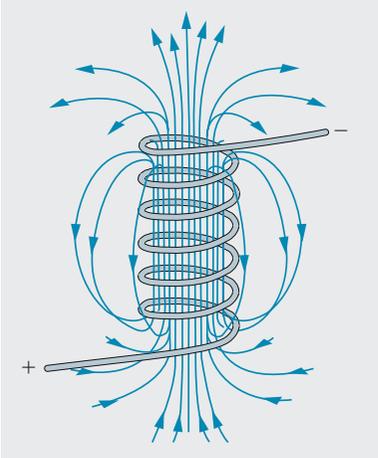


Abb. 6.118. Das Magnetfeld einer Spule

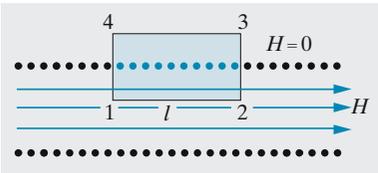


Abb. 6.119. Zur Berechnung des Feldes einer langen Spule nach dem Durchflutungsgesetz

Spule von endlicher Länge. Am Ende einer Spule ist das Feld bestimmt kleiner als im Innern, denn die Feldlinien beginnen aufzufächern. Deswegen ist das Feld auch nicht mehr rein axial gerichtet. Wir beweisen: Der Punkt auf der Achse in der Endfläche der Spule hat genau die Hälfte des Feldes tief im Innern. Dazu benutzen wir das Superpositionsprinzip. Wenn die Spule weiterginge, d. h. aus zwei identischen Spulen wie die betrachtete zusammengesetzt wäre, herrschte darin überall das Feld H_0 . Jede Teilspule leistet den gleichen Beitrag, nämlich $H_0/2$, was zu beweisen war. Diese Teilfelder addieren sich allerdings nur auf der Achse arithmetisch, denn nur dort haben sie die gleiche Richtung. Für die Axialkomponente gilt die Halbierung jedoch überall in der Endfläche. Auch der Gesamtfluss durch die Endfläche ist daher genau halb so groß wie durch einen Querschnitt im Innern.

Diese Methoden, die praktisch ohne Rechnung das Feld liefern, funktionieren leider nicht immer. In den nächsten Abschnitten werden einige weiterführende Verfahren angedeutet.

6.9.1 Vergleich mit dem elektrischen Feld; der Satz von Biot-Savart

Das Magnetfeld des stromführenden Drahtes ist in seiner Ortsabhängigkeit dem elektrischen des geladenen Drahtes sehr ähnlich:

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad D = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad (\lambda : \text{Ladung/m}). \quad (6.139')$$

Nur die Richtung ist verschieden: D radial, H tangential. Auch stromführendes und geladenes Blech erzeugen ähnliche Felder:

$$H = \frac{1}{2} jd \quad (jd : \text{Strom/m}), \quad D = \frac{1}{2} \sigma \quad (\sigma : \text{Ladung/m}^2) \quad (6.141)$$

abgesehen von der Richtung: D zeigt auswärts, H parallel zum Blech (tieferer Grund s. Abschn. 6.8.1).

Man kann den geladenen Draht und das geladene Blech aus vielen linear bzw. flächenhaft aneinander gereihten Ladungselementen (praktisch Punktladungen) aufgebaut denken. Ebenso kann man stromführenden Draht und stromführendes Blech aus vielen sehr kurzen Leiterelementen superponieren. Solch ein Stromelement ist durch ein fliegendes geladenes Teilchen realisiert. Wie die elektrischen Felder von Draht und Blech sich aus Punktfeldern

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (6.142)$$

superponieren, müssten auch die Magnetfelder sich aus Feldern von Stromelementen aufbauen lassen. Wie sieht dieses Elementarfeld aus? Seine r -Abhängigkeit müsste analog zu (6.142) sein: Oben steht r , unten r^3 . Der Unterschied muss in der Richtung liegen, denn im Gegensatz zur Ladung hat das Stromelement Vektorcharakter: Strom $\cdot dI$, wobei dI Länge und Richtung des Leiterstücks angibt (Richtungssinn ist Stromrichtung). Während im elektrischen Fall das r im Zähler direkt die Radialrichtung

des Feldes ergibt, muss die Magnetfeldrichtung senkrecht auf $d\mathbf{l}$ stehen. Dies leistet das Vektorprodukt $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$, also

$$\boxed{d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (\text{Gesetz von Biot-Savart})} \quad (6.143)$$

\mathbf{H} steht überall senkrecht auf \mathbf{r} und $d\mathbf{l}$, umkreist also wieder das Leiterelement. In der Verlängerung von $d\mathbf{l}$ ist $H = 0$, denn $\mathbf{r} \parallel d\mathbf{l}$. Mit dem Winkel φ gegen die $d\mathbf{l}$ -Achse nimmt H wie $\sin \varphi$ zu. Im Prinzip lassen sich die Felder von Draht, Spule usw. aus den Beiträgen der Leiterelemente aufsummieren, aber in diesen Fällen ist das sehr viel komplizierter als unser Verfahren.

Zwei parallele oder antiparallele Ströme. Die \mathbf{H} -Linien des stromführenden Drahtes stehen senkrecht auf den \mathbf{D} -Linien des geladenen Drahtes. Im Querschnitt sieht also das \mathbf{H} -Linienbild genau aus wie die elektrischen *Potentialflächen*, denn diese stehen auch senkrecht auf \mathbf{D} . Nach *Biot-Savart* stammt diese Eigenschaft schon vom Stromelement im Vergleich mit der Punktladung her und überträgt sich durch Superposition auf jede andere Ladungsverteilung. Da sich Felder und Potentiale von Ladungen und Strömen addieren, sehen die \mathbf{H} -Linien zweier paralleler Drähte ebenso aus wie ein Querschnitt durch die Potentialflächen zweier Ladungen, und zwar gleichnamiger für parallele, ungleichnamiger für antiparallele Ströme. Zwischen antiparallelen Strömen drängen sich die \mathbf{H} -Linien ebenso zusammen wie die Potentialflächen zwischen ungleichnamigen Ladungen (Berg gegenüber Talkessel). Zwischen parallelen Strömen sind die \mathbf{H} -Linien weit auseinander wie die Niveaulinien auf einem Sattel zwischen zwei Gipfeln. Die \mathbf{H} -Liniendichte entspricht einer Energiedichte, also einem Druck (Abschn. 7.1.7). Parallele Ströme werden sich daher anziehen wie ungleichnamige Ladungen und umgekehrt. Zum gleichen Schluss kommt man durch Vergleich des \mathbf{H} - und des \mathbf{D} -Bildes: Die \mathbf{H} -Linien paralleler und antiparalleler Ströme stehen im Wesentlichen senkrecht aufeinander. Daher sehen die \mathbf{H} -Linien *paralleler* Ströme ähnlich aus wie die \mathbf{D} -Linien *ungleichnamiger* Ladungen. Viel einfacher als diese feldmäßige Behandlung der Kräfte ist aber der Begriff der Lorentz-Kraft (Abschn. 6.7.3).

Leiterschleife. Ein gerades Leiterelement ist im statischen Fall nicht realisierbar, denn an den Enden würden sich mit der Zeit Ladungen anhäufen. Am nächsten kommt dem Stromelement noch eine sehr kleine Stromschleife. Sehr klein heißt: Klein gegen die Abstände, in denen wir das Feld betrachten wollen. Aus solchen Entfernungen gesehen spielt die Form der Schleife keine Rolle, nur ihre Fläche. Wir nehmen die einfachste Form, ein Rechteck mit den Seiten a und b . Zwei gegenüberliegende Seiten bilden ein Paar von Stromelementen mit entgegengesetzter Stromrichtung. Da ein Stromelement Ia einer Ladung Q analog ist, entspricht ein solches Paar mit dem Abstand b einem Dipol mit dem gleichen Abstand, also dem Dipolmoment Iab . Das \mathbf{H} -Feld entspricht dem Betrag nach dem Querschnitt durch ein \mathbf{E} -Dipolfeld. Richtungsmäßig steht allerdings \mathbf{H} senkrecht zu \mathbf{E} , d. h. so, als stünde der elektrische Dipol senkrecht auf der Stromschleife. Die anderen beiden Seiten der Rechteckschleife ent-

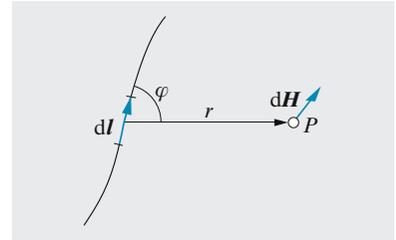


Abb. 6.120. Magnetfeldbeitrag eines Stromelements nach *Biot-Savart*

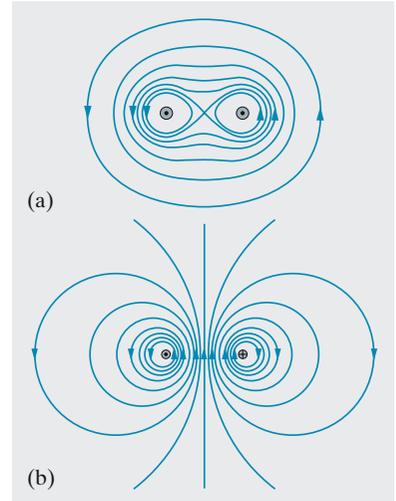


Abb. 6.121a,b. Magnetfeld um zwei parallele Drähte mit gleich starken gleichgerichteten (a), entgegengerichteten (b) Strömen

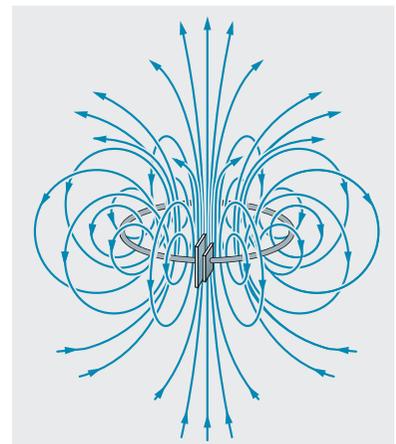


Abb. 6.122. Magnetfeld eines Kreisstroms

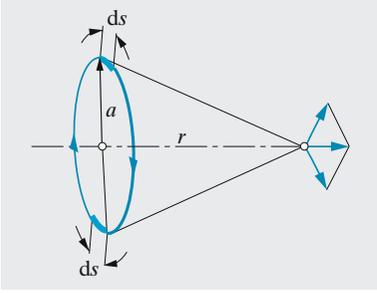


Abb. 6.123. Die magnetische Feldstärke auf der Achse eines Kreisstroms

sprechen einem Dipolmoment der gleichen Größe Iba , liefern also ein Dipolfeld auch für den zum vorigen senkrechten Querschnitt. Beide zusammen ergeben ein vollständiges Dipolfeld. Die Stromschleife mit der Fläche dA (dA steht senkrecht zur Schleifenfläche, und zwar so, dass der Strom die dA -Richtung nach der Rechtehandregel umkreist) entspricht einem magnetischen Dipol mit dem Moment

$$\boldsymbol{\mu} = I \, d\mathbf{A}, \quad (6.144)$$

wenn man sie aus großem Abstand betrachtet. In der Nähe sind Schleifenfeld und Dipolfeld sehr verschieden. Zur Bestätigung können wir das Feld einer Kreisschleife auf der Achse nach *Biot-Savart* ausrechnen. Dort muss es aus Symmetriegründen axial gerichtet sein. Vom Beitrag jedes Leiterstücks, $dH = I \, ds / (4\pi(r^2 + a^2))$, zählt also nur die Axialkomponente $dH \, a/r$, die senkrechten Komponenten heben sich paarweise auf. Integration über den ganzen Kreis liefert

$$H = \frac{2\pi I a^2}{4\pi(a^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (6.145)$$

während das elektrische Dipolfeld auf der Achse $D = 2p / (4\pi(a^2 + r^2)^{3/2})$ ist. Dies bestätigt wieder den Ausdruck $\boldsymbol{\mu} = I dA = I\pi a^2$ für das magnetische Moment des Kreisstroms.

6.9.2 Magnetostatik

Wo keine makroskopischen (freien) Stromdichten \mathbf{j} fließen, sind die Gleichungen für \mathbf{B} und \mathbf{H} dieselben wie für die statischen elektrischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{D} in Abwesenheit freier Ladungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = \mathbf{0} &\Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0}; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \mathbf{0}; & \varrho = 0 &\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \end{aligned} \quad (6.146)$$

Man beachte, dass *hier* die Entsprechungen lauten $\mathbf{B} \hat{=} \mathbf{D}$, $\mathbf{H} \hat{=} \mathbf{E}$. An der Grenzfläche zwischen zwei Materialien mit verschiedenen μ verhält sich \mathbf{B} also wie \mathbf{D} an der Grenzfläche zweier Dielektrika, \mathbf{H} verhält sich wie \mathbf{E} . Die *Normal*komponenten von \mathbf{B} und die *Tangent*ialkomponenten von \mathbf{H} haben beiderseits der Grenzfläche den gleichen Wert:

$$B_{1\perp} = B_{2\perp}, \quad H_{1\parallel} = H_{2\parallel}. \quad (6.147)$$

(Herleitung für \mathbf{B} mittels einer flachen Trommel, für \mathbf{H} mittels eines schmalen Rechtecks, die einen Teil der Grenzfläche einschließen). Dagegen machen die *Tangent*ialkomponente von \mathbf{B} und die *Normal*komponente von \mathbf{H} einen Sprung an der Grenzfläche:

$$\frac{B_{1\parallel}}{B_{2\parallel}} = \frac{\mu_1 H_{1\parallel}}{\mu_2 H_{2\parallel}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \frac{H_{1\perp}}{H_{2\perp}} = \frac{B_{1\perp}}{\mu_1} : \frac{B_{2\perp}}{\mu_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (6.148)$$

Da man für Eisen $\mu \gtrsim 1000$ ansetzen kann, werden alle \mathbf{B} -Linien, die schräg auf ein Eisenstück zulaufen, beim Durchtritt durch die Grenzfläche praktisch parallel zu dieser: Eisen bündelt das \mathbf{B} -Feld. Darauf beruht die **magnetische Abschirmung**. Ein Eisengehäuse lässt von einem äußeren

B-Feld fast nichts in den umschlossenen Raum eintreten. Geschlossene oder fast geschlossene Eisenkreise in Elektromagneten, Transformatoren, Motoren und Generatoren lassen nur einen sehr geringen Teil des Magnetflusses in den Luftraum entweichen.

In elektrischen Feldern gibt es Raumelemente, in denen Feldlinien beginnen oder enden, d. h. Feldquellen oder -senken. Dort sitzen die elektrischen Ladungen. Magnetfeldlinien haben keine Enden. Selbst wenn man die Orte, wo sie besonders dicht aus- oder einströmen (Polschuhe von Elektro- oder Permanentmagneten) als Quellen oder Senken bezeichnen will, treten diese immer paarweise auf: Es gibt keine magnetischen Ladungen, sondern nur Dipole.

Daher kann man das Magnetfeld nicht ohne weiteres als „Kraft auf die Ladungseinheit“ definieren, wie das beim elektrischen Feld geschieht. Dagegen kann man das Feld B durch das mechanische Drehmoment beschreiben, das auf eine Spule vom magnetischen Dipolmoment μ ausgeübt wird. Dieses ergibt sich für jeden ebenen Stromkreis als Produkt von Strom und umschlossener Fläche. Man erhält so eine Messvorschrift für B . Ist B bekannt, so findet man durch Messung des Drehmomentes das magnetische Moment eines Leiters oder eines Stabmagneten.

In gewissen Fällen liegt es jedoch nahe, an der Vorstellung räumlich konzentrierter „magnetischer Ladungen“ festzuhalten. Bei langen Spulen oder Stabmagneten (Länge l) könnte man an den Polschuhen, wo praktisch alle B -Linien aus- oder einströmen, annähernd punktförmige „magnetische Ladungen“ oder **Polstärken** $\pm P$ anbringen, sodass sich das magnetische Moment der Spule oder des Stabes ergibt als $\mu = Pl$. Das Drehmoment im Feld B , $T = PlB$, ist dann darzustellen durch ein Kräftepaar

$$\pm F = \pm \frac{T}{l} = \pm PB \quad (6.149)$$

auf die beiden Pole. Hier übernimmt also B die Rolle, die im elektrischen Feld E spielte. Die Polstärke einer einlagigen Spule von N Windungen gleichen Querschnitts A ergibt sich nach (6.114) zu $P = NIA/l = H_i A$, wobei H_i die Feldstärke im Innern der Spule ist. Mittels des Magnetflusses $\Phi = \mu_0 H_i A$ durch die Spule kann man auch schreiben

$$P = \frac{\Phi}{\mu_0} . \quad (6.150)$$

Nun befinde sich im Abstand r vom Spulenende das Ende einer anderen Spule, von dem der Magnetfluss Φ' ausgeht. Ist r groß gegen den Spulendurchmesser, so kann man annehmen, dass sich Φ' gleichmäßig über eine Kugel vom Radius r um das Spulenende verteilt. Das Feld der zweiten Spule am Ende der ersten ist dann $B(r) = \Phi'/(4\pi r^2)$, und auf das Ende der ersten Spule wirkt wegen (6.149) und (6.150) die Kraft $F = P\Phi'/(4\pi r^2) = \mu_0 PP'/(4\pi r^2)$. Für die Polstärken zweier langer Spulen gilt also auch ein Coulomb-Gesetz. Polstärke ist der durch μ_0 dividierte Magnetfluss Φ , der am Spulenende austritt, ebenso wie die elektrische Ladung gleich dem mit ϵ_0 multiplizierten gesamten von ihr ausgehenden E -Fluss ist.

Nach (6.149) ist die Kraft auf das Ende der Spule im Feld B

$$F = PB .$$

Ist \mathbf{B} an beiden Enden gleich, bleibt keine resultierende Kraft, nur ein Drehmoment

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} . \quad (6.151)$$

Im inhomogenen \mathbf{B} -Feld heben sich die Kräfte auf die beiden Enden nicht auf. Die resultierende Kraft ist

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\mu} \frac{d\mathbf{B}}{dr} \cos \alpha , \quad (6.152)$$

ganz analog wie beim elektrischen Dipol (Abschn. 6.1.6). Die Energie des magnetischen Dipols im homogenen Feld ist

$$E_{\text{Dip}} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} . \quad (6.153)$$

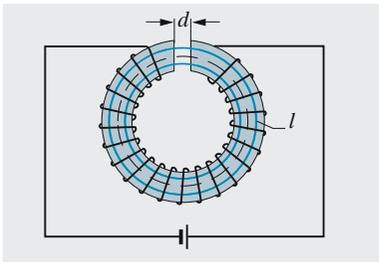


Abb. 6.124. Berechnung der Feldstärke im Luftspalt eines Elektromagneten

6.9.3 Elektromagnete

Wenn ein ferromagnetischer Kern mit hoher Permeabilität μ das ganze Innere einer Ringspule ausfüllt, ist im Innern des Kernmaterials das \mathbf{B} -Feld um den Faktor μ höher, als es in der gleichen Spule ohne Kern wäre. Man braucht das Feld aber außerhalb, im günstigsten Fall in einem **Luftspalt (Interferrikum, Abb. 6.124)** zwischen zwei Polflächen. Hier kann \mathbf{B} höchstens indirekt vom Vorhandensein des Kerns profitieren, denn hier ist $\mu_r = 1$. Wir bestimmen \mathbf{B} und seine Abhängigkeit von der Breite d des Luftspalts.

Wegen $\text{div } \mathbf{B} = 0$ muss der ganze \mathbf{B} -Fluss, der aus der Spule tritt, wieder in sie zurück. Er könnte aber den Kern seitlich verlassen oder aus dem Luftspalt seitlich herausquellen (Streuung). Dass er im Kern bleibt, solange das möglich ist, folgt aus dem Energiesatz: Wegen $\mathbf{H} = \mathbf{B}/(\mu_r \mu_0)$ ist \mathbf{H} bei gegebenem \mathbf{B} im Kern kleiner als draußen, und damit ist auch die Energiedichte $\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ am kleinsten, wenn das Feld im Eisen bleibt.

Dass \mathbf{B} auch nicht seitlich aus dem Luftspalt quillt, sieht man, wenn man eine Leiterschleife, die den Kern eng umfasst, schnell über den Luftspalt hinwegzieht. Es tritt kein Induktionsstoß auf (das ballistische Voltmeter schlägt nicht aus), im Gegensatz zum Verhalten am Ende eines Stabmagneten oder einer geraden Spule. \mathbf{B} hat also im Luftspalt den gleichen Wert wie im Eisen. \mathbf{H} dagegen hat den Wert H_a , der μ_r -mal größer ist als im Eisen.

Um \mathbf{B} und H_a zu finden, integrieren wir längs einer geschlossenen Feldlinie über \mathbf{H} . Das Integral ist gleich dem umschlossenen Strom NI (N Windungen):

$$H_i l + H_a d = NI .$$

l : Weg im Eisen, gestreckte Kernlänge. Im Luftspalt ist $B = \mu_0 H_a$, im Eisen $B = \mu_r \mu_0 H_i$, also folgt

$$B = \mu_0 H_a = \frac{\mu_0 NI}{d + l/\mu} . \quad (6.154)$$

Wenn $d \ll l/\mu_r$ (was bei $\mu_r \approx 1\,000$ sehr viel verlangt ist und sehr glatte Polflächen voraussetzt), ist $B = \mu_0 \mu_r NI/l$. Die Existenz des Kerns verstärkt \mathbf{B} im Spalt um den Faktor μ . Bei $d \gg l/\mu$ ist $B = \mu_0 NI/d$, als ob die Spule nicht auf die Länge l , sondern nur auf d aufgewickelt wäre. Das bedeutet ebenfalls eine erhebliche Verstärkung, aber weniger als bei $d \ll l/\mu_r$. Mit zunehmendem d fällt \mathbf{B} schnell ab; wenn es auf einen großen Magnetfluss ankommt, z. B. in Transformatoren, sind Luftspalte zu vermeiden.

Ein Weicheisenteil wird von der Seite her in den Luftspalt gezogen, und zwar wegen des Energiesatzes. Der Energiegewinn ist

$$\frac{1}{2}VBH_a = \frac{1}{2}AdBH_a = \frac{1}{2}Ad\mu_0N^2I^2/(d+l/\mu_r)^2.$$

Zieht man das Joch eines Haltemagneten, das den Flusskreis schließt, um eine kleine Strecke x von den Polflächen weg, entsteht ein zusätzlicher felderfüllter Raum vom Volumen Ax mit der Energie $E = \frac{1}{2}AxB^2/\mu_0$. Die Ableitung

$$F = \frac{dE}{dx} = \frac{1}{2} \frac{AB^2}{\mu_0} \quad (6.155)$$

ist die **Tragkraft des Magneten**.

Mit großen wassergekühlten Elektromagneten erreicht man im Impulsbetrieb $5 \cdot 10^6 \text{ A m}^{-1}$. Dabei ist die **Sättigungsmagnetisierung** des Eisens, die bei 2,1 T liegt, längst erreicht und daher $\mu_r \approx 1$ und $B \approx \mu_0 H \approx 6 \text{ T}$. Mit supraleitenden Wicklungen kommt man noch höher, da sie 1 000mal höhere Stromdichten führen können als Kupfer und trotzdem kaum Joule-Verluste zeigen. Bei den üblichen Supraleitern zerstört allerdings schon ein relativ kleines Magnetfeld die Supraleitung selbst. Mit nichtidealen Typ II-Supraleitern, speziell Niob-Legierungen, hat man trotzdem über 30 T erreicht (Abschn. 17.7).

6.9.4 Magnetische Spannung und Vektorpotential

In Elektromagneten, Transformatoren, Drosselspulen, Relais usw. wird der Magnetfluss $\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ durch hochpermeable Stoffe (Eisen, Ferrite) so gebündelt, dass er fast vollständig in einem geschlossenen Kreis, höchstens durch enge Luftspalte unterbrochen, umläuft und dass nur ein geringer Teil als Streufluss in die Umgebung abzweigt. Ein solcher Kreis besteht i. Allg. aus verschiedenen hintereinander oder parallel liegenden Bauteilen: Verzweigte Eisenkerne, Joche, Eisenteile von variablem Querschnitt, Luftspalte. Da abgesehen vom Streufeld der Fluss Φ wegen $\text{div } \mathbf{B} = 0$ an jeder Stelle, wo man den Kreis aufgeschnitten denkt, den gleichen Wert hat, ebenso wie ein Gleichstrom, für den $\text{div } \mathbf{j} = 0$ ist, gilt an jeder Verzweigung die kirchhoffsche Knotenregel für den Fluss. Gibt es eine Spannung, die den Fluss durch die verschiedenen Teile des Kreises treibt?

Definiert man die **magnetische Spannung** zwischen zwei Punkten P und Q in Analogie zur elektrischen als

$$\Theta = \int_P^Q \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}, \quad (6.156)$$

dann gilt das **ohmsche Gesetz des Magnetismus**

$$\Theta = \Phi R_m \quad (6.157)$$

mit dem **magnetischen Widerstand**

$$R_m = \frac{l}{A\mu_r\mu_0} \quad (6.158)$$

für das homogene Kreisstück zwischen P und Q , das die Länge l , den Querschnitt A und die Permeabilität μ_r hat. Dies ist eine triviale Folge der Definition $\Phi = AB = A\mu_r\mu_0 H$ und $\Theta = Hl$, die nichts mit irgendeinem Leitungsmechanismus zu tun hat, erleichtert aber die Berechnung komplizierter magnetischer Kreise. Die gesamte magnetische Spannung beim einmaligen Umlauf um den Kreis ergibt sich aus $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ als $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = NI$, d. h. gleich dem umlaufenden Gesamtstrom (N gesamte Windungszahl, nicht Windungszahl/m). Dies bringt die Durchflutung NI in Analogie mit der elektromotorischen Kraft (Ringspannung) von

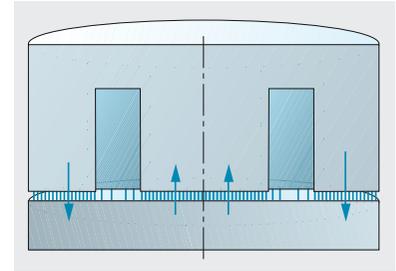


Abb. 6.125. Die Haltekraft eines Hubmagneten ergibt sich aus der Tendenz des Luftspalts, sich zu verkleinern, weil er so die magnetische Feldenergie verringern kann

Generatoren oder Batterien. Beide sind im Gegensatz zum elektrostatischen Potential abhängig vom Integrationsweg. Wenn er den Kreis z -mal durchläuft, kommt die z -fache Umlaufspannung heraus.

Nicht zu verwechseln mit der magnetischen Spannung und physikalisch viel fundamentaler ist das Vektorpotential. Man argumentiert so: Da \mathbf{B} ein reines quellenfreies Wirbelfeld ist ($\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$), muss man es als Rotation eines anderen Vektorfeldes darstellen können, nämlich des **Vektorpotentials** \mathbf{A} .

\mathbf{B} ergibt sich aus dem Vektorpotential als

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} . \quad (6.159)$$

Analog schließt man aus der Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$), dass \mathbf{E} der Gradient eines Skalarfeldes, des Potentials φ ist: $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$. Zur Berechnung des Magnetfeldes einer Stromverteilung ist \mathbf{A} oft praktischer als \mathbf{B} . Man kann nämlich die Maxwell-Gleichungen mittels φ und \mathbf{A} sehr vereinfachen. Zwei von ihnen werden eigentlich überflüssig: Wenn $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ ist, weiß man sofort, dass $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ist (ein reines Wirbelfeld hat keine Quellen). Umgekehrt ist das statische \mathbf{E} wirbelfrei, was aus $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ automatisch folgt. Im dynamischen Fall ergibt sich ein Wirbelanteil: $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$. Man muss also die Definition von \mathbf{E} erweitern:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \dot{\mathbf{A}} , \quad (6.160)$$

dann stimmt das auch. Es bleiben die Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} = -\varepsilon \varepsilon_0 \Delta \varphi = \varrho$$

und $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$. (Wir lassen $\dot{\mathbf{D}}$ vorerst beiseite.) Statt \mathbf{H} kann man $\operatorname{rot} \mathbf{A} / (\mu_r \mu_0)$ setzen, also

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_r \mu_0 \mathbf{j} . \quad (6.161)$$

Nun ist für jedes Vektorfeld

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} = -\Delta + \operatorname{grad} \operatorname{div} . \quad (6.162)$$

Verlangt man $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, was immer möglich ist, dann ist schließlich

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_r \mu_0 \mathbf{j} , \quad (6.163)$$

d. h. jede Komponente von \mathbf{A} hängt mit der entsprechenden Komponente von \mathbf{j} ebenso zusammen wie φ mit ϱ , nämlich nach der Poisson-Gleichung. Damit werden die gesamten Mittel der Potentialtheorie, die sich mit der Lösung dieser Gleichung beschäftigen, für das Magnetfeld verfügbar. Wenn man \mathbf{A} kennt, ergibt sich \mathbf{B} sofort durch Rotationsbildung.

Die tiefere Bedeutung des Vektorpotentials enthüllt sich in der Hamilton-Mechanik, der Relativitäts- und der Quantentheorie. φ und \mathbf{A} verschmelzen zu einem **Vierervektor**, ebenso wie ϱ und \mathbf{j} . In einigen Quantenexperimenten (Josephson-Effekt, Aharonov-Bohm-Versuch, Abschn. 17.7, Aufgabe 13.6.18) tritt das Vektorpotential direkt physikalisch in Erscheinung.

6.9.5 Das Magnetfeld der Erde

Wie das Schießpulver kannten die Chinesen die Magnetnadel schon mehr als 1 000 Jahre vor uns, benutzten beides aber mehr zu kultischen Spielereien, als um einander umzubringen oder andere umbringbare Völker zu entdecken. Die Europäer erhielten beides erst über die Araber und durch die Kreuzzüge und machten sehr bald blutigen Ernst damit. Das in Anwendung und Theorie uralte Gebiet des **Erdmagnetismus** hat gerade in den letzten Jahren eine ganze Reihe aufregender Überraschungen gebracht.

Um 1600 erklärte *W. Gilbert*, Leibarzt von Elizabeth I, seiner Patientin an einer magnetischen Eisenkugel, der Terrella, dass die ganze Erde als Magnet wirkt. Dasselbe Feld wie mit seiner magnetisierten Eisenkugel hätte *Gilbert* im Außenraum auch mit einer Kupferkugel erhalten, in der zentral ein Kreisstrom fließt oder ein Stabmagnet sitzt. Für magnetisierte Kugel und Stabmagnet lässt sich die Äquivalenz so nachweisen: Elektrische Polarisation **P** oder **Magnetisierung J** bedeuten ein Dipolmoment/Volumeneinheit **P** bzw. **J**. Überall sind positive und negative Ladungen der Dichte ρ um die Strecke **d** gegeneinander verschoben, sodass $\rho \mathbf{d} = \mathbf{P}$ (bzw. **J**) ist. Die polarisierte Kugel kann man sich also aus einer positiv und einer negativ geladenen Kugel zusammengesetzt denken, die um **d** gegeneinander verschoben sind. Jede Kugel wirkt aber wie eine Ladung $4\pi R^3 \rho / 3$ in ihrem Mittelpunkt, die magnetisierte Kugel wie ein Dipol vom Moment $\boldsymbol{\mu} = 4\pi R^3 \rho \mathbf{d} / 3 = 4\pi R^3 \mathbf{J} / 3$. Dass auch ein Kreisstrom in größerer Entfernung ein Dipolfeld erzeugt, wird in Aufgabe 6.8.1 gezeigt.

Wie sieht das **Dipolfeld** im Abstand *R* und der geomagnetischen Breite φ (Abb. 6.126) aus? Die Felder der positiven und negativen Ladung kompensieren einander fast, aber nicht ganz. Beide haben ungefähr den Betrag $E_0 = Q / (4\pi\epsilon_0 R^2)$. Ihre Richtungen sind um $\gamma \approx d \cos \varphi / R$ verschieden, also bleibt eine resultierende Horizontalkomponente

$$E_{\parallel} \approx E_0 \gamma \approx E_0 d \cos \varphi / R = p \cos \varphi / (4\pi\epsilon_0 R^3) .$$

Ihre Größen sind verschieden um

$$\begin{aligned} E_{-} - E_{+} &= Q / [4\pi\epsilon_0 (R - \frac{1}{2}d \sin \varphi)^2] - Q / [4\pi\epsilon_0 (R + \frac{1}{2}d \sin \varphi)^2] \\ &\approx 2Qd \sin \varphi / (4\pi\epsilon_0 R^3) = 2p \sin \varphi / (4\pi\epsilon_0 R^3) . \end{aligned}$$

Das ist die Vertikalkomponente des Dipolfeldes. Beide Komponenten sind bereits auf die Kugel-(Erd-)Oberfläche bezogen. Der resultierende **E**-Vektor zeigt um einen Winkel β , den **Inklinationswinkel**, gegen die Horizontale nach unten. Es ist

$$\tan \beta = \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = 2 \tan \varphi .$$

In 45° geomagnetischer Breite ist $\beta = 63,4^{\circ}$, in 60° Breite schon 73,9°, am magnetischen Pol 90°. Dort ist die Gesamtfeldstärke genau doppelt so groß wie am Äquator. Den magnetischen Fall erhält man, indem man **E** durch **B** und ϵ_0^{-1} durch μ_0 ersetzt:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \boldsymbol{\mu}}{4\pi R^3} (\cos \varphi, 2 \sin \varphi) .$$

Am Äquator misst man $B = 3,1 \cdot 10^{-5}$ T. Daraus folgen ein Moment $p_m = 8,1 \cdot 10^{22}$ A/m² und eine Magnetisierung $J = 3B / \mu_0 = 74,5$ A/m, d. h. 10^{-4} der **Sättigungsmagnetisierung** des Eisens. Es gibt zwar speziell im Erdkern genügend Eisen, aber schon in 20–30 km Tiefe überschreitet die Temperatur den **Curie-Punkt**, und spontane Magnetisierung ist nicht mehr möglich (**geothermische Tiefenstufe** im Mittel 30 m/K). Allem Anschein nach stammt also das Erdfeld von einem Kreisstrom, vermutlich im äußeren Teil des Kerns.

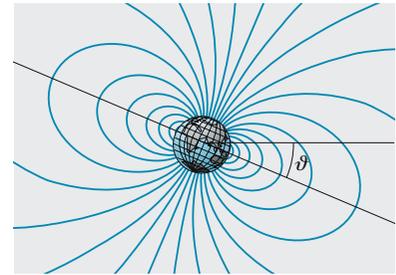


Abb. 6.126. Das Dipolfeld der Erde. Die dargestellte Achsschiefe ist nicht die Ekliptikschiefe von 23,5°, sondern die Abweichung zwischen erdmagnetischer und Rotationsachse (≈ 15°)

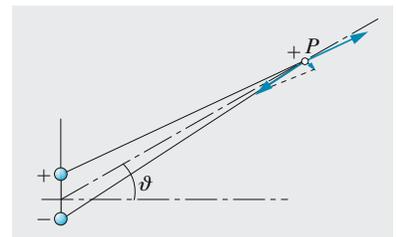


Abb. 6.127. Die positive Ladung ist um $d \sin \varphi$ näher am Punkt *P*. Daher ist ihr Feld E_{+} um $2Qd \sin \varphi / (4\pi\epsilon_0 r^3)$ stärker als das Feld E_{-} der negativen Ladung. Diese Differenz ist die Radialkomponente des Dipolfeldes. Die andere Komponente ergibt sich aus den Richtungen von E_{+} und E_{-} , die um $d \cos \varphi / r$ verschieden sind (Sehwinkel). Also $E_{\perp} = Ed \cos \varphi / r = p \cos \varphi / (4\pi\epsilon_0 r^3)$

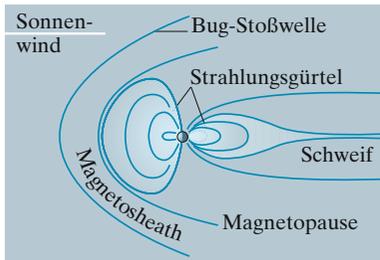


Abb. 6.128. In großem Abstand von der Erde ist das Dipolfeld stark deformiert durch den **Sonnenwind**, einen Plasmastrom (Elektronen und Protonen) aus der Sonnencorona, der mit ca. 500 km/s auf die Magnetosphäre der Erde prallt und in der Zone, wo der Staudruck des Sonnenwindes gleich dem magnetischen Druck des Erdfeldes ist, eine Stoßwellenfront bildet. Innerhalb davon folgt eine turbulente Plasmaschicht (Magnetosheath), deren Ströme das Erdfeld kompensieren. Dieses fängt erst innerhalb der **Magnetopause** an, erstreckt sich aber dafür auf der Nachtseite als Magnetschweif sehr weit in den Raum. Wo das Magnetfeld stark genug ist, um schnelle Teilchen einzufangen, aber die Atmosphäre dünn genug, um sie frei zirkulieren zu lassen, liegt ringförmig der **Strahlungsgürtel (van Allen-Gürtel)**, Abschn. 18.5.3). Er ist zu den Polen hin offen, wo auch die im Erdfeld beschleunigten Elektronen eintreten können, die in der Hochatmosphäre Polarlicht durch Stoßionisation erzeugen

Bei 3 000 km Radius müsste der Gesamtstrom $I = |\mu|(\pi R^2) \approx 3 \cdot 10^9$ A betragen. Die entsprechende Stromdichte von etwa 10^{-4} A/m² setzt in Eisen nur elektrische Felder von 10^{-11} V/m voraus (in Silikaten, die unter Druck und Hitze sehr viel besser leiten, auch nicht viel mehr). Derartige Ringfelder werden fast unvermeidlich induziert, sobald sich Teile des Erdinnern relativ zueinander bewegen. Um sie gemäß $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ zu erzeugen, braucht man Relativgeschwindigkeiten (Strömung) von etwa 1 m/Jahr, die mit anderen Beobachtungen durchaus verträglich sind. Das erdmagnetische Feld entsteht nach dieser **Dynamotheorie** durch Selbsterregung entsprechend dem dynamoelektrischen Prinzip von *Siemens*: Wie im Gleichstrom-Nebenschlussgenerator erzeugt die Rotation des Erdkerns (Ankers) im schwachen remanenten Magnetfeld der Kruste (Erregerwicklung) einen Induktionsstrom, der das Magnetfeld verstärkt usw.

Die Strömungssysteme des Erdinnern haben mit der Erdrotation nur indirekt zu tun (Coriolis-Ablenkung wegen des kleinen v viel schwächer als bei Wind oder Meeresströmung). Selbst ihr Umlaufsinn ist durch „zufällige“ Umstände bestimmt. Kein Wunder, dass das Erdfeld örtliche und zeitliche Unregelmäßigkeiten zeigt. Zunächst liegt der resultierende Dipol nicht parallel zur Erdachse und geht auch 350 km abseits des Erdmittelpunkts vorbei (exzentrischer Dipol). Ein Durchstoßpunkt der Dipolachse durch die Erdoberfläche liegt in NW-Grönland (78,4° N, 69° W; physikalisch ein Südpol, da er das N-Ende der Kompassnadel anzieht), der andere, nicht exakt gegenüber, in Adelie-Land am Rand von Antarktika (68,5° S, 111° O). Infolge der Exzentrizität und weiterer regionaler Anomalien sind dies *nicht* die Stellen, wo die Kompassnadel senkrecht zeigt, sondern diese liegen fast 1 000 km entfernt.

Die regionalen Anomalien beruhen auf Unregelmäßigkeiten im Strömungssystem des Erdinnern und lassen sich durch schwache zusätzliche Magnetpole beschreiben. Ein solcher Zusatz-Südpol unter Sinkiang ist verantwortlich dafür, dass in Deutschland der Kompass fast genau nach Norden zeigt (Missweisung oder **Deklination** maximal 3° W, während der Kurs nach NW-Grönland 17,5° N zu W wäre). Umgekehrt weicht im Südatlantik der Kompass fast 30° westlich ab (fast 20° mehr als er sollte: Die USA haben auch ihren Zusatzpol), was Columbus sehr verwirrt hat und bis heute Unsicherheit über seinen ersten Landeplatz in Amerika schafft. Anomalien kleinerer Ausdehnung beruhen auf Basaltkuppen und Erzlagerstätten (in Kiruna und Kursk zeigt der Kompass nach Süden), bis hinunter zu großen Eisenmassen wie Schiffen. Erzprospektierung und U-Boot-Detektierung, zusammen mit der Hochfrequenzspektroskopie (Kernresonanz) haben zur Entwicklung von Magnetometern geführt, die B genauer messen können als $1 \gamma = 10^{-9}$ Tesla.

Auch für die zeitlichen Variationen des Erdfeldes gibt es sehr verschiedene Größenordnungen der Ausdehnung. Am einfachsten erkennt man die säkularen Änderungen. Seit 1900 ist der „Süd“pol (d. h. der Punkt mit 90° Inklination) von Boothia Felix bis Prince of Wales-Land um 600 km gewandert. Seit *Gauß*' Messungen hat die Deklination in Deutschland um 18° abgenommen. Die **Agone**, d. h. die Linie mit der Deklination 0, lief 1945 durch Königsberg, 1975 durch Berlin.

Ein Teil der kurzperiodischen Schwankungen geht ganz regelmäßig mit dem örtlichen Sonnenstand. Ihre Amplitude liegt um 10γ (10^{-8} T) und lässt sich auf Kreisströme in der **Ionosphäre** zurückführen. Andere, kleinere Schwankungen richten sich nach dem Mondstand. Beide Induktionsstromsysteme entstehen, indem die Hochatmosphäre mit der Tageserwärmung und den Sonnen- und Mondzeiten „atmet“, d. h. sich im Erdmagnetfeld hebt oder senkt. Aus den auftretenden Strömungsgeschwindigkeiten und Leitfähigkeiten folgt ein Gesamtstrom von 10^4 – 10^5 A, der gerade zu den beobachteten Amplituden führt. Die *unregelmäßigen* Schwankungen (magnetische Unruhe, **magnetische Stürme**) sind, wie schon

Celsius um 1750 fand, eng verknüpft mit **Polarlichtern** und der **Sonnenaktivität** (am stärksten in fleckenreichen Jahren). Später kamen zu diesem Komplex noch Telegraphie- und Funkstörungen hinzu. Kompassnadeln schwanken um 1° oder mehr ($\Delta B \approx 3\,000 \gamma$), zwischen den Enden von Überseekabeln liegen mehrere kV, in Telefonzentralen brennen die Kontakte aus. Ursache eines solchen Sturms ist ein **Flare**, d. h. das plötzliche (und noch weitgehend ungeklärte) Aufflammen der Sonnenphotosphäre um eine Fleckengruppe. Die verstärkte UV- und Röntgenemission der Sonne hat sofort **Kurzwellenschwund (Mögel-Dellinger-Effekt)** u. A. zur Folge. Etwa einen Tag später bricht auf der ganzen Erde, besonders aber im

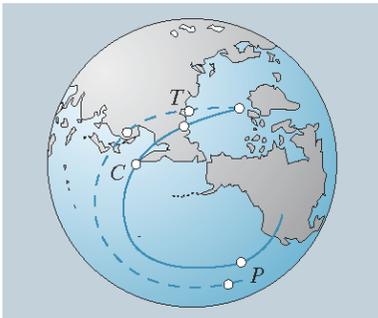


Abb. 6.129. Aus der Magnetisierung der Gesteine ließ sich die Lage des Magnetpols relativ zu den Kontinenten ermitteln. (—) Polwanderung relativ zu Eurasien, (---) relativ zu Nordamerika. Die Lage der Pole im oberen Präkambrium (P, 650 Mill. Jahre), im Carbon (C, 270 Mill. Jahre) und im unteren Tertiär (T, 60 Mill. Jahre) sind markiert. Bis vor ca. 100 Mill. Jahren hatten Eurasien und Nordamerika konstante Lage zueinander (man beachte die Verkürzung der Kartenprojektion), waren aber etwa um die Nordatlantikkbreite näher zusammen als heute

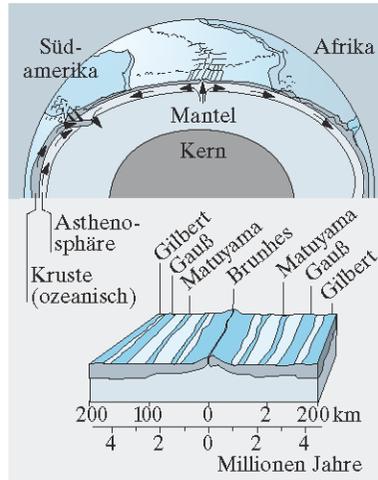


Abb. 6.130. Schema der **Plattentektonik**. Es verschieben sich nicht nur wie nach A. Wegener die Kontinente, sondern sie treiben auf Platten aus Ozeanböden, angetrieben vermutlich durch Ströme in der **Asthenosphäre**, wo das Gestein plastisch ist. Grenzen zwischen Platten sind entweder **Rifts**, ozeanische Rücken oder kontinentale Grabenbrüche wie in Ostafrika, wo aufquellendes Material die beiden Platten auseinander schiebt; oder es sind **Subduktionszonen**, wo sich eine Platte teilweise unter die andere schiebt und wo Tiefseegräben, Faltengebirge, Vulkan- und Tiefbebenzonen entstehen. Beiderseits der ozeanischen Rücken findet man überall die gleiche Folge von Streifen, die jeweils bei der Abkühlung in der damals herrschenden Feldrichtung magnetisiert wurden. **Dunkelblau**: heutige, **hellblau**: umgekehrte Polung des Magnetfeldes. Die einzelnen magnetischen Perioden sind nach Magnetologen benannt

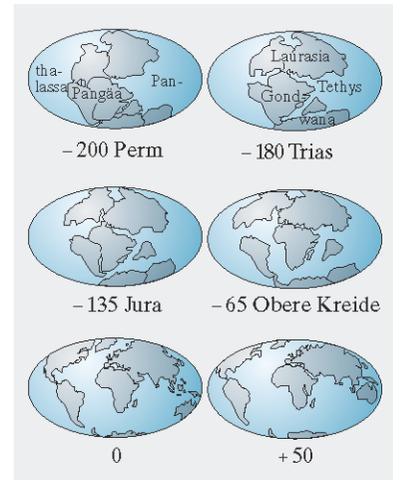


Abb. 6.131. Entwicklung der Kontinentalanordnung seit etwa 200 Mill. Jahren mit Projektion um 50 Mill. Jahre in die Zukunft. Ob der Kontinent **Pangäa** immer vorher bestand (seit Abtrennung des Mondes, wie manche glauben), oder ob er aus früher getrennten Platten zusammengewachsen ist, wird noch umstritten. Man beachte besonders die lange Reise Indiens, dessen Kollision mit Südasien die zentralasiatischen Gebirge aufgefaltet hat und für die Erdbeben von Iran, Assam und China verantwortlich ist, und das Vordringen Afrikas in Europas weichen Unterleib, das Ähnliches in kleinerem Maßstab bewirkt. Diese von **Alfred Wegener** um 1910 begründeten Vorstellungen sind besonders durch magnetische Messungen wieder zu Ehren gekommen und haben die gesamte Geologie, Ozeanographie, Paläontologie, Lagerstättenkunde usw. revolutioniert

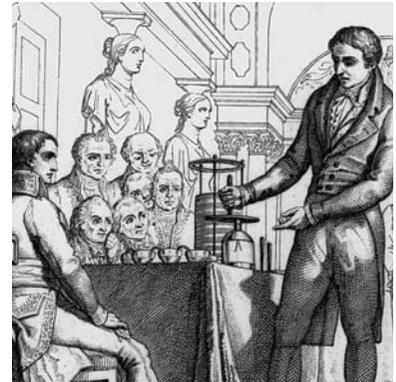
Polargebiet, der magnetische Sturm los. Dann gehen die **Polarlichter** auch über den engen Gürtel zwischen 60 und 70° geomagnetischer Breite hinaus, wo man sie auch normalerweise fast jeden Abend sieht. Sie entstehen als Glimmlicht in der Hochatmosphäre, ausgelöst durch Stoßanregung durch Elektronen von der Sonne, die in Spiralbahnen um die **B**-Linien des Erdfeldes gezwungen werden. Nur in hohen Breiten reichen die Linien des Dipolfeldes weit genug in den Raum hinaus. Andererseits verlaufen sie in zu großer Polnähe zu steil, um die Teilchen zur Erde hinführen zu können. Diese Teilchen stammen aus dem stetigen Sonnenwind, d. h. der Expansion der Gase der Sonnencorona. Die **Corona** ist nämlich thermisch instabil (so heiß, dass ihre Teilchen die Entweichgeschwindigkeit aus dem Schwerefeld der Sonne überschreiten). Geheizt wird die Corona durch Stoßwellen aus der Wasserstoff-Konvektionszone der Photosphäre, also eigentlich durch den Lärm des Brodelns der Sonnengase.

Mindestens ebenso aufregend sind die Schwankungen des Magnetfeldes in geologischen Zeiträumen. Man kann sie verfolgen durch Messung der Magnetisierung, die eisenhaltige Gesteine bei der Erstarrung bzw. Ablagerung im damaligen Erdfeld angenommen und teilweise bis heute behalten haben. Deklination und Inklination dieser Magnetisierung *einer* Probe ergeben im Prinzip bereits die Lage des fossilen Magnetpols und unter der Annahme einer Kopplung zwischen beiden auch des Rotationspols. Europäische Gesteine zeigen, dass der geographische Nordpol seit dem Präkambrium vom heutigen Mexico durch den Mittelpazifik über Japan und Ostsibirien in seine heutige Lage gewandert ist. Das ist paläoklimatisch sehr befriedigend, denn wenn Europa bis ins Mesozoikum weiter südlich lag, braucht man nicht anzunehmen, die ganze Erde sei damals wärmer gewesen. Nun erhält man aber aus nordamerikanischen Gesteinen eine andere Spur für den Pol, die 2 000–3 000 km weiter südlich und dann westlich zu verlaufen scheint, bis sie nach der Trias mit der europäischen verschmilzt. Offenbar sind Europa und Nordamerika erst seit dieser Zeit in der heutigen Lage zueinander. Vorher lagen sie 2 000–3 000 km näher zusammen. Diese Entdeckung (*Runcorn*, 1956) hat endlich den zähen Widerstand gegen *A. Wegeners* Theorie der **Kontinentalverschiebung** (1912) gebrochen. Diese Theorie nahm dann rapide ihre heutige Form an (**Plattentektonik**). Ein wichtiger Schritt dabei war die Entdeckung, dass manche Gesteine die falsche Polarität der Magnetisierung haben. Speziell auf den Ozeanböden liegen, meist parallel zur Küste, ziemlich regelmäßige „Zebrastrifen“ abwechselnder Polarität. Tatsächlich schließt die Dynamotheorie ein 180°-Umklappen der magnetischen Achse nicht aus, wie es anscheinend etwa alle Millionen Jahre erfolgt. Die Streifenstruktur, die weltweit übereinstimmt, erlaubt eine (anderweitig bestätigte) Altersbestimmung der Ozeanböden. Nahe den mittelozeanischen Rücken (z. B. der mittelatlantischen Schwelle) ist der Boden sehr jung, nach außen wird er immer älter. Von den Quellzonen der Rücken aus expandiert er (**ocean floor spreading**) und verschwindet an den Küsten in Tiefseegräben unter den Randgebirgen der Nachbarscholle mit ihren Erdbeben- und Vulkanzonen. Zahlreiche andere Beobachtungen haben diese Vorstellungen bestätigt und eine Fülle von Einzeltatsachen in unerwarteter Weise erklärend verknüpft. Magnetische Messungen haben so entscheidend mitgeholfen, unser Bild von der Erde grundlegend umzugestalten und zu vereinheitlichen.

▲ Ausblick

Elektrische Signale im μV -Bereich laufen durch unsere Nervenstränge, lösen Muskelkontraktion und Drüsensekretion aus. Trotzdem haben wir keinen Sinn, der uns vor 220 V oder mehr warnt, wohl weil niederfrequente elektrische Felder ins Körperinnere nicht eindringen, sondern durch winzige Oberflächenaufladungen kompensiert werden. Ob technischer „Elektrosmog“ Gesundheit und Wohlbefinden beeinträchtigt, ist daher sehr strittig. Immerhin herrschen ja normalerweise in der Atmosphäre, erst recht in Gewitternähe, luftelektrische Felder im kV/m -Bereich. Erst Ströme direkt durch den Körper sind schädlich, um 100 mA tödlich.

Wären wir Fische, könnten wir mit den Lorenzini-Ampullen in unserem Seitenlinien-Radar Felder um 10^{-9} V/m wahrnehmen und so Beute, Feinde, Hindernisse lokalisieren. Die Feldbegriffe wären uns dann bestimmt sehr anschaulich. Als Menschen bleibt uns nur eine abstrakte Vorstellung, wenn wir die moderne Technik und Forschung vom Chip bis zum Riesenbeschleuniger begreifen wollen.



Alessandro Volta führte 1801 der Académie Française mit Konsul Bonaparte in der ersten, Laplace in der zweiten Reihe seine Zink-Kupfer-Batterie (die Voltasche Säule) vor. Das Neue an seiner Säule waren die viel größeren Ströme, als man sie statisch erzeugen kann

✓ Aufgaben ...

www. CD

● 6.1.1 Ist 1 C wenig oder viel?

Wie viel Coulomb fließen während einer elektrischen Rasur bzw. während des Bügelns einer Bluse? Wenn Sie diese Ladung z. B. auf zwei Luftballons vereinigen könnten, welche Kraft würde zwischen ihnen herrschen? Schätzen Sie die Ladungsmengen, die zwischen Körper und Nylonhemd ausgetauscht werden, wenn Sie es sich über den Kopf ziehen.

● 6.1.2 Abschirmung

Wie kommt es, dass man elektrische Felder abschirmen, also aus einem bestimmten Volumen fern halten kann, Gravitationsfelder aber nicht? Wie müssen Schirme gegen elektrische Felder und wie müssten Gravitationschirme beschaffen sein? Stellen Sie sich die Möglichkeiten vor, die ein Gravitationsschirm bieten würde!

● 6.1.3 Coulomb-Kraft und Gravitation

Vergleichen Sie die Coulomb-Kraft zwischen Elektron und Proton mit ihrer Gravitation. Welche Ladungen müssten Erde und Sonne haben, damit die Gravitation zwischen ihnen kompensiert bzw. verdoppelt würde?

Könnte man die Gravitation dadurch erklären, d. h. auf die Coulomb-Kraft zurückführen, dass es solche Überschussladungen gibt oder dass die Ladungen von Proton und Elektron ein wenig verschieden sind (wie viel?). Welche Tatsachen entsprächen einer solchen Theorie, welche widerlegen sie?

●● 6.1.4 Mit oder ohne Potential

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Wegunabhängigkeit der Verschiebungsarbeit, der Anwesenheit in sich geschlossener Feldlinien, der Gültigkeit der Poisson-Gleichung und der Existenz eines Potentials? Beispiele: Fluss, der in der Mitte schneller strömt als am Rand; Magnetfeld um einen stromdurchflossenen Draht; Wind, der bei Tage von der See, nachts vom Land her weht. Ist es richtig, dass ein Potential immer existiert, wenn die Feldlinien in irgendwelchen „Ladungen“ enden? Benutzen Sie den Begriff des „Flusses“!

●●● 6.1.5 Newton hatte es schwerer

Dass das Feld einer leitenden Kugel so ist, als sei die Ladung im Mit-

telpunkt konzentriert, lässt sich auch direkt durch Summation der Beiträge der einzelnen Kugelflächelemente zeigen. Man führe dies für das Potential eines Punktes auf der Oberfläche aus, wobei man die Kugel sinngemäß in Schichten zerschneidet. Wäre es einfacher oder komplizierter, mit der Feldstärke statt mit dem Potential zu rechnen?

●●● 6.1.6 Thomson-Modell

Für eine gleichmäßig von Ladung erfüllte Kugel bestimme man die Feld- und Potentialverteilung innerhalb und außerhalb der Kugel sowie die elektrostatische Gesamtenergie. Eine kleine Punktladung entgegengesetzten Vorzeichens wird in die große Kugel eingebettet. Wie hängen ihre Kraft und Energie vom Ort ab? Wie bewegt sie sich, wenn keine Reibungswiderstände herrschen, bzw. bei einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft? Wieso hat Thomson das System als Atommodell vorgeschlagen, und was hat er damit erklären können? Welche Beobachtung hat dieses Atommodell zu Fall gebracht?

●● 6.1.7 Superposition

In eine gleichmäßig aufgeladene Hohlkugel bohrt man ein kleines Loch. Wie verhalten sich Feld und Potential dicht innerhalb und außerhalb dieses Loches? (Keine Rechnung, nur Superpositionsprinzip o. Ä.).

●● 6.1.8 Feld des Drahtes

Welches Feld erzeugt ein gleichmäßig aufgeladener unendlich langer Draht? Benutzen Sie direkt das Coulomb-Gesetz oder die Flussregel. Was ist einfacher?

●● 6.1.9 Bahn im \ln -Feld

Ein Elektron fliegt senkrecht zu einem gleichmäßig aufgeladenen geraden Draht in einem Minimalabstand d an diesem vorbei. Um welchen Winkel wird es abgelenkt? Rechnen Sie in der Näherung kleiner Ablenkungen. Warum haben *Möllenstedt* und *Düker* in ihrem Elektroneninterferenz-Experiment einen Draht zur Ablenkung benutzt? Wieso kann man dieses System mit einem **Fresnel-Biprisma** vergleichen? Welches Potential muss man an den Draht legen?

●● 6.1.10 Potentialtal

Kann es im elektrostatischen Feld im leeren Raum eine *stabile* Ruhelage für eine Ladung geben? Wie müsste das Feld um eine solche Stelle aussehen? Erlaubt das der Satz von *Gauß*? Gibt es labile oder indifferente Gleichgewichtslagen? Wie muss man das Feld verallgemeinern, um Teilchen stabil einzufangen zu können?

●● 6.1.11 Wie stark ist ein Blitz?

Schätzen Sie die Kapazität einer Gewitterwolke gegen die Erde (am besten für ein lokales Wärmegewitter mit vernünftigen Werten für Ausdehnung und Höhe). Die Durchschlagfestigkeit der Luft ist für kurze Schlagweiten etwa 10^4 V/cm, sinkt aber für lange auf effektiv ca. 1 000 V/cm. Ein **Blitz** dauert etwa 1 ms. Bestimmen Sie Gesamtladung, -strom, -energie des Gewitters sowie, indem Sie die Anzahl der Blitze schätzen, die entsprechenden Größen und die Leistung für den einzelnen Blitz.

●●● 6.1.12 Gewittertheorie

Damit es blitzt, müssen die Wolken gegen die Erde (Erdblitz) oder Wolkenenteile gegeneinander (Wolkenblitz) so stark aufgeladen sein, dass die Durchschlagfeldstärke der Luft (ca. 10^4 V/cm) überschritten wird. Welche Ladungsdichten sind dazu erforderlich bei vernünftigen Abmessungen der geladenen Bereiche? Falls jedes Wassertropfchen ein Ion eingefangen hat: Welche Tröpfchenkonzentration muss man annehmen? Wie groß müssen die geladenen Tröpfchen sein (Vergleich mit Dampfdruckkurve)? Nach *C. T. R. Wilson* werden die Tröpfchen einsinnig geladen, weil sie im normalen luftelektrischen Feld (ca. 100 V/m mit negativer Erde) zu Dipolen influenziert werden. Im Fallen nimmt ihre Vorderseite Ionen eines Vorzeichens auf und stößt die anderen ab; deren Beweglichkeit ist nicht groß genug, damit die Rückseite des vorbeifallenden Tröpfchens erreicht wird, falls dieses eine kritische Größe überschreitet. Schätzen Sie diese Größe ab und vergleichen Sie mit dem benötigten Wert (vgl. Beispiel auf 105; Beweglichkeit s. Abschn. 8.3.1).

● 6.1.13 Kondensator

Wie stellt man einen **Kondensator** von z. B. $1 \mu\text{F}$ möglichst raumsparend her? (Metallfolien und Plastikfolien, eingerollt; Abmessungen?)

●● 6.1.14 Versuch von Millikan

Feinste Öltröpfchen, durch Zerstäubung hergestellt, schweben im dunkelfeldbeleuchteten Blickfeld eines Mikroskops und sinken langsam im Erdschwerefeld. Nun legt man ein vertikales elektrisches Feld E an (Kondensator) und regelt es so, dass ein ins Auge gefasstes Tröpfchen, dessen Sinkgeschwindigkeit vorher zu v bestimmt worden war, jetzt gerade nicht mehr sinkt. Was kann man aus E und v entnehmen? Man setze die Kräftegleichgewichte mit Stokes-Kraft, Schwerkraft und Feldkraft an; was ist bekannt? Manchmal beginnt ein Teilchen, das im Feld ruhte, plötzlich doch zu sinken oder zu

steigen, und zwar mit der Geschwindigkeit v' ; was ist passiert? Beispiel: Öl der Dichte 0,9 gebe $v = 4 \mu\text{m/s}$, $E = 4,5 \text{ V/cm}$, $v' = 1,2 \mu\text{m/s}$.

●● 6.1.15 Staubfilter

Durch ein Rohr, Radius R , Länge l , ist axial ein Draht vom Radius r_0 gespannt. Zwischen Draht und Rohrmantel liegt die Spannung U . Wirkt auf ein Staubeilchen im Rohr eine resultierende Kraft; wenn ja, wie hängt sie von seiner Größe ab? Wie schnell wandern die Teilchen durch die Luft (Ortsabhängigkeit)? Wie lange brauchen sie bis zum Draht oder zur Wand? Wandern auch die Luftmoleküle? Ein Raum soll in vernünftiger Zeit entstaubt werden. Wie schnell darf man die Luft ansaugen? Geben Sie Abmessungen und Spannungen an.

●● 6.1.16 Influenz

Warum führt sie immer zur Anziehung zwischen geladenen und ungeladenen Körpern? Welche Rolle spielt die Ausdehnung des ungeladenen Körpers für die Größe der Kraft? Nähert sich die große oder die kleine Seifenblase schneller dem geriebenen Füllfederhalter?

●● 6.1.17 Feldemissions-Mikroskop

Man erzielt ungeheure Vergrößerungen mit sehr einfachem Aufbau: In eine Kugel, deren Innenwand mit einem Leuchtstoff beschichtet ist, ragt zentral eine sehr feine Drahtspitze. Zwischen Draht und Kugel liegt Hochspannung, die Kugel ist hoch evakuiert. Wieso erhält man auf der Kugel ein stark vergrößertes Bild der Drahtspitze? Welches ist der Vergrößerungsmaßstab? Wie unterscheiden sich ein Feldelektronen- und ein Feldionen-Mikroskop? Wie kommen die Elektronen aus dem Draht? Wie groß ist die Feldstärke dicht an der Drahtspitze? Wie ist die Feldverteilung in der Kugel? Elektronen müssen eine Potentialstufe der Höhe U_0 überwinden, um aus dem Draht nach draußen zu gelangen.

Die Quantenmechanik zeigt, dass ein Elektron mit der Wahrscheinlichkeit e^{-kd} durch eine Potentialschwelle der Dicke d „tunneln“ kann. Dabei hängt k von der Schwellenhöhe U_0 und der Teilchenmasse m ab: $k \approx \hbar / \sqrt{2emU_0}$. Von welchen Feldstärken ab können Elektronen austreten? ($U_0 \approx 1$ V). Wie schnell fliegen die ausgetretenen Elektronen, wie lange brauchen sie bis zum Leuchtschirm? Wie kommen die Bilder zustande, auf denen man z. B. einzelne Fremdatome im Gitter des Drahtmaterials sieht?

●● 6.1.18 Geiger-Müller-Zähler

Ein sehr dünner Draht ist durch ein Rohr gespannt. Zwischen Draht und Rohr liegt eine Spannung. Durch ein Fenster aus sehr dünnem Material können ionisierende Teilchen in das Rohr eintreten. Bei geeigneter Spannung löst jedes Teilchen, das in den „aktiven“ Bereich trifft, einen kurzzeitigen Entladungsstrom aus. Kann man mit einem normalen Verstärker-Messgerät den Übergang einer einzelnen Elementarladung direkt nachweisen? Wenn nein, was muss im Zählrohr geschehen? Warum spannt man einen Draht durch ein Rohr und nimmt nicht einfach einen Plattenkondensator? Schildern Sie in Worten, wie ein schnelles Teilchen eine Entladung im Rohr auslöst. Leichte Moleküle wie O_2 und N_2 haben eine Ionisierungsenergie um 30 eV. Geben Sie Kombinationen von Feldstärke und freier Weglänge an, bei denen sich eine Entladungslawine ausbilden kann. Welche Spannungen sind für ein Zählrohr mit einem $1 \mu\text{m}$ -Draht nötig, damit das Rohr „zündet“, d. h. Lawinentladung einsetzt? Muss ein Zählrohr evakuiert sein?

●● 6.1.19 Hochspannungskabel

Ein 220 kV-Hochspannungskabel ist im Sturm gerissen und auf den Boden gefallen, ohne dass die Sicherungsanlagen im Kraftwerk oder Umspannwerk die Spannung abschalten. Wie sieht die Verteilung von Feld und Potential im Erdboden um das Kabel aus, wenn es den Boden nur mit

seinem Ende berührt, bzw. in einer gewissen Länge auf dem Boden aufliegt? Bis auf welchen Abstand kann man sich dem Kabel ohne Gefahr nähern? Gilt für ein Kabel, das, wie üblich, in der Luft hängt oder für ein Kabel, das im Wasser hängt, der gleiche Sicherheitsabstand? Schätzen Sie auch den Strom, der vom Kabel ins Erdreich fließt. Nehmen Sie dabei gut durchfeuchtetes Erdreich an.

●● 6.1.20 Fernleitung

Eine Stadt von 100 000 Einwohnern soll versorgt werden. Schätzen Sie die zu übertragende Leistung. Welcher Strom muss durch die Leitung fließen? Geben Sie Spannungsabfall und Leistungsverlust in der Leitung allgemein an. Wie dick müssen die Kabel sein, damit nur höchstens 1% der Leistung in der Fernleitung verloren gehen? Warum überträgt man Hochspannung? Wodurch wird die Übertragungsspannung nach oben begrenzt? Wie groß ist die Feldstärke in der Nähe eines Hochspannungskabels in Abhängigkeit vom Abstand vom Kabel? In welchem Gebiet wird die Durchschlagsfeldstärke der Luft überschritten? Was ist die Folge? Welche Feldstärke herrscht dicht über dem Boden unter einem einzelnen Hochspannungskabel? Wie ändert sich die Feldstärke, wenn drei Drehstromkabel gespannt sind? Warum kann ein Mensch ungefährdet unter einer Hochspannungsleitung stehen? Bedenken Sie, dass die Leitung Wechselspannung führt. Fließt im Körper eines darunter stehenden Menschen ein Strom? Wie groß ist dieser Strom, welche Phase hat er gegenüber dem Strom im Kabel?

●● 6.2.1 Dissoziation

Welche Kraft und welche potentielle Energie herrschen zwischen zwei Elementarladungen im Abstand a (einige Ångström) im Vakuum bzw. in Wasser ($\epsilon = 80$)? Vergleichen Sie mit der thermischen Energie der Teilchen und ziehen Sie die Schlussfolgerungen. Kleben entgegengesetzt geladene Teilchen zusammen? Benutzen Sie die

Boltzmann-Verteilung. Worauf beruht die Rolle des Wassers als universelles Lösungsmittel? Welche Stoffe löst es schlecht? Kann man in atomaren Bereichen ohne weiteres mit dem makroskopisch bestimmten ϵ rechnen?

● 6.2.2 Polarisierbarkeit

Welche Polarisierbarkeit hätte das Thomson-Wasserstoffmodell (vgl. Aufgabe 6.1.6): Positive Ladung gleichmäßig über ein Kugelvolumen V verteilt, ein punktförmiges Elektron darin eingelagert?

●● 6.2.3 Orientierungspolarisation

In einem Lösungsmittel von der Viskosität η schwimmen Moleküle vom Dipolmoment p in einer Anzahldichte n . Es liegt ein elektrisches Feld vom Betrag E an. Wie sieht die Richtungsverteilung der Dipole im thermischen Gleichgewicht aus? (Hinweis: Abhängigkeit zwischen Dipolenergie und Einstellrichtung; Boltzmann-Verteilung!). Näherungsweise nehme man an, es gäbe nur drei Einstellrichtungen: In Feldrichtung, entgegengesetzt und senkrecht dazu. Was ist größer: Dipolenergie oder thermische Energie? Nähern Sie dementsprechend! Welcher Bruchteil γ der Dipole steht zusätzlich in Feldrichtung, verglichen mit dem Fall ohne Feld? Welche Polarisation bringen sie? Woher mag die „3“ in (6.53) stammen? Wie lange dauert eine solche Drehung (Drehmoment: Abschn. 6.1.6. Reibungswiderstand Aufgabe 3.3.5)? Zur Kontrolle: Relaxationszeit $\approx \eta \cdot \text{Molekülvolumen}/(kT)$.

●● 6.2.4 Mikrowelle

Warum erhitzt ein Mikrowellenherd wasserhaltige Stoffe und nur diese? Warum arbeitet er mit einigen GHz?

●● 6.2.5 Mischungsregel

Wenn Sie zwei Stoffe mit den Leitfähigkeiten σ_1 und σ_2 mischen, z. B. im Verhältnis 1:1, erwarten Sie vielleicht eine Leitfähigkeit $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ für das Gemisch. Häufig kommt aber

statt des arithmetischen Mittels das geometrische heraus. Wie ist das möglich? Für welche Stoffkombination erwarten Sie das arithmetische, für welche das geometrische Mittel? Warum sollen sich die Leitfähigkeiten linear zusammensetzen und nicht die spezifischen Widerstände? Könnten mikroskopische Bereiche, jeweils aus einem der beiden Stoffe, in der Mischung erhalten bleiben? Wie wären solche Bereiche angeordnet? Entwerfen Sie ein Ersatzschaltbild, aber hören Sie rechtzeitig damit auf. Welche Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Konzentrationsverhältnis, z. B. von der Volumenkonzentration der einen Komponente, erwarten Sie? Könnte für die DK oder andere Materialkonstanten eine ähnliche Mischungsregel gelten?

● 6.3.1 Schmutziges Kabel

Bei einer vor hinreichend langer Zeit verlegten elektrischen Leitung mit weißer Isolation kann man deutlich sehen, welches der Phasendraht und welches der Mittelpunktleiter ist. Einer der Drähte ist merklich schmutziger. Welcher? Gilt das für Gleichstrom wie für Wechselstromleitungen?

● 6.3.2 Kabelschaden

Ein 6 km langes, in der Erde verlegtes Kupferkabel (Querschnitt des Innenleiters 1 mm^2) hat einen Isolationsfehler. Da man es nicht auf der ganzen Länge ausgraben will, stellt man durch zwei Messungen an den beiden Enden den Widerstand zwischen Innenleiter und „Erde“ fest ($R' = 80 \Omega$ und $R'' = 90 \Omega$). Daraus kann man sowohl den Ort des Isolationsfehlers als auch dessen Widerstand selbst bestimmen. Wie? (Der Widerstand zwischen beliebig weit voneinander entfernten „geerdeten“ Punkten sei vernachlässigbar klein).

●● 6.3.3 Feldrelaxation

Zeigen Sie, dass die Konstanz des Stromes über die ganze Länge eines Leiters ein stabiles Gleichgewicht ist, dass nämlich jede lokale Abweichung von dieser Konstanz Einflüsse auslöst,

die die Abweichung rückgängig zu machen suchen. Können Sie sagen, warum der Begriff des RC-Gliedes für die Elektronik, speziell die elektromagnetischen Schwingungen, eine so zentrale Rolle spielt?

● 6.3.4 RC

Die Platten eines aufgeladenen Kondensators werden durch einen dünnen Draht verbunden. Was passiert? Kommt ein Gleichstrom augenblicklich zum Erliegen, wenn man den Stromkreis durch einen Schalter unterbricht? Schätzen Sie die eventuelle Verzögerung.

●● 6.3.5 Vielfachmesser

Die Amperemeterspule hat einen Widerstand von $1 \text{ k}\Omega$ und gibt, allein benutzt, Vollausschlag bei $10 \mu\text{A}$ (Abb. 6.62). Wie misst man damit Spannungen, Ströme und Widerstände? Welche Messbereiche stehen zur Verfügung? Welche Leistungen fallen in den einzelnen Zweigen bei den verschiedenen Kombinationen von Schalterstellungen an? Welche Kombinationen sind verboten? Wohin sollte man Sicherungen legen und welcher Art? Wie erkennt man, ohne das Gerät zu öffnen, ob sein Innenwiderstand groß bzw. klein genug für die beabsichtigte Messung ist? Um was für ein Amperemeter muss es sich handeln, wenn man Gleich- und Wechselströme und -spannungen messen kann? Wie sieht die Ω -Skala aus? Lässt man den zu messenden Widerstand unter Spannung?

●● 6.3.6 Kochplatte

Kochplatten mit vier Heizstufen enthalten meist zwei Heizwicklungen, aus deren Kombination sich die vier Leistungsstufen ergeben. Wie sieht die Schaltung aus? Wie sind die Heizleistungen abgestuft, wenn die beiden Wicklungen gleiche Widerstände haben? Wie müssen sich die beiden Widerstandswerte verhalten, wenn die Leistungen nach einer geometrischen Reihe abgestuft sein sollten, d. h. wenn die Leistung von Stufe zu Stufe um den gleichen Faktor zunehmen soll?

●● 6.3.7 Bügeleisen

Ein Bügeleisen von $220 \text{ V}/300 \text{ W}$ hat eine Heizwicklung aus einem Manganinband (spez. Widerstand $4 \cdot 10^{-7} \Omega\text{m}$) von 5 mm Breite und $0,01 \text{ mm}$ Dicke. Wie lang muss das Manganinband sein? Wie verhält sich das Bügeleisen, wenn man es an 110 V anschließt? Wie müsste man die Länge der Wicklung ändern, damit das Bügeleisen bei 110 V normal funktioniert? Wird das umgebaute und mit 110 V betriebene Bügeleisen ebenso lange halten wie das ursprüngliche Eisen bei 220 V ? Warum verwendet man nicht Kupfer als Heizdraht, dessen spez. Widerstand nur $1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ ist? Manganin hat nur eine sehr geringe Temperaturabhängigkeit des Widerstandes. Welchen Vorteil hat das für ein Bügeleisen? Was könnte passieren, wenn der Draht eine sehr starke Temperaturabhängigkeit des Widerstandes hätte?

●● 6.3.8 Ohm-Puzzle I

Die drei folgenden Probleme, besonders das letzte, haben schon manchen Knoten in Elektroniker-Hirnwindungen verursacht. Benutzen Sie Symmetrieüberlegungen und andere dem Problem angepasste Tricks, sonst wird es schwierig: Aus zwölf Widerständen von je 1Ω ist ein Würfel zusammengelötet. Welchen Widerstandswert misst man zwischen (a) den Endpunkten einer Raumdiagonale, (b) den Endpunkten einer Flächendiagonale, (c) zwei benachbarten Würfecken? Helfen ähnliche Überlegungen auch beim Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder?

●● 6.3.9 Ohm-Puzzle II

Zur Definition: Eine Leiter besteht aus zwei Holmen, verbunden durch Sprossen. Die Enden des einen Holms heißen A und B , die des anderen A' und B' . – Man lötet eine sehr lange Leiter zusammen; jede Sprosse hat einen Widerstand R_2 , jeder Holm hat zwischen je zwei Sprossen und an jedem Ende den Widerstand R_1 . Welchen Widerstand misst man zwischen den „oberen“ Enden A und A' ? Wenn

man an AA' die Spannung U legt, welche Spannung misst man dann zwischen den Lötstellen der ersten Sprosse, der zweiten Sprosse usw.? Kann man z. B. erreichen, dass an jeder Sprosse genau halb so viel Spannung liegt wie an der vorhergehenden? Wenn man gezwungen ist, die Leiter auf wenige Sprossen zu verkürzen: Was kann man tun, damit sich der Widerstand zwischen A und A' und die Spannungen an den verbleibenden Sprossen nicht ändern? Hinweis: Wie ändert sich der Widerstand zwischen A und A' , wenn Sie die ohnehin schon sehr lange Leiter um eine weitere Sprosse (R_2) und die beiden Holmstücke (R_1) nach oben verlängern?

●●● 6.3.10 Puzzle III

Ein Drahtgitter bestehe aus quadratischen Maschen. Der Widerstand jedes Drahtstücks, das eine Quadratseite bildet, ist $1\ \Omega\text{m}$, der Kontakt an den Kreuzungen ist ideal. Welchen Widerstand misst man zwischen zwei benachbarten Kreuzungen in einem sehr großen Gitter? Entsprechend für ein Dreiecks- und ein Sechsecksgitter. Warum nicht für ein Fünfecksgitter?

● 6.4.1 Elektronenschleuder

Nichols versuchte die Potentialdifferenz zwischen dem Zentrum und dem Rand einer schnell rotierenden Scheibe zu messen. Meinen Sie, dass ihm das gelang? Wie groß sind die Potentialdifferenzen bei maximaler Drehzahl (vgl. Aufgabe 3.4.2). Welche Messmöglichkeiten gibt es im Prinzip? Welche Fehlerquellen sind zu beachten, speziell welche Störspannungen?

●● 6.4.2 Tolman-Versuch

Tolman und *Stewart* bremsten eine rotierende Spule schnell ab und maßen den Spannungsstoß mit einem ballistischen Galvanometer. Projektieren Sie das Experiment: Drahtmaterial, Drahtstärke, Spulendurchmesser, Art des Galvanometers.

●● 6.4.3 Wiedemann-Franz-Gesetz

Ein Metallstab sei mit einer wärmeisolierenden Hülle umgeben, sodass er nur an den Enden Wärme abgeben kann. Zwischen diesen Enden liegt eine elektrische Spannung. Welche Temperaturverteilung stellt sich ein? Wie kann man hieraus das Verhältnis der elektrischen zur Wärmeleitfähigkeit bestimmen?

●● 6.4.4 Essigsäure

Für die **Dissoziation** von Essigsäure gilt bei $25\ ^\circ\text{C}$ die Massenwirkungskonstante $\kappa = 1,85 \cdot 10^{-5}\ \text{mol/l}$. Wie hängen der Dissoziationsgrad und die Ionenkonzentration von der Gesamtkonzentration der Säure ab? Kann man die Werte von Tabelle 6.5 nach dem **ostwaldschen Verdünnungsgesetz** erklären?

●● 6.4.5 Debye-Hückel-Länge

Wie hängt die **Debye-Hückel-Länge** von der Ionenkonzentration, speziell vom pH-Wert einer Elektrolytlösung ab? Welche Folgerungen ziehen Sie aus den Größenordnungen? Veranschaulichen Sie sich die **Relaxationskraft**, die die nachschleppende **Gegenionenwolke** auf das wandernde Zentralion ausübt.

● 6.4.6 Elektrischer Unfall

Wenn man **physiologische Lösung** anrührt, löst man 9 g NaCl im Liter Wasser. Welche Leitfähigkeit hat diese Lösung? Schätzen Sie den Widerstand des menschlichen Körpers, z. B. zwischen Hand und Hand oder zwischen Hand und Füßen. Wenn weniger als 5 mA durch den Brustraum fließen, ist das harmlos, mehr als 100 mA sind meist tödlich. Was für Spannungen kann man einigermaßen ungeschoren berühren? Diskutieren Sie typische elektrische Unfälle. Der Übergangswiderstand *trockener* Haut kann höher sein als der Innenwiderstand des Körpers.

●● 6.4.7 Dissoziationsgleichgewicht

Untersuchen Sie ein Molekül, das ein Proton abspalten kann. Es kann sich

um eine Säure AH handeln, die gemäß $AH \rightleftharpoons A^- + H^+$ dissoziiert, oder auch um eine Base, zu deren „Basenrest“ B^+ wir ein Hydratations- H_2O hinzurechnen: $B^+ + H_2O = BH_2O^+ = BOHH^+$. Dieses dissoziiert dann zu $BOH + H^+$, während man in der Schulchemie üblicherweise die andere Reaktionsrichtung als Dissoziation der Base auffasst. Jetzt setzen Sie das Massenwirkungsgesetz für die Abspaltung des Protons an und bestimmen Sie den **Dissoziationsgrad** als Funktion des pH-Wertes der Lösung. Wo ist gerade die Hälfte der Moleküle mit einem Proton besetzt? Wie breit ist die Übergangszone zwischen voll besetzten und ganz leeren Molekülen? Stimmt das mit den üblichen Vorstellungen über Säuren und Basen überein? Unterscheiden Sie immer „Proton dran oder weg“ und „geladen oder ungeladen“. Welches ist die kinetische Grundlage des Massenwirkungsgesetzes?

●● 6.4.8 i oder nicht-i

Die Gegenionenkonzentration vor einer geladenen Grenzfläche $n = n_0 e^{-ax}$ sieht rein mathematisch fast aus wie eine ebene harmonische Welle, nur dass das i im Exponenten fehlt. Physikalisch ist der Unterschied natürlich weltweit. Aber gilt die mathematische Analogie vielleicht auch für den dreidimensionalen Fall, d. h. unterscheiden sich die Gegenionenverteilung um eine Punktladung (ein Ion anderen Vorzeichens) und eine harmonische Kugelwelle auch nur durch ein i ? Wenn ja, gibt es eine allgemeinere Begründung? Was können Sie über das zylindrische Problem sagen, d. h. über die Gegenionenverteilung um einen geladenen Stab (z. B. ein Fadenmolekül)? Vorsicht, dieser Fall ist nicht so einfach wie die beiden anderen. Gibt es außer den **Debye-Hückel-Wolken** noch andere Fälle, wo die Lösungen ohne i von Nutzen sind? Gehen Sie auf die Wellen- bzw. Potentialgleichung zurück, dann haben Sie den besten Überblick; worauf läuft die Frage „i oder nicht-i“ dann hinaus? In der Quantenmechanik er-

lebt man den Übergang zwischen i und nicht- i besonders dramatisch (denken Sie in Kap. 13 gelegentlich an diese Aufgabe); aber beherrscht er nicht eigentlich die ganze Schwingungs- und Wellenlehre (Schwingfall–Kriechfall, schwach oder stark gedämpfte Welle)?

●●● 6.4.9 Elektrophorese

Bei der elektrophoretischen Analyse und Trennung biochemischer Substanzen legt man eine Gelschicht auf einen Kühlblock. Eine Spannung von einigen 100 oder 1000 V erzeugt ein Feld in Längsrichtung der Gelschicht, in dem die einzelnen Moleküle mit verschiedenen Geschwindigkeiten wandern. Das Gel kann sich dabei so stark erhitzen, dass es zerstört wird oder dass zumindest die untersuchten Substanzen sich verändern (denaturieren). Welche Form hat die Temperaturverteilung im Gel? Wo ist es am wärmsten, und wie warm? Wie hängt speziell die Erhitzung des Gels von seiner Dicke ab? Die elektrophoretische Beweglichkeit der meisten Moleküle ist temperaturabhängig. Warum und in welcher Weise? Wie wirkt sich das auf die Trennschärfe der Methode aus?

●●● 6.5.1 Kondensationskeime

Warum wirken Ionen als Kondensationskeime für Wasserdampf? In welchen Geräten macht man Gebrauch davon? Gibt es meteorologische Folgen dieses Effektes? Studieren Sie ihn möglichst quantitativ.

● 6.5.2 Akku-Gewicht

Warum ist ein Akku so schwer? Ist sein Gewicht verknüpft mit der Anzahl speicherbarer Amperestunden? Wenn ja, schätzen Sie die Ladung und die Energie, die man pro kg Akku speichern kann. Vergleichen Sie mit Benzin als Energiespeicher. Welche Chancen geben Sie den Elektroautos?

●● 6.5.3 Anlasser

Schätzen Sie den Strom, den der Anlasser eines Autos beim Starten des Motors entnimmt. Der Motor muss da-

bei mit einer Leistung durchgedreht werden, die ein gewisser Bruchteil der maximalen Motorleistung ist, z. B. 10%. Warum führen von der Batterie zum Anlasser so dicke Kabel? Wie dick müssen sie sein, damit sie höchstens 0,5 V wegfressen? Sie wollen den Motor mit einer fremden Batterie starten, weil ihre leer ist, und schließen die fremde Batterie über normale Leitungsdrähte an. Kann man so starten? Wenn Sie den Motor starten, während die Autolampen brennen, gehen diese fast aus. Warum? Ist das normal oder liegt ein Defekt vor? Wir entnehmen dem Akku einen Strom, den wir variieren und messen können. Gleichzeitig bestimmen wir die Spannung zwischen den Klemmen des Akkus. Sie sinke z. B. um 0,01 V, wenn der Strom um 1 A zunimmt. Welches ist der höchste Strom, den der Akku hergibt? Warum nimmt die Klemmenspannung ab? Was bedeutet die Neigung der $U(I)$ -Kurve? An den Akku werden verschiedene Verbraucher mit verschiedenem Widerstand R angeschlossen. Wie hängen Strom, Spannung, Leistung von R ab? Welche maximale Leistung kann man dem Akku entnehmen und unter welchen Umständen? Die Batteriesäure hat eine H_2SO_4 -Konzentration von 20%–30% (Dichte 1150–1220 kg/m³). Schätzen Sie den elektrolytischen Widerstand der Säureschicht zwischen den Bleiplatten. Hat er etwas mit dem Innenwiderstand des Akkus zu tun? Schätzen Sie Innenwiderstand, Maximalstrom und Maximalleistung für eine Taschenlampenbatterie.

● 6.7.1 Draht im Feld

Ein stromdurchflossener Draht hängt frei beweglich in einem zeitlich konstanten Magnetfeld. Unter welchen Umständen kommt über längere Zeiten keine Verschiebung des Drahtes zustande? Antworten Sie für Gleich- und für Wechselstrom.

● 6.7.2 Schleife im Feld

Eine stromdurchflossene Drahtschleife hängt drehbar im Magnetfeld. Unter welchen Umständen kommt

über längere Zeit kein Drehmoment zustande? Antworten Sie für Gleich- und für Wechselstrom.

● 6.7.3 Drehspul-Messwerk

Kann man mit einem solchen Gerät Gleichstrom oder Wechselstrom oder beide messen? Wie hängt der Ausschlag der Spule und des daran befestigten Zeigers vom Strom ab? Ist die Skala gleichmäßig eingeteilt oder wie sonst?

●● 6.7.4 Wattmeter

Ein **Elektrodynamometer** ist ähnlich aufgebaut wie ein Drehspulinstrument, nur ist der Permanentmagnet durch einen Elektromagneten ersetzt. Dessen Spule (die Feldspule) kann in verschiedener Art mit der Drehspule zusammengeschalet werden. Man legt Feld- und Drehspule hintereinander und lässt sie vom zu messenden Strom durchfließen. Wie unterscheidet sich dies Gerät vom Drehspulinstrument? Man lässt den Strom, der durch einen Verbraucher fließt, durch die Feldspule fließen. Gleichzeitig legt man die Messspule, notfalls mit einem ohmschen Widerstand davor, parallel zum Verbraucher. Zeichnen Sie die Schaltung und diskutieren Sie, was man damit anfangen kann. Warum spricht man von einem **Wattmeter** oder **Wirkleistungsmesser**? Statt des großen ohmschen Widerstandes legt man eine große Induktivität vor die Drehspule und schaltet sonst genau wie oben. Was zeigt jetzt das Gerät an? Wieso spricht man von einem **Blindleistungsmesser**? Man lässt zwei ganz verschiedene Ströme durch Feld- und Drehspule fließen. Welchen Ausschlag erhält man jetzt für zwei Gleichströme, zwei phasengleiche Wechselströme, zwei phasenverschiedene Wechselströme?

●● 6.7.5 Vektoranalysis I

$\mathbf{a}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ sind zwei Vektorfelder. Was ist $\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, was ist $\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$? Spezialisieren Sie auf den Fall $\mathbf{a} = \text{const.}$ Sie brauchen nur eine Komponente der Rotation auszurechnen, die anderen können Sie aus Symmetriebetrachtungen erschließen.

6.7.6 Vektoranalysis II

Stellen Sie den Ausdruck $\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{E} + \operatorname{rot}(\mathbf{E} \times \mathbf{v})$ in Komponenten dar und zeigen Sie, dass er die Feldänderung beschreibt, die jemand misst, wenn er mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} durch ein \mathbf{E} -Feld fliegt, das für den ruhenden Beobachter zeitlich konstant, aber räumlich veränderlich ist. Vergleichen Sie auch mit dem Unterschied zwischen ortsfester und „materieller“ Beschleunigung in der Hydrodynamik (Navier-Stokes-Gleichungen).

6.7.7 Relativität der Felder

Ein Raumschiff (Geschwindigkeit klein gegen c) fliegt durch eine Gegend, wo elektrische und magnetische Felder herrschen. Die Felder können sich zeitlich und räumlich ändern, das Raumschiff oder Teile davon können geladen oder polarisiert sein und Ströme führen. Vergleichen Sie die Felder, Ströme usw., die ein Raumfahrer und ein „ruhender“ Beobachter messen. Im Raumschiff gelten natürlich die Maxwell-Gleichungen. Kann der ruhende Beobachter die Erscheinungen im Raumschiff auch mit den Maxwell-Gleichungen beschreiben, die auf sein eigenes System bezogen sind, oder muss er Änderungen daran anbringen? Benutzen Sie Aufgabe 6.7.6 und diskutieren Sie die auftretenden Transformationen und Zusatzglieder. In welchem Licht erscheint danach die Lorentz-Kraft?

6.7.8 Space talk

Wir beobachten ein geladenes Teilchen, das ruht, denn ein elektrisches Feld ist nicht vorhanden, wohl aber ein großräumiges homogenes Magnetfeld. Ein Raumfahrer fliegt vorbei und beobachtet ebenfalls das Teilchen. Bruchstücke seiner Unterhaltung mit seiner Zentrale: „Da fliegt ein geladenes Teilchen mit Es herrscht ein Magnetfeld von Trotz der . . . fliegt das Teilchen genau Also muss ein . . . herrschen, das die . . . kompensiert, und zwar vom Betrag . . . in der Richtung . . .“. Was hat er gesagt? In der Rakete ist auch ein geladenes Teilchen. Wie verhält es sich

und warum, (a) für den Raumfahrer, (b) für uns?

6.8.1 Kreisstrom

Bestimmen Sie das Magnetfeld im Mittelpunkt eines kreisförmigen Leiters nach *Biot-Savart*. In welche Richtung zeigt das Magnetfeld in einem beliebigen Punkt auf der Achse (Abb. 6.123), wie groß ist es? Wie ist die Abstandsabhängigkeit bei sehr großem axialen Abstand vom Kreis? Vergleichen Sie mit dem Feld eines elektrischen Dipols. *Rutherford* und *Bohr* nahmen kreisende Elektronen im Atom an. Mit welchem Recht kann man sie als magnetische Dipole auffassen?

6.8.2 Kurze Spule

Welches Magnetfeld erzeugt eine Spule der Länge L und des Radius a genau in der Mitte ihrer Achse, wenn L nicht mehr klein gegen a ist? Gehen Sie am besten nicht von einer Spule, sondern von einem Rohr aus, das rings von einer Stromdichte durchflossen ist und rechnen Sie nach *Biot-Savart*. Beschreiben Sie Ihre Formel die Grenzfälle der sehr langen Spule und des kurzen Kreisringes richtig? Können Sie auch die Feldstärke dort angeben, wo die Achse durch die Endfläche der Spule tritt?

6.8.3 Bohr-Magneton

Schätzen Sie das magnetische Moment eines Kreisstroms. Sie kennen sein Magnetfeld (wenigstens in der Kreismitte; nahe der Peripherie ist es kaum anders). Damit ergeben sich der Gesamtfluss und die Polstärke. Im Abstand r ober- und unterhalb der Kreisebene ist das Feld noch nicht wesentlich kleiner, entspricht also etwa dem Feld einer Spule welcher Länge? Wenden Sie das Ergebnis auf eine Elektronen-Kreisbahn an (z. B. für das bohrsche H-Atom) und vergleichen Sie mit dem Wert des bohrschen Magnetons.

6.8.4 Erdfeldmessung

Zur Messung des erdmagnetischen Feldes kann man eine Magnetnadel

horizontal aufhängen und sie zu horizontalen Schwingungen anstoßen. Was erhält man aus der Schwingungsdauer? Welche Zusatzmessung braucht man noch?

6.8.5 Elektromagnet

Diskutieren Sie den Verlauf von \mathbf{B} und \mathbf{H} eines Permanentmagneten außerhalb (im Luftraum) und innerhalb (im Eisen) nach den Maxwell-Gleichungen. Achten Sie besonders auf die Richtungsverhältnisse. Kann $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ allgemein gelten? Vergleichen Sie mit einer stromdurchflossenen Eisenkern-Spule bzw. einer Luftspule. Auf welchem Teil der Hysteresiskurve müssen sich die Vorgänge abspielen? Ein Permanentmagnet soll in einem Luftspalt gegebenen Volumens V ein gegebenes Feld B erzeugen. Wie kann man das mit einem möglichst kleinen Eisenvolumen V' erreichen (Wahl des Materials, des Arbeitspunktes auf der Hysteresiskurve, Formgebung)? Welche Eigenschaft des Materials ist am wichtigsten? Welche Rolle spielt das „Energieprodukt“, das durch den maximalen Wert von BH auf der Hysteresiskurve gegeben ist? Warum heißt es so? Wie findet man es graphisch? Warum kann man B im Luftspalt nicht beliebig steigern? Wo liegt die praktische Grenze?

6.9.1 Weidezaun

Neben dem Zaun steht ein 6 V-Akkumulator. Von ihm führen Drähte in einen Kasten, in dem es tickt. Die Kühe hüten sich, den Zaun zu berühren. Haben sie Angst vor 6 V, oder wovor sonst? Warum tickt es in dem Kasten?

6.9.2 Zebrastrifen im Meer

Von Flugzeugen nachgeschleppte Magnetometer wurden im 2. Weltkrieg zur U-Boot-Aufspürung entwickelt und dienen jetzt der Erzprospektion. Klassische Magnetometer können Feldänderungen von 1γ (10^{-9} T) feststellen, Kernresonanzgeräte sind noch genauer, aber teurer und schwerer. Es wird sogar behauptet, dass Tiere (Brieftauben) und vielleicht auch

Menschen auf Änderungen um 10γ in einigen Sekunden reagieren. Die Suszeptibilität χ von Magnetit, Fe_3O_4 , liegt je nach Qualität zwischen 10^{-2} und 10. Wieso sprechen Magnetometer auf Schiffe oder Erzlager an? Aus welchem Abstand kann man sie erkennen? Eruptivgesteine, besonders Basalt, haben $\chi \approx 10^{-5} - 10^{-2}$. Wie reagiert das Magnetometer beim Überfliegen des Vogelsberges (200 m dicke Basalkuppe, 40 km Durchmesser)? Kann man die remanente fossile Magnetisierung des Ozeanbodens mit Geräten messen, die von Schiffen nachgeschleppt werden?

●●● 6.9.3 Trafo-Bleche

In einem Leiter herrsche ein zeitlich veränderliches Magnetfeld. Der Leiter bestehe wie im Transformator oder Motor aus gegeneinander isolierten Blechen der Stärke d . Schätzen Sie die Stromdichte und Leistungsdichte der Wirbelströme, die sich im Leiter ausbilden. Wie müssen die Bleche liegen, damit sie ihren Zweck erfüllen? Welcher ist das? Sind dünne Stäbe noch wesentlich besser als Bleche? Wie hängt die Leistungsdichte der Wirbelströme von der Blechstärke d ab? Schätzen Sie, welchen Anteil der übertragenen Leistung in ei-

nem Transformator die Wirbelströme ausmachen.

●● 6.9.4 Seltsame Heizung

Ein aus 5 mm dicken Eisenstäben zusammengeschweißter quadratischer Rahmen wird bei Zimmertemperatur mit $v = 20 \text{ m/s}$ in ein scharf begrenztes, homogenes Magnetfeld ($B = 2 \text{ Vs/m}^2$) gestoßen. Welche Temperatur hat das Eisen unmittelbar nach dem Experiment? Der Rahmen wird mit derselben Geschwindigkeit v wieder aus dem Feld herausgerissen. Welche Temperatur hat er dann?

Elektrodynamik

■ Inhalt

7.1	Induktion	379
7.2	Magnetische Materialien	390
7.3	Wechselströme	398
7.4	Elektromagnetische Wellen	425

▼ Einleitung

Mehr noch als das vorige steht dieses Kapitel im Zeichen *Michael Faradays*, dessen Ideen und Experimente, zu mathematischer Reife gebracht durch *James Clerk Maxwell*, der ganzen modernen Elektrotechnik zugrunde liegen. Die Elektrodynamik zeigt deutlich, daß elektrische und magnetische Phänomene immer zusammen gehören.



„... die Geschwindigkeit (einer magnetischen Störung) ist der des Lichts so nahe, dass wir ... schließen können, dass das Licht selbst (einschließlich der Wärmestrahlung und eventueller anderer Strahlungen) eine elektromagnetische Störung in Form von Wellen ist ...“

James Clerk Maxwell,
Treatise on Electricity and
Magnetism, 1873

7.1 Induktion

Faradays Glaube an Einheit und Symmetrie in der Natur brachte ihn zu der Überzeugung: Wenn man Magnetismus mittels Strom erzeugen kann, muss das Umgekehrte auch möglich sein. Aus seinen Arbeitsprotokollen erkennt man, wie intensiv er sich mit den damaligen unvollkommenen Mitteln um diesen Nachweis bemüht hat.

7.1.1 Faradays Induktionsversuche

Michael Faraday hat 1831 die zunächst verwirrende Fülle der Induktionserscheinungen durch eine Reihe genial-einfacher Versuche geklärt und damit den Grundstein zum ungeheuren Aufschwung der Elektrotechnik gelegt. Wir studieren diese historischen Versuche im Einzelnen.

Ein Draht sei zu einer Kreisschlinge gebogen, seine Enden seien mit einem ballistischen Galvanometer verbunden, d. h. einem Galvanometer, dessen Nadel viel langsamer schwingt, als die zu messenden Ströme sich ändern (Abschn. 7.3.5). Es zeigt dann einen *Stromstoß*, also die während der Versuchsdauer geflossene Gesamtladung an. Für die ersten Versuche wird ein Permanentmagnet verwendet.

1. Nähert man den Nordpol des Magneten der Schlinge, so zeigt das ballistische Galvanometer einen Ausschlag. Er ist unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der der Magnet verschoben wird, solange die Dauer der Verschiebung klein gegen die Schwingungsdauer des Galvanometers ist. Das bedeutet, dass eine Ladung durch die Kreisschlinge und das Galvanometer transportiert wird, die nur von der Anfangs- und der Endlage des Magneten abhängt.

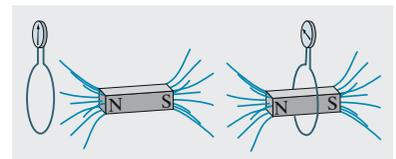


Abb. 7.1. Schiebt man den Stabmagneten schnell in die Kreisschlinge, zeigt das ballistische Galvanometer einen Induktionsstoß an

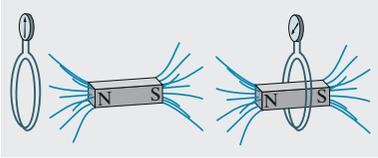


Abb. 7.2. In zwei Windungen entsteht ein doppelt so großer Ausschlag des ballistischen Galvanometers

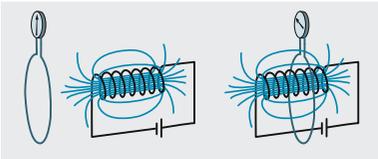


Abb. 7.3. Eine stromdurchflossene Spule induziert beim Hineinschieben wie ein Stabmagnet

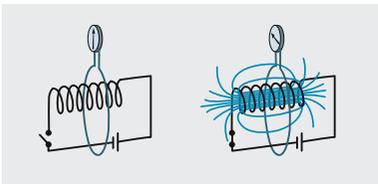


Abb. 7.4. Schließen des Stromkreises lässt das Galvanometer in gleichem Sinn ausschlagen, als wenn man die Spule in die Schlinge schiebt

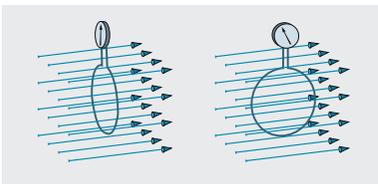


Abb. 7.5. Drehung der Schlinge im Magnetfeld erzeugt ebenfalls eine Induktion ...

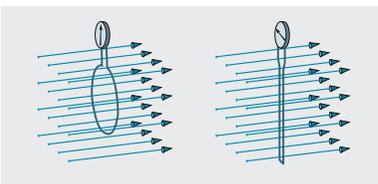


Abb. 7.6. ... ebenso wie eine Änderung der Fläche, die die Schlinge umschließt

2. Nähert man unter sonst gleichen Bedingungen nicht den Nordpol, sondern den Südpol, so erhält man den gleichen Ausschlag in entgegengesetzter Richtung.
3. Zieht man den Magneten aus der Schlinge in die Ausgangslage zurück, so erfolgt der Galvanometerausschlag in der entgegengesetzten Richtung, ist aber ebenso groß. Die Bewegung der Ladungen erfolgt also in der entgegengesetzten Richtung.
4. Nimmt man an Stelle eines Magneten zwei gleiche Magnete, so ist der Ausschlag des ballistischen Galvanometers doppelt so groß.
5. Verwendet man unter sonst gleichen Bedingungen statt einer einfachen eine doppelte (n -fache) Schlinge (Spule mit zwei oder n Windungen), so wird der Ausschlag doppelt (bzw. n -mal) so groß (Abb. 7.2).
6. Ersetzt man den permanenten Magneten durch eine stromdurchflossene Spule, so beobachtet man bei Annäherung bzw. Entfernung die gleichen Erscheinungen (Abb. 7.3). Bei Verdoppelung der Stromstärke in dieser Spule werden die Galvanometerausschläge doppelt so groß. Die in der Drahtschlinge transportierten Ladungen sind der Stromstärke in der Spule, also dem in ihr erregten Feld proportional.
7. Schiebt man die Spule ganz in das Innere der Drahtschlinge und schließt oder öffnet man nun den Spulenstromkreis, so zeigt das ballistische Galvanometer die gleichen Ausschläge, als ob die stromführende Spule aus großer Entfernung ganz in das Innere der Schlinge hineingeführt oder aus dem Inneren herausgezogen würde (Abb. 7.4).
8. Die Vermehrung der Windungszahl der Schlinge hat den gleichen Effekt wie in Versuch 5.
9. Bringt man die Drahtschlinge aus einem feldfreien Raum in ein Magnetfeld (z. B. zwischen die Polschuhe eines Elektromagneten), so zeigt das ballistische Galvanometer einen Ausschlag. Den gleichen Ausschlag in entgegengesetzter Richtung erhält man, wenn man die Schlinge aus dem Feld herausbringt.
10. Dreht man die Schleifenebene, die erst senkrecht zu den Feldlinien stand, in eine Lage parallel zu ihnen, so ist der Ausschlag des ballistischen Galvanometers der gleiche wie bei vollständiger Entfernung aus dem Magnetfeld. Dreht man die Schlinge aus der Ausgangslage um 180° , sodass die Feldlinien die Schlinge von der entgegengesetzten Seite durchdringen, so wird der Galvanometerausschlag doppelt so groß.
11. Wenn man die Fläche der Schlinge in einem konstanten Magnetfeld ändert, indem man sie zusammenzieht oder erweitert, zeigt das Galvanometer einen Ausschlag (Abb. 7.6). Zieht man die Schlinge auf den Flächeninhalt Null zusammen, so ist der Galvanometerausschlag der gleiche, als ob die unveränderte Schlinge aus dem Feld in den feldfreien Raum gebracht wird.
12. Schiebt man in das Innere einer Spule bei konstant gehaltenem Spulenstrom (Abb. 7.4, rechts) einen Eisenkern, so zeigt das Galvanometer wiederum einen Ausschlag, der ein Vielfaches des Ausschlages beim ersten Einschalten des Spulenstromes betragen kann.

13. Bei allen diesen Versuchen kann man im Prinzip das ballistische Galvanometer durch ein elektrostatisches Voltmeter ersetzen (z. B. ein Fadenelektrometer; Abschn. 6.1.5c). Es zeigt an Stelle der Stromstöße Spannungsstöße von genau dem gleichen zeitlichen Verlauf an.

Aus den Versuchen 1–11 ergibt sich das **Induktionsgesetz**:

Wenn sich der Magnetfluss Φ ändert, der eine Drahtschleife durchsetzt, wird in ihr eine Spannung und, bei gegebenem Widerstand, ein Strom erzeugt; beide sind proportional zu $\dot{\Phi}$.

Die während dieses Stromstoßes transportierte Ladung $\int I dt$ ist demnach nur von $\int \dot{\Phi} dt = \Phi_2 - \Phi_1$, d. h. von der Gesamtänderung des Magnetflusses abhängig, nicht von der Art, wie diese Änderung im Einzelnen vor sich geht. Ein ballistisches Galvanometer, das diese Gesamtladung misst, reagiert also nur auf $\Phi_2 - \Phi_1$. Versuch 12 zeigt, dass es nicht auf den Fluss von \mathbf{H} ankommt, der nur von Spulengeometrie und -strom abhängt, sondern auf den Fluss von \mathbf{B} , der durch Einschieben des Eisens stark erhöht wird.

× Beispiel...

Man lege eine Drahtschleife mit einem ballistischen Galvanometer um die Mitte einer langen Spule und lasse sie über das Spulenende hinweggleiten. Inwiefern misst der dabei auftretende Spannungsstoß die Polstärke der Spule? Gilt das gleiche für einen Stabmagneten?

Der Spannungsstoß rührt von der Induktionsflussänderung her: $\int U dt = \Delta\Phi$. Aus dem Spulenende tritt der Fluss $\Phi = \mu_0 P$ (P : Polstärke), wenn die Schlinge weit genug von der Spule entfernt ist, gilt $\Phi = 0$. Also erhält man einfach $P = \int U dt / \mu_0$. Beim Stabmagneten ist es ebenso.

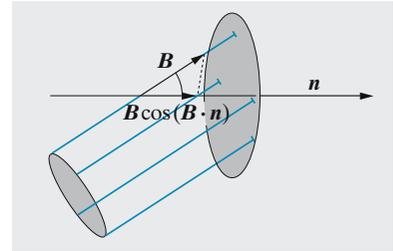


Abb. 7.7. Definition des Magnetflusses

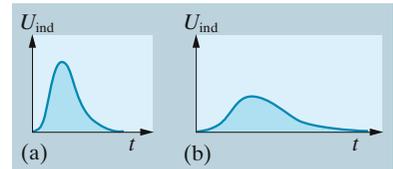


Abb. 7.8a,b. Die induzierte Spannung U hängt von der Änderungsgeschwindigkeit des Magnetflusses ab, die Fläche $\int U dt$ nur von der Änderung selbst

7.1.2 Das Induktionsgesetz als Folge der Lorentz-Kraft

Wir machen einige Gedankenexperimente, die nicht wesentlich verschieden sind von den historischen Versuchen *Michael Faradays*.

- Ein gerader Draht fliegt mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} senkrecht zu seiner eigenen Richtung und zu einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} (Abb. 7.9, 1). Unter dem Einfluss der Lorentz-Kraft $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ verschieben sich die Ladungsträger längs des Drahtes, bis ihr eigenes Gegenfeld \mathbf{E}'' die Lorentz-Kraft kompensiert, ganz entsprechend wie beim Hall-Effekt

$$\mathbf{E}'' = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Der mit dem Draht mitfliegende Beobachter sieht ein elektrisches Feld

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

das zunächst überall herrscht (innerhalb und außerhalb des Drahtes), das aber sehr bald infolge der Ladungsverschiebung im Draht selbst

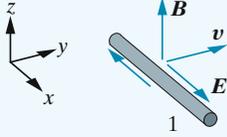
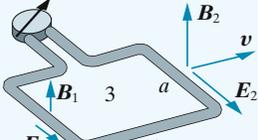
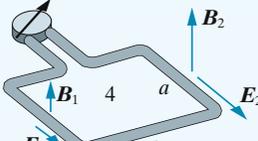
Beobachter im Labor		Beobachter auf dem Draht
<p>Draht fliegt durch \mathbf{B}-Feld. Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ treibt Ladungen nach rechts (links), bis Aufladung ein Gegenfeld erzeugt, so dass $Q\mathbf{E}'' = -\mathbf{F} = -Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.</p>		<p>Es herrscht ein Feld \mathbf{B}, quer dazu ein Feld \mathbf{E}, das durch $\mathbf{E}'' = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ kompensiert wird.</p>
<p>Drahtschleife fliegt durch homogenes \mathbf{B}-Feld. Die \mathbf{E}-Felder in den beiden Zweigen kompensieren sich. Keine Gesamtspannung. Voltmeter schlägt nicht aus.</p>		<p>Es herrscht ein \mathbf{B}-Feld, quer dazu ein \mathbf{E}-Feld, beide sind homogen. Voltmeter schlägt nicht aus.</p>
<p>Schleife fliegt durch inhomogenes \mathbf{B}-Feld. Die \mathbf{E}-Felder in den beiden Zweigen kompensieren sich nicht. Voltmeter schlägt aus:</p> $U = -a(E_2 - E_1) = -av(B_2 - B_1) = -abv \frac{dB}{dy}.$		<p>\mathbf{B} steigt zeitlich an. Voltmeter schlägt aus:</p> $U = -abv \frac{dB}{dy} = -ab\dot{\phi}$ $U = -\dot{\phi}.$
<p>Schleife ruht. \mathbf{B} steigt zeitlich an. Die Situation ist genauso wie im Fall 3, rechts. Voltmeter schlägt aus:</p> $U = -ab\dot{B} = -\dot{\phi}.$		<p>Genau wie im Fall 3.</p>

Abb. 7.9. Das Induktionsgesetz als Folge der Lorentz-Kraft

kompensiert wird, entsprechend der Tatsache, dass in ruhenden Leitern überhaupt kein \mathbf{E} -Feld aufrechterhalten bleiben kann. Die resultierende Ladungsverschiebung ist natürlich dieselbe wie im Laborsystem.

- Diesmal fliegt eine rechteckige Drahtschleife mit Seitenlängen a und b durch das \mathbf{B} -Feld (Abb. 7.9, 2). In den beiden Schenkeln, die senkrecht zu \mathbf{v} und \mathbf{B} stehen, wirkt eine axiale Lorentz-Kraft (für den Laborbeobachter) bzw. ein Feld \mathbf{E}' (für den mitfliegenden Beobachter). In beiden Schenkeln sind aber, *im Umlaufsinn des Drahtes gesehen*, die Kräfte bzw. Felder *entgegengesetzt* gerichtet und kompensieren einander. Das Linienintegral über \mathbf{E}' längs des Drahtes verschwindet:

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Der einzige Effekt sind leichte Ladungsanhäufungen in den zu \mathbf{v} parallelen Schenkeln.

- Das \mathbf{B} -Feld sei nicht mehr homogen, sondern nehme in Verschiebungsrichtung zu, z. B. nach dem Gesetz $B = B_0 + y dB/dy$. Dann wirkt im vorderen Schenkel eine größere Lorentz-Kraft (Laborsystem) bzw. ein größeres \mathbf{E}' -Feld (Drahtsystem) als im hinteren. Der hintere Schenkel sei jetzt bei $y = 0$. Dann ist vorn $E'_2 = v(B_0 + b dB/dy)$, hinten $E'_1 = vB_0$. Das Linienintegral verschwindet nicht mehr, sondern hat den Wert

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = -a(E'_2 - E'_1) = -vab \frac{dB}{dy}. \quad (7.1)$$

Die Richtung des Umlaufs ist wie üblich so definiert, dass sie mit \mathbf{B} der Rechte-Hand-Regel folgt. Daher kommt das Minus-Zeichen. Wenn man die Drahtenden isoliert nach außen führt, herrscht zwischen ihnen eine Klemmenspannung (elektromotorische Kraft) von diesem Betrag:

$$U = -vab \frac{dB}{dy}. \quad (7.2)$$

Diese Spannung herrscht auch im Drahtsystem, wo die Schleife *ruht*. Der Drahtbeobachter sieht ebenfalls ein \mathbf{B} -Feld, das in y -Richtung zunimmt. Gleichzeitig aber nimmt *für ihn* \mathbf{B} überall *mit der Zeit* linear zu. Diese Zunahme ist gegeben durch $\dot{\mathbf{B}} = v \, dB/dy$. Vom *Laborsystem* aus gesehen gerät die Schleife ja mit der Zeit in ein immer größeres Feld, das dabei aber an jedem Ort zeitlich konstant ist.

4. Wir halten die Schleife fest, erzeugen ein inhomogenes \mathbf{B} -Feld ebenso wie im Versuch 3, lassen seinen Betrag aber überall linear mit der Zeit zunehmen, z. B. durch Hochfahren des felderzeugenden Spulenstroms.

Vom Draht aus gesehen ist die Situation *genau die gleiche* wie im Versuch 3. Daher müssen auch die physikalischen Folgen die gleichen sein. Es tritt eine Klemmenspannung

$$U = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = -abv \frac{dB}{dy} = -ab\dot{B} \quad (7.2')$$

auf. v hat für diese Situation keine direkte Bedeutung. Es entspricht der negativen Geschwindigkeit eines Systems, das so längs des B -Gefälles gleite, dass in ihm B überall zeitlich konstant ist, ebenso wie im Laborsystem von Versuch 3.

Die Änderung $\dot{\mathbf{B}}$ ist auf der ganzen Schleifenfläche konstant und steht senkrecht dazu. Der Magnetfluss ist in diesem Fall $\Phi = abB$, also kann man (7.2') auch schreiben

$$U = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = -\dot{\Phi}. \quad (7.3)$$

Das ist das **Induktionsgesetz**: Wenn sich der Magnetfluss durch eine gegebene Fläche zeitlich ändert, wird in der Randlinie dieser Fläche eine Ringspannung $U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi}$ induziert. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob diese Randlinie durch eine Leiterschleife materialisiert ist oder ob es nur eine gedachte Linie ist. Das Feld \mathbf{E}' , von dem wir ausgegangen sind, entsteht ja überall, nicht nur im Draht.

Geht man zu einer sehr kleinen Leiterschleife mit der Fläche dA über, verwandelt sich das Linienintegral $\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r}$ in $\text{rot } \mathbf{E}' \cdot dA$. Dann lautet das Induktionsgesetz

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\dot{\mathbf{B}}. \quad (7.4)$$

Für die kleine Rechteckschleife hat dA den Betrag ab und die Richtung von \mathbf{B} .

Es gibt viele Hilfsformulierungen des Induktionsgesetzes, die Verständnis und Anschauung unterstützen sollen, aber vielfach in die Irre führen. So sagt man, eine Spannung werde induziert, wenn der Leiter B -Linien schneide. Man stellt sich etwa vor, die B -Linien seien irgendwo im Laborsystem befestigt, und ihr „Entlangbürsten“ am bewegten Draht erzeuge die Spannung. Dies ist physikalisch unhaltbar. Es gibt kein Bezugssystem, in dem die Feldlinien ruhen, man kann ihnen überhaupt keinen Bewegungszustand zuschreiben. Das wäre ein Verstoß gegen das Relativitätsprinzip, nach dem alle Inertialsysteme gleichberechtigt sind. Davon abgesehen hilft diese Vorstellung z. B. im Experiment 4 auch nur dann weiter, wenn man annimmt, die zeitliche Zunahme von Φ komme so zustande, dass Feldlinien „von draußen“ in die Schleife hineinschnellen, was absurd ist. Wenn sich dagegen eine Schleife einfach im konstanten B -Feld dreht, ist diese Vorstellung ganz anschaulich. Allgemein kann man sich nur auf das Induktionsgesetz in der Form (7.3) oder (7.4) verlassen. Sie gilt auch, wenn gar keine Leiterschleife vorliegt, die einen Integrationsweg materialisiert.

7.1.3 Die Richtung des induzierten Stromes (Lenz-Regel)

Wenn man einen Stabmagneten mit dem Nordpol voran auf eine Leiterschleife zuschiebt (Abb. 7.10), ist der Fluss durch die Schleife positiv (B -Linien sind so definiert, dass sie von N ausgehen und in S zurücklaufen) und nimmt zeitlich zu. Nach dem Induktionsgesetz $U = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\dot{\Phi}$ ist also die Ringspannung negativ, d. h. vom Magneten aus gesehen läuft der induzierte Strom in der Schleife entgegen dem Uhrzeiger um. Ein solcher Strom erzeugt nach (6.144) selbst ein Magnetfeld, dessen B -Linien auf den Magneten hinzeigen. Die Schleife erhält ein induziertes magnetisches Moment, dessen Nordpol auf den Magneten zeigt, ihn also abstößt. Daher spürt man eine Gegenkraft, wenn man den Magneten so bewegt, und muss Arbeit leisten.

All dies ist aus dem Energiesatz auch ohne die komplizierte Vorzeichenbetrachtung klar. Der Aufbau des Schleifenstroms und seines Magnetfeldes kostet Energie, die nur bei der Verschiebung des Magneten aufgebracht worden sein kann. Aus solchen Betrachtungen stellte *H. F. E. Lenz* 1834 die Regel auf:

Der induzierte Strom ist immer so gerichtet, dass sein Magnetfeld der Induktionsursache entgegenwirkt.

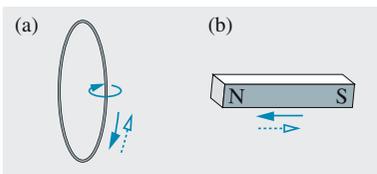


Abb. 7.10a,b. Richtung des induzierten Stromes in einem Ring; (a) beim Heranführen eines Stabmagneten mit dem Nordpol voran (\leftarrow) (b) beim Entfernen des Magneten ($\cdots\rightarrow$)

Er sucht z. B. den sich nähernden Magneten wegzuschieben, den sich entfernenden zurückzuhalten. Aus demselben Grunde kostet es Arbeit, eine Spule im Magnetfeld zu drehen. Eben diese mechanische Arbeit ist es, die der Generator in elektrische Energie umsetzt.

Ebenso wichtig ist die Situation von Abb. 7.4, wo das Magnetfeld eines Elektromagneten zunimmt, weil man den Spulenstrom ansteigen lässt. Ohne weitere Überlegung kann man sagen: Im umgebenden Draht wird ein Strom induziert, dessen Magnetfeld so gerichtet ist, dass es seinerseits in der Spule eine Spannung induziert, die dem Spannungsanstieg

darin entgegenwirkt. Auch hier widersetzt sich das induzierte Feld der Induktionsursache, nämlich dem Anschwellen des Spulenstroms. Dies führt zum Begriff der Gegen- und der Selbstinduktion (Abschn. 7.1.5, 7.1.8).

In Abb. 7.11 ist die Lage besonders übersichtlich. Wenn man das Drahtstück mit der Geschwindigkeit v nach rechts verschiebt, ändert sich der Fluss durch den Kreis um $\dot{\Phi} = -vIB$. Die induzierte Spannung $U = -\dot{\Phi} = vIB$ erzeugt den Strom I und die Joule-Leistung

$$P_J = UI = vIB^2 l.$$

Diese Leistung kann nur aus der mechanischen Arbeit stammen, die man beim Verschieben des Drahtstückes leistet. Es muss also eine Kraft $F = IlB$ der Verschiebung entgegenwirken, sodass die mechanische Leistung gleich der Jouleschen ist:

$$P_{\text{mech}} = Fv = P_J = IlBv.$$

Diese Kraft ist natürlich die Lorentz-Kraft.

7.1.4 Wirbelströme

Ein Pendel mit einer dicken Kupferscheibe am Ende schwingt frei zwischen zwei Polschuhen eines Elektromagneten, solange dieser noch stromlos ist. Sowie man den Strom einschaltet, bleibt das Pendel zwischen den Polschuhen stehen (Abb. 7.12). Schiebt man den Pendelkörper schnell ins Magnetfeld oder aus ihm hinaus, spürt man eine Bremsung, als müsse man das Pendel durch Schlamm schieben. Wenn der Pendelkörper wie ein Kamm viele senkrechte Schlitze hat, sind die Bremskräfte viel schwächer, die Schwingung ist kaum noch gedämpft.

Wenn die Scheibe sich im inhomogenen B -Feld bewegt, ändert sich für jedes Metallstück das Feld, das es durchsetzt. In seinem Umfang wird also eine Ringspannung induziert. Die entsprechenden Kreisströme oder **Wirbelströme**, die überall im Metall fließen, erfahren im B -Feld Lorentz-Kräfte, die die Bewegung hemmen. Dass es sich um eine Bremsung handeln muss und nicht um eine Antriebskraft, folgt aus dem Energie-satz oder der Lenz-Regel: Mechanische Energie geht in die Joule-Energie der Wirbelströme über, diese schließlich in Wärme. Im Detail ergeben sich die Krafrichtungen aus Abb. 7.13: Es treten auch beschleunigende Lorentz-Kräfte auf, aber sie sind kleiner als die bremsenden, denn sie entstehen dort, wo das B -Feld kleiner ist. Natürlich entstehen Wirbelströme auch in einem ruhenden Leiter, wenn sich das Magnetfeld zeitlich ändert.

Wirbelströme werden zur Dämpfung von Schwingungen oder zur Erzeugung kuppelnder Drehmomente ausgenutzt (Tachometer, kWh-Zähler). In den meisten Fällen sind sie aber unerwünscht (in Transformatoren, Motoren usw.), denn ihre joulesche Wärme ist reine Verlustwärme. Ein Gegenmittel besteht darin, die Wirbelstrombahnen räumlich zu begrenzen, d. h. Transformatorkerne usw. aus dünnen isolierten Blechen zusammenzusetzen. Die Verlustleistung pro Volumeneinheit ist nämlich proportional dem Quadrat der Blechstärke d . Das folgt aus der Induktionsgleichung $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$. Wenn die Stromwirbel etwa den Durchmesser d haben, ist $|\text{rot } \mathbf{E}| \approx 2E/d$, also das induzierte Feld $E \approx d\dot{B}/2$. Dieses Feld erzeugt

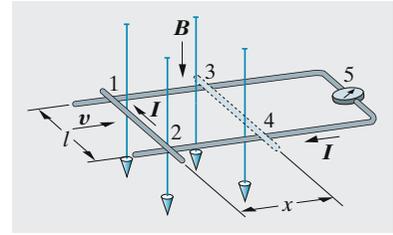


Abb. 7.11. Zur Berechnung der induzierten Spannung in einem geraden Draht, der senkrecht zu einem Magnetfeld verschoben wird

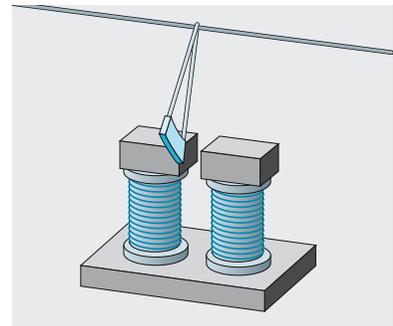


Abb. 7.12. Waltenhofen-Pendel

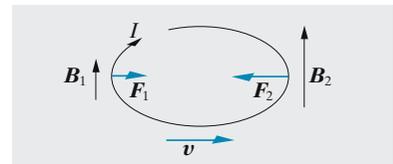


Abb. 7.13. Schiebt man einen Leiter in ein Magnetfeld, dann wirken Lorentz-Kräfte auf beide Äste des induzierten Wirbelstroms. Aber an der Frontseite des Wirbelstromringes ist die Lorentz-Kraft größer, hindert also die Bewegung des Leiters

eine Stromdichte $j = \sigma E$. Die Leistungsdichte der Joule-Verluste (Verlustleistung pro Volumeneinheit) ist $jE = \sigma E^2 \approx \sigma d^2 \dot{B}^2 / 4$, bei sinusförmigem Wechselfeld $\sigma d^2 \omega^2 B^2 / 6$ (genauere Ableitung Aufgabe 6.9.3). Bei hohen Frequenzen führt der Skin-Effekt zu einer Proportionalität der Verluste mit $\omega^{3/2} d$ (Abschn. 7.3.11).

7.1.5 Induktivität

Durch jeden Stromkreis greift ein Magnetfluss hindurch, der von seinem eigenen Magnetfeld herrührt (z. B. Abb. 6.122). Ebenso wie die Felder \mathbf{H} und \mathbf{B} ist dieser Fluss der augenblicklichen Stromstärke I proportional:

$$\Phi = LI . \quad (7.5)$$

Der Faktor L , die **Induktivität** des Leiters, hängt nur von seiner Gestalt und der Permeabilität des umgebenden Mediums ab.

Mit jeder Änderung des Stromes I ändert sich auch der Fluss und induziert im Leiter selbst eine Spannung. Diese muss bei Zunahme des Stroms ihm entgegengerichtet sein, denn sonst würde eine instabile und energetisch unmögliche Situation eintreten: Sogar in einem Leiter, an dem keine äußere Spannung anliegt, erzeugten zufällige Schwankungen der Elektronenverteilung immer winzige Ströme; diese würden Spannungen induzieren, die die Ströme verstärken würden, bis zum unbegrenzten Anwachsen eines Stromes aus dem Nichts. Die lenzsche Regel führt zu dem gleichen Schluss. Nach dem Induktionsgesetz ist die induzierte Spannung

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = -L\dot{I} . \quad (7.6)$$

Die Einheit der Induktivität ist offenbar

$$1 \text{ V}/(\text{A s}^{-1}) = 1 \Omega \text{ s} = 1 \text{ J A}^{-2} = 1 \text{ H} \quad (1 \text{ Henry}) . \quad (7.7)$$

Ein Leiter hat die Induktivität von 1 H, wenn in ihm durch eine Stromänderung von 1 A s^{-1} eine Spannung von 1 V induziert wird.

× Beispiel...

Schätzen Sie die Induktivität einer Kreisschleife von 10 cm Durchmesser. Das Feld nahe am Draht ist etwas größer als in der Mitte.

Die Kreisschleife erzeugt in der Mitte das Feld $H = I/(2R)$. Es folgt $B = \mu_0 I/(2R)$, Induktionsfluss durch die Schleife $\Phi \approx \frac{1}{2}\pi\mu_0 IR$. Bei Stromänderung ist die Spannung $U = \dot{\Phi} = \frac{1}{2}\pi\mu_0 R\dot{I}$, also die Induktivität $L = \frac{1}{2}\pi\mu_0 R$. Für $R = 0,1 \text{ m}$ wird $L = 2 \cdot 10^{-7} \text{ H}$.

Im Innern einer zylindrischen Spule mit der Länge l , dem Querschnitt $A \ll l^2$ und der Windungszahl N , gefüllt mit einem Material der Permeabilität μ , durch die der Strom I fließt, herrscht das Feld

$B = \mu\mu_0 IN/l$. Durch jede Windung tritt der Fluss BA , durch alle N Windungen zusammen der Fluss $\Phi = NBA = \mu\mu_0 IN^2 A/l$. Wenn der Strom I sich ändert, induziert er zwischen den Spulenden die Spannung

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = -\mu\mu_0 \frac{N^2}{l} A \dot{I}.$$

Die Spule hat also die Induktivität

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} A. \quad (7.8)$$

7.1.6 Ein- und Ausschalten von Gleichströmen

Wenn sich in dem Kreis von Abb. 7.14 der Strom ändert, induziert er in der Spule eine Gegenspannung $U_{\text{ind}} = -L\dot{I}$. Am Widerstand R herrscht daher nicht die Batteriespannung U_0 , sondern nur die Spannung

$$U = U_0 - L\dot{I} = RI. \quad (7.9)$$

Wir schließen den Schalter zur Zeit $t = 0$. Zunächst verzehrt die Gegenspannung in der Spule die volle Batteriespannung, d. h. der Strom steigt an gemäß $\dot{I} = U_0/L$, also $I = U_0 t/L$. Hätte der Kreis den Widerstand $R = 0$, dann würde dieser Anstieg immer so weitergehen. Wenn man sich aber dem Strom $I = U_0/R$ nähert, muss I in diesen Endwert einbiegen. Die vollständige Lösung der Differentialgleichung (7.9) heißt

$$I = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (7.10)$$

mit der Zeitkonstante $\tau = L/R$. Bei Elektromagneten mit ihrer Spule hoher Induktivität kann der Stromanstieg bis zum stationären Wert U_0/R mehrere Minuten dauern.

In einer Parallelschaltung von Spule und Widerstand (Abb. 7.15) hört der Strom nicht sofort auf, wenn man den Schalter S öffnet. Sobald der Strom I abzusinken beginnt, induziert er in der Spule eine Spannung $-L\dot{I}$, die den Strom in dem Kreis aus L und R aufrechterhält gemäß

$$U_{\text{ind}} = -L\dot{I} = RI.$$

Wenn I_0 der Spulenstrom vor dem Ausschalten war, folgt durch Integration

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = L/R. \quad (7.11)$$

Bei der Reihenschaltung von Abb. 7.14 liegt im Moment des Öffnens des Schalters die sehr hohe Induktionsspannung $-L\dot{I}$ zwischen den sich gerade trennenden Kontakten und erzeugt über den noch sehr kleinen Luftzwischenraum eine Bogenentladung, den **Öffnungsfunken**. Er verzögert das Zusammenbrechen des Stromes und kann bei großen L und I_0 den Schalter schnell zerstören (Materialtransport im Bogen), die Isolation durchschlagen, zu Bränden führen, dem Bedienenden empfindliche Schläge versetzen. Dagegen hilft Parallelschaltung eines Widerstandes (Abb. 7.15) oder eines Kondensators.

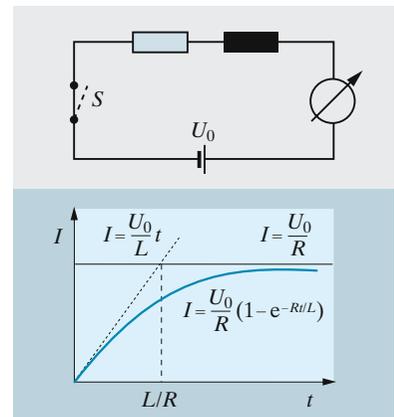


Abb. 7.14. Anstieg des Stromes nach dem Einschalten bis zum konstanten Endwert, der aus dem ohmschen Gesetz folgt

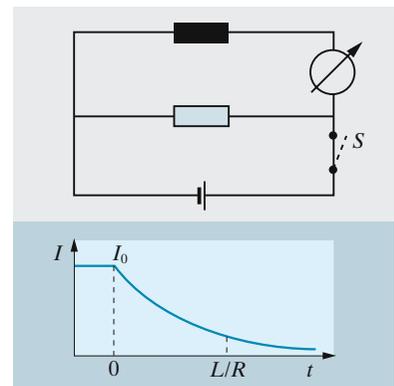


Abb. 7.15. Nach Abschalten der Stromquelle fließt ein nach einer Exponentialfunktion abklingender Strom im Kreis aus L und R

7.1.7 Energie und Energiedichte im Magnetfeld

Die Energie des durch (7.11) beschriebenen abklingenden Abschaltstromes kann nur aus dem Magnetfeld des Kreises stammen, das sozusagen allmählich in die Spule zurückkriecht. Im Widerstand R entwickelt sich dabei eine Joule-Wärme

$$E = \int_0^{\infty} I^2 R dt = \int_0^{\infty} I_0^2 e^{-2Rt/L} R dt = RI_0^2 \frac{L}{2R} = \frac{1}{2} I_0^2 L .$$

Diese Energie E muss als magnetische Feldenergie E_{magn} vor dem Abschalten vor allem im Innern der Spule enthalten gewesen sein. Beim Einschalten taucht umgekehrt die vom Strom I gegen die induzierte Spannung *verrichtete* Arbeit als Feldenergie der Spule wieder auf.

$$E = - \int_0^{\infty} IU_{\text{ind}} dt = \int_0^{\infty} ILI dt = \frac{1}{2} LI^2 \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{2} LI_{\infty}^2$$

(I_{∞} spielt natürlich die Rolle von I_0 beim Abschalten). Der Aufbau des Feldes, ebenso wie das Zurückfluten der Energie in den Leiter, vollzieht sich umso langsamer, je größer L ist.

Mittels (7.8) kann man die magnetische Energie der Spule darstellen als:

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} I^2 L = \frac{1}{2} \mu \mu_0 \frac{NI}{l} \frac{NI}{l} lA .$$

Der zweite Faktor hinter $\frac{1}{2}$ ist die Induktion B , der nächste das Magnetfeld H in der Spule (Abschn. 6.9), der letzte gleich dem felderfüllten Volumen V . Für die Energiedichte im Magnetfeld ergibt sich so

$$e_{\text{magn}} = \frac{E_{\text{magn}}}{V} = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} . \quad (7.12)$$

Das gilt allgemein für beliebig gestaltete Felder, in völliger Analogie zum elektrischen Feld (6.54).

7.1.8 Gegeninduktion

Wir betrachten mehrere getrennte Leiterkreise, in denen die Ströme I_1, I_2, \dots fließen. Das Magnetfeld \mathbf{B}_i , das vom Kreis i stammt, ist an jeder Stelle proportional zu I_i . An jeder Stelle setzt sich das Gesamtfeld \mathbf{B} additiv aus den Beiträgen der Kreise zusammen. Diese Additivität und Proportionalität zum Strom übertragen sich auch auf die Magnetflüsse $\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$. Durch den Kreis i trete insgesamt der Fluss Φ_i . Er stammt z. T. von dem Strom I_i im Kreis selbst, aber auch von den anderen Kreisen:

$$\Phi_i = \sum_k \Phi_{ik} = \sum_k L_{ik} I_k . \quad (7.13)$$

Wenn sich der Fluss Φ_i zeitlich ändert, induziert er im Kreis i die Ringspannung $U = \dot{\Phi}_i$. Nach (7.13) setzt sie sich zusammen aus den Beiträgen der Stromänderungen in den einzelnen Kreisen:

$$U_i = \sum_k L_{ik} \dot{I}_k. \quad (7.14)$$

Wäre nur der Kreis i vorhanden, ergäbe sich $U_i = L_{ii} \dot{I}_i$. Man erkennt daraus L_{ii} als Induktivität des Kreises i . Die anderen L_{ik} heißen **Gegeninduktivitäten** zwischen Kreis i und k .

Wenn im Kreis i die Spannung U_i herrscht, erzeugt der Strom I_i darin eine Joule-Leistung

$$P_i = I_i U_i = \sum_k L_{ik} \dot{I}_k I_i.$$

In allen Kreisen zusammen ist die Leistung

$$P = \sum_i P_i = \sum_i \left(I_i \sum_k L_{ik} \dot{I}_k \right) = \sum_{i,k} L_{ik} I_i \dot{I}_k.$$

Dies muss die zeitliche Ableitung der gesamten magnetischen Energie E_{magn} des Leitersystems sein. E_{magn} kann nur vom gegenwärtigen Zustand des Systems, d. h. von den Strömen I_i abhängen, nicht von ihren Ableitungen. Dies ist nicht ohne weiteres mit

$$P = \dot{E}_{\text{magn}} = \sum_{i,k} L_{ik} I_i \dot{I}_k$$

vereinbar, sondern nur, wenn $L_{ik} = L_{ki}$ ist. Dann ergibt sich

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k = \frac{1}{2} \sum_i L_{ii} I_i^2 + \sum_{i < k} L_{ik} I_i I_k \quad (7.15)$$

(jedes Paar $i \neq k$ kommt in der ersten Summe zweimal vor). Die Bedingung $L_{ik} = L_{ki}$ bedeutet Folgendes: Wenn z. B. im Kreis 1 eine Stromänderung \dot{I} stattfindet, induziert sie im Kreis 2 die Spannung U . Die gleiche Spannung wird aber auch im Kreis 1 induziert, falls im Kreis 2 die Stromänderung \dot{I} stattfindet. Da die Kreise ganz beliebige Form und Lage haben, ist das durchaus nicht selbstverständlich.

Aus (7.15) folgt noch eine andere allgemeine Beziehung. Wir betrachten zwei Kreise. Dann ist $E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 + L_{12} I_1 I_2$. Das muss immer positiv sein, selbst wenn I_1 und I_2 verschiedene Vorzeichen haben. Wäre E_{magn} negativ, würden sich die Ströme spontan in Gang setzen. Bei gegebenen L_{ik} und I_1 ist E_{magn} minimal für $\partial E_{\text{magn}} / \partial I_2 = 0$, d. h. $I_2 = -L_{12} I_1 / L_{22}$. In E_{magn} eingesetzt, ergibt das $E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 - \frac{1}{2} L_{12}^2 I_1^2 / L_{22}$, was nur dann nichtnegativ ist, wenn

$$L_{12} \leq \sqrt{L_{11} L_{22}}. \quad (7.16)$$

Die Gegeninduktivität ist höchstens gleich dem geometrischen Mittel der Selbstinduktivitäten.

Ein idealer **Transformator** hat eine Gegeninduktivität $L_{12} = \sqrt{L_{11} L_{22}}$ zwischen den beiden Wicklungen, beim nichtidealen Trafo bedingt der Streufluss $L_{12} < \sqrt{L_{11} L_{22}}$. Im **Elektromotor** bestimmt die Gegeninduktivität L_{12} zwischen Stator- und Rotorwicklung das Drehmoment: $T = L_{12} I_1 I_2$, wenigstens bei stehendem Motor. Wenn er sich dreht, sind Modifikationen anzubringen, die zur Motorkennlinie $T(\omega)$ führen (Abschn. 7.3.10).

Ganz analog lässt sich auch ein System geladener Leiter und ihre elektrostatische Wechselwirkung behandeln. Der Leiter i trägt die Ladung Q_i und liegt auf dem Potential U_i , das von Q_i selbst und allen übrigen Ladungen stammt:

$$U_i = \sum_k C_{ik}^{-1} Q_k.$$

Offenbar ist C_{ii} die Kapazität des Leiters i , C_{ik} ist die **Gegenkapazität** zwischen i und k . Hier ist von vornherein klar, dass die Gesamtenergie

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_i U_i Q_i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} C_{ik}^{-1} Q_i Q_k$$

ist.

7.2 Magnetische Materialien

Wieso gerade Stoffe wie Eisen das Magnetfeld so stark beeinflussen und von ihm beeinflusst werden, erkannte schon 1823 *Ampère* in den Grundzügen, aber noch *Heisenberg* und viele andere hatten hier manche Nuss zu knacken.

7.2.1 Magnetisierung

Bringt man Materie in ein Magnetfeld \mathbf{B} , dann beginnen um die \mathbf{B} -Richtung überall mikroskopische Kreisströme zu fließen. Die Materie wird magnetisiert. Natur und Ursache dieser Kreisströme werden wir in den folgenden Abschnitten untersuchen. Hier betrachten wir ihren Einfluss auf das \mathbf{B} -Feld und das \mathbf{H} -Feld. Dazu unterscheiden wir, ähnlich wie im Fall elektrischer Ladungen, **freie** und **gebundene Ströme**. Freie Ströme fließen in Drähten, man kann sie mit Amperemetern messen. Die Kreisströme in magnetisierter Materie sind gebundene Ströme. *Alle* Ströme sind Quellen von \mathbf{B} , nur die freien Ströme sind Quellen von \mathbf{H} . Wie sehen \mathbf{B} und \mathbf{H} in einem magnetisierten Stoff, z. B. in Eisen aus? Das ist keine rein akademische Frage. Wenn man ein Loch ins Eisen schneidet, ändert sich zwar dadurch das Feld an dieser Stelle. Aber mit Teilchenstrahlen, die Eisen durchdringen, kann man die dort wirkenden Kräfte, also das \mathbf{B} -Feld, ganz real ausmessen. Dies geht besonders gut mit Neutronen, die zwar keine Ladung, aber ein magnetisches Moment haben.

In den Seitenflächen des magnetisierten Körpers fließen ringsum gebundene Ströme. Sie bleiben von den mikroskopischen Kreisströmen übrig, wenn man diese in jedem Volumenelement zeichnet und dabei berücksichtigt, dass sich in den Berührungsflächen die entgegengesetzten Ströme aufheben, nur an der Oberfläche nicht (Abb. 7.16). An der Oberfläche tritt also wie an dem stromdurchflossenen Blech von Abschn. 6.9 ein Sprung derjenigen Feldgröße auf, die auch gebundene Ströme zu Quellen hat, nämlich ein Sprung von \mathbf{B} . Wie beim Blech springt die Tangentialkomponente von \mathbf{B} beim Durchtritt durch diese Oberfläche um $\Delta B_{\parallel} = \mu_0 j d$. Die Schichtdicke d wird gleich wieder herausfallen. Die Normalkomponente B_{\perp} tritt stetig durch die Seitenfläche; sonst müssten dort Quellen von \mathbf{B} sitzen, und die gibt es nicht. Dagegen muss bei \mathbf{H} die Tangentialkomponente stetig durchtreten, denn es handelt sich nicht um freie Ströme. Für einen sehr langen Stab mit der Achse in Richtung des äußeren Feldes ist damit alles geklärt (Abb. 7.17).

Der Kreisstrom, der z. B. einen Rundstab vom Radius r umfließt, ist $I = j d$. Mit der umflossenen Fläche $A = \pi r^2$ ergibt er ein magnetisches Moment $p_m = IA = \pi r^2 j d$. Es ist offenbar proportional zum Volumen $V = \pi r^2 l$.

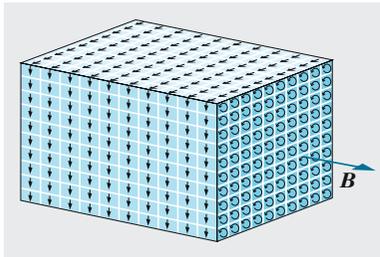


Abb. 7.16. Die magnetischen Kreisströme in einem Material gleichen sich im Innern aus (an jeder Trennfläche fließen beiderseits entgegengesetzt gleich große Ströme). Nur an der Oberfläche bleibt ein effektiver Kreisstrom übrig, der rings um den ganzen Körper läuft

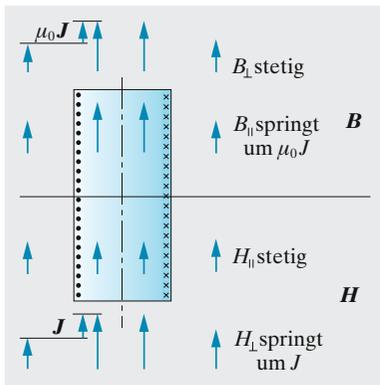


Abb. 7.17. Verhalten von \mathbf{B} und \mathbf{H} an einer Materialoberfläche. \mathbf{B} - und \mathbf{H} -Felder für einen langen paramagnetischen oder ferromagnetischen Stab

Das magnetische Moment pro Volumeneinheit nennen wir **Magnetisierung J** :

$$J = \frac{p_m}{V} = jd. \quad (7.17)$$

Wir können also den Sprung ΔB_{\parallel} an der Seitenfläche, den Unterschied zwischen innen (Index i) und außen (Index a), auch durch J ausdrücken:

$$\Delta B_{\parallel} = B_i - B_a = \mu_0 J.$$

H_{\parallel} ist stetig: $H_i = H_a$. Außen gilt $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, also innen

$$\mathbf{B}_i = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J}). \quad (7.18)$$

Die Kreisströme und damit \mathbf{J} sind oft (aber z.B. nicht im Eisen) proportional zu \mathbf{H} :

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}. \quad (7.19)$$

χ heißt magnetische **Suszeptibilität** und ist, wie z. B. (7.18) zeigt, dimensionslos. (7.18) kann damit auch geschrieben werden

$$\mathbf{B}_i = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (7.20)$$

mit der **Permeabilität**

$$\mu_r = 1 + \chi. \quad (7.21)$$

In einem kurzen magnetisierten Stab herrschen andere Feldverhältnisse. Vom Standpunkt der magnetischen Momente kann man sagen: Das Moment der Oberflächen-Kreisströme erzeugt ein ähnlich gebautes Feld, wie es im elektrischen Fall zustande käme, wenn auf den Stirnflächen des Stabes positive bzw. negative Ladungen säßen, also ein Dipolfeld. Dieses Dipolfeld ist bei positivem χ dem äußeren Magnetfeld entgegengerichtet und schwächt dieses im Innern des Stabes. Diese **Entmagnetisierung** bewirkt also, dass sich der kurze Stab schwächer magnetisiert als ein langer Stab im gleichen äußeren Feld. Man kann diesen Einfluss der Probenform auf die Magnetisierung im äußeren Feld H_a durch einen Entmagnetisierungsfaktor N darstellen:

$$J = \frac{\chi H_a}{1 + N\chi}. \quad (7.22)$$

Ein langer Stab hat also $N = 0$, für eine Kugel ergibt sich $N = \frac{1}{3}$ (Abschn. 6.9.5).

Im Innern eines Permanentmagneten haben die \mathbf{B} - und die \mathbf{H} -Linien überraschenderweise ungefähr umgekehrte Richtung zueinander (Abb. 7.19). Die \mathbf{B} -Linien umkreisen nämlich im geschlossenen Zug auch die gebundenen Oberflächenströme auf den Seitenflächen des Magneten. Die \mathbf{H} -Linien dürfen das nicht tun, eben weil die *gebundenen* Oberflächenströme als ihre Quellen nicht in Frage kommen. Die Zirkulation von \mathbf{H} muss überall 0 sein. Das ist nur möglich, wenn die außen vom N- zum S-Pol laufenden \mathbf{H} -Linien innen ebenfalls von N nach S laufen, also im umgekehrten Sinn wie draußen (Abb. 7.19, linke Hälfte). Das entspricht genau dem entmagnetisierenden Dipolfeld in Abb. 7.18.

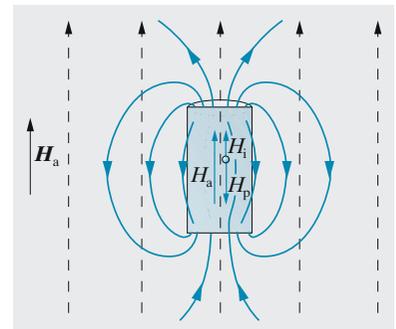


Abb. 7.18. Entmagnetisierung durch Überlagerung des Dipolfeldes eines kurzen Stabes über das äußere Feld

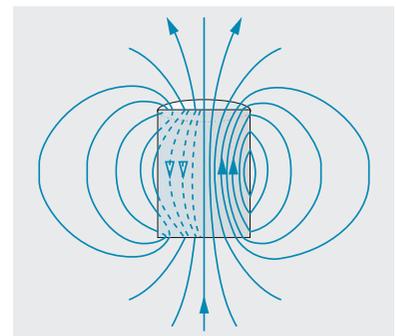


Abb. 7.19. \mathbf{H} -Feld (links) und \mathbf{B} -Feld (rechts) im Innern eines Permanentmagneten

Tabelle 7.1. Magnetische Suszeptibilität χ einiger Stoffe

a) Diamagnetika

Stoff	$\chi \cdot 10^6$
Wismut	-14
Wasser	- 0,72
Stickstoff ^a	- 0,0003

b) Paramagnetika

Stoff	$\chi \cdot 10^6$
Platin	+ 19,3
Flüssiger Sauerstoff	+360
Sauerstoff	+ 0,14

^a Unter Normalbedingungen

7.2.2 Diamagnetismus

Eine Wismutkugel, an einem Faden aufgehängt, wird von der Spitze des konischen Polschuhs eines Elektromagneten abgestoßen, erfährt also eine Kraft in Richtung abnehmender Feldstärke. Sie verhält sich wie eine Gasblase vor einer elektrisch geladenen Spitze in einer dielektrischen Flüssigkeit (Abschn. 6.2.4). Deren Abstoßung kommt daher, dass die Dielektrizitätskonstante des Gases kleiner ist als die ihrer Umgebung. Dementsprechend hat Wismut eine kleinere Permeabilität als das Vakuum oder die Luft: $\mu < 1$, also $\chi < 0$. Solche Stoffe heißen diamagnetisch. χ ist sehr klein (Tabelle 7.1) und meist temperaturunabhängig. Eigentlich sind alle Stoffe diamagnetisch, nur wird diese Eigenschaft bei manchen durch den weit stärkeren Paramagnetismus verdeckt.

Schiebt man einen diamagnetischen Körper schnell in ein Magnetfeld, dann verhält er sich ähnlich wie ein Metallstück: Man muss eine Kraft überwinden, die ihn wieder hinausdrängt. Beim Metallstück kennen wir den Grund: Die Magnetfeldänderung induziert Wirbelströme, die Lorentz-Kräfte auf diese Wirbelströme im Feld bedingen die Abstoßung. Diese Wirbelströme erlöschen allerdings infolge des ohmschen Widerstandes, sobald man das Metallstück ruhig hält. Beim Diamagnetikum wirkt die Kraft weiter: Die induzierten Kreisströme müssen ebenfalls widerstandslos weiterlaufen, sie dürfen nur von der wirkenden Feldstärke abhängen, nicht von ihrer Änderung.

Tatsächlich entstehen diese Kreisströme so, dass das ganze Atom mit seiner Elektronenhülle um die \mathbf{B} -Richtung rotiert, und zwar mit der Kreisfrequenz $\omega = em^{-1}B$, der **Larmor-Frequenz** (Abschn. 8.2.2, Aufgabe 7.1.2). Wenn das Atom Z Elektronen hat und ihr mittleres Abstandsquadrat vom Kern $\overline{x^2}$ ist, bedeutet die Rotation des Atoms einen Kreisstrom der Stärke $I = Ze v = Ze\omega/(2\pi)$, der im Mittel die Fläche $A = \pi \overline{x^2}$ umfließt, also nach (6.144) ein magnetisches Moment

$$\mu = IA = \frac{1}{2} Ze\omega \overline{x^2} = \frac{1}{2} Z \frac{e^2}{m} \overline{x^2} B$$

für jedes Atom, und für die Volumeneinheit, in der n Atome sitzen, ein Moment

$$J = \frac{1}{2} n Ze^2 m \overline{x^2} B \quad (7.23)$$

entgegen der Feldrichtung. Die **Suszeptibilität** ist also

$$\chi = \frac{J}{H} = \frac{J\mu_0}{B} = \frac{1}{2} \mu_0 n Z \frac{e^2}{m} \overline{x^2} \quad (7.24)$$

7.2.3 Paramagnetismus

Viele Stoffe werden im Gegensatz zum Wismut ins Magnetfeld hineingezogen wie ein Dielektrikum ins elektrische Feld. Sie magnetisieren sich also in Feldrichtung, ihr χ ist positiv, und zwar unabhängig vom Feld, aber abhängig von der Temperatur nach dem Gesetz von *Pierre Curie*

$$\chi = \frac{C}{T}. \quad (7.25)$$

Eine paramagnetische Flüssigkeit in einem U-Rohr steigt in dem Schenkel an, der sich im Magnetfeld befindet (Abb. 7.20), und zwar um die Höhe

$$h = \frac{1}{2\rho g} \mu_0 (\mu_r - 1) H^2, \quad (7.26)$$

ebenso wie eine dielektrische Flüssigkeit im Kondensator (Abschn. 6.2.4). Die Hubenergie $\rho g h$ ist gleich dem Unterschied der magnetischen Energiedichten $\frac{1}{2} H B = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 H^2$ mit und ohne Flüssigkeit. Ein frei drehbar aufgehängter Platinstab stellt sich in Feldrichtung ein (paramagnetisch), ein Wismutstab quer dazu (diamagnetisch; vgl. Abschn. 6.2.4).

Paramagnetische Stoffe entsprechen den Dielektrika mit Orientierungspolarisation (Abschn. 6.2.3). Ihre Teilchen haben permanente magnetische Momente, die vom Feld ausgerichtet werden; im Diamagnetikum muss das Feld diese Momente erst erzeugen. Diese magnetischen Momente stellt man sich klassisch nach *Ampère* als Ringströme vor, die in dem Teilchen kreisen. Quantenmechanik bedeutet nicht jedes Elektron einen Kreisstrom, sondern nur manche haben ein **Bahnmoment** (Abschn. 14.3.2), allerdings alle dazu ein **Spinmoment** (Abschn. 14.4). Der Einstellung der Momente im Feld arbeitet die thermische Bewegung entgegen. Daher entsteht in Analogie zu (6.53) das Curie-Gesetz. Die Übereinstimmung geht bis in die Einzelheiten. Statt $\varepsilon - 1 = n p_{\text{el}}^2 / (3\varepsilon_0 kT)$ finden wir hier

$$\chi = \mu_0 n \frac{\mu^2}{3kT}, \quad (7.27)$$

oder auf 1 mol der Substanz umgerechnet

$$\chi_{\text{mol}} = \mu_0 \frac{\mu_{\text{mol}}^2}{3RT}, \quad (7.28)$$

wo $\mu_{\text{mol}} = N_A \mu$ das magnetische Moment ist, das 1 mol bei vollständiger Ausrichtung sämtlicher Elementarmagnete hätte.

7.2.4 Ferromagnetismus

Eisen, Nickel, Kobalt und wenige andere Stoffe, besonders Legierungen, nehmen bei nicht zu hohen Temperaturen im Feld \mathbf{B} eine sehr hohe Magnetisierung \mathbf{J} an, die \mathbf{B} gleichgerichtet ist. Ihr großes χ oder μ_r ist aber stark vom Feld und außerdem von der Vorgeschichte des Materials abhängig.

In Abb. 7.21 schaltet man einen Strom ein, der durch zwei gleichgebauete Ringspulen fließt. Diese Spulen, eine mit einem Eisen-, eine mit einem Holz kern, werden von Messspulen umfasst; den Induktionstromstoß in diesen Messspulen messen zwei ballistische Galvanometer. Da durch beide hintereinander liegende Spulen der gleiche Strom fließt, herrscht in beiden das gleiche H . Die Induktionwirkung in den Messspulen wird aber durch $B = \mu_r \mu_0 H$ bestimmt. Das Verhältnis der

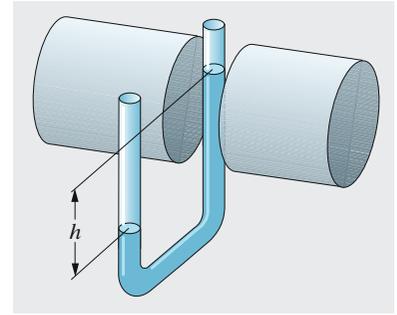


Abb. 7.20. Messung der Permeabilität paramagnetischer Lösungen mit der Steighöhenmethode

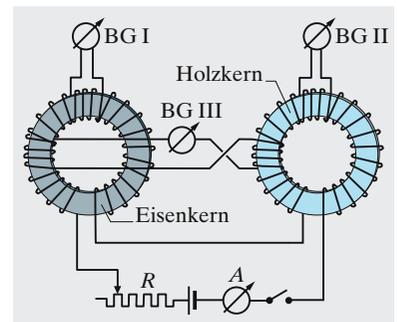


Abb. 7.21. Die drei ballistischen Galvanometer messen die \mathbf{B} -Felder in Eisen und Holz sowie die Magnetisierung des Eisens

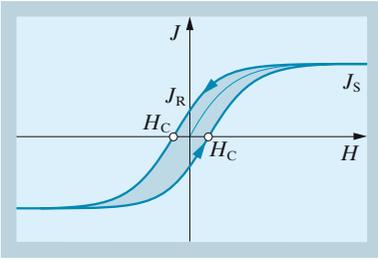


Abb. 7.22. Hysteresisschleife der Magnetisierung

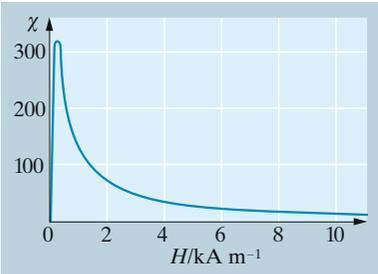


Abb. 7.23. Suszeptibilität einer Dynamostahlsorte in Abhängigkeit von der Feldstärke

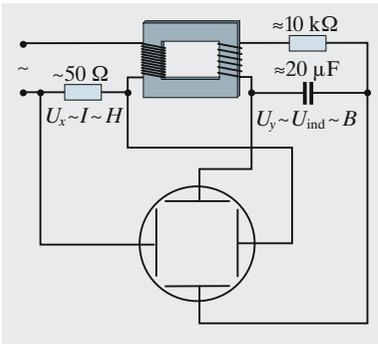


Abb. 7.24. Schaltung zur Oszillographie der Hysteresiskurve des Transformator-Eisenkerns. An den x-Ablenkplatten liegt ein Signal, das dem Primärstrom, also dem H -Feld proportional ist. An den y-Platten liegt die Induktionsspannung, die proportional \dot{B} ist, durch den Kondensator um $\pi/2$ phasenverschoben, also ein Signal, das proportional B ist

Galvanometerauslässe gibt also direkt die *Permeabilität μ_r des Eisens* (Holz hat $\mu_r = 1$). Das Differenzgalvanometer BGIII misst $AB_{Fe} - AB_{Holz} = A\mu_0(\mu_r H - H) = A\mu_0 J$, d. h. die Magnetisierung des Eisens.

Wir gehen von einem Eisenstück aus, das noch nie magnetisiert war, und bringen es in ein zeitlich langsam anwachsendes Magnetfeld H . Die Magnetisierung folgt der dünnen Linie in Abb. 7.22 (**Neukurve** oder jungfräuliche Kurve) und strebt einem Sättigungswert J_s zu. Senkt man jetzt H wieder, bleibt die Probe immer etwas stärker magnetisiert, als der Neukurve entspricht. Speziell bleibt, wenn man $H = 0$ erreicht hat, die **Remanenz-Magnetisierung J_R** . Um J auf 0 zu bringen, braucht man ein Gegenfeld H_C (**Koerzitivfeld**). Weitere Magnetisierung in Gegenrichtung und schließlich Umkehr des ganzen Vorganges erzeugt die **Hysteresisschleife**. Oft trägt man nicht J , sondern $B = \mu_0(H + J)$ über H auf. Die Sättigungsbereiche behalten dann einen leichten Anstieg mit der Steigung μ_0 , während die Steigung im Mittelbereich der Schleife $\mu_r \mu_0$, also viel größer ist.

Man kann die Hysteresisschleife direkt auf dem Oszilloskopschirm zeichnen (Abb. 7.24). Dazu muss man an die x-Platten eine Spannung legen, die dem Spulenstrom I und damit dem Feld H proportional ist, an die y-Platten eine Spannung, die proportional B ist, und die man am einfachsten aus einem Transformator erhält (er liefert $U \sim \dot{B}$) mit anschließender Phasenverschiebung um $\pi/2$ durch einen Kondensator.

Ein so kompliziertes ferromagnetisches Verhalten zeigen außer Fe, Ni und Co die **seltenen Erden** Gadolinium, Dysprosium, Erbium sowie einige Legierungen, z. B. die **Heusler-Legierungen** von Mn mit Sn, Al, As, Sb, Bi, B und Cu. Ferromagnetismus ist an den kristallisierten Zustand gebunden.¹ Auch Eisendampf ist paramagnetisch. Fe und Ni haben etwa die gleiche Sättigungsmagnetisierung, bei Co ist sie nur etwa $\frac{1}{3}$ so groß.

Die Form der Hysteresisschleife bestimmt die technische Verwendbarkeit des Materials und ist stark von Zusätzen und von der Verarbeitung abhängig. Hoch legierter Stahl (Edelstahl) ist nur paramagnetisch. Für Permanentmagnete und für Informationsträger wie Tonbänder und Magnetspeicher in Computern braucht man ein **magnetisch hartes** Material mit steiler und breiter $B(H)$ -Kurve, hoher Anfangspermeabilität, großer Remanenz und großem Koerzitivfeld. Sie soll ja ihre Magnetisierung überhaupt nicht oder erst in einem sehr hohen Gegenfeld wieder verlieren. Motoren, Generatoren, Transformatoren brauchen **magnetisch weiches** Material mit kleinem B_R und H_C , d. h. möglichst schmaler Hysteresisschleife. Die Fläche $\int B dH$ ist nämlich genau die Energie, die bei jedem Ummagnetisierungszyklus ins Eisen gesteckt werden muss, dieses unnötig erhitzt und ungenutzt verloren geht.

Die ferromagnetischen Eigenschaften gehen bei Überschreitung einer Temperatur T_C , der **Curie-Temperatur**, verloren, und das Material wird paramagnetisch: Die Suszeptibilität χ wird um Größenordnungen kleiner und hängt ähnlich dem Curie-Gesetz von der Temperatur ab:

$$\chi = \frac{C}{T - T_C} \quad (\text{Curie-Weiss-Gesetz}) \quad (7.29)$$

Die Curie-Temperatur beträgt für Eisen 744 °C, für Kobalt 1 131 °C, für Nickel 372 °C, bei einigen Heusler-Legierungen liegt sie unterhalb 100 °C.

7.2.5 Der Einstein-de Haas-Effekt

Das Experiment in Abb.7.26 soll klären, welcher Art die Kreisströme in magnetisiertem Eisen sind. Theoretisch könnte es sich um Elektronen handeln, die Kreisbahnen vom Radius r mit der Kreisfrequenz ω durchlaufen. Ihr Drehimpuls ist dann $L = m\omega r^2$ (Abschn. 2.2.4). Ein solches Elektron, das seine Ladung $-e$ in der Sekunde v -mal durch jeden Bahnpunkt führt, entspricht einer mittleren Stromstärke $I = -ev = -e\omega/(2\pi)$. Mit der umkreisten Fläche $A = \pi r^2$ ergibt das ein magnetisches Moment $\mu = IA = -\frac{1}{2}e\omega r^2$. Es steht in einem festen Verhältnis zum Drehimpuls

$$\frac{\mu}{L} = \frac{1}{2} \frac{e}{m}, \quad (7.30)$$

genannt **gyromagnetisches Verhältnis**. Prüfen wir nach, ob das stimmt.

Wir hängen einen Eisenstab an einem Quarzfaden in eine Spule. Wenn wir den Spulenstrom anschalten (hier der Entladungsstrom eines Kondensators), wird der Eisenstab magnetisiert, d. h. seine vorher ungeordnet über alle Richtungen verteilten Kreisströme werden mindestens teilweise mit ihren Achsen in die Feldrichtung gedreht. Das bedeutet eine Änderung des Drehimpulses der kreisenden Elektronen. Für das ganze System Stab plus Elektronen gilt Drehimpulserhaltung, also muss der Stab äußerlich sichtbar den entgegengesetzten Drehimpuls annehmen, den die Elektronen unsichtbar aufgenommen haben. Im ursprünglichen Experiment entluden *Einstein* und *de Haas* einen großen Kondensator, um, wenn auch kurzzeitig, einen großen Spulenstrom zu erzielen. So kurzzeitig der Strom ist, hinterlässt er in geeignet hartem Stahl eine hohe *Remanenzmagnetisierung* J_R und das entsprechende magnetische Moment $\mu_R = VJ_R$. Der entsprechende Drehimpuls L lässt den Stab mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega' = L/\Theta$ aus der Ruhelage herausschwingen (Θ : Trägheitsmoment des Stabes). Messung von J_R und ω' (Drehspiegel) liefert das gyromagnetische Verhältnis. Es ergibt sich aus diesem Experiment zu

$$\frac{J_R V}{\Theta \omega'} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1} = \frac{e}{m},$$

also genau das *Doppelte* wie nach (7.30).

Dieser **Einstein-de Haas-Effekt** beweist, dass es im Eisen keine elementaren „Magnetstäbchen“ gibt, sondern dass die Magnetisierung an einen Drehimpuls um die J -Richtung gebunden ist. Trotzdem stimmt das Bild der kreisenden Elektronen nur zum Teil, denn dies müsste in jedem Fall das gyromagnetische Verhältnis $\frac{1}{2}e/m$ liefern. Das gefundene Verhältnis e/m entspricht keinem Bahnmoment, stimmt aber mit dem spektroskopisch und auf anderen Wegen gefundenen **Spinmoment** des Elektrons ausgezeichnet überein. Man beschreibt es anschaulich, nicht ganz zutreffend, durch eine Rotation des Elektrons um die eigene Achse (Abschn. 14.4). Der Ferromagnetismus beruht also auf den Spins einzelner Elektronen.

7.2.6 Struktur der Ferromagnetika

Da sich ein Ferromagnetikum nur bis zur **Sättigungsmagnetisierung** J_S bringen lässt und nicht weiter, ist plausibel, dass im gesättigten Zustand die Spinmomente *aller* in Frage kommenden Elektronen ausgerichtet sind. J_S wird bei einem Feld $B \approx$

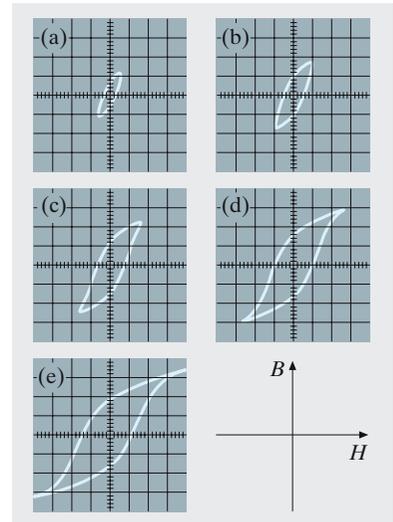


Abb. 7.25a–e. Hysteresiskurven von Transformatoreisen, gemessen mit der Schaltung von Abb. 7.24. Von (a)–(e) nehmen die angelegte Spannung und damit Primärstrom I , H -Feld (x -Achse) und B -Feld (y -Achse) zu. Man beachte die überproportionale Zunahme der Schleifenfläche (Wirkleistungsverlust) und die verbleibende Steigung von $B(H)$ auch in der Sättigung, die $\mu_r = 1$ entspricht

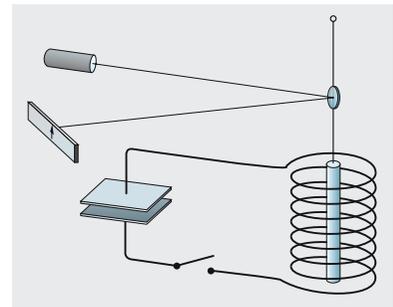


Abb. 7.26. Einstein-de Haas-Effekt

¹ 1994 wurde Ferromagnetismus in einer unterkühlten Schmelze von $\text{Co}_{80}\text{Pd}_{20}$ beobachtet.

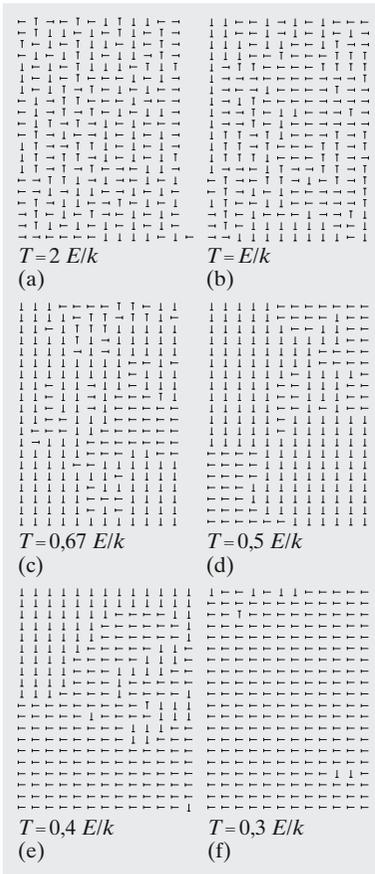


Abb. 7.27a–f. Computer-Simulation der spontanen Magnetisierung ohne äußeres Feld nach einem zweidimensionalen **Ising-Modell**. Zwischen benachbarten Elementardipolen besteht eine Wechselwirkungsenergie E ($-E$ bei paralleler, $+E$ bei antiparalleler Einstellung). Die Wahrscheinlichkeit der Einstellung jedes Dipols ist $e^{-E/(kT)}$ und wird entsprechend seiner Nachbarschaft ausgewürfelt. Bei hoher Temperatur sind die Einstellungen fast unabhängig voneinander. Bei Abkühlung wachsen zwar die ausgerichteten Bereiche, erreichen aber erst um $T \approx 0,4 E/k$ makroskopische Dimension, d. h. erfüllen praktisch unseren ganzen Ausschnitt. Die ferromagnetische Ordnung hat einen scharfen Curie-Punkt, der in dieser Gegend liegt

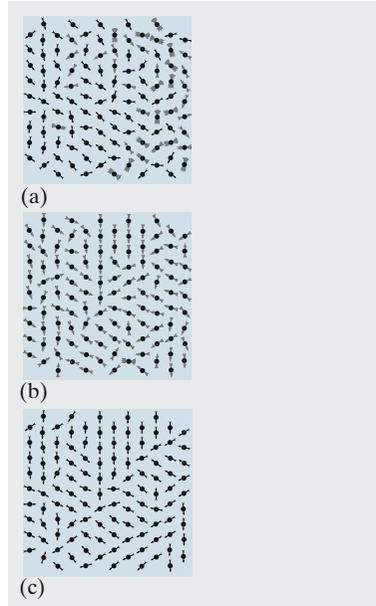


Abb. 7.28a–c. **Spontane Magnetisierung** in einem Modell aus kleinen frei drehbaren Kompassnadeln. Die thermische Bewegung ist durch schnelles Drehen eines Stabmagneten über dem Modell simuliert. Daher erscheinen einige Nadeln bewegungsunscharf. Die „Temperatur“ nimmt von (a) nach (c) ab

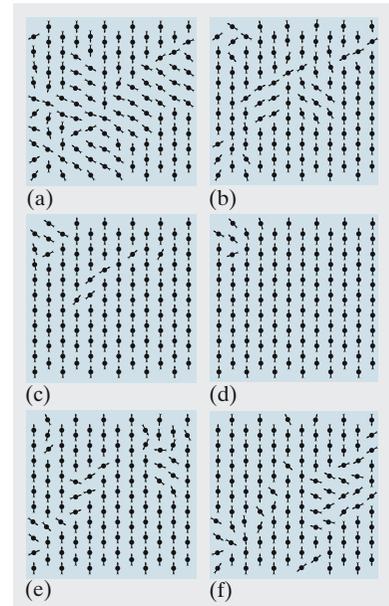


Abb. 7.29a–f. Magnetisierung durch äußeres Feld im Modell. Das anwachsende Magnetfeld (a)–(d) wird durch Annähern einer Permanentmagnetleiste erzeugt. Entfernt man sie langsam wieder, bleibt eine Remanenzmagnetisierung zurück (e). Um sie zu beseitigen, braucht man ein gewisses Gegenfeld (f)

1 T erreicht, liegt also in der Größenordnung $J_S \approx B/\mu_0 \approx 10^6 \text{ Am}^{-1}$. Dies ist das Moment der Volumeneinheit. In ihr befinden sich $n \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$ Eisenatome. Jedes Atom steuert also ein Moment $J_S/n \approx 10^{-23} \text{ Am}^2$ zur Magnetisierung bei. Das entspricht dem Moment $\mu = IA = ev\pi r^2$ für den Umlauf eines Elektrons mit $v \approx 10^{14} \text{ Hz}$ auf einer Bahn mit $r \approx 10^{-10} \text{ m}$. Da diese Werte atomphysikalisch plausibel sind, ist die Annahme berechtigt, dass in jedem Eisenatom ein Elektron oder wenige zur Magnetisierung beitragen. Wir wissen zwar aus Abschn. 7.2.5, dass es sich nicht um ein Bahn-, sondern um ein Spinmoment handelt, aber größenordnungsmäßig gilt die Betrachtung auch für diese.

Bei den paramagnetischen Stoffen stört die Wärmebewegung so sehr die Ordnung der Elementarmomente, dass ein äußeres Feld nur eine ganz geringfügige Ausrichtung erzwingen kann. Bei einem Ferromagnetikum kann die Wärmebewegung die vollständige Ordnung nicht unterdrücken, solange man unterhalb der Curie-Temperatur bleibt. Der Grund wird am anschaulichsten in einem flächenhaften Modell, in dem die Elementarmagnete durch frei drehbare, regelmäßig angeordnete kleine Magnetnadeln dargestellt sind (Abb. 7.28). Lässt man das Modell ruhig stehen, richten sich die Magnetnadeln in unregelmäßig begrenzten Bereichen gegenseitig aus, sodass sie hier alle parallel stehen: Der Bereich ist auch ohne äußeres Feld bis zur Sättigung magnetisiert; im Gesamtmodell, wenn es groß genug ist, mitteln sich jedoch die Beiträge der Einzelbereiche zu einer Magnetisierung weg, die verschwindet oder ziemlich klein ist. Im Ferromagnetikum

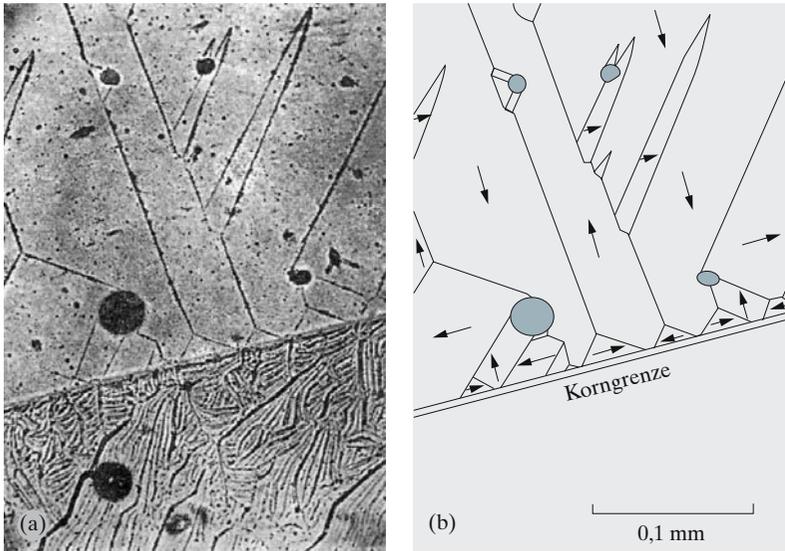


Abb. 7.30a,b. Bitter-Streifen an der Oberfläche von Siliciumeisen. (Nach B. Elschner)

spricht man von **Weiss-Bereichen** (nach *Pierre Weiss*). Aus der Quantenmechanik des Atombaus hat *Heisenberg* gezeigt, warum sich gerade die Elektronen der *d*-Schale von Fe, Ni und Co so gegenseitig ausrichten, im Gegensatz zu fast allen anderen Atomen.

Schaltet man ein äußeres Magnetfeld \mathbf{B} an, dann wachsen die Weiss-Bereiche, deren Einstellrichtung in \mathbf{B} -Richtung liegt, auf Kosten der anderen (Abb. 7.29). Die entsprechende Verschiebung der Bereichsgrenzen (**Bloch-Wände**) lässt sich nach *Bitter* sehr elegant nachweisen: Wo eine freie Oberfläche eine solche Wand anschnidet, treten aus dem einen Bereich Feldlinien aus und in den benachbarten ein. Wegen der räumlichen Nähe von Quelle und Senke können diese Felder sehr stark sein. Überschichtet man diese Oberfläche mit einer Suspension kolloidaler ferromagnetischer Teilchen, so setzen sich diese an der Bloch-Wand ab und markieren sie als **Bitter-Streifen** (Abb. 7.30). Auch auf bisher unmagnetisiertem Eisen entstehen Bitter-Streifen und weisen die spontane Magnetisierung auch hier nach.

Die Weiss-Bereiche sind i. Allg. nicht identisch mit den Kristallen des polykristallinen Materials. Die magnetische Ausrichtung erfolgt aber auch ohne äußeres Feld längs einer kristallographischen Achse. Beim Eisen mit seinem kubischen Gitter sind dies die Würfelkanten. Legt man ein äußeres Feld an, wachsen die günstig orientierten, also energetisch bevorzugten Weiss-Bereiche zunächst durch Wandverschiebung. Erst sehr hohe Felder drehen die Einstellrichtung u. U. aus der kristallographischen Achsrichtung heraus, bis sie überall mit der Feldrichtung übereinstimmt. Diesen Verschiebungen und Drehungen wirken elastische Spannungen entgegen, die das unterschiedliche Hysterisisverhalten verschiedener Eisensorten bedingen.

Fremdatome im Gitter behindern die Wandverschiebung und fesseln die Wände zeitweise in eine bestimmte Lage, bis bei wachsendem Feld die Spannung zu groß wird und die Wand ruckartig weiterschnappt. Solche irreversiblen Wandverschiebungen ändern ruckartig J , also B und damit den Magnetfluss Φ in der felderzeugenden Spule. Wenn diese sehr viele Windungen hat, braucht man an ihren Enden nur Verstärker und Lautsprecher anzuschließen und hört jede solche Wandverschiebung als ein Knacken. Beim Annähern eines Magneten an ein

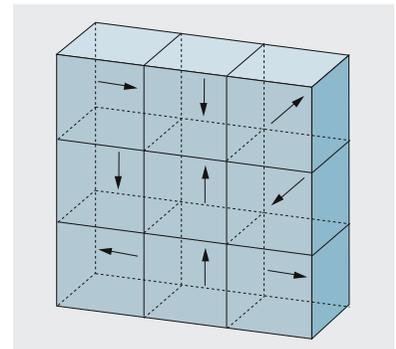


Abb. 7.31. Richtungen der Spontanmagnetisierung von Weiss-Bereichen in nichtmagnetisiertem Eisen (schematisch)

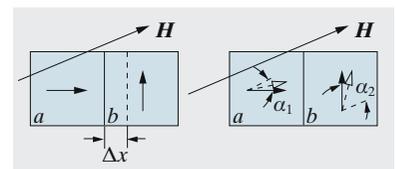


Abb. 7.32. Wandverschiebungen der Weiss-Bereiche und Drehungen in die Feldrichtung bei der Magnetisierung bis zur Sättigung

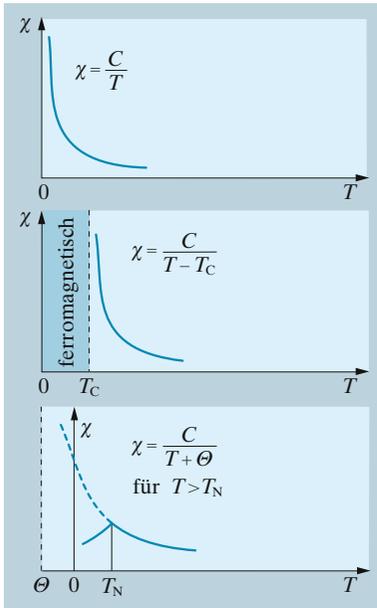


Abb. 7.33. Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität bei para-, ferro- und antiferromagnetischen Stoffen

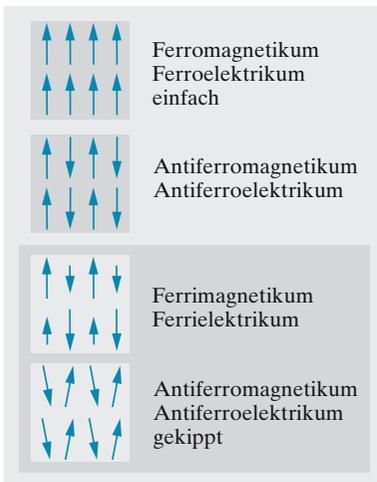


Abb. 7.34. Die verschiedenen Einstellmöglichkeiten der elektrischen und magnetischen Momente von Teilchen im Festkörper (schematisch)

Weicheisenstück in der Spule verschmelzen diese Knacke zu einem Prasselgeräusch: **Barkhausen-Effekt**. Wenn man das äußere Feld wieder senkt, werden die Drehungen aus der Kristallachsrichtung und die reversiblen, allmählichen Wandverschiebungen wieder rückgängig, nicht aber die irreversiblen. Sie bedingen also die remanente Magnetisierung. Da die irreversiblen Verschiebungen mit Fremdatomen zusammenhängen, haben hochlegierte Eisensorten (Stähle) i. Allg. eine höhere Remanenz, d. h. sind magnetisch härter.

7.2.7 Antiferromagnetismus und Ferrimagnetismus

Mit den Dia-, Para-, und Ferromagnetika sind die magnetischen Verhaltensweisen der Materie längst nicht erschöpft. Manche Stoffe, besonders solche mit paramagnetischen Ionen, z. B. MnO , MnF_2 , haben eine kritische Temperatur T_N , nach ihrem Entdecker **Néel-Temperatur** genannt. Oberhalb von T_N folgt die Suszeptibilität dem Gesetz

$$\chi = \frac{C}{T + \Theta} \quad (7.31)$$

Unterhalb sinkt sie wieder ab. Dieses *antiferromagnetische* Verhalten deutet man so: Bei tiefen Temperaturen sind die zur Magnetisierung beitragenden Elektronenspins im Kristallgitter paarweise antiparallel ausgerichtet und damit nach außen wirkungslos (Abb. 7.34). Diese Ordnung wird mit steigender Temperatur gelockert und bricht bei der Néel-Temperatur T_N völlig zusammen. Oberhalb von T_N sind die Spins der Wärmebewegung ausgeliefert wie bei einem Paramagnetikum.

Bei einigen Gitterstrukturen sind die Nachbarspins antiparallel ausgerichtet, aber verschieden groß und kompensieren sich nur zu einem gewissen Bruchteil. Solche *Ferrimagnetika* wie **Magnetit** (Fe_3O_4), verhalten sich ähnlich wie Ferromagnetika, ihre Sättigungsmagnetisierung ist aber viel kleiner. Durch Einbau von Fremdatomen wie Mg, Al usw. anstelle eines Fe-Atoms entstehen hieraus die heute immer wichtigeren **Ferrite**, deren Hysteresisurve man ganz verschiedenartig gestalten kann. Sie sind fast nichtleitend und bewirken daher als Transformatorkerne fast keine Wirbelstromverluste.

7.2.8 Ferro- und Antiferroelektrizität

Ganz analog wie die Ferromagnetika im Magnetfeld verhalten sich einige Salze im elektrischen. Man spricht von **Ferro-** und **Antiferroelektrizität**, obwohl keiner dieser Stoffe Eisen enthält. Wichtige Ferroelektrika sind uns schon als Piezoelektrika begegnet: Salze der Weinsäure ($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$; **Seignette-Salze**) und **Bariumtitanat** (BaTiO_3). Ihre DK kann Werte über 1 000 erreichen. Ähnlich den Ferromagnetika handelt es sich um eine spontane gegenseitige Ausrichtung der Elementardipole. Mit wachsender Feldstärke E steigt die Polarisation sehr stark an, erreicht einen Sättigungswert, verschwindet beim Abschalten des Feldes nicht völlig – ein solcher Stoff heißt **Elektret** – und wird erst durch ein Gegenfeld um 10^5 Vm^{-1} beseitigt (elektrische Hysteresis). Ferroelektrika verlieren diese Eigenschaft oberhalb ihres Curie-Punktes.

In *Antiferroelektrika* wie WO_3 richten sich die Dipole spontan gegenseitig antiparallel aus. Wenn die antiparallelen Paare aus zwei Dipolen verschiedener Größe bestehen, ergibt sich **Ferrielektrizität** (Abb. 7.34).

7.3 Wechselströme

Michael Faraday stand auf der Westminster Bridge und schloss die beiden Enden eines Drahtes, den er quer durch die Themse gelegt hatte, an sein

leider viel zu unempfindliches Messgerät. Wenigstens gedanklich hatte er den magnetohydrodynamischen Generator erfunden, ebenso wie kurz vorher den ersten Elektromotor, wenn dies auch nur ein etwas ruckartig umlaufender Magnetstab war.

7.3.1 Erzeugung von Wechselströmen

Die gesamte großtechnische Erzeugung elektrischer Energie beruht auf Induktion, d.h. auf der Lorentz-Kraft. Wir beginnen mit einem der modernsten Generatoren, dem **MHD-Generator** (MHD = magnetohydrodynamisch), weil er vom Prinzip her am einfachsten ist und bereits alle wesentlichen Zusammenhänge zeigt. Durch ein Rohr wird mit der Geschwindigkeit v ein leitendes Fluid (Flüssigkeit oder Gas) gepumpt. An einer Stelle greift das Feld B eines Magneten in das Rohr. Dieser Magnet kann je nach Bauform ein Permanentmagnet oder ein gleich- oder wechselstrombetriebener Elektromagnet sein. Zur betrachteten Zeit herrsche das Feld B . In dem mit v durchströmenden Fluid herrscht ein elektrisches Feld E senkrecht zu B und v von der Stärke

$$E = v \times B .$$

Anders ausgedrückt wirkt auf ein Teilchen der Ladung Q im Fluid die Lorentz-Kraft

$$F = Qv \times B .$$

Wenn das Rohr den Durchmesser d hat und man senkrecht zu den Magnetpolen Elektroden anbringt, herrscht zwischen ihnen die Spannung

$$U = Ed = vBd . \quad (7.32)$$

Man kann sich diese Spannung auch als Folge der Tatsache erklären, dass die positiven Teilchen im Fluid nach der einen, die negativen nach der anderen getrieben werden, bis sich auf den Elektroden eine Ladung angesammelt hat, die ein solches elektrisches Gegenfeld erzeugt, dass Lorentz-Kraft und Coulomb-Kraft einander ausgleichen. Man versteht so folgende wichtige Tatsache: E -Feld und Spannung U_0 sind vorhanden, unabhängig von der Leitfähigkeit σ des Fluids, solange man dem Generator keinen Strom entnimmt. Die Spannung U_0 ist die **Leerlaufspannung** des Generators. Sobald man aber eine Leistung entnimmt, wozu natürlich ein Strom fließen muss, wird ein Teil der Leerlaufspannung abgebaut. Dieser Spannungsverlust ist umso größer, je langsamer Ladung nachgeliefert wird, je kleiner also die Leitfähigkeit ist. Man kann dies auch mit dem Innenwiderstand R_i ausdrücken, dessen Herkunft als $R_i \approx d/(\sigma A)$ hier klar ersichtlich ist (A : Elektrodenfläche). Wird der Strom I entnommen, verringert sich die Klemmenspannung an den Elektroden auf

$$U = U_0 - R_i I . \quad (7.33)$$

Die klassische Bauart eines **Generators** besteht im Prinzip aus einer Schleife von der Fläche A , z.B. einem Rechteck mit den Seiten a , b , die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine zur b -Seite parallele

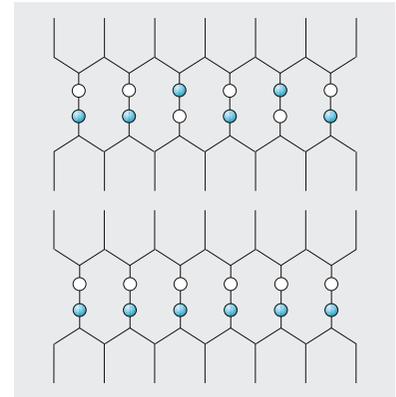


Abb. 7.35. Verbindungen wie Seignette-Salz, KH_2PO_4 oder auch Eis werden teilweise durch **Wasserstoffbrücken** zusammengehalten, auf denen ein Proton zwei mögliche Gleichgewichtslagen hat. Oberhalb des Curie-Punktes verteilen sich die Protonen zufällig über die beiden Lagen (**paraelektrischer Zustand**), unterhalb nehmen sie in bestimmten Bereichen spontan alle die gleiche Lage ein. So entsteht eine ferroelektrische Polarisation. Einen anderen Mechanismus der Ferroelektrizität zeigt Abb. 6.53

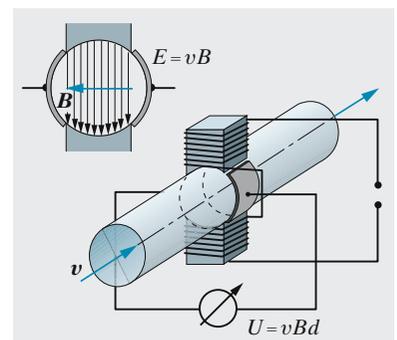


Abb. 7.36. MHD-Generator (magnetohydrodynamischer Generator), schematisch

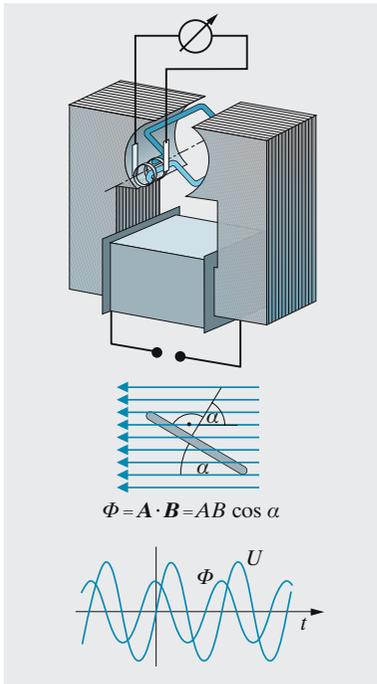


Abb. 7.37. Drehspulgenerator. Unten der Fluss- und Spannungsverlauf bei Gleichstromerregung und Abgriff ohne Kommutator, oben die Schleife im Magnetfeld in Seitenansicht

Achse dreht. Der eine Ast der Schleife bewegt sich mit $v = \omega a/2$ durch das B -Feld. Davon entfällt eine Komponente $v \sin \alpha$ auf die Richtung senkrecht zu B und liefert das E -Feld $E = Bv \sin \alpha$ und die Spannung $U = bBv \sin \alpha$ längs dieses Schleifenastes. Der gegenüberliegende Ast bewegt sich entgegengesetzt. In Umlaufrichtung der Schleife addieren sich beide Spannungen zu

$$U = 2bBv \sin \alpha = Bab\omega \sin \alpha = BA\omega \sin \alpha .$$

Man findet dies auch aus dem Induktionsgesetz. Durch die Schleife tritt ein Magnetfluss

$$\Phi = Bab \cos \alpha ,$$

wobei $\alpha = \omega t$. Die zeitliche Ableitung von Φ ist die in der Schleife induzierte Spannung:

$$U = -\dot{\Phi} = BA\omega \sin \omega t . \quad (7.34)$$

Für eine Spule aus N Schleifen multiplizieren sich Φ und U mit N .

Die erzeugte Spannung (7.34) ist sinusförmig mit der Amplitude $U_0 = BA\omega$. Ihre Frequenz ist die Drehfrequenz der Schleife. Genau wie beim MHD-Generator ergibt sich ein Spannungsabfall $R_i I$ in der Schleife und den weiteren Zuleitungen, wenn man den Strom I entnimmt. Der Maximalstrom ist $I_{\max} = U_0/R_i$, die maximale Leistung wird durch einen Verbraucher mit $R = R_i$ entnommen und beträgt $P_{\max} = U_0^2/(4R_i)$ (**Leistungsanpassung**; Abschn. 6.3.4d).

Im MHD- wie im Spulengenerator benutzt man zur Magnetfelderzeugung meist Elektromagnete; deren Betriebsstrom entnimmt man entweder einer besonderen Spannungsquelle (**fremderregter Generator**) oder dem vom Generator selbst erzeugten Strom (**selbsterregter Generator**). Dabei kann entweder der ganze Verbraucherstrom durch die Magnetwicklung fließen (**Haupt- oder Reihenschluss**), oder Verbraucher und Magnet können parallel liegen (**Nebenschluss**). Der Eisenkern des Magneten hat immer eine gewisse Remanenzmagnetisierung. Diese reicht aus, um mit ihrem kleinen Magnetfeld zunächst einen kleinen Strom im Fluid oder der Spule zu erzeugen, sobald man diese in Bewegung setzt. Dieser Strom verstärkt wieder das B -Feld usw. bis zum Normalbetrieb.

Die elektrische Leistung $P_{\text{el}} = UI$, die der Generator erzeugt, stammt natürlich aus mechanischer Leistung: Es kostet Arbeit, das Fluid durchs Magnetfeld zu schieben oder die Spule zu drehen. Wenn ein Strom I quer zu B fließt, wirkt eine Gegenkraft $F = IBd$ auf das Fluid. Um dieses mit der Geschwindigkeit v durchzuschieben, braucht man die mechanische Leistung

$$P_{\text{m}} = Fv = IBdv = IU_0 .$$

Die nutzbare elektrische Leistung ist

$$P_{\text{el}} = IU = I(U_0 - R_i I) ,$$

der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_{\text{el}}}{P_{\text{m}}} = 1 - \frac{R_i I}{U_0} .$$

Die lineare $U(I)$ -Kennlinie des MHD-Generators lässt sich rein mathematisch auch in den Bereich negativer Spannungen fortsetzen. Das bedeutet, dass man eine Spannung an die Elektroden legt, statt eine abzugreifen, und zwar in umgekehrtem Sinn. Dann investiert man elektrische Leistung $P_{el} = UI$ (deren Vorzeichen kehrt sich mit dem von U um), und gewinnt mechanische Energie: Die Lorentz-Kraft schiebt das Fluid vorwärts. Stünde dem kein Strömungswiderstand entgegen, würde das Fluid so schnell strömen, dass Kräftefreiheit herrscht. Da B noch vorhanden ist, muss dann $I = 0$ sein. Das ist der Fall, wenn angelegte und generierte Spannung einander kompensieren, d. h. bei $U = Bdv_0$. Die Leerlaufgeschwindigkeit ist

$$v_0 = \frac{U}{Bd}.$$

Wenn die Antriebskraft F verlangt wird, muss die Gegenspannung U_g kleiner sein als die angelegte, damit ein Strom $I = (U - U_g)/R_i$ fließt. Da $U_g = Bdv$ ist, ergibt sich eine $F(v)$ -Kennlinie

$$F = \frac{(U - Bdv)Bd}{R_i}. \tag{7.35}$$

In diesem Bereich ist der MHD-Generator zum **Linearmotor** geworden. (7.35) ist die **Motorkennlinie**. Ganz allgemein lässt sich jeder Generator auch als Motor benutzen und umgekehrt. Ein rotierender Motor wird natürlich durch eine $T(\omega)$ -Kennlinie beschrieben (T : Drehmoment; Abschn. 7.3.10).

7.3.2 Effektivwerte von Strom und Spannung

Was meint man eigentlich, wenn man sagt, eine Wechselspannung sei 220 V, obwohl sich doch der momentane Wert der Spannung ständig ändert? Man vergleicht mit einer Gleichspannung, an der ein Verbraucher die gleiche Leistung aufnehmen würde. Natürlich muss dies ein ohmscher Verbraucher sein, denn durch einen Kondensator würde auf die Dauer gar kein Gleichstrom fließen, durch eine ideale Spule unendlich viel. Außerdem verbrauchen Kondensator und Spule aus dem Wechselstromnetz gar keine Leistung (Abschn. 7.3.3).

Durch den Widerstand R , an dem die Spannung $U = U_0 \sin \omega t$ liegt, fließt der Strom $I = U_0 R^{-1} \sin \omega t$, es wird die Leistung

$$P = UI = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t$$

umgesetzt. Den Benutzer interessiert nur der zeitliche Mittelwert dieser Leistung. Für die Funktion $\sin^2 \omega t$ liest man aus Abb. 7.39 oder aus der Darstellung $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t$ einen Mittelwert $\frac{1}{2}$ ab, also

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R}.$$

Die Gleichspannung, die dieselbe Leistung umsetzt, ergibt sich aus $P = U_{\text{eff}}^2/R = U_0^2/2R$ zu

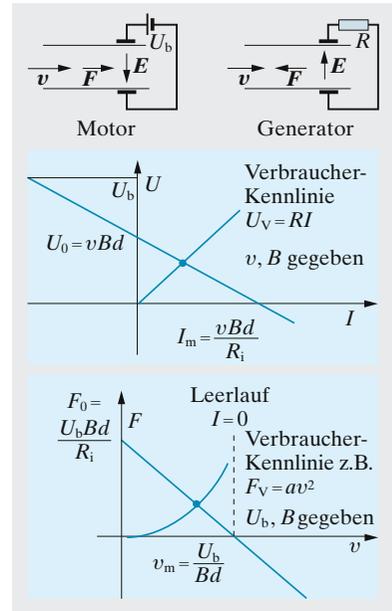


Abb. 7.38. Strom-Spannungs-Kennlinie und Kraft-Geschwindigkeits-Kennlinie einer magnetohydrodynamischen Maschine im Motor- bzw. Generatorbetrieb. Für den Generator ist ein Verbraucher mit linearer Lastkennlinie vorausgesetzt, für den Motor ein Verbraucher mit quadratischer Kennlinie $F_V = av^2$. Der Arbeitspunkt, der Schnittpunkt der beiden Kennlinien, ist stabil, denn jede Abweichung bildet sich von selbst zurück (Abschn. 7.3.10a)

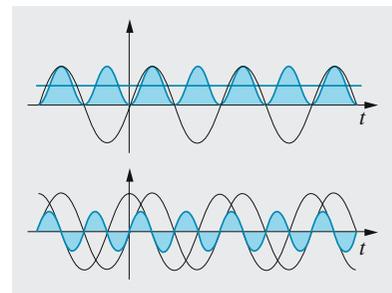


Abb. 7.39. Der Mittelwert von $\sin^2 \omega t$ ist $\frac{1}{2}$, der Mittelwert von $\sin \omega t \cos \omega t$ ist 0

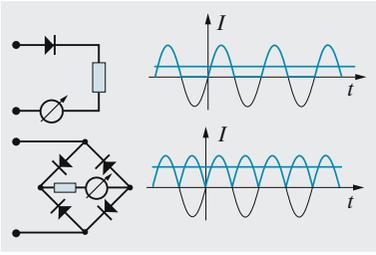


Abb. 7.40. Einweggleichrichter und Doppelweggleichrichter (Graetz-Schaltung). Wie groß sind die Mittelwerte der Ströme, wie groß sind die Mittelwerte ihrer Leistungen?

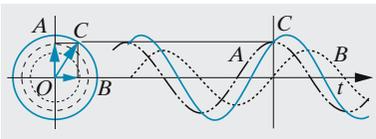


Abb. 7.41. Die Addition zweier sinusförmiger Vorgänge gleicher Frequenz, aber verschiedener Amplitude und Phase ist im Zeigerdiagramm viel einfacher

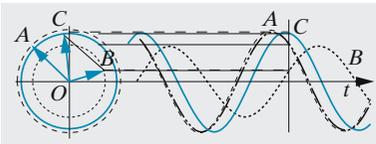


Abb. 7.42. Die Zeigermethode funktioniert auch bei beliebiger Phasenverschiebung. Die Summenamplitude ist keineswegs immer größer als die Teilamplituden

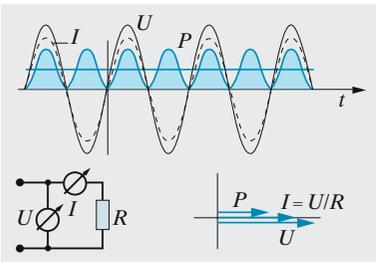


Abb. 7.43. Strom, Spannung und Leistung für einen ohmschen Verbraucher. Die Leistung ist immer positiv: Reine Wirkleistung. (—): U , (---): I , (—): P

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (7.36)$$

Eine Wechselspannung mit $U_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$ hat also die Scheitelspannung oder Amplitude $U_0 = U_{\text{eff}}\sqrt{2} = 311 \text{ V}$. Für Wechselspannungen, die anderen als sinusförmigen Verlauf haben, gelten andere Zusammenhänge zwischen Scheitelspannung und **Effektivspannung**. Zum Beispiel gilt für eine Folge von Rechteckimpulsen, die abwechselnd ins Positive und ins Negative gehen, $U_{\text{eff}} = U_0$.

7.3.3 Wechselstromwiderstände

Wir entwickeln jetzt Methoden, um Schaltungen bestehend aus Spannungsquellen, Widerständen, Kondensatoren und Spulen zu analysieren. Das Ziel ist, die Zusammenhänge zwischen Spannungen, Strömen und Leistungen zu ermitteln. Grundregeln sind das ohmsche Gesetz und die Kirchhoff-Regeln (Abschn. 6.3.1). Diese gelten auch für Wechselstrom, und zwar für die Momentanwerte von Strom und Spannung und damit auch für die Effektivwerte. In beiden Regeln handelt es sich darum, Ströme oder Spannungen gleicher Frequenz, aber verschiedener Amplituden und Phasen zu addieren, und zwar addieren sich nach der Knotenregel die Ströme durch parallel geschaltete Elemente, nach der Maschenregel die Spannungen an reihengeschalteten Elementen. Eigens um diese Addition zu erleichtern, hat man die **komplexe Rechnung** oder die **Zeigerdarstellung** eingeführt. Rechnerische oder graphische Addition mehrerer Sinusfunktionen mit verschiedenen Amplituden und Phasen ist nämlich äußerst umständlich. Wir nutzen die Tatsache aus, dass eine Sinusfunktion nur eine Komponente einer Kreisbewegung darstellt. Betrachten wir z. B. nur die waagerechte Komponente, dann ist $x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ darzustellen durch die Kreisbewegung eines Punktes A auf dem Radius x_0 , wobei für $t = 0$ der Punkt A schon in der Winkelstellung φ ist. Solche Kreisbewegungen lassen sich äußerst einfach zusammensetzen. Wenn A mit dem Radius x_1 und der Phase φ_1 umläuft, B mit x_2 und φ_2 , zeichne man einen Punkt C auf die Drehscheibe, der das Parallelogramm $OABC$ schließt. Wie man aus Abb. 7.41 oder 7.42 abliest, ist die waagerechte (oder auch die senkrechte) Auslenkung von C immer gleich der Summe der Auslenkungen von A und B , nicht nur für die dargestellte Stellung bei $t = 0$, sondern für alle Zeiten. Das ist die Grundlage der **Zeigerdarstellung**: Man fasst OA und OB sowie ihre Summe OC als Momentaufnahmen für $t = 0$ für zwei-dimensionale Vektoren auf, die sich mit der Kreisfrequenz ω drehen. Ebenso gut kann man die Zeiger als graphische Darstellung von **komplexen Zahlen** wie $z_1 = x_1 e^{i(\omega t + \varphi)}$ auffassen, wobei immer nur der Realteil oder die waagerechte Komponente den wirklichen Vorgang beschreibt.

Wir ermitteln jetzt die Zeiger für die Ströme, die durch die drei Grundelemente Widerstand, Spule, Kondensator fließen, wobei wir immer von der Spannung $U = U_0 \cos \omega t$ ausgehen, dargestellt durch einen Zeiger mit der Länge U_0 nach rechts. Für den ohmschen Widerstand ist $I = U/R$, also liegt der Stromzeiger parallel zum Spannungszeiger und hat die Länge

$I_0 = U_0/R$. Der Strom durch die Spule stellt sich so ein, dass die selbst-induzierte Gegenspannung $-L\dot{I}$ entgegengesetzt gleich der angelegten Spannung U wird, also $L\dot{I} = U$. Für einen sinusförmigen Wechselstrom I bedeutet zeitliche Ableitung einfach Multiplikation mit ω und Phasenverschiebung um $\pi/2$ vorwärts. Der I -Zeiger liegt also um $\pi/2$ rückwärts gegen den U -Zeiger verdreht und hat die Länge $I_0 = U_0/(\omega L)$. Bei einem Kondensator ist die Spannung U auch momentan proportional zur Ladung: $U = Q/C$. Das folgt einfach aus den Grundgesetzen des elektrischen Feldes (Satz von Gauß, (6.9)). Der Strom ist die Ableitung der Ladung: $I = \dot{Q}$, also $I = C\dot{U}$. Bei einer Sinusspannung ist \dot{U} um $\pi/2$ gegen U vorwärts gedreht und hat die Länge ωU_0 , also ist der I -Zeiger ebenfalls um $\pi/2$ vorwärts gedreht und hat die Länge $I_0 = \omega C U_0$.

Wie immer bezeichnen wir als **Widerstand** den Faktor, mit dem man den Strom durch ein Bauteil multiplizieren muss, um die angelegte Spannung zu erhalten. Bei Spule und Kondensator ändert sich durch diese Operation nicht nur die Amplitude, sondern auch die Phase. Nach der Definition der komplexen Multiplikation sind ihre Widerstände also komplex, und zwar hier speziell rein imaginär, weil es sich um eine $\pi/2$ -Drehung handelt. Multiplikation mit i dreht ja um $\pi/2$, mit $-i$ um $-\pi/2$. Wir erhalten für

	Widerstand Z	Leitwert Y	
ohmscher Widerstand $U = RI$	R	$1/R$	(7.37)
Spule $U = L\dot{I} = i\omega LI$	$i\omega L$	$1/(i\omega L)$	
Kondensator $I = C\dot{U} = i\omega CU$	$1/(i\omega C)$	$i\omega C$	

Der **Leitwert** Y ist der Kehrwert des Widerstandes Z , auch im Komplexen:

$$Y = \frac{1}{Z}. \tag{7.37'}$$

Jetzt können wir im Prinzip jede Schaltung analysieren. Wo wir auf einen Teil eines Netzwerkes stoßen, der eine Reihenschaltung darstellt, addieren wir die Spannungen, d. h. die Widerstände (der Strom ist ja in der Reihenschaltung überall gleich). Für eine Parallelschaltung addieren sich die Ströme, d. h. die Leitwerte, denn die Spannungen sind dort an allen Elementen gleich. In Abb. 7.46 sind die Ströme $I_R = U/R$ und $I_C = U i\omega C$ zu addieren zum Gesamtstrom mit der Amplitude

$$I_0 = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = U_0 \sqrt{R^{-2} + (\omega C)^2}.$$

Die Leitwerte sind einfach geometrisch zu addieren, der Strom hat gegen die Spannung die **Phasenverschiebung** φ mit

$$\tan \varphi = \omega C R.$$

In einer Reihenschaltung (Abb. 7.47) gehen wir am besten vom Strom I aus (waagerechter Zeiger) und konstruieren dazu die Spannungsabfälle $U_R = RI$ und $U_L = i\omega LI$, die sich zur Gesamtspannung U zusammensetzen. Deren Amplitude ist $U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ (geometrische

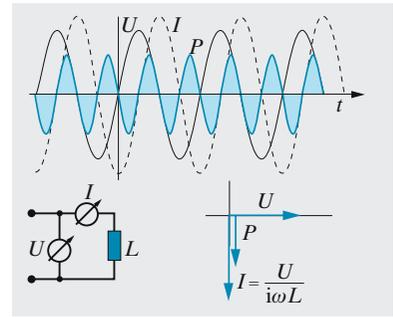


Abb. 7.44. Strom, Spannung und Leistung für eine Spule. Obwohl Strom fließt, ist der Mittelwert der Leistung Null: Reine (induktive) Blindleistung

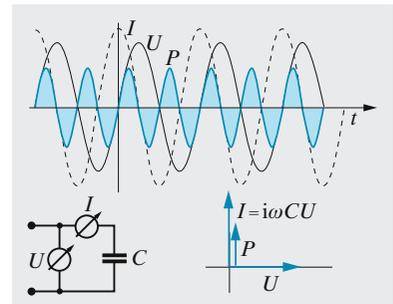


Abb. 7.45. Strom, Spannung und Leistung für einen Kondensator. Obwohl Strom fließt, ist der Mittelwert der Leistung Null: Reine kapazitive Blindleistung

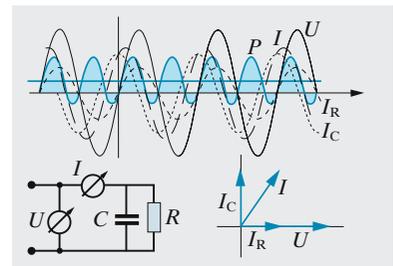


Abb. 7.46. Bei der Parallelschaltung ist es auch zeichnerisch von Vorteil, vom U -Pfeil auszugehen. Der Mittelwert der Leistung (die Wirkleistung) ergibt sich dann aus einem zum I -Diagramm parallelen Zeigerdiagramm, ebenso wie in Abb. 7.47

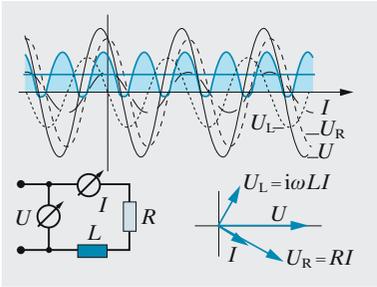


Abb. 7.47. Je komplizierter die Schaltung wird, desto offensichtlicher wird der Vorteil des Zeigerdiagramms, das hier so angelegt ist, dass der U -Zeiger nach rechts zeigt. Zeichnerisch einfacher wäre es für die Serienschaltung gewesen, vom Strom auszugehen und ihn nach rechts zeigen zu lassen. U ergibt sich dann von selbst durch Addition

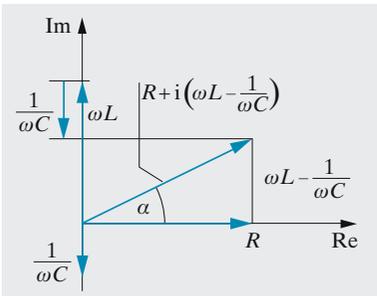


Abb. 7.48. Komplexer Widerstandsoperator (hier für eine Reihenschaltung von R , L und C)

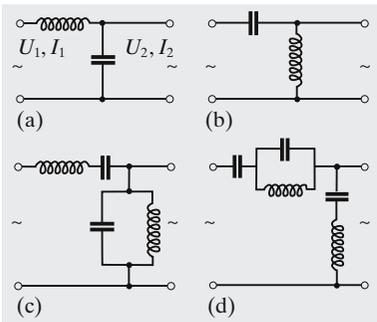


Abb. 7.49a–d. Filterelemente für Wechselspannungen und -ströme. (a) Tiefpass, (b) Hochpass, (c) Bandpass, (d) Bandsperre

Addition der Widerstände), ihre Phasenverschiebung $-\varphi$ gegen den Strom folgt aus $\tan \varphi = -\omega L/R$ (negativ, wenn man wie oben mit φ die Phasenverschiebung des Stromes gegen die Spannung meint).

Für größere Schaltungen kann man Gesamtwiderstand und Gesamtleitwert schrittweise aufbauen, rechnerisch durch Addition der komplexen Werte und Kehrwertbildung, viel übersichtlicher, aber graphisch durch Zeigeraddition und Übergang zwischen Widerstand und Leitwert durch **komplexe Inversion** (Abschn. 7.3.4).

Den so bestimmten komplexen Widerstand nennt man auch **Scheinwiderstand**. Sein Realteil, der die Komponente der Spannung angibt, die mit dem Strom phasengleich ist, heißt **Wirkwiderstand**, sein Imaginärteil **Blindwiderstand**. Für jede Wechselstromgröße kann man Schein-, Wirk- und Blindwert definieren, immer in Bezug auf eine als reell zugrunde gelegte Größe. Wenn man z. B. von der Spannung ausgeht, unterscheidet man einen Scheinstrom (sein Betrag ist der Gesamtstrom, sein Winkel gibt die Phasenlage an), einen Wirkstrom (den mit der Spannung phasengleichen Anteil) und einen Blindstrom (den um $\pi/2$ gegen die Spannung verschobenen Anteil). Diese Aufspaltung ist für die Bestimmung der Leistung eines Wechselstroms wichtig. Ein *Wirkstrom* ergibt, multipliziert mit der phasengleichen Spannung, in jedem Augenblick eine positive Leistung, also auch eine positive mittlere Leistung, die sich einfach als Produkt der Effektivwerte ergibt: $P = UI_W$. Nach Abb. 7.46 oder 7.47 ist aber $I_W = I_S \cos \varphi$, wenn I_S der wirklich fließende „Schein“strom ist; also ist die Wechselstromleistung (**Wirkleistung**)

$$P_W = UI \cos \varphi \quad (7.38)$$

Ein Blindstrom ergibt zwar während zweier Viertelperioden eine positive Leistung, aber in den nächsten beiden Viertelperioden eine ebenso große negative Leistung. Spule oder Kondensator entnehmen also der Spannungsquelle auf die Dauer keine Leistung, sondern was sie ihr in $\frac{1}{100}$ s entnehmen, erstatten sie ihr in der nächsten $\frac{1}{100}$ s wieder exakt zurück. Ein reiner Blindstrom erzeugt keine echte Leistung, keine Wirkleistung.

Im allgemeinen Fall setzt sich der Strom aus Wirk- und Blindstrom zusammen. Nur der Wirkstrom erzeugt echte physikalische Leistung. Trotzdem ist es rechnerisch günstig, auch bei der Leistung einen Blindanteil zu unterscheiden, der sich als

$$P_B = UI_B = UI \sin \varphi \quad (7.38')$$

ergibt und sich mit der Wirkleistung zur komplexen **Scheinleistung** zusammensetzt. Aus den Effektivwerten von Strom I und Spannung U , die mit einem Ampere- bzw. Voltmeter einzeln gemessen werden, ergeben sich die drei Leistungen wie folgt:

$$P_S = UI, \quad P_W = UI \cos \varphi, \quad P_B = UI \sin \varphi.$$

$\cos \varphi$ heißt auch **Leistungsfaktor**. Die Wirkleistung ist also nicht mit Volt- und Amperemeter bestimmbar. Ein **Wattmeter** zeigt dank einer Kopplung zwischen Strom- und Spannungsmessung (Abschn. 7.3.5) die Wirkleistung direkt an. Bei etwas anderer Schaltung gibt ein solches Gerät die Blindleistung direkt an, ebenso gibt es $\cos \varphi$ -Messer.

Spule oder Kondensator verzehren keine Wirkleistung, aber induktive bzw. kapazitive Blindleistung. Diese erfordert vom Elektrizitätswerk keinen zusätzlichen Aufwand an Brennstoff und wird auch von den üblichen Zählern nicht registriert, die nur Wirkleistung messen. Trotzdem belastet ein **Blindstrom** indirekt den Generator und das Zuleitungsnetz, und zwar wegen deren Innenwiderstand. Der Spannungsabfall, der in Generatorwicklungen und Zuleitungen erfolgt, hängt nämlich vom Gesamtstrom, also vom Scheinstrom ab: $\Delta U = R_i I_S$. Um dem Verbraucher z. B. die verlangten 220 V liefern zu können, muss also das Werk eine um ΔU höhere Spannung erzeugen. Deswegen wird für Großverbraucher elektrischer Energie ein höherer Tarif berechnet, wenn ihr $\cos \varphi$ zu gering, also φ zu hoch ist. Der Verbraucher sollte seine Blindleistung **kompensieren**. Da Blindleistung meist in Motoren entsteht, die Spulen enthalten (induktive als positiv definierte Blindleistung), benutzt man zur Kompensation Kondensatoren, die möglichst gleich große kapazitive (negative) Blindleistung entnehmen. Eine solche Blindleistungskompensation wird in Abschn. 7.3.4 durchgerechnet.

✕ Beispiel...

Konstruieren Sie einen möglichst einfachen Phasenschieber, der die Phase einer Wechselspannung um $\pm\pi/2$ verschiebt. Wie groß ist der Spannungsverlust?

Man schalte einen Widerstand R und einen Kondensator C hintereinander und lege die Spannung U_1 mit der Kreisfrequenz ω an. Wenn $1/(\omega C) \gg R$, fließt der Strom $I \approx i\omega C U_1$, und an R kann man die Spannung $U_2 = IR \approx i\omega C R U_1$ abgreifen, die gegen U_1 um $\pi/2$ vorausläuft. Eine Spule statt des Kondensators mit $\omega L \gg R$ liefert $U_2 = U_1 R / (i\omega L)$ (Phasenverschiebung $-\pi/2$). In beiden Fällen tritt ein Spannungsverlust um den Faktor $\omega C R$ bzw. $R/(\omega L)$ auf.

7.3.4 Zweipole, Ortskurven, Ersatzschaltbilder

Alle bisher behandelten Schaltungen sind einfache Beispiele für Zweipole. Allgemein ist ein **Zweipol** eine Schaltung aus beliebig vielen Widerständen, Spulen und Kondensatoren, teils hintereinander, teils parallel, die zwei Eingangsklemmen besitzt, an die man eine Spannung, meist Wechselspannung, legen kann. Diese Spannung ist gegeben durch Amplitude und Phase, zusammengefasst zu einer komplexen Amplitude $U_0 = U_0 e^{i\delta}$. Das Verhalten des Zweipols ist bekannt, wenn man weiß, welchen Strom I diese Spannung durch die Schaltung treibt, d. h. welche Amplitude I_0 zu U_0 gehört.

Wir können zunächst feststellen, dass sich solche Schaltungen *additiv* verhalten: Wenn die Spannung U_1 den Strom I_1 treibt, die Spannung U_2 den Strom I_2 , dann treibt die Spannung $U_1 + U_2$ den Strom $I_1 + I_2$ (komplexe Addition). Speziell: Wenn man die Spannung verdoppelt, fließt der doppelte Strom. Der Zweipol ist daher vollständig gekennzeichnet durch seinen komplexen Widerstand Z oder den komplexen Leitwert $Y = Z^{-1}$, wobei $U = ZI$ oder $I = YU$.

Oft muss man analysieren, wie sich das Verhalten einer Schaltung ändert, wenn man den *Betrag eines* Schaltelementes variiert. Dies gelingt rein graphisch besonders elegant und anschaulich nach der Methode der **Ortskurven**. Der Widerstandsbeitrag des variablen Elements heiße v . Wir zeigen zunächst: Wenn v variiert,

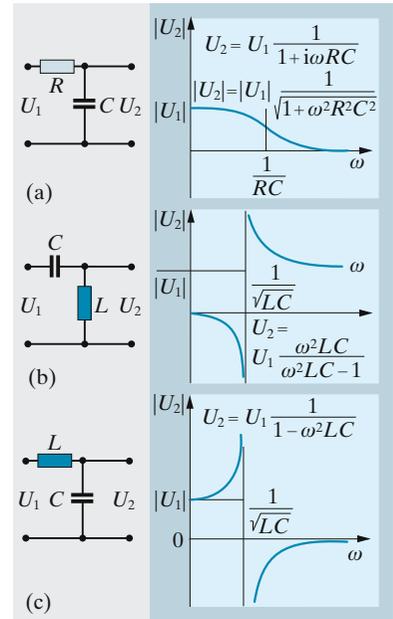


Abb. 7.50a–c. Drei interessante **Vierpole** und ihre Spannungsübertragung. (a) kann z. B. eine Leitung darstellen. Die Kapazität zwischen Hin- und Rückleitung ist nur für $\omega \ll 1/(RC)$ zu vernachlässigen. Bei Hochfrequenz und z. B. in sehr schnellen Computern lässt die Leitung praktisch nichts mehr durch, weil sich die Kapazität nicht mehr aufladen kann. **Tiefpass** (c) und **Hochpass** (b) liefern nahe $\omega = 1/\sqrt{LC}$ rechts mehr Spannung, als man links hineinsteckt (Resonanz)

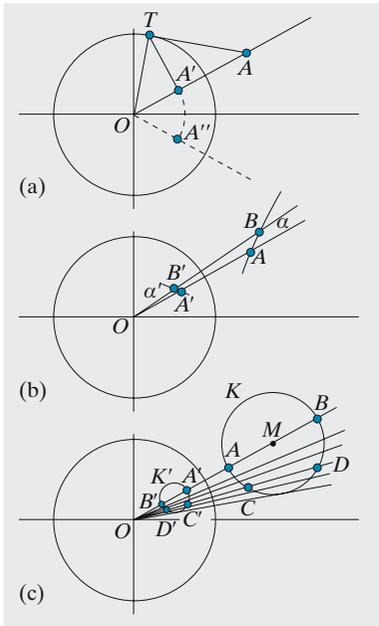


Abb. 7.51a–c. (a) Inversion (Spiegelung am Einheitskreis). Die Tangentenkonstruktion liefert den Bildpunkt A' von A mit $OA' = 1/OA$, denn die Dreiecke OTA' und OAT sind ähnlich, also $OA'/OT = OT/OA$ ($OT = 1$). Bei der komplexen Inversion wird A' außerdem noch an der reellen Achse gespiegelt und so in A'' übergeführt. (b) Die Inversion ist winkeltreu. Es genügt, Erhaltung des Winkels gegen einen Radius zu beweisen, denn jeder beliebige Winkel lässt sich aus zwei Winkeln gegen Radien zusammensetzen. AB sei sehr klein. Die Dreiecke $OA'B'$ und OBA sind ähnlich, denn $OA'/OA = OB'/OB = 1$, also $OA'/OB' = OB/OA$. Es folgt $\alpha = \alpha'$, aber der Drehsinn beider Winkel ist umgekehrt. (c) Die Inversion ist kreistreu. K' sei das gesuchte Bild eines Kreises K . Wir ziehen zunächst den Radius OM . Drehen wir diesen Radius langsam, dann wächst K' aus den Punkten A' und B' heraus, indem man jedes Mal den Winkel, den K mit diesem Radius bildet, überträgt. K' kann also nichts anderes sein als ein ähnliches Bild von K . Der Vergrößerungsfaktor ist OB'/OA . Wenn $OA = 0$ (K geht durch O), wird K' unendlich aufgebläht, also eine Gerade

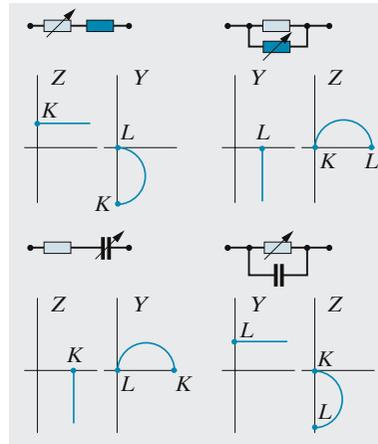


Abb. 7.52. Ortskurven einiger einfacher Schaltungen. Bei der Serienschaltung wird die Z -Ortskurve ein Geradenstück, die Y -Kurve ein Kreisbogen, bei der Parallelschaltung ist es umgekehrt. Kurzschlusspunkt K und Leerlaufpunkt L sind eingezeichnet, sofern sie nicht im Unendlichen liegen. Bei Kurzschluss sind R bzw. L auf 0 eingestellt, bei Leerlauf auf ∞ . Beim Kondensator ist es umgekehrt

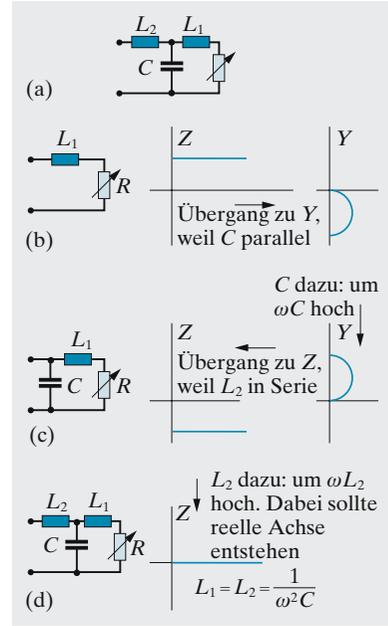


Abb. 7.53a–d. Graphische Analyse einer **Blindstromkompensation**

beschreibt der komplexe Widerstand der ganzen Schaltung in der komplexen Ebene immer einen *Kreisbogen*, im Grenzfall einen Bogen mit dem Radius ∞ , also ein Geradenstück. Der Beweis ist sehr einfach durch vollständige Induktion. Zunächst ist klar, dass ein einzelnes Element (R , L oder C) die behauptete Eigenschaft hat: Wenn sich sein Widerstandsbeitrag von 0 bis ∞ ändert, beschreibt Z eine von 0 ausgehende Halbgerade (positiv reell, positiv imaginär, negativ imaginär für R , L bzw. C). Viele Schaltungen S lassen sich dann schrittweise aufbauen, indem man entweder hinter den bereits bestehenden Teil S' der Schaltung oder parallel dazu ein weiteres Element R , L oder C , allgemein einen Widerstand Z legt. Bei Hintereinanderschaltung von S' und Z addiert sich einfach Z zur Ortskurve der Schaltung S' , d. h. diese ist um den Vektor Z zu verschieben. Bei Parallelschaltung des neuen Elements muss man zu den Leitwerten übergehen, bevor man addieren kann. Wenn die Schaltung S' den komplexen Widerstand $Z' = Z'_0 e^{i\delta}$ hat, ergibt sich ihr Leitwert $Y' = Y'_0 e^{-i\delta}$ daraus graphisch durch **Inversion**, d. h. durch Spiegelung am Einheitskreis und an der reellen Achse (Abb. 7.51). Diese Operation ist aber kreistreu: Sie führt einen Kreis immer in einen anderen Kreis über. Im Grenzfall wird aus einem Kreis durch 0 eine Gerade, die nicht durch 0 geht, und umgekehrt.

Die Ortskurve der ganzen Schaltung ergibt sich so durch endlich viele Inversionen und Verschiebungen aus der Halbgeraden, die für ein einziges Schaltelement gilt. Sie bleibt daher immer ein Kreisbogen oder ein Geradenstück (anders bei ω -Änderung). Die Endpunkte dieses Kreisbogens entsprechen offenbar den Beträgen $v = 0$ bzw. $v = \infty$ für den Widerstand des variablen Elements, $v = 0$ heißt der **Kurzschlussfall**, $v = \infty$ der **Leerlauf** in Bezug auf dieses Element.

Als Beispiel analysieren wir die Schaltung Abb. 7.53 und fragen speziell, ob es möglich ist, L_1 , L_2 und C so zu dimensionieren, dass Strom und Spannung immer in Phase sind, unabhängig vom Wert von R . Der Blindstrom (Imaginärteil von I , falls U als reell betrachtet) soll also Null sein. R könnte z. B. eine Leuchtstofflampe darstellen, deren fallende Kennlinie durch die Drosselspulen L_2 bzw. L_1 stabilisiert wird (Aufgabe 8.3.7). Man kann das Problem rechnerisch lösen, aber auch zeichnerisch. Dazu fängt man ganz „innen“ in der Schaltung an (Abb. 7.53b). Dort sitzt eine Serienschaltung von L_1 und R mit einer Halbgeraden als Z -Bild. Parallel dazu liegt C . Man transformiert auf Y (Inversion) und schiebt den entstehenden Halbkreis um $i\omega C$ aufwärts. Da L_2 hierzu in Serie liegt, muss man wieder auf Z transformieren und um $i\omega L_2$ verschieben. Zum Schluss soll hierbei die reelle Achse herauskommen oder ein Stück davon, denn Phasengleichheit zwischen U und I bedeutet reelles Z . Dies ist genau dann der Fall, wenn $\omega L_1 = \omega L_2 = 1/(\omega C)$. Dieses Verfahren zur **Blindstromkompensation** wird nicht nur bei Leuchtstofflampen, sondern auch bei Motoren oder Hochfrequenzleitungen angewandt, deren Verhalten ebenfalls durch das Ersatzschaltbild Abb. 7.53 dargestellt wird.

Die Eleganz des Ortskurvenverfahrens hat Anlass gegeben, dass man auch für Schaltelemente, die nicht direkt aus R , L und C zusammengesetzt sind, **Ersatzschaltbilder** konstruiert, z. B. für Leitungen, Transformatoren, Transistoren usw. Beispiele bringt Abschn. 7.3.8.

Die Methode der **Kreisspiegelung** ist auch sonst von erstaunlicher mathematischer Kraft. Wir beweisen: Wenn man irgendeine Ladungsverteilung an einem Kreis spiegelt, geht bei dieser Spiegelung auch das Feldlinienbild der ursprünglichen in das der gespiegelten Ladungsverteilung über. Dazu brauchen wir nur die Winkeltreue der Kreisspiegelung (Abb. 7.51) und den Satz von Gauß. Wir können das Feld vollständig kennzeichnen, wenn wir die Flüsse Φ_E des E -Feldes durch alle denkbaren geschlossenen Flächen angeben. Ein solcher Fluss durch eine Fläche A wird aber bei der Kreisspiegelung nicht geändert. Wenn A in eine Fläche A' transformiert wird, geht das Bild jeder Feldlinie, die durch A tritt, auch durch A' , und zwar in beiden Fällen *unter dem gleichen Winkel*. Also treten durch A und A' die gleichen Flüsse. Der Satz von Gauß $\Phi_E = Q/\epsilon_0$ ist auch für das transformierte Feld erfüllt, d. h. dieses ist das richtige Feld der transformierten Ladungsverteilung.

Die Feldlinien zweier paralleler Drähte mit entgegengesetzter Ladung sehen wie Kreise aus (Abb. 6.10); sind sie wirklich Kreise? Die Kreisspiegelung Abb. 7.54 verwandelt den einen Draht in eine unendlich ferne „Erde“. Unter diesen Umständen erzeugt der andere Draht radiale, also gerade Feldlinien. Durch Rücktransformation (erneute Spiegelung am gleichen Kreis) müssen diese Geraden in Kreise übergehen, was zu beweisen war. Sind die Potentialflächen in Abb. 6.10 auch Kreise, besser Kreiszyylinderflächen? Ja, denn nach der Spiegelung umgeben sie den einen Draht bestimmt als konzentrische Kreiszyylinder, also müssen sie auch vorher Kreiszyylinder gewesen sein, wenn auch keine konzentrischen.

Auch die Magnetfeldlinien um zwei parallele, von entgegengesetzten Strömen durchflossene Drähte sehen wie Kreise aus (Abb. 6.121). Dass sie es sind, sieht man jetzt mittels Abschn. 6.8.1 oder 6.8.2 sofort: Im Laborsystem sind die Drähte neutral, in jedem dazu bewegten System geladen. Ihr E -Feld haben wir eben ermittelt. Bei der Bewegung wächst genau senkrecht aus dem E -Feld ein B -Feld heraus und umgekehrt. Das ist dieselbe Richtungsbeziehung wie zwischen E -Linien und Potentialflächen. Also sehen die B -Linien genau aus wie die Schnitte der Potentialflächen mit der Zeichenebene, sie sind also auch Kreise.

Die Kreisspiegelung ist nur ein Beispiel für eine **konforme Abbildung**, d. h. die Abbildung durch eine analytische Funktion in der komplexen Ebene. Jede solche Abbildung ist winkeltreu und führt daher ein wirkliches Feld in ein wirkliches Feld über, wenn auch nicht immer Kreise in Kreise. Unsere Beispiele zeigen, wieso

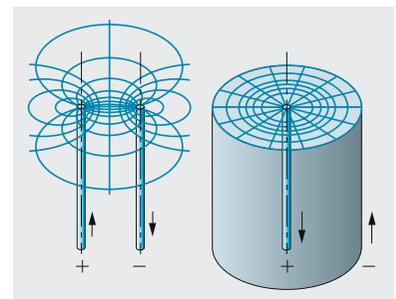


Abb. 7.54. Kreisspiegelung führt einen Draht in einen unendlich fernen Zylinder über. Die Feldlinien werden dann Gerade, die Potentialflächen Kreiszyylinder. Wegen der Kreistreue der Inversion handelt es sich auch links um Kreise bzw. Kreiszyylinder

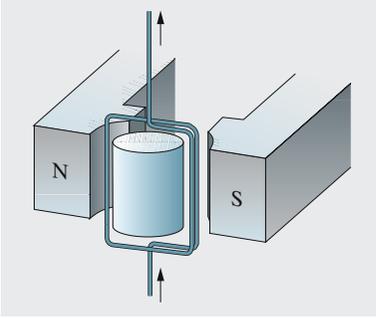


Abb. 7.55. Drehspulamperemeter (schematisch)

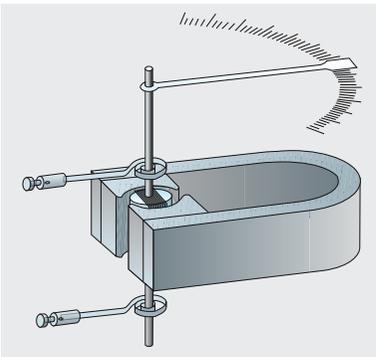


Abb. 7.56. Drehspulamperemeter

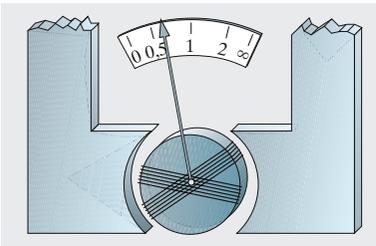


Abb. 7.57. Kreuzspulmesswerk. Die Drehspule hat keine Rückstellfeder, sondern stellt sich mit dem magnetischen Gesamtmoment (Vektorsumme von $I_i A_i$, wo A_i die Normalvektoren der Spulen sind) der beiden Spulen in die Feldrichtung. Dabei gewinnt die Spule mit dem größeren Strom. Die Skala gibt das Verhältnis der beiden Ströme

die konforme Abbildung zu einem der wichtigsten Werkzeuge der höheren Potentialtheorie und damit auch der Theorie von Strömung, Wärmeleitung, Diffusion usw. geworden ist. Leider funktionieren diese eleganten Methoden nur bei Problemen, die sich in einer Ebene darstellen lassen.

7.3.5 Messinstrumente für elektrische Größen

Die Messung vieler, auch nichtelektrischer Größen wird auf eine Strommessung zurückgeführt. Dazu dienen Amperemeter, die bei hoher Empfindlichkeit Galvanometer heißen. **Empfindlichkeit** ist Zeigerausschlag/Strom, streng zu unterscheiden von der **Genauigkeit**, d.h. der reziproken relativen Abweichung zwischen angezeigtem und wahren Strom.

a) Drehspulamperemeter. Im Feld eines Permanentmagneten kann sich die Messspule, durchflossen vom zu messenden Strom, drehen. Das Feld im engen Spalt zwischen den zylindrisch ausgefrästen Polschuhen und dem ebenfalls zylindrischen eisernen Spulenkern ist überall radial. Alle Drähte der Messspule erfahren also, wenn der Strom I durchfließt, die gleiche Lorentz-Kraft $F = I l B$. Insgesamt ergibt sich ein Drehmoment $T = 2N I l B r$ (r : Spulradius, l : Spulenhöhe, N : Windungszahl). Eine oder zwei Spiralfedern erzeugen ein Rückstellmoment, sodass der Zeigerausschlag proportional zu T , also zum Strom I wird. Die Richtung des Ausschlags wechselt mit der Stromrichtung, man kann also nur Gleichstrom messen; bei Wechselstrom erhält man höchstens eine Zitterbewegung um die mittlere Nulllage. Die Empfindlichkeit geht bis 10^7 mm/A, mit Lichtzeiger oder Drehspiegel 10^{10} mm/A und höher. Die freie Schwingungsfrequenz der Drehspule ist $\omega = \sqrt{D/J}$ (D : Federkonstante, J : Trägheitsmoment); daher haben sehr empfindliche **Galvanometer** mit kleinem D sehr hohe Schwingungsdauern. Bei Stromstößen, die kurz gegen diese Schwingungsdauer sind, gibt der schließlich erreichte Ausschlag nicht das Drehmoment, sondern den Drehimpuls, den die Lorentz-Kraft der Spule erteilt, also das Zeitintegral des Stromes, die transportierte Ladung (**ballistisches Galvanometer**). Die Empfindlichkeit solcher Messwerke ist durch die brownsche Bewegung des Drehspulsystems begrenzt. Beim **Kreuzspul-Messwerk** sitzen zwei getrennte, um etwa 30° verdrehte Messspulen auf dem gleichen Drehrähmchen. Wenn durch beide Spulen der gleiche Strom in den angegebenen Richtungen fließt (Abb. 7.57), stellt sich das Messwerk ein wie gezeichnet. Wenn beide Ströme verschieden sind, ist der Ausschlag aus dieser Nulllage proportional zu I_1/I_2 (**Quotientenmesser**). Schaltet man die eine Spule als Amperemeter, die andere als Voltmeter, ergibt der Quotient direkt den Widerstand (unabhängig von Schwankungen der Batteriespannung, denen das Gerät Abb. 6.62 unterliegt).

b) Elektrodynamisches Messwerk. Der Permanentmagnet ist durch einen Elektromagneten ersetzt. Wenn I_S und I_M die Ströme durch Drehspule und Magnet sind, steigen Drehmoment und Ausschlag wie $I_S B \sim I_S I_M$. Fließt der Messstrom durch beide Spulen ($I_S = I_M$), so ist der Aus-

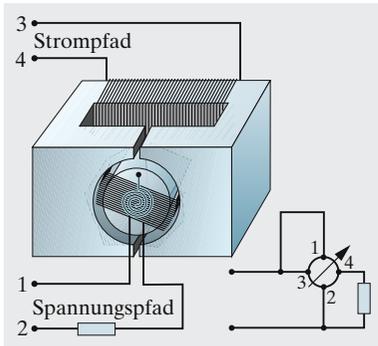


Abb. 7.58. Elektro-dynamisches Messwerk, rechts als Wirkleistungsmesser geschaltet. In einem Blindleistungsmesser ist der große Widerstand links unten durch eine Spule ersetzt

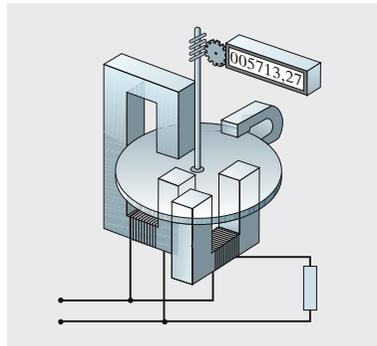


Abb. 7.59. Induktionszähler für Wechselstrom, eigentlich ein gebremster Asynchronmotor (hinten rechts der Bremsmagnet). Der Widerstand unten rechts stellt einen Verbraucher dar. Zeigt der Zähler nur Wirkenergie an? Wenn ja, wie macht er das?

schlag quadratisch und daher für Gleich- wie Wechselstrom geeignet. Bei $I_S \neq I_M$ wirkt das Gerät als **Produktmesser**, z. B. in Analogrechnern. Wichtiger ist die Anwendung als **Wattmeter** (Wirkleistungsmesser): Der Verbrauchersstrom fließt z. B. durch die Feldspule (**Strompfad**), ein der Verbraucherspannung proportionaler Strom durch die Drehspule (**Spannungspfad**). Phasenrichtigkeit erreicht man durch einen hohen Widerstand im Spannungspfad. Der $\cos \varphi$ in der Wirkleistung wird so automatisch mitberücksichtigt (Aufgabe 6.7.4). Ersetzt man den Widerstand durch eine Spule, kann man infolge der $\pi/2$ -Phasenverschiebung die Blindleistung direkt messen.

c) Induktionsmesswerk (Ferraris-Zähler). Dieses arbeitet ebenfalls als Produktmesser und daher als Wattmeter. Eine nichtferromagnetische Scheibe (meist Al) kann sich zwischen den Polen von zwei Elektromagneten drehen, die um etwa 90° gegeneinander versetzt sind. Ein Phasenschieber (Kondensator) sorgt dafür, dass die Ströme in beiden Magneten ebenfalls um 90° gegeneinander phasenverschoben sind. Es entsteht ein magnetisches Drehfeld, das die Scheibe ähnlich wie den Kurzschlussläufer eines Asynchronmotors mitnimmt (Lorentz-Kraft des Feldes der Elektromagnete auf die Wirbelströme in der Scheibe, Abschn. 7.3.10). Schaltet man wieder die eine Magnetspule in den Strompfad, die andere in den Spannungspfad, dann sind Drehmoment und Drehfrequenz der Scheibe proportional $UI \cos \varphi$. Die Anzahl der Drehungen, übertragen auf ein digitales Zählwerk, integriert die Leistung zur verbrauchten Energie. So funktionieren die meisten **kWh-Zähler**.

d) Dreieisen- oder Weicheisen-Messwerk (Abb. 7.60, 7.61). Eisen wird im Feld der stromdurchflossenen Spule magnetisiert und in sie hineinge-

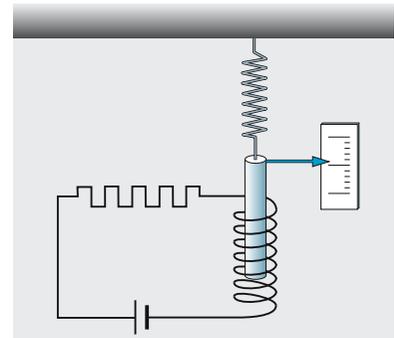


Abb. 7.60. Weicheiseninstrument. Der an einer Feder aufgehängte Eisenstab wird von dem Feld der vom Strom durchflossenen Spule magnetisiert und daher in die Spule hineingezogen

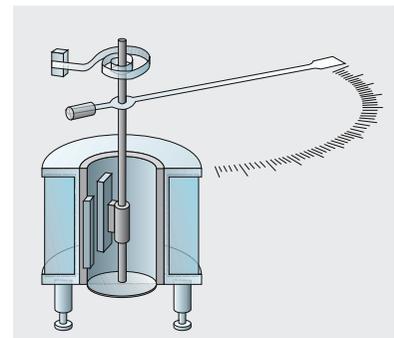


Abb. 7.61. Im Magnetfeld der Spule werden beide Eisenstreifen parallel magnetisiert und stoßen einander ab. Der mit der Achse verbundene Streifen dreht diese dabei

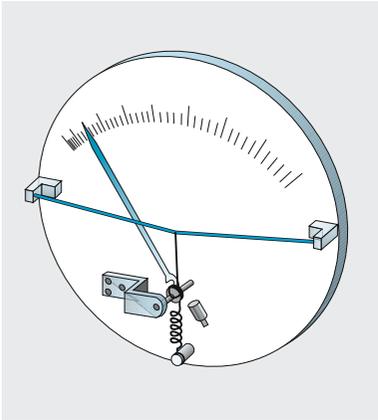


Abb. 7.62. Hitzdrahtamperemeter

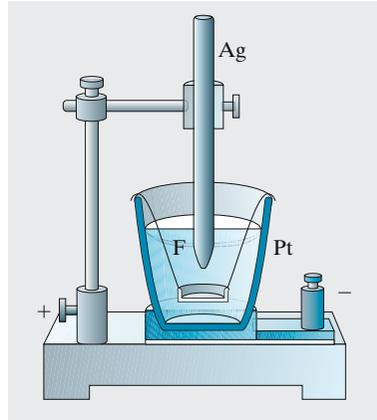


Abb. 7.63. Silbervoltmeter. Bei Durchgang des Stromes scheidet sich auf der Innenfläche des als Kathode dienenden Platintiegels, der die AgNO_3 -Lösung enthält, Silber ab. Das eingehängte Glasschälchen F verhindert, dass der sich bei der Elektrolyse bildende „Anodenschlamm“ in den Tiegel fällt

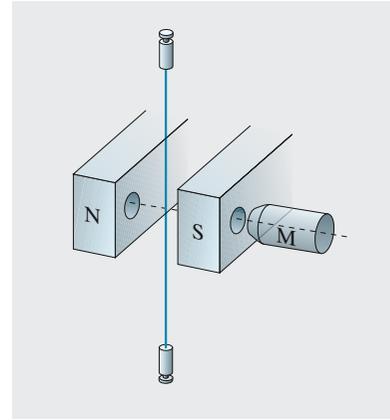


Abb. 7.64. Modell eines Saitengalvanometers

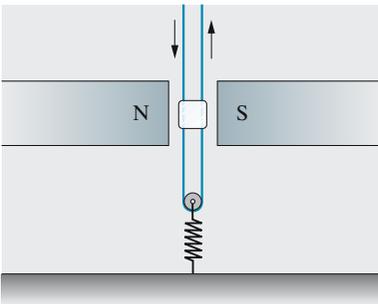


Abb. 7.65. Schleifenoszillograph

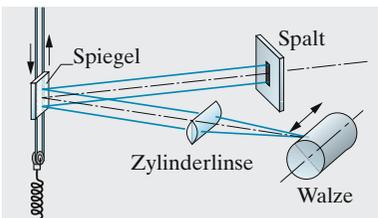


Abb. 7.66. Registriervorrichtung zur Messung der Ausschläge eines Schleifenoszillographen

zogen. Zwei in der Spule gleichsinnig magnetisierte Eisenstreifen stoßen einander ab. Der Ausschlag ist unabhängig von der Stromrichtung. Das Gerät ist daher auch für Wechselstrom geeignet. Es ist robuster, aber weniger stromempfindlich als das Drehspulmesswerk.

e) Hitzdrahtamperemeter (Abb. 7.62). Die thermische Ausdehnung des stromdurchflossenen Drahtes infolge Joule-Erwärmung wird ausgenutzt und daher auch Wechselstrom gemessen.

f) Voltmeter (Abb. 7.63). Es wird direkt die elektrolytische Materialabscheidung, z. B. von Silber aus einer Silbernitratlösung, bestimmt. 1 A scheidet in einer Sekunde 1,118 mg Silber ab (Abschn. 6.4.4). Das Voltmeter misst $\text{Strom} \cdot \text{Zeit}$, ist also eigentlich ein Coulomb-Meter.

g) Saitengalvanometer (Abb. 7.64). Zwischen den Polschuhen eines Permanent- oder Elektromagneten ist der stromführende Draht (oft Platin) von einigen μm Dicke senkrecht zu den Feldlinien gespannt und wird proportional zum Strom seitlich ausgelenkt, was man mit dem Mikroskop *M* konstatieren kann. Saitengalvanometer messen und registrieren rasch veränderliche Ströme, z. B. in **Elektrokardiographen**.

h) Schleifenoszillograph. Zwischen den Polschuhen eines Magneten (Abb. 7.65) ist eine haarnadelförmige Schleife mit einem Spiegelchen angebracht. Licht aus einem Spalt (Abb. 7.66) wird vom Spiegelchen reflektiert und durch eine Zylinderlinse auf der Walze *W* mit dem photographischen Registrierpapier zu einem Lichtpunkt vereinigt. Fließt ein Strom in der angegebenen Richtung, wird der linke Draht nach vorn,

der rechte nach hinten ausgelenkt, der Spiegel wird geschwenkt, der Lichtpunkt wandert nach hinten. Diese Verschiebung ist proportional zum Strom. Zeitlich wechselnde Ströme erzeugen erzwungene Schwingungen der Schleife; damit sie getreu aufgezeichnet werden, muss man im quasistatischen Bereich arbeiten (Abschn. 4.1.3; Eigenfrequenz der Schleife groß gegen Frequenz der Ströme; starke Dämpfung durch Ölfüllung des Schwingsystems). Sehr hohe Frequenzen zeichnet man daher mit **Kathodenstrahl-Oszillographen** auf, d. h. mit einem elektrisch abgelenkten Elektronenstrahl als Zeiger und ohne mechanisch bewegte Teile (Abschn. 8.2.3).

7.3.6 Drehstrom

Ein Generator der Bauart von Abb. 7.37, aber mit drei getrennten, räumlich um 120° versetzten Spulen (Abb. 7.67) erzeugt drei Wechselspannungen, die zeitlich um $\frac{1}{3}$ Periode versetzt sind. Diese drei Spannungen könnte man getrennt durch insgesamt sechs Leitungen zum Verbraucher befördern oder in *verketteter* Form. Die wichtigsten **Verkettungen** sind

Sternschaltung: Vier Leitungen, die Außenleiter R, S, T und der **Mittelpunkts-** oder **Nullleiter** M , der die Spulenden X, Y, Z zusammenfasst;

Dreiecksschaltung: Drei Leiter, bezeichnet als R, S, T .

Wenn in *einer* Spule die Effektivspannung $U = \omega BAN/\sqrt{2}$ generiert wird (N Windungszahl, A Schleifenfläche), ergeben sich die Spannungen zwischen den einzelnen Leitern am einfachsten aus einem Zeigerdiagramm. Bei der Sternschaltung herrscht zwischen M und jedem Außenleiter die Spannung U (bei uns 220 V), dargestellt z. B. durch den Zeiger MR . Zwischen zwei Außenleitern, z. B. R und S liest man trigonometrisch eine Spannung

$$U_{RS} = 2U \sin 60^\circ = U\sqrt{3} \quad (7.39)$$

ab, bei uns 380 V.

Die Drehstromversorgung ist in den meisten Industrieländern eingeführt worden, weil sie folgende Vorteile bietet:

- Geringerer Materialaufwand für die Zuleitungen: Mit vier Kabeln, von denen der Mittelpunktsleiter vielfach sehr dünn gehalten werden kann oder sogar entbehrlich ist, überträgt man ebenso viel Leistung wie mit den sechs ebenso starken Kabeln für drei getrennte Wechselspannungen.
- Bei Sternschaltung des Generators hat man zwei Spannungswerte zur Verfügung, bei uns 220 V (zwischen M und Außenleiter) oder 380 V (zwischen zwei Außenleitern).
- Unter Ausnutzung dieser beiden Spannungen kann man einen Verbraucher einfach von einer bestimmten Leistung auf die dreifache umschalten: Erhöht man die Spannung um den Faktor $\sqrt{3}$, dann steigt der Strom um den gleichen Faktor, die Leistung um den Faktor 3. Bei Verbrauchern aus drei Teilwiderständen spricht man dann von Stern-Dreieck-Umschaltung (Abb. 7.68).
- Die Generatoren und Motoren für Drehstrom sind besonders einfach, billig und robust. Besonders gilt dies für den Drehstrom-Asynchronmotor (Abschn. 7.3.10).

Durch den Mittelpunktsleiter fließt die geometrische Summe der Ströme durch die drei Teilverbraucher in der Sternschaltung. Diese Summe ist 0, wenn alle drei Verbraucher exakt gleich sind, sowohl in ihrem Widerstandsbetrag als auch in der

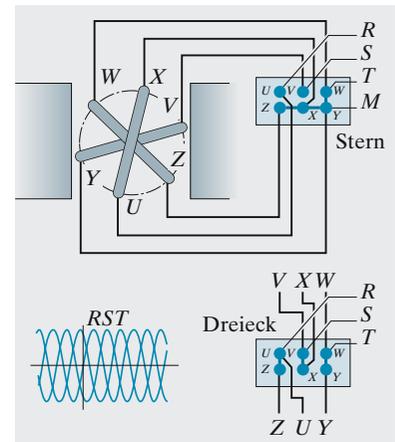


Abb. 7.67. Drehstromgenerator (schematisch). Die Spulenden sind so herausgeführt, dass man den Generator wahlweise durch einen oder mehrere Kurzschließer im Stern oder im Dreieck anschließen kann

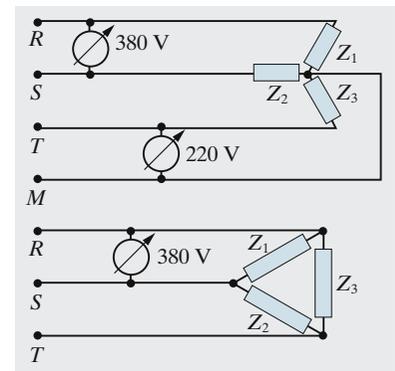


Abb. 7.68. Drehstromkabel mit vier oder mit drei Leitungen. In der Praxis ist noch eine Erdleitung dabei. Drei gleiche oder verschiedene Verbraucher sind im Stern bzw. im Dreieck angeschlossen. Ebenso gut kann man darunter auch die Generatorspulen verstehen

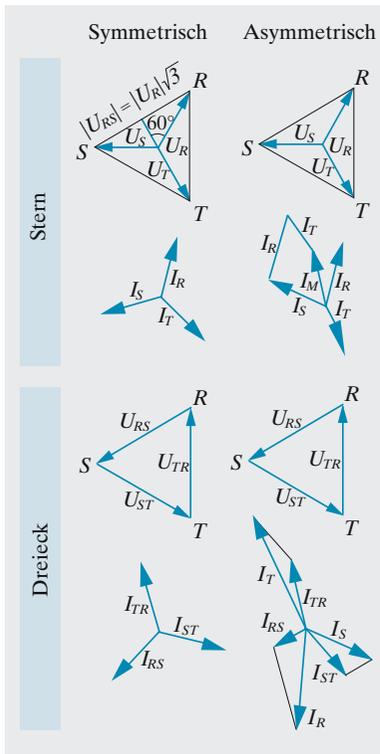


Abb. 7.69. Das Spannungsdreieck des Drehstromsystems ist durch die generierten Spannungen festgelegt. Man kann daraus das Verhältnis 380 V/220 V ablesen. Das Stromdreieck ergibt sich daraus durch Multiplikation mit den komplexen Leitwerten der drei Verbraucher. Der Strom im Mittelpunktsleiter ist die Zeigersumme der drei Teilströme. Bei Dreiecksschaltung folgt die Umrechnung zwischen Strang- und Leiterströmen aus der Knotenregel, natürlich mit komplexer Subtraktion

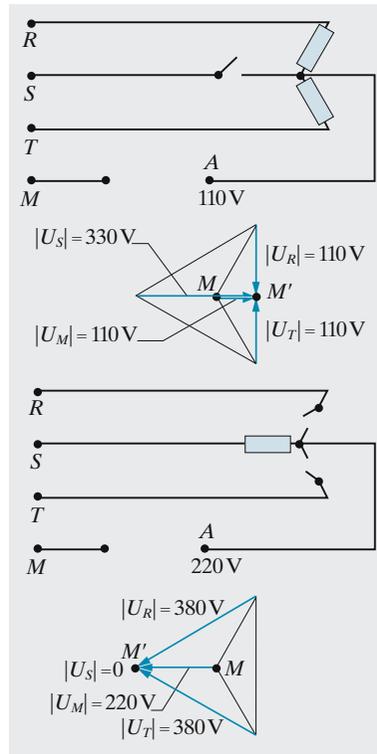


Abb. 7.70. Wozu man eine Schutzterde braucht: Wenn der Mittelpunktsleiter unterbrochen ist, liegen zwar die Außenseiten des Spannungsdreiecks noch fest, denn sie sind als Spulenspannungen des Generators gegeben. Der „Mittelpunkt“ kann innerhalb eines ganzen Dreiecks umherwandern, je nach Art der drei Teilverbraucher. Dargestellt sind ohmsche Verbraucher, von denen zwei gleich sind, der andere dagegen sehr verschieden ist. Bei A treten Spannungen bis zu 220 V auf. Daher nie Mittelpunktsleiter und Erde verwechseln! Die offenen Schalter symbolisieren sehr große Widerstände

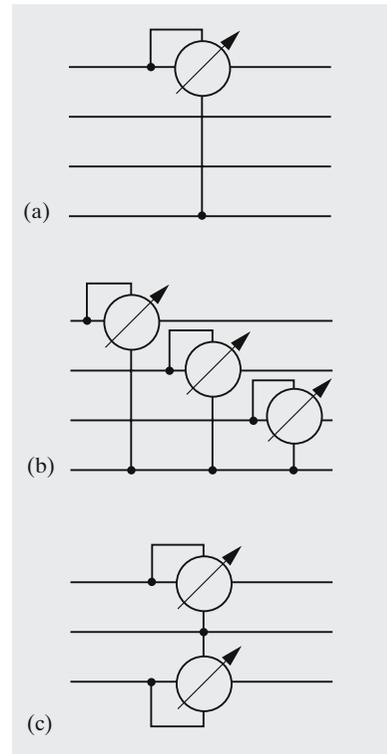


Abb. 7.71a–c. Leistungsmessung im Drehstromsystem. Es ist angenommen, dass die Verbraucher unzugänglich sind. Man soll nur im aufgeschnittenen Kabel messen. (a) Symmetrisch, (b) asymmetrisch belastetes Vierleiternetz, (c) Dreileiternetz

Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, wenn sie also gleiche *komplexe* Widerstände haben. In einer solchen **symmetrischen Schaltung** kann man den Mittelpunktsleiter ganz weglassen. In einer asymmetrischen Schaltung muss er vorhanden sein. Falls er unterbrochen wird, bleibt der Summe der Teilströme nichts übrig, als ebenfalls zu verschwinden. Da die drei Teilwiderstände aber verschieden sind, kann das Zeigerdreieck für die Spannungen nicht mehr symmetrisch bleiben. Die Teilspannungen verschieben sich nach Größe und Phase, der Mittelpunkt kann auf sehr hohes Potential rutschen. Wenn z. B. Z_1 sehr großen Betrag hat und $Z_2 = Z_3$ ist, muss $I_2 = -I_3$ sein, also $U_2 = -U_3$. Das Potential von M

liegt dann mitten zwischen S und T , d. h. auf 110 V verglichen mit seiner üblichen Nulllage. Bei $Z_1 \ll Z_2 = Z_3$ rutscht M nach R auf 220 V, die Verbraucher 2 und 3 erhalten nur noch 190 V, der Verbraucher 1 erhält 330 V. Schutzvorrichtungen für Menschen und Geräte müssen das berücksichtigen. Speziell müssen deswegen Nulleiter und Erde getrennt werden.

Bei der Messung der Leistung, die ein Drehstromverbraucher entnimmt, sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Symmetrischer Verbraucher: Wattmeter in eine Leitung einschalten, Anzeige mit 3 multiplizieren.
2. Asymmetrisches Dreileiternetz: Zwei Wattmeter genügen (Aron-Schaltung), weil der Strom durch den dritten Leiter sich als Summe der beiden anderen ergibt.
3. Asymmetrisches Vierleiternetz: Drei Wattmeter sind erforderlich.

7.3.7 Schwingkreise

1859 beobachtete *Feddersen* den Entladungsfunken eines Kondensators (Leidener Flasche) im rotierenden Spiegel. Der Funken erwies sich als zeitlich äquidistante Folge von Teilfunken mit einem Polwechsel zwischen zwei Teilfunken. Der Kondensator entlud sich also nicht monoton, sondern entlud sich, lud sich wieder auf usw. Die elektrische Ladung flutete in einer Schwingung hin und zurück. Diese Schwingung wird unterdrückt, wenn die Leitung einen zu großen ohmschen Widerstand hat.

Diese Schwingungen sind leicht quantitativ zu verstehen. Wenn der Kreis (Abb. 7.72) keine Spannungsquelle enthält, muss die Summe der Spannungsabfälle an allen Schaltelementen zusammen Null ergeben. Wir benutzen die Beziehungen $I = \dot{Q}$, $\dot{I} = \ddot{Q}$, und drücken alles durch Q aus:

$$U = \frac{Q}{C} + R\dot{Q} + L\ddot{Q} = 0. \quad (7.40)$$

Diese Differentialgleichung für Q ist genauso gebaut wie eine mechanische Schwingungsgleichung mit Rückstell- und Reibungsglied (Abschn. 4.1.3):

$$Dx + k\dot{x} + m\ddot{x} = 0.$$

Man braucht also die mechanischen Begriffe nur nach folgendem „Wörterbuch“ in elektrische zu übersetzen

$$x \leftrightarrow Q, \quad m \leftrightarrow L, \quad k \leftrightarrow R, \quad D \leftrightarrow \frac{1}{C}$$

und kann alle Ergebnisse von Abschn. 4.1.3 übernehmen: Im Kreis ohne ohmschen Widerstand kann ein Wechselstrom konstanter Amplitude fließen mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (\text{Thomson-Gleichung}). \quad (7.41)$$

Ein ohmscher Widerstand senkt die Frequenz etwas,

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

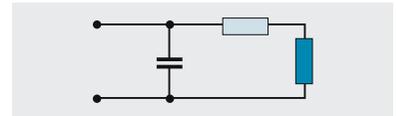


Abb. 7.72. Schwingkreis. Der einmal aufgeladene Kondensator entlädt sich und lädt sich in einer gedämpften Sinusschwingung wieder auf

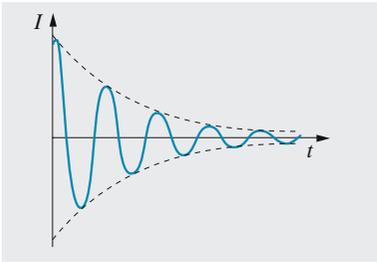


Abb. 7.73. Infolge der Verlustleistung in einem Widerstand im Kreis nimmt die Amplitude der freien Schwingungen exponentiell ab

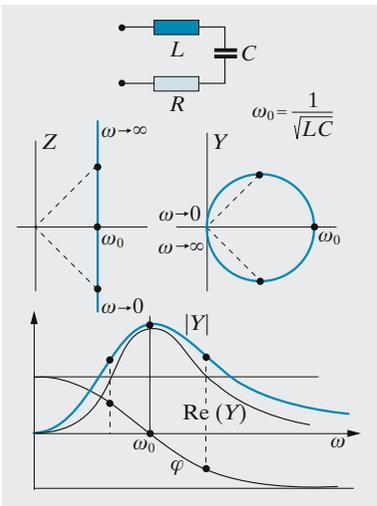


Abb. 7.74. Serienschwingkreis. Aus der Kreisfrequenz-Ortskurve $Y(\omega)$ (7.37) lassen sich sofort die ω -Abhängigkeiten von $|Y|$, $\text{Re}(Y)$ und φ ablesen, sobald man den einzelnen Punkten der Ortskurve ihre ω -Werte zugeordnet hat. $U|Y|$ ist der Scheinstrom, $U \text{Re}(Y)$ der Wirkstrom, $U^2 \text{Re}(Y)$ die Wirkleistung. Die Kurven sehen etwas anders aus als mechanische Resonanzkurven, weil man dort die Amplitude aufträgt, während hier I der Geschwindigkeit v entspricht

und führt zu einer **Dämpfung** der Schwingung mit dem Amplitudenverlauf

$$I_0(t) = I_0(0)e^{-Rt/(2L)}.$$

Wenn der ohmsche Widerstand zu groß ist,

$$R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

findet keine Schwingung mehr statt (Kriechfall).

Auch die Ergebnisse über *erzwungene* mechanische Schwingungen lassen sich ohne weiteres übertragen. Eine Wechselspannungsquelle im Kreis von Abb. 7.74 ist in (7.40) links durch eine „Inhomogenität“ zu beschreiben:

$$U_0 \cos \omega t = \frac{Q}{C} + R\dot{Q} + L\ddot{Q}. \quad (7.42)$$

Diese Spannung entspricht genau der mechanischen harmonischen Erregungskraft in Abschn. 4.1.3. Die Kondensatorladung Q und damit die Kondensatorspannung folgen in Amplitude und Phase genau den Resonanzkurven der mechanischen Schwingung (Abb. 4.18, 4.19). Die Stromkurve ergibt sich daraus durch Multiplikation mit ω . Wenn $R < 2\sqrt{L/C}$, ergibt sich ein Resonanzmaximum bei $\omega = 1/\sqrt{LC}$ oder kurz unterhalb davon. Dieses Maximum ist umso höher und steiler, je kleiner R ist.

× Beispiel ...

Leiten Sie die Gleichungen für freie und erzwungene elektrische Schwingungen aus dem Energiesatz her: Die Summe von elektrischer und magnetischer Feldenergie ändert sich infolge der Arbeit der Spannungsquelle und infolge der Erzeugung joulescher Wärme.

Die gesamte Feldenergie besteht aus einem magnetischen (Spulenfeld) und einem elektrischen Anteil (Kondensatorfeld): $W = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}Q^2/C$. Ihre zeitliche Änderung muss für die Arbeit der äußeren Spannungsquelle und für den Joule-Verlust im Leiterkreis aufkommen: $\dot{W} = UI - P_{\text{Joule}} = UI - RI^2 = LI\dot{I} + Q\dot{Q}/C = LI\dot{I} + QI/C$, also $U = RI + L\dot{I} + Q/C$.

Anschaulich versteht man das Verhalten des **Serienschwingkreises** am einfachsten daraus, dass die Spannungen an Spule und Kondensator bei gleichem Strom einander entgegengesetzt sind, wenn $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ist. Die äußere Spannung dient dann eigentlich nur noch dazu, den Strom durch den ohmschen Widerstand zu treiben. Die Ortskurven von Widerstand und Leitwert, hier mit ω als variabler Größe, sind eine Vollgerade bzw. ein Vollkreis, aus denen sich die Resonanzkurve ebenfalls ablesen lässt. Der **Parallelschwingkreis** (Abb. 7.76) verhält sich anders. Für den Kreis Abb. 7.75 braucht man die Ausdrücke für den Serienkreis nur zu übersetzen, indem man Ströme durch Spannungen und Widerstände durch Leitwerte ersetzt. Bei gegebener Spannung U ist der Strom hier *minimal* in der

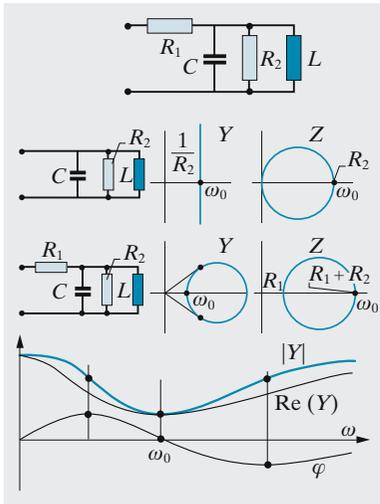


Abb. 7.75. Parallelschwingkreis mit realem Kondensator (der einen Parallelwiderstand hat), aber einer idealen Spule, dafür aber einem Vorwiderstand. Lesen Sie rein geometrisch ab, dass bei $\omega = \omega_0$ exakt $\varphi = 0$ und $|Y|$ sowie $\text{Re}(Y)$ minimal sind, ebenso dass Extrema von φ mit Wendepunkten von $|Y|$ zusammenfallen

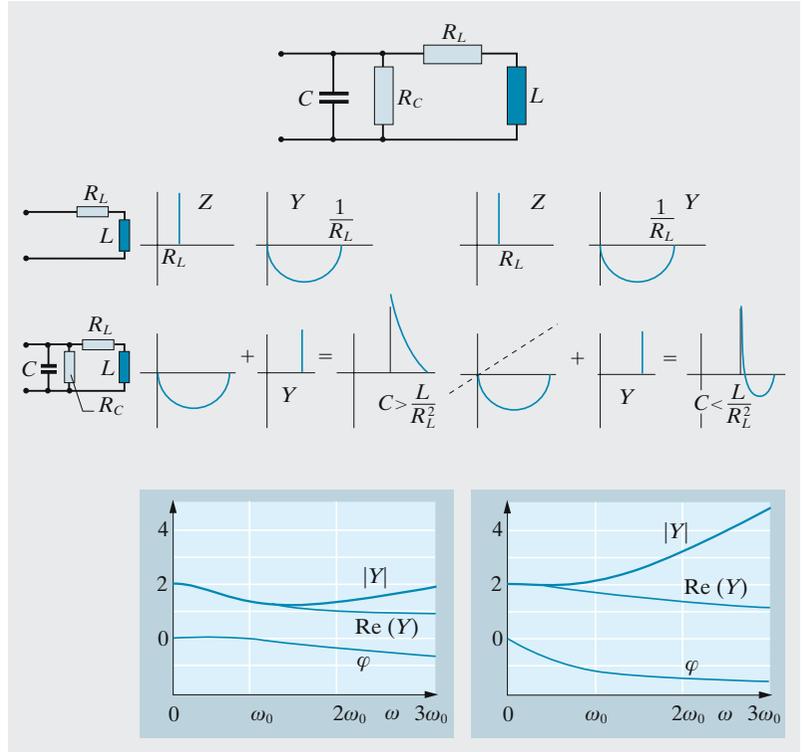


Abb. 7.76. Parallelschwingkreis mit realer Spule und realem Kondensator. Hier ist die ω -Ortskurve nicht allein Kreis oder Gerade

Resonanz $\omega = 1/\sqrt{LC}$, denn der größte Teil des Stromes rotiert als Blindstrom im Kreis selbst, ohne durch die Zuleitungen zu fließen. Im praktisch wichtigeren Fall Abb. 7.76 erreicht man so **Blindstromkompensation**.

Schwingkreise dienen zur Erzeugung, Stabilisierung und Aussonderung (Filterung) von Schwingungen bestimmter Frequenz. Radio- oder Fernsehempfänger werden durch Änderung von C (**Drehkondensator**) oder L (**Tauchspule** mit variabler Eintauchtiefe des ferromagnetischen Kerns) auf die gewünschte Frequenz abgestimmt. Die **Abstimm­schärfe** oder **Güte** des Kreises wird durch R bestimmt.

7.3.8 Transformatoren

Ein **Transformator** dient zur Änderung der Amplitude einer Wechselspannung ohne Frequenzänderung. Er besteht aus zwei Spulen verschiedener Windungszahlen N_1 bzw. N_2 , die einen gemeinsamen Magnetfluss umgreifen. Dieser Magnetfluss wird gebündelt durch einen hochpermeablen **Eisenkern**, der normalerweise einen geschlossenen magnetischen Kreis bildet. Die effektive Leitfähigkeit des Kerns muss klein sein, damit Wirbelstromverluste vermieden werden. Für kleine Leistungen benutzt man deshalb **Ferritkerne**, für höhere Leistungen lamellierte Eisenrahmen (aus Blechen von meist 0,35 mm Stärke, durch Lack oder Papier gegeneinander isoliert).

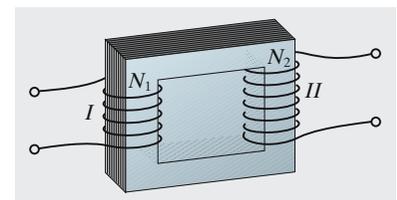


Abb. 7.77. Transformator

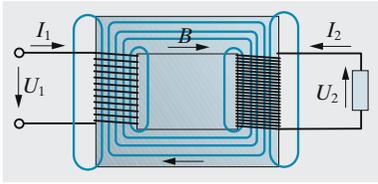


Abb. 7.78. Spannungen, Ströme, Feld und Fluss im Transformator

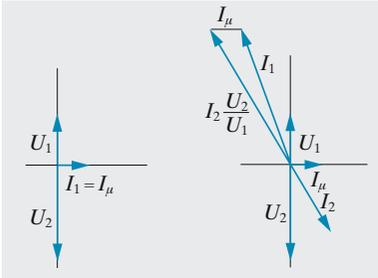


Abb. 7.79. Zeigerdiagramme des unbelasteten und belasteten idealen Transformators

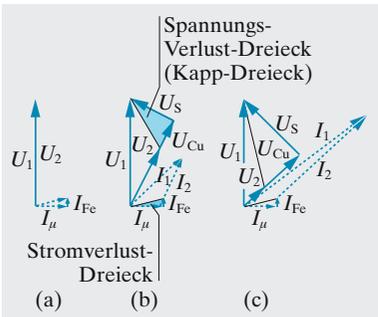


Abb. 7.80a–c. Zeigerdiagramme des unbelasteten und belasteten realen Transformators. Die Belastung nimmt von (a) bis (c) zu

Wir betrachten zunächst den *idealen Transformator*. Die Spulen sollen keinen ohmschen Widerstand haben (*keine Kupferverluste*), Wirbelströme und Hysteresis sollen nicht imstande sein, den Aufbau des B -Feldes merklich zu verzögern, sondern dieses soll phasengleich dem Strom folgen (*keine Eisenverluste*), der Magnetfluss Φ soll ganz im Eisenkern konzentriert sein, d. h. beide Spulen in gleicher Stärke durchsetzen (*kein Streufluss*). Um lästige Vorzeichendiskussionen zu vermeiden, normieren wir Spannungs- und Stromrichtungen, Wicklungssinn usw. nach Abb. 7.78.

An die Klemmen der Primärspule legen wir die Spannung U_1 . Da der Widerstand dieser Spule rein induktiv ist, wird U_1 kompensiert durch eine entgegengesetzte gleiche Selbstinduktions-Spannung, die ihrerseits nach (7.3) gleich der Flussänderung durch alle N_1 Windungen ist:

$$U_1 = N_1 \dot{\Phi} .$$

In der Sekundärspule induziert dieselbe Flussänderung $\dot{\Phi}$ die Spannung

$$U_2 = -N_2 \dot{\Phi} .$$

Sie ist identisch mit der an den Sekundärklemmen abgegriffenen Spannung. Die Spannungsübersetzung des Transformators ist also

$$\boxed{\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}} . \tag{7.43}$$

Diese Beziehung drückt das Induktionsgesetz aus, ist also unabhängig von der Belastung, d. h. von der Stromentnahme aus der Sekundärspule. Das Vorzeichen drückt Gegenläufigkeit der beiden Spannungen aus.

Wenn der Sekundärkreis offen ist (Leerlauf), fließt kein Strom durch ihn, d. h. der Magnetfluss Φ stammt nur vom Strom I_1 in der Primärspule. Dieser Leerlaufstrom I_{10} ist ein reiner Blindstrom $I_{10} = U_1 / (i\omega L_1)$, also leistungslos; sekundärseitig wird ja auch keine Leistung entnommen. Bei Belastung, d. h. wenn ein Verbraucher mit dem komplexen Widerstand Z (i. Allg. ein R und ein L) im Sekundärkreis liegt, treibt die Spannung U_2 , die durch U_1 und N_2/N_1 fest gegeben ist, einen Strom $I_2 = U_2/Z$. Dieser Strom fließt, nach Abb. 7.78 mit umgekehrtem Vorzeichen, auch durch die Sekundärwicklung und trägt zum Magnetfluss Φ bei. Trotzdem ändert sich Φ aber nicht gegenüber seinem durch I_{10} bestimmten Leerlaufwert, denn dieser Wert oder seine zeitliche Ableitung reicht gerade aus, um das gegebene U_1 zu kompensieren. Die zusätzliche Durchflutung $N_2 I_2$ muss also durch einen zusätzlichen Primärstrom I'_1 mit $N_1 I'_1 = N_2 I_2$ kompensiert werden: Der Primärstrom wird

$$I_1 = I_{10} - \frac{N_2}{N_1} I_2 = I_{10} - \frac{N_2 U_2}{N_1 Z} .$$

Die komplexe Addition macht I_1 i. Allg. größer als den Leerlaufstrom. Der Energiesatz ist befriedigt: Abzüglich des reinen Blindstrom I_{10} verhalten sich Primär- und Sekundärstrom, die gleiche Phasenwinkel zu ihren Spannungen bilden, umgekehrt wie diese, d. h. Primär- und Sekundärleistung sind gleich. Der Transformator ist ja verlustfrei (ideal). Wenn Z sehr klein ist, genauer $Z \ll \omega L_{12}$, d. h. die Sekundärwicklung fast kurzgeschlossen, wird $I_{10} \ll N_2 I_2 / N_1$, also $I_1 \approx -N_2 I_2 / N_1$. Die Ströme haben dann entgegengesetzte Richtung.

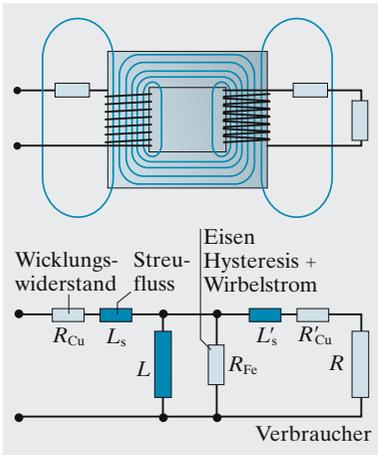


Abb. 7.81. Verluste im realen Transformator und ihre Darstellung im Ersatzschaltbild

Zum gleichen Ergebnis kommt man auch ausgehend von den Gleichungen (7.14) für Selbst- und Gegeninduktion:

$$\begin{aligned} U_1 &= L_1 \dot{I}_1 + L_{12} \dot{I}_2 = i\omega(L_{11}I_1 + L_{12}I_2) \\ U_2 &= ZI_2 = i\omega(L_{12}I_1 + L_{22}I_2) \end{aligned} \tag{7.44}$$

Dabei ist $L_1 = \mu\mu_0 AN_1^2/l$, $L_2 = \mu\mu_0 AN_2^2/l$, $L_{12} = \mu\mu_0 AN_1 N_2/l$ (A, l Querschnitt und Länge des Eisenkerns). (7.44) ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für I_1 und I_2 mit den Lösungen

$$I_2 = -\frac{N_2 U_1}{N_1 Z}, \quad U_2 = ZI_2 = -\frac{N_2}{N_1} U_1, \quad I_1 = \frac{U_1}{i\omega L_1} - \frac{L_{12}}{L_1} I_2 = I_{10} - \frac{N_2}{N_1} I_2.$$

Wenn man diese Gleichungen erweitert um ohmsche Widerstände der Spulen (Kupferverluste), um den Streufluss, der zu $L_{12} < \sqrt{L_1 L_2}$ führt, und um eine Phasenverschiebung zwischen Φ und I infolge von Wirbelströmen und Hysterese (Eisenverlusten), kann man so auch den verlustbehafteten Transformator behandeln. In der Praxis benutzt man lieber das **Ersatzschaltbild** von Abb. 7.81, meist in vereinfachter Form. Hier erscheinen beide Wicklungen galvanisch gekoppelt. Das wird möglich durch folgenden Kniff: Man rechnet alle Sekundärgrößen so um (auf gestrichelte Größen), dass die in beiden Wicklungen induzierten Spannungen gleich werden und gleichzeitig die Leistungen erhalten bleiben. Spannungen werden also mit N_1/N_2 , Ströme mit N_2/N_1 , Widerstände mit N_1^2/N_2^2 multipliziert. Dann kann man beide Spulen, genauer den Anteil von ihnen, der für den gemeinsamen Fluss Φ verantwortlich ist, zu einer Induktivität L_0 zusammenfassen. R_0 gibt die Phasenverschiebung zwischen Φ und I , d. h. die Eisenverluste wieder, L_{1s} und L'_{2s} die Induktivitätsanteile, die nur Streuflüsse erzeugen, R_1 und R_2 die Kupferverluste.

Dass Primär- und Sekundärströme entgegengesetzte Richtung haben, zeigt der Versuch von *Elihu Thomson* (Abb. 7.84): Ein Eisenkern trägt eine Spule und einen Aluminiumring; dieser ist als Sekundärspule eines Transformators aufzufassen. Schaltet man einen Wechselstrom durch die Spule ein, so wird der Ring mit großer Gewalt fortgeschleudert. Der in ihm induzierte sehr starke Strom – ein Kurzschlussstrom, weil der Widerstand des Ringes sehr klein ist – läuft dem Primärstrom in

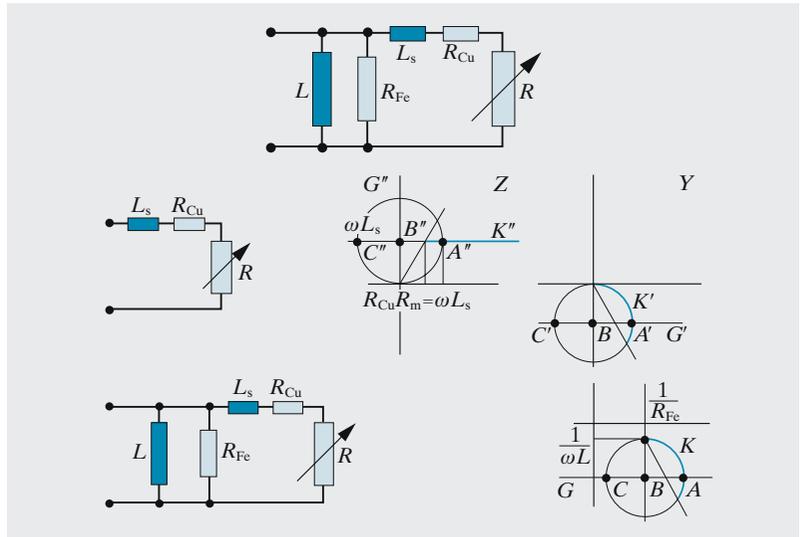


Abb. 7.82. Vereinfachtes Ersatzschaltbild des realen Transformators, mittels Ortskurven analysiert. Bei welchem Verbraucherwiderstand kann man am meisten Wirkleistung entnehmen?

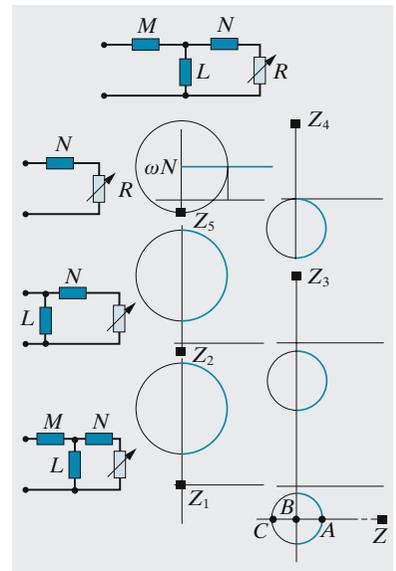


Abb. 7.83. Ersatzschaltbild des realen Transformators ohne Kupfer- und Eisenverluste, mittels Ortskurven analysiert. Bei welchem Verbraucherwiderstand kann man am meisten Wirkleistung entnehmen?

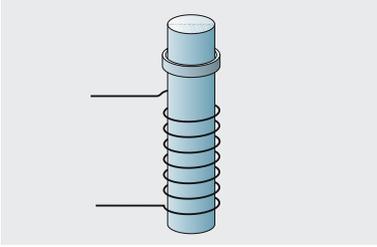


Abb. 7.84. Versuch von *Elihu Thomson*. Kann man den Ring festhalten, wenn der Strom eingeschaltet ist?

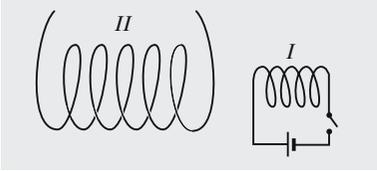


Abb. 7.85. Induktorkern

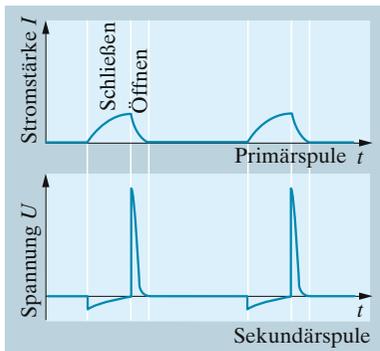


Abb. 7.86. Spannung in der Sekundärspule eines Induktors beim Schließen und Öffnen des Stromes in der Primärspule

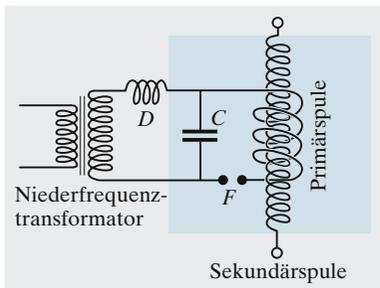


Abb. 7.87. Tesla-Transformator

jedem Augenblick entgegen und wird daher von ihm (oder besser vom B -Feld, das ihn durchsetzt) abgestoßen. Hält man den Ring gewaltsam fest, so wird er sehr heiß. Man kann ihn als Schmelztrog für größere Metallmengen ausbilden.

Induktor. Auch ohne Kern haben zwei Spulen, besonders wenn sie ineinander geschoben sind, einen großen Teil ihres Induktionsflusses gemeinsam. Jede Änderung des Stromes durch die eine induziert eine Spannung in der anderen, die im wesentlichen durch das Übersetzungsverhältnis N_2/N_1 bestimmt ist. Besonders schnelle Stromänderungen erzielt man beim Schließen und noch mehr beim Öffnen eines Schalters (Abb. 7.85, 7.86). Mit einer automatischen Vorrichtung zum Schließen und Öffnen des Schalters wurden Induktoren (N_2 bis 20 000) früher gern zur Erzeugung sehr hoher (nichtsinusförmiger) Wechselspannungen benutzt.

Tesla-Transformator. Wird ein Kondensator (Kapazität z. B. $C = 1\,000\text{ pF}$) durch eine kreisförmige Kupferschlinge (z. B. 40 cm Durchmesser und 2 mm Drahtradius, $L = 1,25 \cdot 10^{-6}\text{ H}$) entladen, so klingen die Amplituden des mit der Frequenz $\nu = 1/(2\pi) \cdot \sqrt{1/(LC)} = 4,5 \cdot 10^6\text{ s}^{-1}$ schwingenden Entladungsstromes nach Abschn. 7.3.7 in der Zeit $\tau = 2L/R = 1,5 \cdot 10^{-4}\text{ s}$ auf e^{-1} ab [R ist für diese Frequenz infolge der Stromverdrängung, des Skineffektes (Abschn. 7.3.11), etwa 10mal größer als der Gleichstromwiderstand]. Nach der 4,6fachen Zeit, das sind $7 \cdot 10^{-4}\text{ s}$, beträgt daher die Amplitude nur noch 1% des Anfangswertes, ist also die Schwingung praktisch abgeklungen. Macht man die Drahtschlinge eines solchen Schwingungskreises zur Primärspule eines Transformators, in den man als Sekundärspule eine Spule mit vielen Windungen stellt, so wird infolge der hohen Frequenz und der dadurch bedingten großen Änderungsgeschwindigkeit des Induktionsflusses in ihr eine sehr hohe Spannung induziert. Besonders hohe Spannungen, die zu meterlangen Büschelentladungen in der freien Atmosphäre Veranlassung geben, erzielt man, wenn die Eigenfrequenz der Spule mit der Frequenz des Primärkreises übereinstimmt (Resonanz). Abbildung 7.87 gibt das Schaltschema eines Tesla-Transformators. Der blau hinterlegte Teil stellt den eigentlichen **Tesla-Transformator** dar. Der Niederfrequenztransformator lädt den Kondensator des Schwingkreises auf, der sich über die Primärspule und die Funkenstrecke F oszillatorisch entlädt.

Ersetzt man die Sekundärspule durch eine Spule mit wenigen Windungen aus dickem Draht, so werden in ihr starke Ströme niedriger Spannung induziert, in die man z. B. den menschlichen Körper einschalten kann. Diese **Hochfrequenzströme** finden in der medizinischen Therapie als **Diathermieströme** eine wichtige Anwendung. Während Gleichströme oder niederfrequente Wechselströme von 10 bis 100 mA, die durch den menschlichen Körper gehen, tödlich wirken, können Hochfrequenzströme bis über 10 A ohne Schädigung durch ihn hindurchfließen; die untere Grenze der unschädlichen Frequenzen liegt etwa bei 10^5 Hz . Während von außen zugeführte Wärme die Temperatur nur einige Millimeter unter der Hautoberfläche erhöht, erwärmt die von den Hochfrequenzströmen entwickelte joulesche Wärme tief im Innern des Körpers liegende Organe.

7.3.9 Das Betatron

Nach dem Prinzip des Transformators kann man Elektronen auf sehr hohe Energien bringen. Um den Kern M (Abb. 7.88) ist als einzige Sekundärwicklung ein evakuiertes Kreisrohr K gelegt, in das mittels einer Glühkathode G Elektronen tangential eingeschossen werden. Durch die enggewickelte Primärspule PSp wird ein Wechselstrom geschickt. Durch das Ringrohr tritt ein Magnetfluss $\Phi = \pi R^2 \bar{B}$ (\bar{B} : Mittelwert des Magnet-

feldes in der Ringebene). Während der ansteigenden Wechselstromphase wächst Φ , und längs des Rohrs wird die Spannung $U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi}$ bzw. das elektrische Feld

$$E = \frac{U_{\text{ind}}}{2\pi R} = -\frac{\dot{\Phi}}{2\pi R} = -\frac{1}{2}R\dot{B} \quad (7.45)$$

induziert. Dieses Feld lässt den Impuls des Elektrons anwachsen gemäß $d(mv)/dt = -eE = \frac{1}{2}eR\dot{B}$, d. h.

$$mv = \frac{1}{2}eR\bar{B} \quad (7.46)$$

(diese allgemeine Form des newtonschen Aktionsprinzips gilt auch für relativistische Geschwindigkeiten, im Gegensatz zur üblichen Formulierung mittels der Kraft; allerdings ist die Geschwindigkeitsabhängigkeit von m zu beachten: $m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$).

Damit die Elektronen auf dem Sollkreis (So) bleiben, muss ihre Zentrifugalkraft durch eine Lorentz-Kraft kompensiert werden:

$$\frac{mv^2}{R} = evB_{\text{st}}. \quad (7.47)$$

Vergleich mit (7.46) liefert

$$B_{\text{st}} = \frac{1}{2}\bar{B} \quad (\text{Wideroe-Bedingung}). \quad (7.48)$$

Das B -Feld muss also nach außen so abfallen, dass es auf dem Sollkreis nur noch die Hälfte des Mittelwerts hat. Das ist durch geeignete Formgebung der Steuerpole zu erfüllen, falls der Kern nicht die Sättigungsmagnetisierung erreicht.

Bei $v \ll c$ ist die Elektronenenergie nach (7.46)

$$E = \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{8} \frac{e^2R^2\bar{B}^2}{m_0}.$$

Bei relativistischen Energien muss man nach (12.30) als kinetische Energie ansetzen

$$E = m_0c^2 \left(1/\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1 \right),$$

mit (7.46)

$$E = m_0c^2(eR\bar{B}/(2m_0v) - 1),$$

also für $v \approx c$

$$E \approx \frac{1}{2}ecR\bar{B}.$$

Bei $B = 1 \text{ Vs m}^{-2}$ und $R = 0,2 \text{ m}$ ergibt sich bereits $E = 3 \cdot 10^7 \text{ eV}$. Die obere Energiegrenze des Betatrons liegt um 200 MeV. Dann wird nämlich die elektromagnetische Ausstrahlungsleistung infolge der Beschleunigung gleich der aus dem elektrischen Wirbelfeld aufgenommenen, und diese kommt nicht mehr der Beschleunigung der Elektronen zugute.

Kurz nach dem Durchgang des Magnetfeldes durch den Wert Null werden während eines kleinen Bruchteils einer Periode tangential zum Sollkreis aus G Elektronen mit einer Geschwindigkeit eingeschossen, welche die Bedingung (7.47)

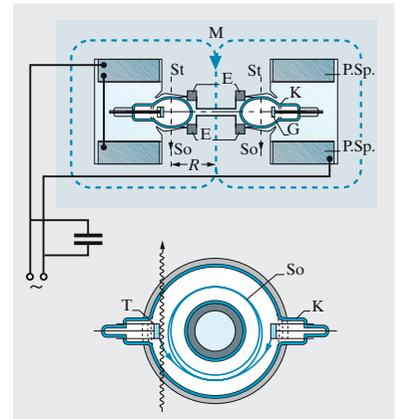


Abb. 7.88. Das Betatron

erfüllt. Wenn das Magnetfeld denjenigen Wert erreicht, der die Elektronen auf die gewünschte Energie bringt, wird durch die Expansionsspulen E ein Stromstoß geschickt, der das Steuerfeld schwächt. Die Elektronen winden sich nun spiralförmig nach außen, um endlich auf eine „Antikathode“ T aufzutreffen, aus der sie harte Röntgenstrahlung auslösen.

7.3.10 Elektromotoren und Generatoren

a) Motoren und ihre Kennlinien. Das Prinzip der Umwandlung von elektrischer in mechanische Energie ist immer dasselbe, hat aber sehr vielfältige Ausführungsformen, von denen wir nur die wichtigsten in angemessener Vereinfachung besprechen können. Immer wird die Lorentz-Kraft zwischen einem Magnetfeld und einem Strom ausgenutzt. Der Strom I , der eine Wicklung aus N Drahtwindungen mit der Fläche A umfließt, stellt ein magnetisches Moment μ vom Betrag NIA senkrecht zur Windungsfläche dar. Im Magnetfeld B erfährt diese Wicklung ein Drehmoment $T = \mu \times B$ vom Betrag $NIA B \sin \alpha$ (α : Winkel zwischen μ und B ; Abb. 6.104, siehe auch Abschn. 6.7.3). Dies ist der Momentanwert des Drehmoments. Man kann NAB auch zum Gesamtfluss Φ durch die N Windungen der Spule zusammenfassen und hat dann $T = \Phi I \sin \alpha$.

Von dem räumlichen Einstellwinkel α streng zu unterscheiden ist der zeitliche Phasenwinkel φ , der zwischen I und Φ auftreten kann, wenn es sich um Wechselströme handelt. Wenn man dann unter Φ und I die Effektivgrößen versteht, in denen also die Mittelung über die Zeit und damit über den Einstellwinkel $\alpha = \omega t$ schon vollzogen ist, ergibt sich $T = \Phi I \cos \varphi$.

Die einzelnen Motortypen unterscheiden sich dadurch, wie Φ und I zustandekommen. Φ wird meist im Motorgehäuse, dem Ständer oder **Stator** erzeugt, der als Elektromagnet, seltener als Permanentmagnet ausgebildet ist. I , genauer I_r fließt dann im rotierenden Teil (Läufer, **Rotor** oder Anker). Bei Generatoren dagegen ist der Rotor nicht immer identisch mit dem Anker. Als **Anker** bezeichnet man das Bauelement, an dem die gewünschte Energieform (mechanische beim Motor, elektrische beim Generator) abgenommen wird, und Generatoren werden sogar häufiger als Innenpolmaschine (Stator = Anker) gebaut, weil man hierdurch die Stromabnahme am rotierenden Teil einspart.

Wenn das Magnetfeld von einem Elektromagneten erzeugt wird, ist es proportional zum Strom durch diesen, und dasselbe gilt für den Fluss $\Phi = L' I_s$. Der Index s steht für Stator, L' ist im wesentlichen die Induktivität dieser Spule. Dass $\Phi = L' I_s$ ist, sieht man am einfachsten, wenn man die zeitliche Ableitung bildet: $\dot{\Phi} = L' \dot{I}_s$ ist tatsächlich die selbstinduzierte Gegenspannung. Somit wird das Drehmoment

$$T = L' I_s I_r \cos \varphi . \quad (7.49)$$

I_r ist der Rotorstrom, der oben einfach als I bezeichnet wurde.

Das Laufverhalten eines Motors wird beschrieben durch die Abhängigkeit des Drehmoments, das er hergibt, von der Drehzahl. Diese **Kennlinie** $T(\omega)$ ergibt zunächst ganz direkt die Leistung $P = T\omega$ in Abhängigkeit von der Drehzahl ($P = \text{const}$: Hyperbel im $T(\omega)$ -Diagramm). Vor allem aber beschreibt die Kennlinie, wie der Motor auf ein Drehmoment T_L (Lastmoment) reagiert, das man seiner Welle abverlangt. Wenn das verlangte Moment T_L kleiner ist als das Moment $T(\omega)$, das der Motor bei der vorliegenden Winkelgeschwindigkeit ω hergibt, beschleunigt er sich weiter, und zwar nach der Bewegungsgleichung

$$J \dot{\omega} = T(\omega) - T_L . \quad (7.50)$$

J ist das Trägheitsmoment des Rotors. Bei $T = T_L$ besteht Gleichgewicht, aber ob es stabil oder labil ist, hängt davon ab, ob die Kennlinie $T(\omega)$ fällt oder steigt. Dies geht aus Abb. 7.89 hervor; die Rechnung zeigt, wie diese Annäherung an das

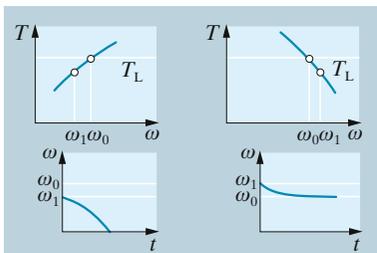


Abb. 7.89. Moment-Drehzahl-Kennlinien eines Motors und Betriebsverhalten bei konstantem Lastmoment T_L . Steigende Kennlinienteile sind instabil, fallende stabil

Gleichgewicht bei fallender bzw. die Entfernung vom Gleichgewicht bei steigender Kennlinie erfolgt. Wir betrachten ein kurzes gerades Stück der Kennlinie mit der Steigung $T' = dT/d\omega$, beschrieben durch $T = T(\omega_0) + T'(\omega - \omega_0)$. Die Bewegungsgleichung $J\dot{\omega} = T'(\omega - \omega_0)$ hat dann die Lösung $\omega = \omega_0 + (\omega_1 - \omega_0)e^{T't/J}$, wenn ω_1 die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ war. Die Abweichung $\omega - \omega_0$ vom Gleichgewichtswert ω_0 nimmt also mit der Zeitkonstante $\tau = J/T'$ exponentiell zu oder ab, je nachdem ob T' positiv oder negativ ist. Die Zeitkonstante ist umso kürzer, je größer T' , je steiler oder „härter“ die Kennlinie ist.

Interessant ist auch der unbelastete Anlauf ($T_L = 0$). Wenn $T(0) = 0$, läuft der Motor überhaupt nicht von selbst an, sondern muss durch ein äußeres Moment angeworfen werden. Andernfalls läuft er umso zügiger an, je größer $T(0)$ ist: $\omega = T(0)t/J$.

Der **Wirkungsgrad** eines Elektromotors ist

$$\eta = \frac{\text{mechanische Leistung}}{\text{elektrische Leistung}} = \frac{T\omega}{UI}.$$

Der Zusammenhang zwischen den auftretenden Größen ist für die einzelnen Motortypen verschieden.

b) Gleichstrommotoren. Abbildung 7.90 zeigt das Wesentliche. NS ist ein Elektro- oder Permanentmagnet. Der **Kommutator** polt die Stromrichtung automatisch in dem Augenblick um, wo α und das Drehmoment verschwinden und wo bei weiterer Drehung ohne Umpolung ein Gegenmoment auftreten würde. In dieser einfachsten Form gibt der Motor ein sehr inkonstantes Drehmoment her, das mit der Zeit wie $|\sin \omega t|$ variiert. Man gleicht diese Zeitabhängigkeit aus, indem man mehrere unabhängige Wicklungen gegeneinander verdreht auf den zylindrischen Rotor legt. Der Kommutator erhält dann entsprechend viele Kontaktpaare.

x Beispiel ...

Wie sieht die $T(\omega)$ -Kennlinie eines Gleichstrommotors mit Permanentmagnet aus?

Hier ist Φ fest gegeben, also $T = I_r \Phi$, die Rotorspannung $U = RI + \omega \Phi \cdot 2/\pi$ und $T = I\Phi = \Phi(U - 2\omega\Phi/\pi)/R$: Lineare „Nebenschluss“-Kennlinie mit $\omega_m = \pi U/(2R\Phi)$ (läuft unbelastet umso schneller, je schwächer der Magnet und je größer U ist): $T_m = U\Phi/R$.

Obwohl es sich um Gleichstrom handelt, wird der Strom durch den Rotor nicht nur durch seinen ohmschen Widerstand bestimmt. Von dem mit ω laufenden Rotor aus gesehen, ist der Fluss Φ , der durch ihn hindurchtritt, ein variabler Fluss mit der Kreisfrequenz ω . Die Änderung von Φ ist aber nicht sinusförmig, denn immer wenn Φ maximal ist (wenn die Wicklung die Feldlinien möglichst voll umfasst: $\alpha = 0$), wird gerade kommutiert. In Bezug auf die Stromrichtung, die so in jeder Halbwelle neu definiert wird, ist Φ ein im Maximum zerhackter Cosinus (Abb. 7.90). Entsprechend ist $\dot{\Phi}$ ein Sinus, dessen Halbwellen alle im Positiven laufen: $\dot{\Phi} = \omega\Phi_0|\sin \omega t|$. Die induzierte Spannung $-N_r\dot{\Phi}$ in der Rotorspule aus N_r Windungen ist also in jedem Moment eine Gegenspannung zur definierten Stromrichtung. Ihr zeitlicher Mittelwert ist $\bar{U}_{\text{ind}} = (2/\pi) \cdot N_r \omega \Phi_0$ (Mittelwert einer Sinus-Halbwelle $(1/\pi) \cdot \int_0^\pi \sin x \, dx = 2/\pi$). Da nun $\Phi_0 = A_r B = \mu_r \mu_0 A_r N_s I_s / l_s$, kann man schreiben $\bar{U}_{\text{ind}} = \omega L I_s$, wobei $L = (2/\pi) \cdot \mu_r \mu_0 N_r N_s A_r / l_s$ eine Gegeninduktivität zwischen Stator- und Rotorspule ist. Im Gegensatz zum echten Wechselstrom ist \bar{U}_{ind} als mittlere Gleichspannung aufzufassen, die entsprechenden Spannungen, Ströme und Widerstände addieren sich algebraisch, nicht geometrisch.

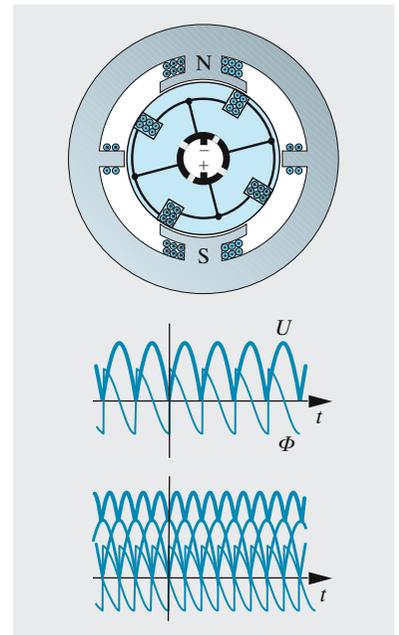


Abb. 7.90. Schnitt durch einen Gleichstrommotor mit zwei Spulen in vier Nuten, Feldwicklung (oben, unten) und Polwender (rechts, links). Der Kommutator ist in der Mitte eingezeichnet. Unterer Teil: Magnetfluss durch die Rotorspulen und darin induzierte Spannung

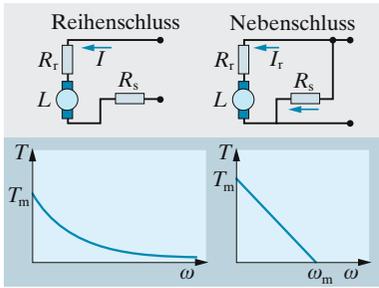


Abb. 7.91. Gleichstrommotor, Schaltung und Kennlinie des Reihenschlussmotors und des Nebenschlussmotors

Zum Beispiel setzt sich der gesamte Spannungsabfall am Rotor zusammen aus dem ohmschen und dem induktiven Abfall:

$$U_r = I_r R_r + \omega L I_s .$$

Wesentlich für das Betriebsverhalten eines Gleichstrommotors mit Elektromagnet ist, ob Stator und Rotor hintereinander- oder parallel geschaltet sind. Beim **Reihenschluss-** oder **Hauptschlussmotor** fließt derselbe Strom I durch Stator- und Rotorwicklung. Das Drehmoment ist $T = L' I^2$, der Strom ist $I = U / (\omega L + R_r + R_s)$, also

$$T = L' I^2 = \frac{L' U^2}{(\omega L + R_r + R_s)^2} = \frac{L' U^2}{(\omega L + R)^2} .$$

Der Motor kann ein maximales Moment $T_m = L' U^2 / R^2$ hergeben. Verlangt man mehr, bleibt er stehen. Bei sehr kleinem T wird andererseits ω sehr groß: Der unbelastete Reihenschlussmotor geht durch, idealerweise bis $\omega = \infty$; erst das Reibungsmoment des Rotors bringt ein Gleichgewicht, aber oft zu spät. Zwischen diesen Extremfällen nimmt die Kennlinie $T(\omega)$ ab, aber nicht zu steil. Solche „weichen“ Kennlinien ersparen manchmal die Gangschaltung bei Bahnen, Kränen, Aufzügen: Großes Anfahrmoment bei kleiner Drehzahl.

Beim **Nebenschlussmotor** teilt sich der dem Netz entnommene Strom I auf gemäß $I = I_s + I_r$. Der Statorstrom ist $I_s = U / R_s$. Der Rotorstrom I_r ergibt sich aus $U = \omega L I_s + R_r I_r$, also

$$I_r = (U - \omega L I_s) / R_r U (1 - \omega L / R_s) / R_r .$$

Das Drehmoment wird

$$T = L' I_s I_r = \frac{L' U^2}{R_s R_r} \left(1 - \frac{\omega L}{R_s}\right) = T_m \left(1 - \frac{\omega}{\omega_m}\right) . \quad (7.51)$$

Das maximale Moment ist $T_m = L' U^2 / (R_r R_s)$. Hier existiert auch eine maximale Winkelgeschwindigkeit $\omega_m = R_s / L$. Dazwischen nimmt T linear mit der Neigung $L' U^2 L / (R_r R_s^2)$ ab. Wenn man diese Steigung groß macht, wird die „harte“ Kennlinie geeignet für viele Anwendungen, wo es auf eine Drehzahl ankommt, die nur wenig von der Belastung abhängt (Werkzeugmaschinen usw.). Ein Verbundmotor (Compoundmotor), bei dem ein Teil der Statorwicklung in Reihe, der Rest parallel mit dem Rotor geschaltet ist, liegt im Verhalten zwischen Reihen- und Nebenschlussmotor. Der Nebenschlussmotor ist wichtig wegen seiner vielen und flexiblen Möglichkeiten zur Drehzahlregelung. Durch Verändern von R_r und R_s kann man fast jede gewünschte Lage und Neigung der $T(\omega)$ -Kennlinie herstellen, besonders wenn man noch die Spannungen an Stator und Rotor unabhängig voneinander regelt.

c) Der Drehstrom-Asynchronmotor (Induktionsmotor). Die Einfachheit, Betriebssicherheit und Wartungsfreiheit dieses Motors waren mitbestimmend für die allgemeine Einführung des Drehstroms. Dieser Motor erfordert keine Stromzuführung zum Rotor, sondern erzeugt sich den Strom, auf dem das Drehmoment beruht, durch Induktion selbst. In der Ausführung mit **Kurzschluss-** oder **Käfigläufer** fallen daher die störanfälligen Schleifringe und Bürsten ganz weg. Eine eigentliche Drahtwicklung hat der Läufer nicht. Er besteht wie ein Eichhörnchenkäfig aus dicken Kupferstäben, die an den Enden durch Kurzschlussringe verbunden sind. Der Rest des Käfigvolumens ist durch einen Stapel von Transformatorblechen ausgefüllt. Die Ausführung mit Schleifringläufer hat nur den Sinn, dass man Widerstände hinter die Läuferwicklung legen und so das Betriebsverhalten beeinflussen kann, besonders beim Anlassen. Strom wird dem Läufer auch dann nicht zugeführt.

Das Geheimnis liegt in der Statorwicklung. Sie besteht im einfachsten Fall aus drei Strängen, die im Gehäuse um 120° gegeneinander versetzt angebracht und mit den drei Phasen des Drehstromnetzes (Kreisfrequenz ω_0) verbunden sind. Man kann auch $3p$ Stränge anbringen (p ganzzahlig) und erhält dann den Winkel $120^\circ/p$ zwischen benachbarten Strängen, die an verschiedenen Phasen liegen. Diese Wicklungen erzeugen ein Magnetfeld, das sich räumlich mit der Frequenz $\omega_1 = \omega_0/p$ gegen das Motorgehäuse zu drehen scheint.

Wie dieses **Drehfeld** zustandekommt, ist in Abb. 7.93 erläutert. Dort ist der zeitliche Verlauf der Ströme und Magnetfelder in den drei Wicklungen RR' , SS' , TT' dargestellt. Man beachte die Polung. Im Zeitpunkt t_1 zeigt das Gesamtfeld in Richtung RR' , denn die beiden anderen Felder sind gleich groß, ihre Querkomponenten heben sich auf. Bei t_2 hat sich das Feld in die Stellung $T'T$ gedreht, bei t_3 in die Stellung SS' usw. Das Gesamtfeld sieht genauso aus, als drehte sich ein Permanentmagnet mit der Kreisfrequenz ω_0 . Bei $3p$ Strängen sieht das Feld aus, als rotierten p gegeneinander um $2\pi/p$ versetzte Permanentmagnete (p **Polpaare**) mit der Kreisfrequenz ω_0/p : In $1/3$ der Drehstromperiode dreht sich das Feld von einer Wicklung bis zur nächsten, also nicht um $2\pi/3$ wie bei $p = 1$, sondern nur um $2\pi/(3p)$. Je mehr Polpaare, desto langsamer rotiert das Drehfeld.

Der Rotor selbst möge sich mit der Kreisfrequenz ω_1 gegen das Gehäuse drehen. Wir setzen uns in Gedanken an eine bestimmte Stelle des Rotors. Dann nehmen wir ein Magnetfeld wahr, das *zeitlich* mit der Kreisfrequenz $\omega_2 = \omega - \omega_1$ schwankt. Diese zeitliche Änderung induziert im Rotor eine Wechselspannung U mit dieser Kreisfrequenz ω_2 und mit dem Effektivwert $U = \omega_2 \Phi$, wenn Φ der Effektivwert des Magnetflusses ist, der den Rotor durchsetzt. Diese Spannung U treibt durch den Rotor mit seinem ohmschen Widerstand R und der Induktivität L einen Strom mit dem Effektivwert

$$I = \frac{\omega_2 \Phi}{\sqrt{R^2 + \omega_2^2 L^2}},$$

der gegen die Spannung U um den Phasenwinkel φ mit $\cos \varphi = R/\sqrt{R^2 + \omega_2^2 L^2}$ versetzt ist, also gegen den Fluss Φ um den Winkel $\varphi + \pi/2$. Das Drehmoment ergibt sich nach (7.49)

$$T = I\Phi \cos \varphi = \Phi^2 \frac{\omega_2 R}{R^2 + \omega_2^2 L^2}. \tag{7.52}$$

Was Φ betrifft, so ist die Lage ähnlich wie beim Transformator: Zwar erzeugt der Rotorstrom (Sekundärwicklung) auch einen Φ -Beitrag, aber gleichzeitig übt er eine Gegeninduktion auf die Statorwicklung aus, sodass der zusätzliche Statorstrom den Φ -Beitrag des Rotors genau kompensiert. Deshalb bleibt Φ unabhängig von der Rotorfrequenz und vom Rotorstrom, und zwar gerade so groß, dass seine Induktionswirkung die an die Statorwicklung angelegte Spannung U gemäß $U = \omega_0 \Phi$ kompensiert. Hier ist ω_0 die konstante Netzfrequenz, im Gegensatz zu ω_2 , der Frequenz des Drehfeldes relativ zum Rotor.

Wir diskutieren jetzt die **Kennlinie** des Momentes T als Funktion der Kreisfrequenz ω_2 des Drehfeldes relativ zum Rotor. Anschließend zeichnen wir diese Kennlinie auf die Rotorfrequenz $\omega_1 = \omega - \omega_2$ oder auf den **Schlupf** $s = \omega_2/\omega$ um. Das Moment hat ein Maximum bei $\omega_2 = R/L$ bzw. $s = R/(L\omega)$. Für sehr kleine ω_2 , d. h. für $s \ll 1$ oder $\omega_1 \approx \omega$ steigt $T(\omega)$ linear an wie $T \approx \Phi^2 \omega_2/R$. Der Motor hat dann annähernd volle Drehzahl und eine fallende Kennlinie von Nebenschlusscharakter. Bei langsamem Lauf ($\omega_2 \gg R/L$) wird $T \sim \omega_2^{-1}$: Die Kennlinie, über der Rotorfrequenz ω_1 aufgetragen, steigt hier an bis zum Maximum. Dieser steigende Kennlinienteil ist wegen seiner Instabilität nicht zum Arbeiten, sondern nur zum Anfahren brauchbar. Stabilität herrscht erst oberhalb des Maximums, das die „Kippfrequenz“ $\omega_1 = \omega - R/L$ und das „Kippmoment“ $T_R = \Phi^2/L$ bezeichnet.

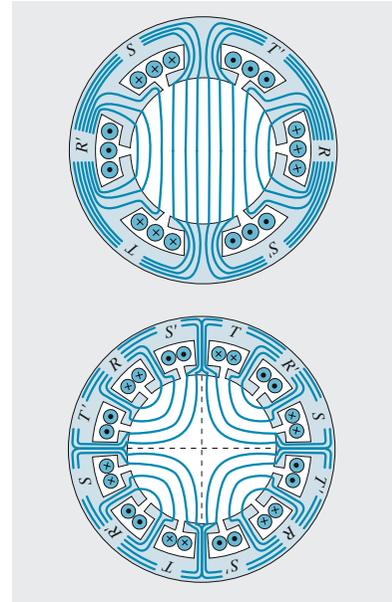


Abb. 7.92. Schnitt durch den Stator eines Drehstrom-Asynchron- oder Synchronmotors. Das Magnetfeld ist so eingezeichnet, als sei der Rotor darin. *Oben* ein Polpaar, *unten* zwei Polpaare

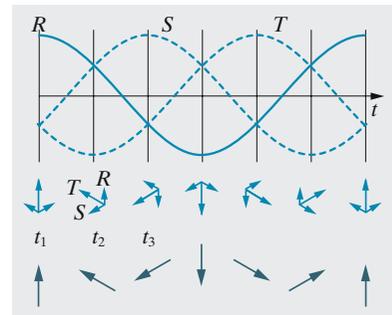


Abb. 7.93. *Oben*: Zeitlicher Verlauf der Ströme durch die drei Statorspulen eines Drehstrom-Asynchronmotors. *Mitte*: Stärke der Teilmagnetfelder der drei Spulen. *Unten*: Drehung des Gesamtmagnetfeldes

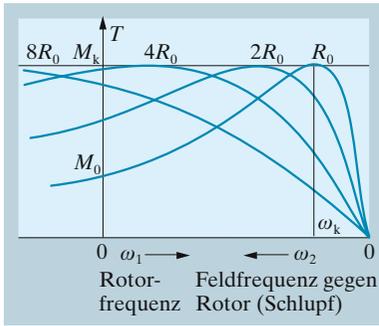


Abb. 7.94. Moment-Drehzahl-Kennlinie des Drehstrom-Asynchronmotors in Abhängigkeit vom Rotorwiderstand. Um das Anlaufmoment T_0 zu steigern, schaltet man dem Schleifringrotor Widerstände vor, die man nach dem Anlaufen wieder herausnimmt, um die Arbeitskennlinie möglichst steil zu machen. Stabil ist das Betriebsverhalten bei konstanter Last nur rechts von der **Kippdrehzahl** ω_k

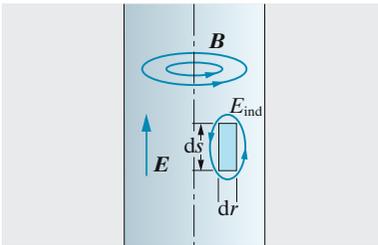


Abb. 7.95. Skineffekt

Der Anlaufvorgang erfolgt umso schneller, je größer das Moment bei $\omega_1 = 0$ ist. Sein Wert ist nach (7.52) $T_0 = \Phi^2 \omega R / (R^2 + \omega^2 L)$. Da im Allgemeinen $R \ll \omega L$, wird das **Anlaufmoment** umso größer, je größer R ist. Deswegen legt man vor den **Schleifringläufer** Anlasswiderstände, die man im Betriebszustand wieder weglässt, um die Kennlinie dort möglichst steil zu machen ($T = \Phi^2 \omega_2 / R$). Gleichzeitig bietet die R -Änderung eine allerdings verlustbehaftete Möglichkeit zur Drehzahländerung. Günstiger ist Änderung der Polpaarzahl p ; z. B. schaltet die Waschmaschine im Schleudergang meist auf $p = 1$ um und läuft dabei mit voller Netzfrequenz. Außerdem kann man heutzutage auch die Drehstromfrequenz ω_0 selbst regeln.

7.3.11 Skineffekt

Bei hoher Frequenz verteilt sich der Strom nicht über den ganzen Querschnitt eines zylindrischen Leiters mit gleicher Dichte, sondern drängt sich an die Oberfläche. Die Veranlassung zu diesem **Skin-** oder **Hauteffekt** ist die innere Selbstinduktion.

Durch ein Flächenelement $dr ds$ im Drahtinnern (Abb. 7.95) greift ein Magnetfeld hindurch, dessen Änderung ein elektrisches Wirbelfeld E_{ind} induziert. Es ist auf der der Achse zugewandten Seite dem angelegten Feld E entgegengerichtet, auf der anderen Seite gleichgerichtet. Das resultierende Feld muss also von der Achse nach außen zunehmen, ebenso wie der von ihm erzeugte Strom. Bei hohen Frequenzen wird der Strom fast vollständig an die Oberfläche verdrängt. In einer Tiefe $d = \sqrt{2\rho / (\mu_r \mu_0 \omega)}$ ist er bereits auf e^{-1} abgefallen (ρ , μ_r spezifischer Widerstand und Permeabilität des Drahtes, ω Kreisfrequenz). Eine weitere Folge der inneren Selbstinduktion ist eine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

Der Skineffekt führt dazu, dass ein Draht für hochfrequenten Wechselstrom einen höheren Widerstand hat als für Gleichstrom. Wenn die Dicke d der effektiv leitenden Schicht klein gegen den Drahtdurchmesser ist, bestimmt nicht mehr der Querschnitt, sondern der Umfang den Widerstand. Daher verwendet man als Hochfrequenzleiter dünnwandige Rohre oder Litzen.

Die vollständige Theorie des Skineffektes ist ziemlich kompliziert. Wir geben eine Kurzfassung. Selbst bei den höchsten technisch erreichbaren Frequenzen spielt in guten Leitern der Verschiebungsstrom \dot{D} keine Rolle gegen die Stromdichte j . Man sieht das aus dem Vergleich von $\dot{D} = \omega \epsilon_0 E$ mit $j = \sigma E$. Für $\omega \ll \sigma / \epsilon_0 \approx 10^{18} \text{ s}^{-1}$ ist $\dot{D} \ll j$. Die Maxwell-Gleichungen lauten dann

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{j} = -\mu_r \mu_0 \dot{\mathbf{H}}.$$

Elimination von \mathbf{H} führt auf $\text{rot rot } \mathbf{j} = \sigma \mu_r \mu_0 \dot{\mathbf{j}}$. Die zeitliche Ableitung entspricht einer Multiplikation mit ω , die zweimalige räumliche (rot rot) einer zweimaligen Multiplikation mit der reziproken Schichtdicke, auf der der Stromabfall auf e^{-1} erfolgt:

$$\frac{1}{d^2} \mathbf{j} \approx \omega \sigma \mu_r \mu_0 \dot{\mathbf{j}}. \quad (7.53)$$

Das ist die oben angegebene Beziehung für d , hier für eine Platte.

7.4 Elektromagnetische Wellen

Die Eleganz von *Maxwells* Gleichungen begeisterte *Ludwig Boltzmann* zu dem Ausruf: „War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb . . . ?“ Die Symmetrie zwischen Elektrizität und Magnetismus wurde damit vollständig: Wenn sich ein elektrisches Feld ändert, entsteht ein Magnetfeld. Als *Heinrich Hertz* dann die theoretisch postulierten elektromagnetischen Wellen erzeugte, begann eine Entwicklung, die heute an Tempo fast noch zunimmt.

Unsere bisherige Darstellung der elektromagnetischen Erscheinungen umfasste drei Stufen, gekennzeichnet durch folgende Sätze:

1. Ruhende elektrische Ladungen erzeugen elektrische Felder, deren Feldlinien in den Ladungen beginnen oder enden:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho .$$

2. Ströme, d. h. bewegte Ladungen, erzeugen Magnetfelder, deren geschlossene Feldlinien die Ströme umkreisen:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} .$$

3. Sich ändernde Magnetfelder erzeugen elektrische Felder, deren geschlossene Feldlinien die Änderungsrichtung des Magnetfeldes umkreisen:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} .$$

Zum Verständnis der elektromagnetischen Wellen fehlt ein vierter Schritt. *Maxwell* ermöglichte ihn durch die Einführung des „Verschiebungsstromes“.

7.4.1 Der Verschiebungsstrom

Wenn ein Kondensator (etwa in einem Schwingkreis) aufgeladen wird, so fließt überall im Kreis ein Ladestrom I , nur zwischen den Kondensatorplatten ist er plötzlich unterbrochen. Wenn der Plattenzwischenraum mit einem Dielektrikum gefüllt ist, so fließt eigentlich auch dort ein allerdings nicht direkt messbarer Strom I_1 , repräsentiert durch die Verschiebung der Ladungen im Dielektrikum. Die Platten des Kondensators mögen die Fläche A und den Abstand d haben. Die Polarisation P des Dielektrikums entspricht einer Ladung $\pm PA$ direkt vor den Platten, ihre Änderung \dot{P} einem Strom $I_1 = \dot{P}A$. Nach (6.47) ist $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, also lässt sich der gesamte Ladestrom darstellen als

$$I = \underset{1}{\dot{Q}} = \underset{2}{C\dot{U}} = \underset{3}{C\dot{E}d} = \underset{4}{\epsilon\epsilon_0 A \dot{E}} = \underset{5}{\dot{D}A} = \underset{6}{\epsilon_0 \dot{E}A + \dot{P}A} . \quad (7.54)$$

Erläuterungen zu den Schritten der Umformung (vgl. Nummern der Gleichheitszeichen): (1) Strom ist Ladungsänderung; (2) Definition der Kapazität; (3) Definition der Feldstärke bzw. der Spannung; (4) Kapazität des Plattenkondensators; (5) Definition von D ; (6) Definition von P .

Äußerst rechts in (7.54) taucht der Strom $I_1 = \dot{P}A$ wieder auf, der in der Ladungsverschiebung im Dielektrikum besteht. *Maxwell* fasste nun auch das Glied $\epsilon_0\dot{E}A$ als Teil eines *Verschiebungsstromes* auf, der sogar

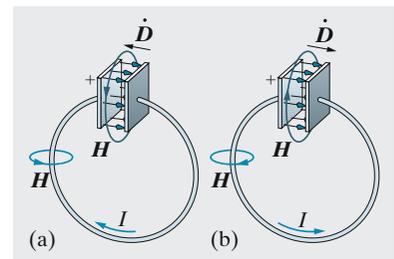


Abb. 7.96a,b. Wenn der Kondensator sich lädt, umspannt das Magnetfeld nicht nur den Draht, sondern auch die D -Änderung zwischen den Platten. Dargestellt sind die Felder kurz vor bzw. nach Erreichen der maximalen Aufladung

im Vakuum fließen soll, wenn sich das elektrische Feld dort ändert. Der vollständige Verschiebungsstrom

$$I_V = \varepsilon_0 \dot{E}A + \dot{P}A = \varepsilon\varepsilon_0 \dot{E}A = \dot{D}A$$

sorgt dann dafür, dass der Stromkreis, auch über den Kondensatorzwischenraum hinweg, völlig geschlossen ist. Die **Verschiebungsstromdichte**

$$\boxed{j_V = \dot{D}} \quad (7.55)$$

soll danach völlig gleichwertig einer Leitungsstromdichte j_L sein, wie sie im Metall fließt. Diese Begriffsbildung bewährt sich, wenn sich zeigt, dass ein Verschiebungsstrom, also eine zeitliche Änderung des elektrischen Feldes, ebenso ein Magnetfeld um sich herum erzeugt, wie das ein Leitungsstrom tut. Man hat dann das Recht, die Gleichung $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_L$ zur vollständigen maxwellschen Gleichung

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_V + \mathbf{j}_L = \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{j}_L} \quad (7.56)$$

zu ergänzen. Alle diese Annahmen bestätigen sich empirisch vollkommen.

× Beispiel . . .

In einem Leitermaterial mit dem spezifischen Widerstand ϱ fließt ein Wechselstrom der Frequenz ω . Welche relativen Rollen spielen der Verschiebungsstrom \dot{D} und der Leitungsstrom?

Das elektrische Feld ist E , die Stromdichte $j = E/\varrho$, die Verschiebungsstromdichte $\dot{D} = \varepsilon_0 \dot{E} = \varepsilon_0 \omega E$, also $j/\dot{D} = 1/(\varepsilon_0 \omega \varrho)$. Bei $\varrho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ (Cu) überwiegt der Leitungsstrom bis $\omega \approx 10^{19} \text{s}^{-1}$. Bei einem Isolator mit $\varrho = 10^{12} \Omega\text{m}$ (Porzellan) überwiegt schon ab $\omega \approx 0,1 \text{s}^{-1}$ der Verschiebungsstrom.

7.4.2 Der physikalische Inhalt der Maxwell-Gleichungen

Damit ist der vollständige Satz von Feldgleichungen gewonnen, die wir nochmals in differentieller und integraler Form zusammenstellen:

differentiell	integral	
$\text{rot } \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{j}$,	$\oint_K \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} + I$	(7.57)
$\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$,	$\oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$	
$\text{div } \mathbf{D} = \varrho$,	$\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q$	
$\text{div } \mathbf{B} = 0$,	$\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$.	

In den ersten beiden Integralgleichungen bezeichnet K die Kurve, die die Fläche A umrandet. In den unteren Gleichungen bezeichnet A die Oberfläche eines Volumens, das z. B. die Ladung Q umschließt.

Bis auf die Tatsache, dass es elektrische, aber keine magnetischen Ladungen und Ströme gibt, drücken diese Gleichungen eine völlige Symmetrie zwischen elektrischem und magnetischem Feld aus:

Ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld. Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.

Die Richtungsverhältnisse zwischen $\dot{\mathbf{D}}$ und \mathbf{H} einerseits und $\dot{\mathbf{B}}$ und \mathbf{E} andererseits folgen der Rechtehand- bzw. Linkehandregel (Abb. 7.97–7.99).

Jede Änderung eines Magnetfeldes induziert in einem Leiter, der das Feld umfasst, eine Spannung. Wird der Leiter zum Ring geschlossen, so fließt in ihm ein Strom, der seinerseits ein (sekundäres) Magnetfeld erzeugt. In Abb. 7.99 sei $\dot{\mathbf{B}}$ die Änderung des Primärfeldes, entsprechend einer Zunahme von \mathbf{B} . Das sekundäre Feld ist stets $\dot{\mathbf{B}}$ entgegengerichtet (Lenzsche Regel, oder Rechtehand- und Linkehandregel). Die maxwellschen Gleichungen behaupten, dass all dies auch richtig ist, wenn kein Leiter das sich ändernde Magnetfeld umspannt, in dem man die induzierten elektrischen Felder durch einen Strom direkt nachweisen könnte. Es besteht nur ein Unterschied: In dem Spezialfall, wo das primäre Magnetfeld linear mit der Zeit anwächst, d. h. $\dot{\mathbf{B}}$ konstant ist, induziert es um sich ein *konstantes* elektrisches Wirbelfeld. Ist ein Leiter vorhanden, so fließt ein Gleichstrom, dessen sekundäres Magnetfeld ebenfalls konstant ist. Ohne einen Leiter hat das konstante elektrische Wirbelfeld keine weiteren Folgen. Anders, wenn sich das primäre Magnetfeld nicht mit konstanter Geschwindigkeit ändert, z. B. wenn es von einem mit Wechselstrom betriebenen Magneten stammt. Mit $\dot{\mathbf{B}}$ ist dann auch das induzierte elektrische Wirbelfeld zeitlich veränderlich und erzeugt daher (gleichgültig ob ein Leiter da ist oder nicht) um sich herum wieder ein Magnetfeld, und so weiter.

7.4.3 Ebene elektromagnetische Wellen

Die Folgerung aus den maxwellschen Gleichungen, dass elektrische und magnetische Felder sich gegenseitig induzieren können, ist ganz analog der Tatsache, dass eine Kompression in einem Gas einen Druck erzeugt, der seinerseits wieder die Umgebung zu deformieren sucht. *Maxwell* fragte sich daher sofort, ob es nicht analog zu den elastischen Wellen auch elektromagnetische Wellen gebe und welche Eigenschaften sie haben müssten.

Wir versuchen, die einfachste Wellenform zu konstruieren: Eine ebene harmonische Welle. Sie möge sich in x -Richtung fortpflanzen. Das elektrische Feld \mathbf{E} soll sich also mit Ort und Zeit ändern wie

$$\boxed{\mathbf{E} = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)} \quad (7.58)$$

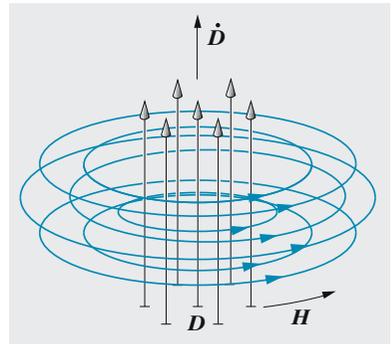


Abb. 7.97. Ein sich änderndes elektrisches Feld erzeugt ein Magnetfeld

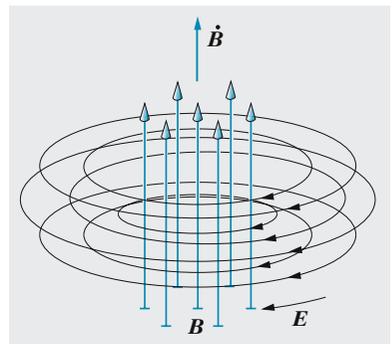


Abb. 7.98. Ein sich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Feld

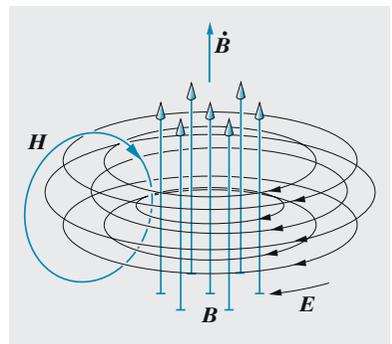


Abb. 7.99. Bei nichtkonstantem $\dot{\mathbf{B}}$ erzeugt das veränderliche \mathbf{E} ein weiteres Magnetfeld \mathbf{H}

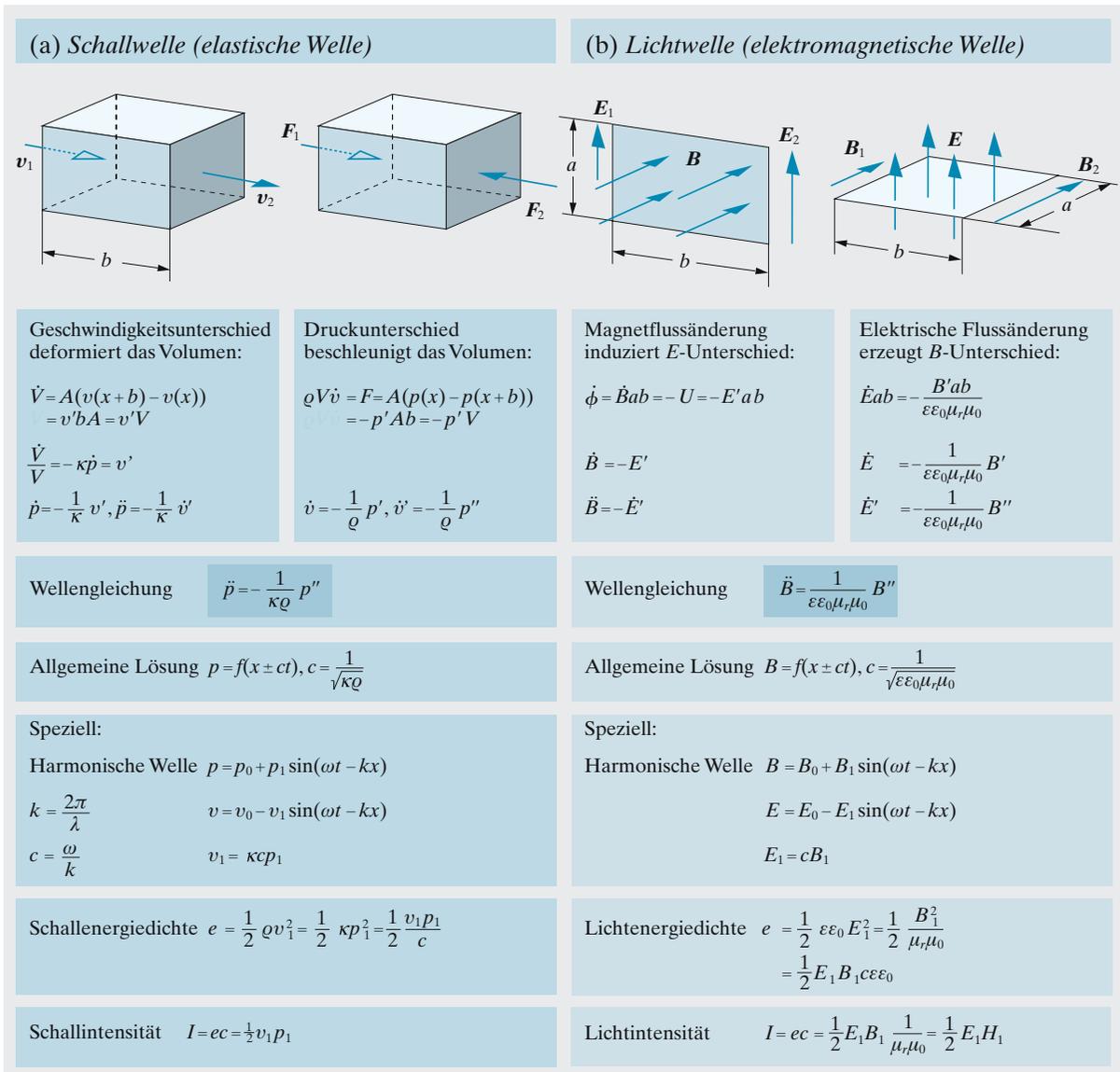


Abb. 7.100. (a) Schallwelle (elastische Welle), (b) Lichtwelle (elektromagnetische Welle)

v und ω sind Ausbreitungsgeschwindigkeit und Kreisfrequenz der hypothetischen Welle, $\lambda = 2\pi v/\omega$ ist ihre Wellenlänge. Mit dem elektrischen Feld muss ein Magnetfeld \mathbf{B} mit der Amplitude \mathbf{B}_0 verbunden sein, das sich ebenfalls harmonisch mit Ort und Zeit ändert, das durch die \mathbf{E} -Änderung erzeugt wird und dessen Änderung ihrerseits das \mathbf{E} -Feld erzeugt. Mittels der maxwellischen Gleichungen stellen wir Folgendes fest:

- Elektromagnetische Wellen müssen **transversal** sein. Denn wenn \mathbf{D} oder \mathbf{B} in der Ausbreitungsrichtung lägen oder auch nur eine Komponente in dieser Richtung hätten, würde nach Abb. 7.101 der Raum von abwechselnden Feldquellen und Feldsenken erfüllt sein. Dies ist im la-

dungsfreien Raum für \mathbf{D} nicht möglich, und für \mathbf{B} überhaupt nirgends. \mathbf{D} und \mathbf{B} stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. *Elektromagnetische Wellen sind transversal.* Dies folgt aus den maxwellischen Gleichungen $\text{div } \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{B} = 0$.

Die anderen beiden maxwellischen Gleichungen arbeiten in ihrer Integralform mit einer Integrationsfläche A , dem (elektrischen oder magnetischen) Fluss, der durch sie tritt, und der (magnetischen oder elektrischen) Umlaufspannung um den Rand dieser Fläche A . Wir denken diese Fläche durch einen rechteckigen Rahmen realisiert, der eine halbe Wellenlänge lang ist und beliebige Breite b hat und den wir im Feld beliebig drehen und verschieben können (Abb. 7.102). Damit weisen wir nach:

- \mathbf{B} steht senkrecht auf \mathbf{E} . Denn dreht man den Rahmen um die x -Richtung, so fängt er umso mehr $\dot{\mathbf{D}}$ ein, je mehr man ihn senkrecht zu \mathbf{E} stellt. Gleichzeitig muss man wegen $\oint_K \mathbf{H} \, ds = \int_A \dot{\mathbf{D}} \, df$ maximales \mathbf{H} haben. Das ist nur möglich, wenn $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ ist.
- \mathbf{E} und \mathbf{H} sind in Phase, d. h. haben ihre Maxima an der gleichen Stelle. Verschiebt man nämlich den Rahmen so, dass er maximales $\dot{\mathbf{D}}$ einfängt – das ist der Fall, wenn er vom Berg zum Tal von \mathbf{E} reicht – wird auch die magnetische Umlaufspannung maximal, d. h. \mathbf{H} hat ebenfalls sein Maximum bzw. Minimum auf dem Rahmenrand.
- Schreibt man die Flüsse und Umlaufspannungen für diese optimale Lage des Rahmens auf, so erhält man mit der ersten maxwellischen Gleichung

$$\begin{aligned} \int_A \dot{\mathbf{D}} \, df &= b \int_{\lambda/4}^{3\lambda/4} \varepsilon \varepsilon_0 \dot{E} \, dx = b \varepsilon \varepsilon_0 \omega E_0 \int_{\lambda/4}^{3\lambda/4} \cos \frac{\omega x}{v} \, dx \\ &= b \varepsilon \varepsilon_0 \omega \frac{v}{\omega} E_0 \cdot 2 = \oint_K \mathbf{H} \, ds = 2bH_0 \end{aligned}$$

oder

$$H_0 = \varepsilon \varepsilon_0 v E_0 . \tag{7.59}$$

Ganz analog folgt aus der zweiten maxwellischen Gleichung

$$E_0 = \mu_r \mu_0 v H_0 . \tag{7.60}$$

Setzt man eine dieser Gleichungen in die andere ein, so erhält man für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}} . \tag{7.61}$$

Die vier Feldvektoren hängen also zusammen wie

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} H_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}} B_0 = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} D_0 . \tag{7.62}$$

$Z_W = E_0 / H_0 = \sqrt{\mu_r \mu_0 / (\varepsilon \varepsilon_0)}$ heißt **Wellenwiderstand** des Mediums (vgl. Aufgabe 7.3.11). Im Vakuum ist

$$Z_W = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376,7 \, \Omega .$$

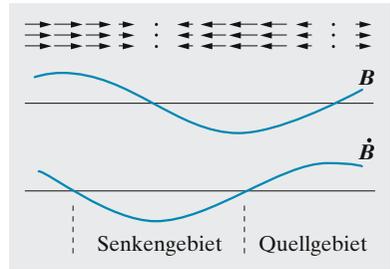


Abb. 7.101. Ein longitudinales elektromagnetisches Feld hätte abwechselnd Quellen und Senken für elektrische und magnetische Ladung

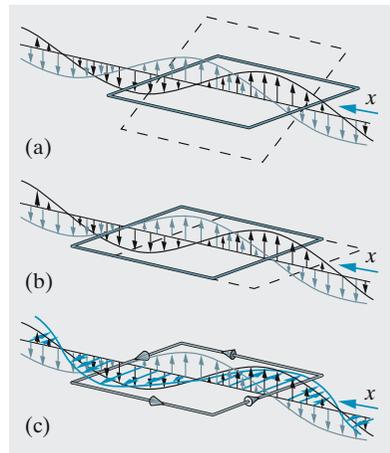


Abb. 7.102a–c. Elektromagnetische Welle (fortschreitende ebene Welle). (a) Der Messrahmen fängt am meisten $\dot{\mathbf{D}}$ auf, wenn er senkrecht zu \mathbf{D} steht, und zwar so (b), dass er eine volle $\dot{\mathbf{D}}$ -Halbwelle umfasst; (c) \mathbf{H} ist also senkrecht zu \mathbf{D} und in Phase mit ihm. (\rightarrow) \mathbf{D} , (\rightarrow) $\dot{\mathbf{D}}$, (\rightarrow) \mathbf{H}

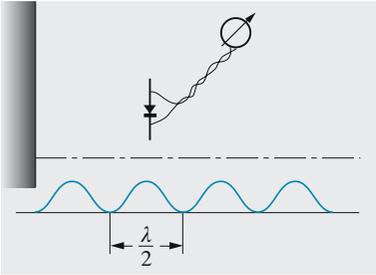


Abb. 7.103. Zum Nachweis freier stehender elektromagnetischer Wellen

Im Vakuum ($\varepsilon = \mu_r = 1$) breiten sich also elektromagnetische Wellen mit der Geschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (7.63)$$

aus, d. h. mit derselben Geschwindigkeit wie das Licht. Der Verdacht liegt daher nahe, dass Licht nichts anderes als eine elektromagnetische Welle ist (s. Abschn. 9.3).

Abgesehen von dieser ungeheuer weittragenden Einschmelzung der ganzen Optik in die Elektrodynamik kann man elektromagnetische Wellen aber auch direkt im Labor herstellen. *Heinrich Hertz* gelang dies 1880 zum ersten Mal, nachdem *Maxwell* sie 1865 theoretisch vorausgesagt hatte. Die Erzeugung solcher Wellen wird in den Abschn. 7.4.5 bis 7.4.10 besprochen. Lässt man sie auf eine hinreichend weit von der Quelle entfernte Metallfläche auffallen (Abb. 7.103), so entstehen davor stehende Wellen. Die Metalloberfläche ist dabei eine Knotenfläche für E , weil im Metall kein elektrisches Feld herrschen kann. Weitere Knoten liegen parallel zum Spiegel in Abständen einer halben Wellenlänge. In der Mitte zwischen ihnen sind Bäuche, d. h. Orte maximaler Feldstärke. Man weist diese periodische Verteilung des elektrischen Wechselfeldes mit einer Antenne nach, d. h. einem geraden Draht, der durch einen Gleichrichter oder Detektor unterbrochen und an ein Galvanometer angeschlossen ist. Abbildung 7.103 zeigt die räumliche Verteilung der Galvanometerauslässe. In den beiden dazu senkrechten Richtungen würde kein Antennenstrom fließen, weil die Welle des Senders transversal und zudem polarisiert ist (Abschn. 10.2.1).

× Beispiel . . .

Die Sonne strahlt der Erde rund $1\,400 \text{ W/m}^2$ zu (Solarkonstante). Wie groß sind E , B , D , H in der Sonnenstrahlung (Effektiv- und Maximalwerte)? Spielt es eine Rolle, dass das Sonnenlicht „weiß“ und unpolarisiert ist?

In der ebenen Welle ist E senkrecht zu H , beide Felder sind in Phase. Also ist der **Poynting-Vektor** $S = EH = S_0 \cos^2 \omega t$, der mittlere Energiefluss $\bar{S} = \frac{1}{2} S_0 = \frac{1}{2} E_0 H_0 = 1,4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$. Andererseits ist $H_0 = E_0 \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0}$. Es folgt $E_0 = 1\,000 \text{ V/m}$, $H_0 = 2,6 \text{ A/m}$, $B_0 = 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ T}$, Spektrum und Polarisation spielen hier keine Rolle.

In Materie breiten sich elektromagnetische Wellen nach (7.61) i. Allg. langsamer aus: $v = c / \sqrt{\varepsilon \mu_r}$ oder, da für die in Frage kommenden Stoffe $\mu \approx 1$ ist:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (7.64)$$

Diese **Maxwell-Relation** würde in optischer Sprache durch eine Brechzahl

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon} \quad (7.65)$$

ausgedrückt werden. Diese Beziehung zwischen einer rein optischen und einer rein elektrischen Größe trifft tatsächlich in vielen Fällen zu (Ausnahmen und ihre Gründe s. Abschn. 10.3.3), was der elektromagnetischen Lichttheorie als weitere Stütze dient.

7.4.4 Energiedichte und Energieströmung

Eine ebene ungedämpfte Welle hat nach (7.62) die **Energiedichte**

$$e = \frac{1}{2}(ED + HB) = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu_r\mu_0 H^2$$

(vgl. (6.54)). Die Energie der Welle steckt zur Hälfte im elektrischen, zur Hälfte im magnetischen Feld. Räumlich ist die Energie in plattenförmigen Bündeln konzentriert, dort, wo E und H maximal sind. Dazwischen liegen energiearme Zonen. Die Energiebündel wandern mit der Geschwindigkeit $v = 1/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_r\mu_0}$. Das bedeutet einen Energiestrom mit der Dichte

$$S = ev = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_r\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}} E^2 = EH. \quad (7.66)$$

Diese Energie strömt senkrecht zu E und H , die beide ihrerseits senkrecht aufeinander stehen. Alle diese Eigenschaften drückt der **Poynting-Vektor**

$$\boxed{S = E \times H} \quad (7.67)$$

aus, der ganz allgemein die **Energiestromdichte** im elektromagnetischen Feld angibt.

Die Bedeutung des Poynting-Vektors ist keineswegs auf dynamische Felder beschränkt. In Abb. 7.104 ist eine Gleichstromsituation gezeigt, in welcher der Spannungsabfall zwischen den beiden Zuleitungen zum Widerstand R offensichtlich ein elektrisches Feld verursacht. Gleichzeitig gehört zu jedem Leiter das tangential magnetische Feld nach Abschn. 7.2.1. Der Poynting-Vektor führt dann entlang der Doppelleitung und charakterisiert den Energietransport. Sind die Zuleitungen nicht widerstandslos, so entsteht ein Spannungsabfall auch direkt entlang der Leitungen. Dann existiert ein elektrisches Feld parallel zur Leitung und auch direkt außerhalb der Leitung. Also muss ein Poynting-Vektor radial nach innen zeigen, der in diesem Abschnitt verbrauchten Leistung entspricht.

7.4.5 Der lineare Oszillator

Beim Schwingkreis für Frequenzen bis zu einigen MHz (Abb. 7.72) bleibt das elektrische Feld praktisch auf den Kondensator und das magnetische auf die Spule beschränkt. Um die Eigenfrequenz weiter zu steigern, muss man C und L so sehr verkleinern, dass man schließlich gar nicht mehr eine Spule zu wickeln oder Platten an die Drahtenden zu löten braucht, sondern dass der Leitungsdraht selbst schon Kapazität und Induktivität genug hat. Elektrisches und magnetisches Feld umgeben dann den gesamten Draht und sind räumlich nicht mehr getrennt. Aus dem Schwingkreis entwickelt sich so entweder der **Hohlraumoszillator**, bei dem elektrisches und magnetisches Feld einen leitend umschlossenen Hohlraum erfüllen, oder der lineare Oszillator, bei dem beide einen linearen Leiter umgeben (Abb. 7.117, 7.105).

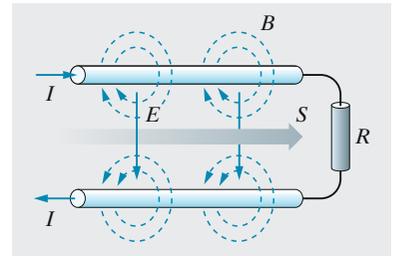


Abb. 7.104. Der Energietransport kann auch im Gleichstromfall mit dem Poynting-Vektor erklärt werden

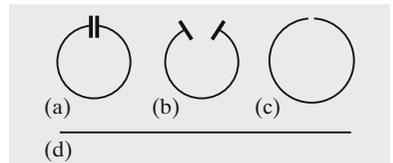


Abb. 7.105a–d. Übergang vom geschlossenen zum offenen Schwingkreis und zum Hertz-Oszillator



Abb. 7.106. Nachweis der Schwingungen durch eine in den Kreis geschaltete Glühlampe

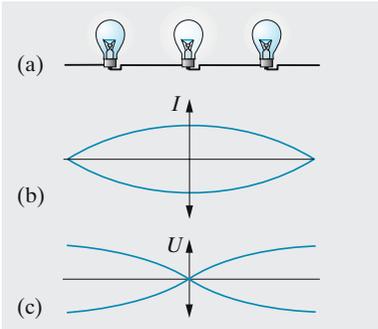


Abb. 7.107a–c. Die Verteilung von Stromstärke und Spannung in einem Hertz-Oszillator. Die zur Spannungsverteilung(c) gehörige Feldstärke zeigt die gleiche Form wie (b)

Nach Abb. 7.105 kommt man vom Schwingkreis zum linearen Oszillator durch Verkleinerung des Kondensators und Streckung der Spule. Schwingkreis wie linearen Oszillator kann man z. B. durch induktive Kopplung mit einem Röhrensender erregen (Abschn. 8.2.8). Zum Nachweis der Schwingungen baut man z. B. eine Glühlampe ein (Abb. 7.106). Sie leuchtet am hellsten, wenn die Eigenfrequenz des Kreises mit der Senderfrequenz übereinstimmt. Die **Abstimmung** kann beim Schwingkreis durch Abstands- oder Größenänderung der Kondensatorplatten erfolgen, beim linearen Oszillator durch Längenänderung (Ausziehen ineinander gesteckter Rohre). Man findet, dass die Resonanz beim linearen Oszillator viel weniger scharf ist als beim Schwingkreis, was nach Abschn. 4.1.3 auf eine viel höhere Dämpfung schließen lässt. Die hohe Dämpfung des linearen Oszillators kann nicht allein auf jouleschen Wärmeverlusten im Leiter beruhen; der ohmsche Widerstand des geraden Leiters ist ja nicht größer, als wenn er wie in Abb. 7.105 zum Kreis bzw. zur Spule gebogen ist. Beim Hertz-Oszillator kommen zu den Verlusten an joulescher Wärme noch *Energieverluste durch Ausstrahlung* hinzu (**Strahlungsdämpfung**).

Bringt man einen Hertz-Oszillator der Länge l_0 , der in Luft Resonanz zeigt, in ein Dielektrikum, z. B. in Wasser ($\epsilon = 81$), dann muss er, um auf die gleiche Sendefrequenz abgestimmt zu sein, auf $l_0/\sqrt{\epsilon}$ verkürzt werden. Bei einer solchen Verkürzung nehmen Kapazität und Induktivität des geraden Leiters proportional zur Länge ab, ihr Produkt LC dividiert sich also durch ϵ . Beim Einbetten ins Wasser hat sich aber vorher die Kapazität mit ϵ multipliziert. Im Ganzen ist also LC und damit nach der Thomson-Formel ω unverändert geblieben.

Bringt man im Oszillator noch weitere Glühlampen an (Abb. 7.107a), so leuchten sie umso weniger hell, je weiter sie von der Mitte entfernt sind. Längs des Oszillators ist also die effektive Stromstärke nicht konstant: Sie hat in der Mitte ein Maximum und ist an den Enden Null (Abb. 7.107b). Diese Stromverteilung schwingt zeitlich mit gleicher Phase über die ganze Stablänge; im Abstand einer halben Schwingungsdauer folgen einander Zustände, wo der Strom überall verschwindet; dazwischen liegen Zustände maximalen Stromes in beiden Richtungen. Die Spannungsverteilung (Abb. 7.107c) ist so, dass das Feld ebenfalls in der Stabmitte am größten ist. Strom und Spannung sind zeitlich gegeneinander um $\pi/2$ verschoben, wie dies einem rein induktiven Widerstand entspricht: Das elektrische Feld ist räumlich und zeitlich proportional zur Änderungsgeschwindigkeit des Stromes.

Abbildung 7.107b stimmt mit Abb. 4.54b überein, die die Verschiebung der Teilchen eines beiderseits fest eingespannten elastischen Stabes in der longitudinalen Grundschwingung darstellt. In beiden Fällen handelt es sich um eine stehende Welle, deren Wellenlänge doppelt so lang ist wie der Stab. Eine solche stehende Welle kann als Überlagerung einer hin- und einer zurücklaufenden Welle aufgefasst werden. Wenn die elektrische Welle mit der Phasengeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8$ m/s läuft, so ergibt sich die Schwingungsfrequenz des linearen Oszillators der Länge l als

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l}. \quad (7.68)$$

Die Annahme, dass die Welle mit der Geschwindigkeit c über den Stab läuft, ist berechtigt, denn der wesentliche Teil der Vorgänge spielt sich nicht

im Stab, sondern im umgebenden Raum ab (Umwandlung des elektrischen Feldes in ein Magnetfeld und umgekehrt). Solche Feldumwandlungen breiten sich aber nach (7.61) mit Lichtgeschwindigkeit aus.

7.4.6 Die Ausstrahlung des linearen Oszillators

Für die Stromverteilung in Abb. 7.107b folgt aus der Kontinuitätsgleichung: Da nicht überall im Stab der gleiche Strom fließt, häuft sich in der Umgebung eines Endes Ladung an, am anderen wird sie weggeschafft. Diese Ladunganhäufungen sind maximal in den Phasen, wo nirgends mehr Strom fließt. Dann hat der Stab ein maximales Dipolmoment, das sich allerdings sofort wieder abbaut. Der Hertz-Oszillator ist ein schwingender Dipol. Sein elektrisches Feld ändert sich ebenso wie sein Dipolmoment mit der Periode der Schwingung. Das elektrische Feld eines *konstanten* Dipols erfüllt den ganzen Raum wie in Abb. 6.8 bis 6.11. Wenn aber beim Hertz-Oszillator der Dipol in einigen Nanosekunden entsteht, wieder vergeht und mit umgekehrtem Vorzeichen neu entsteht, so können die Feldlinien innerhalb dieser Zeit nicht unendlich weit vordringen, wieder verschwinden und mit umgekehrtem Vorzeichen wieder auftauchen. Vielmehr kann das Feld in einer Zeit t nur bis zum Abstand $r = ct$ vordringen, m. a. W.: Das Feld in einem Abstand r wird durch den Zustand des Oszillators bestimmt, wie er vor der Zeit $t = r/c$ war. Die zeitlich aufeinander folgenden Zustände des Dipols setzen sich also um in räumlich einander mit der Geschwindigkeit c nachjagende elektrische Felder. Dabei ist der räumliche Abstand zwischen zwei Feldlinienbündeln maximaler Dichte, aber verschiedener Richtung gleich einer halben Schwingungsperiode multipliziert mit c , also einer halben Wellenlänge. Maximales *Magnetfeld* entspricht den Phasen maximalen Stromes im Oszillator, die um $\pi/2$ gegen die Phasen maximalen Dipolmomentes, also maximalen elektrischen Feldes verschoben sind. Räumlich liegen also die Bündel der Magnetfeldlinien immer zwischen zwei elektrischen Bündeln.

Allerdings verhalten sich die Felder des schwingenden Oszillators nur bis zu einer gewissen Entfernung wie das elektrische Feld eines Dipols bzw. das Magnetfeld eines Biot-Savartschen „Leiterelementes“. In Abständen, die groß gegen die Wellenlänge sind (in der **Wellenzone**), speisen sich elektrisches und Magnetfeld durch gegenseitige Induktion. Wenn z. B. das Magnetfeld, an einer bestimmten Stelle betrachtet, sich zeitlich mit dem Durchlaufen der Welle periodisch ändert, induziert es dadurch ein elektrisches Feld und umgekehrt. Die Verhältnisse sind hier praktisch die gleichen wie in der ebenen elektromagnetischen Welle (Abschn. 7.4.3): Elektrisches und Magnetfeld sind in Phase und stehen senkrecht aufeinander.

Um die Struktur des ausgestrahlten Feldes quantitativ zu verstehen, denke man sich Kugeln um den Oszillator gelegt, deren Achse mit der Stabrichtung zusammenfällt. In der Nah- und in der Wellenzone liegen die elektrischen Feldlinien im Wesentlichen in den Meridianen, die magnetischen in den Breitenkreisen dieser Kugel. Der **Poynting-Vektor** $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ zeigt also überall radial nach außen; er kennzeichnet ja die Flussdichte der abgestrahlten Energie. Durch zwei konzentrische Kugeln muss die gleiche Gesamtenergie fließen, da ja zwischen den Kugeln keine Energiequelle sitzt. Die Poynting-Vektoren an zwei entsprechenden Stellen

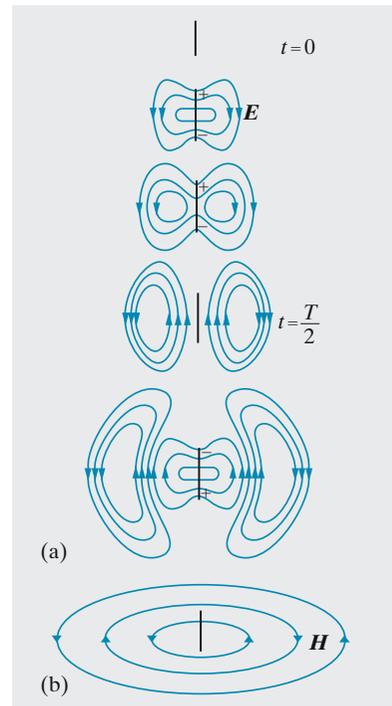


Abb. 7.108a,b. Das elektrische und magnetische Feld in der Umgebung eines **Hertz-Oszillators**. Die elektrischen Feldlinien, welche mit wachsendem Moment des schwingenden Dipols sich in den umgebenden Raum hinein ausbreiten, kehren während der Abnahme des Moments nicht zurück. Nach der Zeit $T/2$ haben sie sich von den Ladungen des Dipols gelöst. Das entstandene elektrische Wirbelfeld mit den charakteristischen nierenförmigen Feldlinien entfernt sich mit Lichtgeschwindigkeit vom Sender. Nach $T/2$ quellen wieder, nun aber mit umgekehrter Richtung, Feldlinien aus dem Dipol. So löst sich nach jeder halben Periode ein Bündel elektrischer Feldlinien ab. Der Strom im Oszillator erzeugt ein Magnetfeld, dessen Feldlinien Kreise sind, wie in (b) dargestellt. Auch ihre Richtung ändert sich nach jeder halben Periode. Gemäß den Maxwell-Gleichungen miteinander gekoppelt, pflanzen sich die elektrischen und magnetischen Felder gemeinsam fort

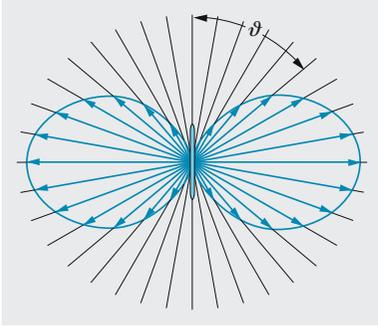


Abb. 7.109. Das Strahlungsdiagramm eines Hertz-Oszillators. Es besteht Rotationssymmetrie um die Dipolachse

einer Kugel müssen sich daher verhalten wie ihre reziproken Oberflächen: $S \sim r^{-2}$. Da E und H wiederum einander proportional sind, muss jedes von ihnen mit dem Abstand abnehmen wie r^{-1} :

$$S = EH \sim r^{-2}, \quad H \sim E \sim r^{-1}. \quad (7.69)$$

Jetzt fehlt nur noch die Abhängigkeit der Feldstärken vom Ort auf der Kugel. Aus Symmetriegründen ist ausgeschlossen, dass eine „Längenabhängigkeit“ vorliegt, denn das ganze Problem ist völlig symmetrisch gegenüber Rotationen um seine Achse. Eine Breitenabhängigkeit muss dagegen bestimmt vorhanden sein. Wäre z. B. das elektrische Feld an den Polen so groß wie am Äquator, so würde dort, wo alle Feldlinien zusammen- bzw. auseinander laufen, eine Feldsenke bzw. -quelle anzusetzen sein. Da dort aber keine Ladungen sitzen, ist das unmöglich: E und damit auch H müssen nach den Polen hin abnehmen, und zwar genau wie das Dipolfeld wie $\sin \vartheta$ (vgl. (6.28)). Ihr Produkt S geht sogar mit $\sin^2 \vartheta$.

Ein reines Dipolfeld $E = p/(4\pi\epsilon_0 r^3) \sin \vartheta$ liegt allerdings nur in der Nahzone vor. Wenn es sich zeitlich sinusförmig ändert, ist \dot{E} einfach ωE . Auf einem kleinen Kreis in der Äquatorialebene des Dipols fällt die Zirkulation $2\pi r H = \pi r^2 \epsilon_0 \dot{E}$ an, also $H = \frac{1}{2} \epsilon_0 r \omega E = p\omega/(8\pi r^2)$. Wird der Kreis zu groß, hat an verschiedenen Stellen das E -Feld verschiedene Phasen. Damit der obige Ausdruck für H ungefähr gilt, muss also $r \ll \lambda$ sein. Weiter außen gilt annähernd der Zusammenhang (7.59): $H = \epsilon_0 c E$ wie für die ebene Welle. Wegen $\omega\lambda = c$ gehen in der Tat bei $r = \lambda$ beide Fälle ineinander über.

Für $r = \lambda$ erhalten wir also

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\lambda^3} \sin \vartheta, \quad H = \frac{p\omega}{8\pi\lambda^2} \sin \vartheta, \quad S = \frac{p^2\omega}{32\pi^2\epsilon_0\lambda^5} \sin^2 \vartheta, \quad (7.70)$$

und durch Integration über die Kugelfläche vom Radius λ als gesamte Strahlungsleistung

$$P = \frac{p^2\omega}{12\pi\epsilon_0\lambda^3} = \frac{p^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}, \quad \text{weil } \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \sin^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi = \frac{8\pi}{3}.$$

Die genauere Rechnung bringt noch einen Faktor 2 für die **Larmorformel**:

$$P = \frac{p^2\omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (7.71)$$

Von dort ab auswärts bleibt P konstant, da E und H nur noch wie $1/r$ abnehmen. Der schwingende Dipol strahlt maximal senkrecht zu seiner Achse, gar nicht in Achsrichtung.

Das Dipolmoment des Hertz-Oszillators lässt sich ausdrücken als $p = el$, wo e die effektive Ladung an den Stabenden ist. Da das Dipolmoment harmonisch schwingt, ist seine Änderungsgeschwindigkeit $\dot{p} = ev = e\omega l$, seine zweite zeitliche Ableitung $\ddot{p} = e\dot{v} = e\omega^2 l$. Der Ausdruck $p^2\omega^4$ lässt sich auffassen als $p^2\omega^4 = e^2\omega^4 l^2 = e^2 \dot{v}^2$. Dies drückt einen noch allgemeineren Sachverhalt aus: Jede Ladung e , die mit \dot{v}

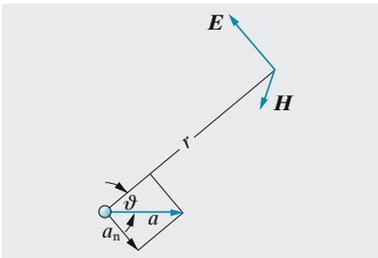


Abb. 7.110. Die Ausstrahlung einer beschleunigten Ladung als Funktion der Richtung

beschleunigt ist, strahlt eine Welle aus, deren Energieflussdichte und Gesamtleistung entsprechend (7.70) beschrieben werden durch

$$S = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{e^2 \dot{v}^2 \sin^2 \vartheta}{\varepsilon_0 c^3 r^2}, \quad P = \frac{1}{6\pi} \frac{e^2 \dot{v}^2}{\varepsilon_0 c^3}. \quad (7.72)$$

Ganz analog dem schwingenden elektrischen Dipol verhält sich ein magnetischer, der z. B. durch einen mit hochfrequentem Wechselstrom beschickten Stromring (Abschn. 6.9.1) realisiert werden kann. Das von ihm erzeugte Feld entspricht genau dem des elektrischen Dipols, nur dass, wo dort die elektrischen Feldlinien verlaufen (vgl. Abb. 7.108a), sich jetzt magnetische befinden und umgekehrt. Das Strahlungsdiagramm (Abb. 7.109) ist in beiden Fällen das gleiche.

7.4.7 Wellengleichung und Telegraphengleichung

Im leeren Raum, wo es keine Ladungen ϱ oder Ströme \mathbf{j} gibt, und wo $\varepsilon = \mu_r = 1$ ist, vereinfachen sich die beiden ersten Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \dot{\mathbf{H}}. \quad (7.73)$$

Leitet man die erste dieser Gleichungen nochmals nach t ab, erhält man $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \varepsilon_0 \ddot{\mathbf{E}}$. Hier kann man $\dot{\mathbf{H}} = -\operatorname{rot} \mathbf{E} / \mu_0$ aus der zweiten Gleichung einsetzen und findet

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\mathbf{E}}. \quad (7.74)$$

Die vektoranalytische Beziehung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = -\Delta \mathbf{a} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a},$$

die sich komponentenweise leicht verifizieren lässt, liefert hier wegen $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ (keine Ladungen!)

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\mathbf{E}}. \quad (7.75)$$

Für jede Komponente von \mathbf{E} gilt also eine Wellengleichung von der Form (4.48) mit der Phasengeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (7.76)$$

In einem Dielektrikum kommt der Faktor ε dazu; hier ist die Phasengeschwindigkeit $c/\sqrt{\varepsilon}$, entsprechend der Maxwell-Relation (7.65). Alle Wellenvorgänge im Vakuum, auch z. B. in Hohlleitern, sind Lösungen der Wellengleichung (7.75). Die einfachste Lösung ist eine ebene, z. B. in x -Richtung, fortschreitende Sinuswelle:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (7.77)$$

Daraus ergibt sich mit (7.73) sofort die zugehörige \mathbf{H} -Welle.

In einem Medium mit der Leitfähigkeit σ fließen Stromdichten $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, wenn die Welle vorbeistreichet. Die obige Herleitung muss dann abgewandelt werden: $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \sigma \mathbf{E}$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \dot{\mathbf{H}}$, also

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \ddot{\mathbf{E}} + \mu_0 \sigma \dot{\mathbf{E}}. \quad (7.78)$$

Das ist die **Telegraphengleichung**. Sie wird nicht mehr durch eine ungedämpfte Sinuswelle gelöst. Wir versuchen es mit einer gedämpften Welle:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} e^{-\delta x}. \quad (7.79)$$

Jede Ableitung nach t bringt den Faktor $i\omega$, Ableitung nach x den Faktor $-\delta - ik$. Für diese ebene in x -Richtung fortschreitende Welle wird aus (7.78) nach Weglassen des gemeinsamen Faktors

$$(\delta + ik)^2 = \mu_0 \sigma i \omega - \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \omega^2. \quad (7.80)$$

Wie jede komplexe Gleichung zerfällt (7.80) in zwei reelle Gleichungen:

$$k^2 - \delta^2 = \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \omega^2, \quad 2\delta k = \mu_0 \sigma \omega. \quad (7.81)$$

Jetzt unterscheiden wir zwei Grenzfälle:

a) Hohe Frequenzen: $\omega \gg \mu_0 \sigma c^2$. Dann ist $\delta \ll k$, d. h. die Welle kann viel tiefer als eine Wellenlänge eindringen. Aus (7.81), zweite Hälfte, folgt dann

$$\delta = \frac{\mu_0 \sigma c}{2}, \quad (7.82)$$

wobei c aus der ersten Hälfte folgt wie bekannt: $c = \omega/k = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}$. Die Intensität der Welle ist proportional E^2 , ihre Abnahme also doppelt so schnell wie die von E . Demnach ist

$$\alpha = \mu_0 \sigma c \quad (7.83)$$

der Absorptionskoeffizient des Mediums für diesen Grenzfall. Diese Absorption infolge ohmscher Leitfähigkeit, d. h. freier Ladungsträger, ist nur eine Art der Absorption. Sie ist in diesem Grenzfall frequenzunabhängig. Eine andere Art, die Absorption durch gebundene Ladungen, lässt sich im Prinzip ebenfalls mit der Telegraphengleichung beschreiben (Abschn. 10.3.3): Wenn die Ströme infolge der elastischen Bindung der Ladungen eine Frequenzabhängigkeit in Form einer Resonanzkurve haben, zeigt auch die Absorption einen steilen Resonanzpeak mit dem Maximum bei der Resonanzfrequenz.

b) Kleine Frequenzen: $\omega \ll \mu_0 \sigma c^2$. Auch dieser Grenzfall ist praktisch sehr interessant, besonders für Radiowellen. Nach der ersten Hälfte von (7.81) muss dann $\delta \approx k$ sein, und aus der zweiten Hälfte folgt

$$\delta \approx k \approx \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}. \quad (7.84)$$

Lange Wellen dringen immerhin tiefer ein, aber wegen $\delta \sim \sqrt{\omega}$ macht die Eindringtiefe einen immer kleineren Bruchteil der Wellenlänge aus, je größer diese wird. Übrigens darf man, wie $k \approx \delta$ zeigt, nicht mehr mit der für ebene Wellen gültigen Beziehung $k = \omega/c$ rechnen, denn im Medium ist die Welle stark deformiert. Meerwasser hat $\sigma \approx 12 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$, wie sich aus Konzentration und Beweglichkeit seiner Ionen ergibt. Wegen $\varepsilon \approx 80$, also $c \approx 3 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$ liegt die Grenze zwischen Fall a) und b) im Gebiet der mm-Wellen. Solche und kürzere Wellen dringen nur wenige mm ein. Längere Wellen kommen etwas weiter, aber selbst die üblichen Langwellen ($\lambda = 1 \text{ km}$) nur bis etwa 1 m. Ein getauchtes U-Boot könnte höchstens noch längere Wellen empfangen, deren Erzeugung mit annehmbarer Leistung unmöglich große Antennen voraussetzte (Abschn. 7.4.8). Sichtbares Licht folgt nicht diesem Absorptionsmechanismus, denn die freien und auch die gebundenen Ionen können dort nicht mehr mitschwingen (**Relaxationsfrequenz** $\sigma/(\varepsilon \varepsilon_0) \approx 10^{10} \text{ s}^{-1}$, Abschn. 6.4.3g). Daher kommt für moderne U-Boot-Strategen fast nur Laser-Kommunikation im Blauen über Satelliten mit speziellen elektronischen Codiertricks in Frage.

Meerwasser und auch der Erdboden wirken für Radiowellen als gute Leiter, auf denen die elektrischen Feldlinien überall senkrecht stehen müssen. Daher laufen diese Wellen zwischen Erdboden und Ionosphäre wie in einem **Hohlleiter**

(Abschn. 7.4.10), was ihre zunächst unerwartet hohe Reichweite erklärt. Dass dieser Effekt über dem Meer noch stärker sein sollte, wusste schon *Marconi*. Erst vom UKW ab ist die Relaxationsfrequenz der Ionosphäre überschritten (Abschn. 8.4.2), und solche Wellen laufen geradlinig in den Raum hinaus, gehen also nicht wesentlich über den optischen Horizont der Sendeantenne hinaus. Die verbleibenden Absorptionsverluste ergeben sich wieder aus der Telegraphengleichung.

7.4.8 Warum funkt man mit Trägerwellen?

Wenn der Mittelwellensender München I Beethovens 5. Sinfonie überträgt, schwankt die Feldstärke des Senders während der ersten Sekunde etwa wie Abb. 7.111 zeigt. Die Eingangstöne g, g, g, es enthüllen sich bei Streckung des Zeitmaßstabes um den Faktor 100 als akustische Schwingungen von 196 bzw. 157 Hz. Weitere Streckung zeigt, dass unter einer solchen Sinuswelle eine viel höherfrequente Schwingung, nämlich von 520 kHz liegt. Das ist die **Trägerwelle** des Senders, amplitudenmoduliert mit dem akustischen Signal. Warum erzeugt man einen so komplizierten $E(t)$ -Verlauf, statt dieses akustische Signal direkt zu übertragen, indem man z. B. das Dipolmoment der Sendeantenne mit 196 Hz schwanken lässt?

Wenn ein **Sendemast** der Höhe h an der Spitze die Ladung Q trägt, beeinflusst diese im leitenden Erdboden die entgegengesetzte Bildladung $-Q$ in der Tiefe h unter der Erdoberfläche. Genauer gesagt: Das Feld in der Luft sieht so aus, als sei in der Tiefe h eine Gegenladung (Abschn. 6.1.7). Der Sender hat also das Dipolmoment $p = 2Qh$. Am waagerechten Erdboden hat das Dipolfeld die Feldstärke

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (7.85)$$

immer senkrecht zum Boden, die mit dem Abstand wie r^{-3} abnimmt. Die Empfangsleistung im Abstand r ist sogar $P \sim E^2$, nimmt also wie r^{-6} ab. Dagegen gilt für ein Wellenfeld, nämlich die Abstrahlung eines Hertz-Dipols, eine Intensität $I \approx P/(4\pi r^2)$, die ganz in der mit c strömenden Energiedichte $\epsilon_0 E^2$ steckt. P ist hier die Sendeleistung. Daraus folgt $E \sim r^{-1}$: Hier nimmt die Feldstärke sehr viel langsamer mit dem Abstand ab. Der Abstand r ist in Antennenhöhen h zu messen, wie wir gleich sehen werden, also mit einer Einheit von bestenfalls einigen 100 m. Wenn eine Abnahme von 10^{-4} gegenüber der Feldstärke dicht am Sender noch tolerierbar ist, kann man ein Wellenfeld noch in einigen 1 000 km Abstand empfangen, ein quasistatisches Dipolfeld nur in wenigen km Abstand.

Ob sich ein Dipolfeld als Welle von der **Antenne** löst, entscheidet allein das Verhältnis der Antennenhöhe h zur Wellenlänge λ . Wir untersuchen, welcher Bruchteil der Sendeleistung wirklich abgestrahlt wird. Mit ω schwingende Ladungen $Q, -Q$ bedeuten eine Stromamplitude $I = 2\omega Q$, oder durch das Dipolmoment $p = 2Qh$ ausgedrückt

$$I = \frac{p\omega}{h}. \quad (7.86)$$

Die Spannung zwischen Erde und Antennenladung ist nach *Coulomb* ungefähr

$$U = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 h} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 h^2}. \quad (7.87)$$

Um den Strom I gegen diese Spannung anzutreiben, braucht der Sender eine Leistung

$$P_S \approx IU \approx \frac{p^2 \omega}{4\pi\epsilon_0 h^3}. \quad (7.88)$$

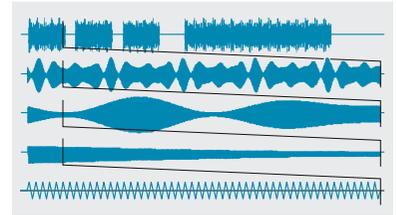


Abb. 7.111. Etwa so sieht das Signal aus, das ein Mittelwellensender im ersten Takt von Beethovens 5. Sinfonie aussendet

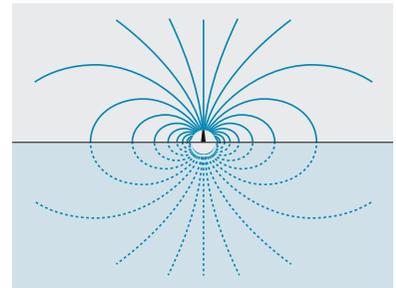


Abb. 7.112. Das E -Feld einer Sendeantenne ist im Luftraum identisch mit einem Dipolfeld. Um eine Antennenhöhe unter der Erde kann man sich eine Spiegelladung denken

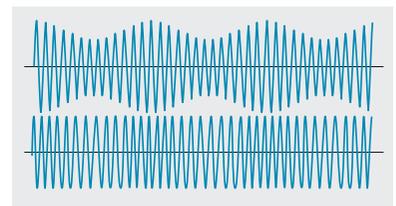


Abb. 7.113. Trägerwelle mit Amplituden- bzw. Phasenmodulation durch das gleiche Signal

Andererseits ist die Abstrahlungsleistung des Dipols nach *Hertz* (7.71)

$$P_W = \frac{1}{6\pi} \frac{p^2 \omega^4}{\epsilon_0 c^3} \quad (7.89)$$

Das Verhältnis beider Leistungen, der Wirkungsgrad des Senders, ist

$$\eta = \frac{P_W}{P_S} \approx \frac{2}{3} \frac{\omega^3 h^3}{c^3} = \frac{16\pi^3}{3} \frac{h^3}{\lambda^3} \quad (7.90)$$

Die genaue Rechnung liefert $\eta = 8h^3/\lambda^3$. Dies ergibt 1 für die günstigste Antennenhöhe $h = \lambda/2$ (bei $h > \lambda/2$ gilt die Betrachtung nicht mehr). Für $\nu = 520$ kHz, d. h. $\lambda \approx 600$ m sind solche Höhen erreichbar, bei 200 Hz müsste man um den Faktor 2 500 darunter bleiben, würde also nur den Bruchteil $\eta \approx 10^{-10}$ abstrahlen. Deswegen ist ohne hohe Trägerfrequenz ab etwa 100 kHz kein Funk mit vernünftiger Leistung und Reichweite möglich. Nur wegen des langsamen Abfalls $E \sim r^{-1}$ können wir auch Lichtsignale so weit sehen. Die Sterne wären unsichtbar, wenn sie als quasistatische Dipole sendeten. Andererseits sind Atome mit ihren „Antennelängen“ um 10^{-10} m der Emission sichtbaren Lichts nicht so gut angepasst wie der Röntgenemission. Ähnlichen Bedingungen unterliegt auch die Längen Anpassung von Empfangsantennen.

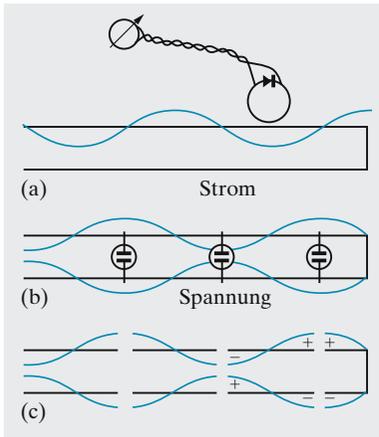


Abb. 7.114a–c. Stehende Wellen auf Lecher-Drähten. Die Induktionsspule in (a) ist im Verhältnis zu λ viel zu groß dargestellt

7.4.9 Drahtwellen

Fernsehantennenkabel älterer Bauart bestehen aus zwei parallelen Drähten (Doppelleitung oder **Lecher-System**), modernere aus einer **Koaxialleitung** (dünner Innenleiter in der Achse einer rohrförmigen Abschirmung). Bei beiden sind die Leiter in Kunststoff eingebettet. An und zwischen den Leitern läuft die elektromagnetische Welle entlang zum Empfänger. Mit einer kleinen Spule, deren Enden durch einen Gleichrichter und parallel dazu durch ein Galvanometer verbunden sind, und die man an einem Draht der Doppelleitung entlang schiebt (Abb. 7.114a), kann man die Verteilung des Magnetfeldes und damit des Stromes im Draht nachweisen. Glimmlämpchen zwischen den Drähten (Abb. 7.114b), die oberhalb einer gewissen Zündspannung aufleuchten, zeigen die Verteilung der Spannung und des elektrischen Feldes. Wenn die Doppelleitung nicht „abgeschlossen“ ist (vgl. Aufgabe 7.3.13), findet man eine stehende Welle mit Knoten und Bäuchen des Stromes und der Spannung. An den Drahtenden wird nämlich die Welle reflektiert und überlagert sich mit der einfallenden. Hängen die Drahtenden frei, ist dort der Strom 0 (Stromknoten, aber Spannungsbauch). An kurzgeschlossenen Enden ist $U = 0$ (Spannungsknoten, aber Strombauch). Strom und Spannung verhalten sich wie Geschwindigkeit und Druck am geschlossenen oder offenen Ende einer Pfeife. Zwei Bäuche haben immer den Abstand $\lambda/2$, gleich der Länge eines Hertz-Oszillators, der auf die empfangene Welle abgestimmt ist. Die ganze Doppelleitung lässt sich durch Aneinanderreihen von Hertz-Oszillatoren entstanden denken (Abb. 7.114c). Die Mitten der Oszillatoren haben zeitlich konstantes Potential (Spannung 0, Spannungsknoten), aber maximalen Strom, dessen Richtung mit der Frequenz ν wechselt (Strombäuche). Das Produkt aus der Frequenz des Senders und der so gefundenen Wellenlänge λ ist $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, wenn die Doppelleitung in Luft hängt (Abb. 7.115). In einem Medium mit der Dielektrizitätskonstante ϵ findet man $v\lambda = c/\sqrt{\epsilon}$. Der Strom in der Leitung richtet sich offenbar so ein, dass er das Wellenfeld nicht verzerrt, sondern nur verstärkt. Abbildung 7.116 zeigt die Feldverteilung um die Drähte. Der Poynting-Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ zeigt immer in Drahtrichtung: Die Energie strömt längs der Drähte.

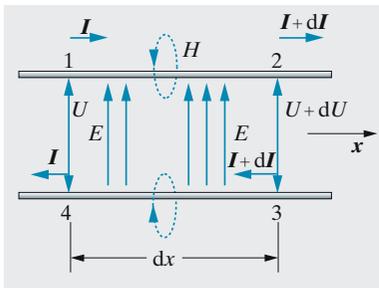


Abb. 7.115. Zur Aufstellung der Wellengleichung einer elektromagnetischen Welle, die sich entlang einer Doppelleitung ausbreitet

In den Aufgaben 7.3.10–7.3.15 können Sie solche **Wellenleiter** auf drei Arten behandeln: Als Ketten von Längsinduktivitäten und Querkapazitäten, als Strom- und Ladungssystem, begleitet von B - und E -Feldern, und aus der reinen Feldvorstellung. Alle drei Auffassungen führen zum gleichen Ergebnis.

7.4.10 Hohlraumoszillatoren und Hohlleiter

Den Übergang vom Schwingkreis zum **Hohlraumoszillator** kann man sich nach Abb. 7.117 klar machen: Aus dem Schwingkreis (a) entsteht durch Rotation um die Achse des Kondensators ein ringförmiger Hohlraum (b), in dem die Magnetfeldlinien das elektrische Kondensatorfeld umrunden. Den Ring denke man sich zur zylindrischen Schachtel erweitert (c) und endlich die Platten des Kondensators bis zu den Zylinderdeckeln zurückverlegt. Die Linien des Magnetfeldes (punktirt) und des elektrischen Feldes erfüllen dann abwechselnd den gleichen Hohlraum. Ganz analog zu den mechanischen **Eigenschwingungen** materiegefüllter Räume (Abschn. 4.4.4) hat ein leerer von leitenden Wänden umgebener Hohlraum elektromagnetische Eigenschwingungen. Es gibt auch andere Schwingungsformen als die in Abb. 7.117d skizzierten. Bei allen aber stehen überall im Hohlraum elektrische und magnetische Feldlinien senkrecht zueinander. Die elektrischen Feldlinien enden senkrecht auf den Wänden, falls der spezifische Widerstand der Hohlraumwände vernachlässigt werden kann und die Welle dementsprechend nicht in die Wände eindringt (Skin-Effekt mit Eindringtiefe ≈ 0 , Abschn. 7.3.11). In diesem Fall geht die Schwingung dämpfungslos, also ohne jeden Energieverlust, vor sich.

Bei den sehr hohen Frequenzen der cm- und mm-Wellentechnik (z. B. der Radartechnik) sind Drähte als Zuleitungen nicht mehr geeignet. Zunächst steigert der Skin-Effekt den Widerstand solcher Drähte erheblich. Es leitet ja nur noch eine Schicht der Dicke $d \approx \sqrt{\rho/(\pi\mu_0\omega)}$, die im mm-Bereich ($\omega \approx 10^{12} \text{ s}^{-1}$) für Kupfer nur noch etwa $1 \mu\text{m}$ ist. Vor allem hat aber schon eine Doppelleitung von nur 1 m langen Drähten in 0,1 m Abstand eine Induktivität von 10^{-8} H , also bei $\omega \approx 10^{12} \text{ s}^{-1}$ einen induktiven Widerstand von $10^4 \Omega$. Man überträgt daher die Leistung in Form von Wellen, die man durch **Hohlleiter** zusammenhält. Ein Hohlleiter hat leitende Wände, daher muss das E -Feld an der Wand verschwinden. Wir betrachten eine Welle der Frequenz ω von der Form $E = E_r e^{i\omega t}$, deren räumlicher Anteil E_r von den Koordinaten ebenfalls sinusförmig abhängt

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k \cdot r)} \tag{7.91}$$

Dieser Ansatz erfüllt die Wellengleichung $\Delta E = c^{-2} \ddot{E}$, denn $\Delta E = -k^2 E$, $\ddot{E} = -\omega^2 E$, wobei

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{7.92}$$

Da an der Wand, z. B. für $x = 0$ und $x = a$, das Feld verschwinden muss, gibt es nur ganz bestimmte erlaubte Werte (Eigenwerte) von k_x , nämlich $k_x = n_1 \pi / a_1$ (n_x : natürliche Zahl), analog für die y -Richtung $k_y = n_2 \pi / a_2$. Damit bleibt für k_z , das direkt keiner Wandbeschränkung unterliegt,

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n_1^2 \pi^2}{a_1^2} - \frac{n_2^2 \pi^2}{a_2^2}} \tag{7.93}$$

Wenn $\omega < \pi c \sqrt{a_1^{-2} + a_2^{-2}}$, wird k_z imaginär, solche Wellen werden überhaupt nicht weitergeleitet (das imaginäre k_z , in (7.91) eingesetzt, ergibt eine starke Dämpfung). Die Grenzfrequenz

$$\omega_G = \pi c \sqrt{a_1^{-2} + a_2^{-2}} \tag{7.94}$$

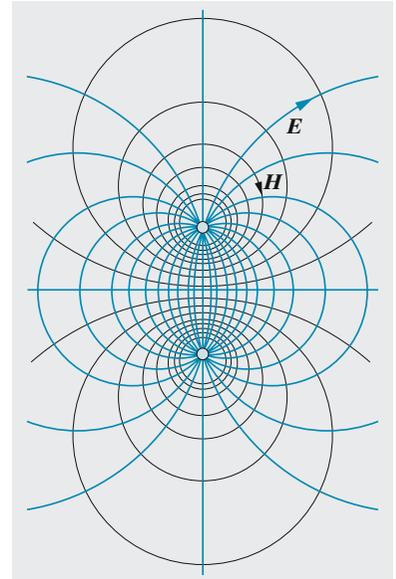


Abb. 7.116. Momentbild des elektrischen und magnetischen Feldes in einer Ebene senkrecht zur Doppelleitung

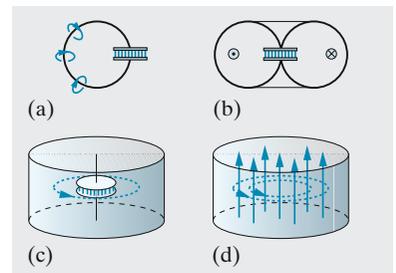


Abb. 7.117a–d. Übergang vom Schwingkreis zum Hohlraumresonator

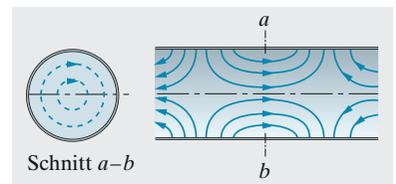


Abb. 7.118. E_{01} -Welle im zylindrischen Hohlleiter. (---) magnetische, (—) elektrische Feldlinien

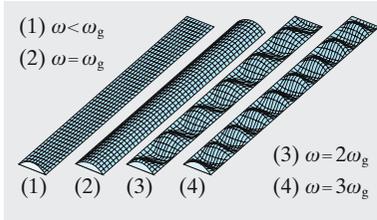


Abb. 7.119. Wellen in einem Hohlleiter mit quadratischem Querschnitt bei verschiedenen Frequenzen

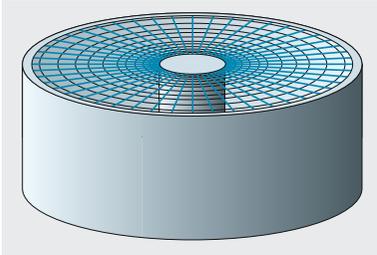


Abb. 7.120. Koaxialleitung. (—) elektrische, (—) magnetische Feldlinien



Michael Faraday bei einem seiner öffentlichen Vorträge. Der junge Faraday selbst hatte als Buchbinderlehrling an solchen Vorträgen von *Humphrey Davy* teilgenommen und diese so schön ausgearbeitet, dass Davy ihn als Assistenten anstellte – seine größte Entdeckung, wie er sagte

liegt so, dass $\lambda/2$ etwa gleich einer Hohlleiterabmessung ist. Oberhalb der Grenzfrequenz ergibt sich die Phasengeschwindigkeit zu

$$c_z = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2 \pi^2 \omega^{-2} (n_1^2 a_1^{-2} + n_2^2 a_2^{-2})}}, \quad (7.95)$$

sie ist also größer als c . Hohlleiterwellen haben nach (7.95) eine solche **Dispersion**, dass die Gruppengeschwindigkeit (Signalgeschwindigkeit) trotzdem kleiner als c ist (Abschn. 5.2.4b).

Wenn der Hohlraum *allseitig* durch leitende Wände abgeschlossen ist, können die Felder in ihm stehende Wellen als Eigenschwingungen ausführen. Die möglichen Frequenzen ergeben sich, ähnlich wie bei Schallwellen, wieder aus der Randbedingung $E = 0$ an den Wänden. Da es sich jetzt nicht mehr um fortschreitende Wellen handelt, ist die Ortsabhängigkeit von E reell darzustellen

$$E = E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{i\omega t}. \quad (7.96)$$

Die stehende Welle lässt sich ja aus einer hin- und einer rückläufigen Welle zusammensetzen, und $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 2i \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. Die Randbedingungen verlangen

$$k_1 = \frac{n_1 \pi}{a_1}, \quad k_2 = \frac{n_2 \pi}{a_2}, \quad k_3 = \frac{n_3 \pi}{a_3}. \quad (7.97)$$

Einsetzen in die Wellengleichung liefert die Eigenfrequenzen

$$\omega = \pi c \sqrt{\sum_{i=1}^3 n_i^2 a_i^{-2}}. \quad (7.98)$$

Ein solcher **Hohlraumresonator** hat also ein ganz ähnliches diskretes Spektrum von Eigenschwingungen wie ein entsprechend geformter Konzertsaal mit Entartungen (verschiedenen Eigenschwingungszuständen, die zur gleichen Frequenz gehören), nur dass beim Resonator diese Abstimmung erwünscht ist, denn damit kann man höchstfrequente Schwingungen erzeugen und stabilisieren.

Eine konzentrische Leitung oder ein **Koaxialkabel** (Abb. 7.120) lässt sich auch als Hohlleiter auffassen. Der Innenleiter besteht beim Koaxialkabel nur aus einem Draht, der Zwischenraum ist gewöhnlich mit einem Dielektrikum ausgefüllt. Die E -Linien laufen im Zwischenraum radial, die B -Linien sind konzentrische Kreise. Haben die Leitungen einen merklichen Widerstand und hat das Dielektrikum eine endliche Leitfähigkeit, breitet sich das ins Koaxialkabel eingespeiste Signal als gedämpfte Welle aus, deren Phasengeschwindigkeit von der Frequenz abhängt. Das Signal ändert also nicht nur seine Amplitude, sondern auch seine Form, denn seine Fourier-Komponenten haben verschiedene Laufzeiten.

▲ Ausblick

Die Elektrotechnik versorgt den Menschen mit Energie und, was jetzt immer wichtiger wird, mit Information. In beide Bereiche, meist als Stark- und Schwachstromtechnik unterschieden, konnten wir hier nur einen kurzen Einblick geben. Manchem Theoretiker mag es genügen, dass dies alles in den Maxwell-Gleichungen steckt. Aber ob er aus denen gleich herauslesen kann, warum sich der Spaltpolmotor seiner Küchenmaschine dreht – oder nicht dreht?

✓ Aufgaben ...

WWW CD

●● 7.1.1 Analogie

Es besteht doch eine weitgehende Analogie zwischen dielektrischen und magnetischen Erscheinungen. Führen Sie sie im Einzelnen durch. Welche Größen entsprechen einander, welche Gesetze lassen sich einfach übertragen? Übersetzen Sie z. B. Abschn. 6.2 ins Magnetische. Die Orientierungspolarisation entspricht dem Paramagnetismus, die Verschiebungspolarisation dem Diamagnetismus. Wie weitgehend stimmt das? Wie kommt es, dass die diamagnetische Suszeptibilität negativ ist, die Verschiebungspolarisierbarkeit dagegen positiv?

●● 7.1.2 Larmor-Rotation

Ist es richtig, dass jedes Atom im Magnetfeld B mit der **Larmor-Frequenz** eB/m um die Feldrichtung rotiert? Welches magnetische Moment ergibt sich daraus? Wie errechnet sich die diamagnetische Suszeptibilität?

●● 7.1.3 Dia oder Para?

Können Sie eine einfache Regel dafür aufstellen, welche Atome und Moleküle dia-, welche paramagnetisch sind (versuchen Sie nicht, eine *durchgehend* gültige Regel zu finden). Wie groß ist ungefähr das magnetische Moment eines paramagnetischen Teilchens, und welche Größenordnung für die paramagnetische Suszeptibilität von Gasen und kondensierter Materie ergibt sich daraus? Können Sie eine Regel ableiten, nach der die paramagnetische sich zur diamagnetischen Suszeptibilität ungefähr so verhält wie die Bindungsenergie eines Elektrons ans Atom zur thermischen Energie?

●● 7.1.4 Metall-Paramagnetismus

Metalle haben vielfach eine temperaturunabhängige positive Suszeptibilität. Wie mag sich der Gegensatz zum T^{-1} -Gesetz für Gase erklären? Benutzen Sie die Ergebnisse von Kap. 17 über das Energieschema der Leitungselektronen und die quanten-

mechanische Tatsache, dass sich das Spinnmoment eines Elektrons entweder parallel oder antiparallel zu einem Magnetfeld einstellen kann, aber nicht anders.

●●● 7.1.5 Langevin-Funktion

Wie sieht die Verteilung der Momente von Gasteilchen über die Einstellrichtungen zum Magnetfeld aus (im einfachsten Fall nur parallel oder antiparallel)? Benutzen Sie die Boltzmann-Verteilung. Wie sollte also die paramagnetische Suszeptibilität von Feld und Temperatur abhängen? Ist die Sättigung praktisch erreichbar?

●● 7.1.6 Warum nur Eisen?

Wieso sind gerade Fe, Co, Ni nach ihrem Atombau zum Ferromagnetismus prädestiniert? (Hinweis: Hund-Regel). Weshalb wiederholen sich die ferromagnetischen Eigenschaften nicht in den höheren Perioden?

●●● 7.2.1 MHD-Generator

Im **magnetohydrodynamischen Generator** strömt ein Plasma (ionisiertes Gas) durch ein transversales Magnetfeld. Senkrecht zur Strömungsrichtung v und zu B entsteht ein E -Feld. Warum? Wie groß ist es? Welche Spannungen erzielt man bei vernünftigen Abmessungen und v - und B -Werten? Wenn man den Generator belastet, d. h. die Spannung an einen Energieverbraucher legt, stammt die Leistung woher? Wie geschieht das im Einzelnen? Schätzen Sie den Maximalstrom, den man dem Generator entnehmen kann. Vergleichen Sie mit Dampfmaschinen- und Gasturbinengenerator hinsichtlich der Direktheit der Energieumwandlung und des vermutlichen Wirkungsgrades. Wie weit geht die Analogie mit dem Hall-Effekt? Dort ist die Richtung des Querfeldes verschieden je nach dem Vorzeichen der Ladungsträger. Müssten die Querfelder der Elektronen und Ionen einander nicht kompensieren? Vergleichen Sie auch mit dem Unipolargenerator (Aufgabe 12.9.5).

Hängt die Existenz des Querfeldes vom Ionisationsgrad des Gases ab? Was hängt sonst davon ab? Relativistisch betrachtet ist alles sehr viel einfacher!

● 7.2.2 Fernleitung

Das Walchenseekraftwerk nützt einen Höhenunterschied von 200 m aus. Pro Sekunde fließen 5 m^3 Wasser durch die Turbinen. Wie groß ist die damit in den Generatoren erzeugbare elektrische Leistung (keine Verluste)? Zum Transport der Energie vom Kraftwerk nach München (60 km) steht eine Kupfer-Freileitung zur Verfügung. Der Querschnitt der Hin- und Rückleitung beträgt je 1 cm^2 . (In der Praxis verwendet man natürlich Drehstrom!) Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, mit dieser Leitung auch nur einen kleinen Teil der Kraftwerksleistung nach München zu transportieren, wenn man eine Übertragungsspannung von 220 V verwendet. Welche muss man verwenden, damit die Leitungsverluste nur 0,4% der Gesamtleistung betragen?

●● 7.2.3 Hochspannung

Beim Entwurf elektrischer Fernleitungen benutzt man die Faustregel: Eine Leitung von x km Länge sollte mindestens x kV führen. Was sucht diese Regel zu minimieren: Die Leistungsverluste, den Spannungsabfall, die für die Leitung benötigte Kupfermenge, die Anzahl von Umspannstationen, den Aufwand an Isolier- und Sicherheitsvorrichtungen? Sie können die Isolationskosten als proportional zur Spannung und natürlich zur Leitungslänge betrachten. Denken Sie zunächst an eine Leitung, die ein gegebenes, z. B. ländliches Gebiet zentral versorgen soll! Länge? Leistung? Welche Spannung ist am wirtschaftlichsten?

● 7.2.4 $R = 0$

Gibt es Schaltungen, deren Widerstand Null oder Unendlich ist?

● 7.2.5 Reine Blindleistung

Wie kommt es, dass in induktiven und kapazitiven Widerständen keine Stromarbeit geleistet wird? Gilt das auch momentan oder nur im Zeitmittel?

●● 7.2.6 Filterglieder

Wieso nennt man die in Abb. 7.49 dargestellten Schaltungen Tiefpass, Hochpass bzw. Bandfilter? Denken Sie sich links eine Wechselspannung angelegt und überlegen Sie, welche Spannung man rechts misst, und zwar in Abhängigkeit von der Frequenz. Ändern sich die Verhältnisse, wenn man rechts einen Strom entnimmt (Klemmen durch R überbrückt)?

● 7.2.7 C- und L-Brücke

Wie kann man mit einer Wheatstone-Brückenschaltung Kapazitäten oder Induktivitäten messen?

●● 7.2.8 Additiver Zweipol

Beweisen Sie: Jeder irgendwie aus Widerständen, Spulen und Kondensatoren zusammenschaltete Zweipol verhält sich additiv, d. h. bei doppelter Spannung fließt durch ihn der doppelte Strom, anders ausgedrückt: Man kann dem Zweipol einen ganz bestimmten komplexen Widerstand zuordnen. Beweidee: Vollständige Induktion (im mathematischen Sinn).

●● 7.2.9 Ortskurve

Beweisen Sie: Wenn in irgendeinem Zweipol *ein* Schaltelement verändert wird, durchläuft der komplexe Widerstand des Zweipols immer einen Kreisbogen als Ortskurve.

●● 7.2.10 Lorentz-Karussell

Der Versuchsaufbau von Abb. 6.103 mit der rotierenden Schwefelsäure wird jetzt mit Wechselspannung an Magnet und Elektrolytgefäß betrieben. Vor die Magnetspule, die als rein induktiver Widerstand gedacht sei, legt man einen veränderlichen ohmschen Widerstand und stellt fest, dass die Lösung bei einem mittleren Wert dieses Widerstandes am stärksten rotiert, dagegen fast gar nicht, wenn der

Widerstand sehr klein oder sehr groß ist. Wie kommt das? Welches ist der günstigste Widerstand?

●● 7.2.11 Spiegelgalvanometer

Das Spiegelchen eines **Galvanometers** ist der brownischen Bewegung unterworfen. Wie begrenzt dies die Ströme, die man mit einem solchen Gerät messen kann? Die elektrische Leistung in der Galvanometerspule wird teils in joulesche Wärme verwandelt, teils zur Auslenkung verwendet. Wovon hängt die Aufteilung ab? Betrachten Sie z. B. eine ballistische Messung. Welche Auslenkenergie kann maximal investiert werden? Sie muss natürlich größer als die thermische Energie sein, damit die Messung einen Sinn hat. Wie geht der Spulenwiderstand ein? In welchen Grenzen wird er bei einem Strommesser liegen?

●● 7.2.12 Rauschen

In einem Draht muss ständig ein gewisser Strom fließen, weil die Elektronen thermisch hin- und herzittern. Dieser Strom hat natürlich keinerlei Periodizität. Wie sieht sein Fourier-Spektrum aus? Wenn die Schaltung einen Frequenzbereich der Breite $\Delta\omega$ durchlässt, wie groß ist dann die quadratisch gemittelte Stromstärke des **thermischen Rauschens** in einem Widerstand R ?

●● 7.2.13 Messbrücke

Messbrücke für Tonfrequenzen: Eine Brückenschaltung hat in ihren vier Ästen 1) eine Parallelschaltung von C_1 und R_1 , 2) eine Reihenschaltung von C_2 und R_2 , 3) den Widerstand R_3 , 4) den Widerstand R_4 . Am Eingang (zwischen 1,4 und 2,3) liegt eine Wechselspannung, deren Frequenz gemessen werden soll, am Ausgang (zwischen 1,2 und 3,4) ein hochohmiges Voltmeter, das durch Einstellung von R_1 und R_2 auf Null abgeglichen werden muss. Ist der Abgleich immer möglich? In der Praxis benutzt man meist nur einen Drehknopf: $R_1 = R_2 = R$ gemeinsam veränderlich, $C_1 = C_2 = C$ fest, R_3 und R_4 fest.

Wie müssen R_3 und R_4 beschaffen sein? Welche Variationsbreite muss $R_1 = R_2$ haben, wenn man Frequenzen zwischen 50 Hz und 20 kHz messen will? Warum benutzt man eine Parallel- und eine Reihen- RC -Schaltung? Ginge es nicht auch mit zwei gleichartigen Gliedern, z. B. mit zwei Reihenschaltungen?

●● 7.2.14 Schwingkreis

Prüfen Sie alle Aussagen über Schwingkreise nach, indem Sie die Gleichungen (7.40) und (7.42) lösen.

●● 7.2.15 Transformator mit Schmelzrinne

Die Primärwicklung hat 500 Windungen, es fließt durch sie ein Strom von 1,5 A. Die Sekundärwicklung besteht aus einer ringförmigen, mit Zinn gefüllten 0,5 mm dicken Kupferinne (Außendurchmesser 10 cm, Innendurchmesser 5 cm). Nach etwa 15 s ist das Zinn geschmolzen, und der Transformator wird vom Netz abgeschaltet. Wie groß sind die induzierte Spannung, der Strom und die während der Betriebsdauer erzeugte Energie in der Sekundärwicklung? Wie groß ist die Energie, die zur ausreichenden Erwärmung des Kupferinges erforderlich ist? (Die Masse des Zinns kann gegenüber der des Kupferinges vernachlässigt werden.) Wie groß ist also der Wirkungsgrad der Anlage? Wodurch entstehen vermutlich die Verluste?

●●● 7.2.16 Trafo-Gewicht

Ein 100 MVA-Transformator wiegt über 10 t, bei 1 kVA etwa 10 kg, bei 10 VA immer noch $\frac{1}{2}$ kg. Können Sie die Abhängigkeit erklären? Betrifft die Abschätzung den idealen Transformator, die Eisenverluste, die Kupferverluste? Wie groß sollte man B machen, wie lang und wie dünn den Wicklungsdraht? In der Konstruktionspraxis benutzt man oft Diagramme, die die Spannung pro Windung als Funktion der Nennleistung darstellen. Diese Kurve hat etwa die Form einer liegenden Parabel. Ent-

werfen Sie ein solches Diagramm. Kann man daraus alle Bestimmungsstücke des Transformators ablesen?

7.2.17 Trafo-Brummen

Warum und mit welcher Frequenz brummt ein **Transformator**? Wie ändert sich das Brummen bei Belastung?

7.2.18 Gleichstrommotor: Wirkungsgrad

Diskutieren Sie den Wirkungsgrad von Reihen- und Nebenschlussmotoren in Abhängigkeit von der Drehzahl oder anderen Größen. Unter welchen Bedingungen ist er maximal?

7.2.19 Gleichstrommotor: Regelung

Wenn man einen zusätzlichen Widerstand vor die Rotor- oder Statorwicklung eines Gleichstrom-Nebenschluss- oder Reihenschlussmotors legt, können ganz verschiedene Dinge passieren. Diskutieren Sie sie! Kann die Drehfrequenz dabei sogar zunehmen? Sind diese Arten der Regelung ökonomisch? Betrachten Sie auch einen Nebenschlussmotor, bei dem man Stator- und Rotorspannung unabhängig voneinander variieren kann. Wie kann man damit die $T(\omega)$ -Kennlinie beeinflussen? Wie kehrt man den Drehsinn eines Gleichstrommotors um?

7.2.20 Dynamo

Manche kleinen Fahrzeuge erzeugen ihren Beleuchtungs- und Zündstrom auf folgende Weise: Zwischen den zylindrisch ausgefrästen Polschuhen eines Permanentmagneten dreht sich ein Eisen-Hohlzylinder, in dessen Wand zwei breite, einander gegenüberliegende Schlitze in Achsrichtung sind (sie sind fast so breit wie die dazwischen stehengebliebenen Stege). Der Deckel des Hohlzylinders fehlt, mit dem Boden ist er an der Antriebswelle befestigt. Innerhalb des Zylinders sitzt eine *feststehende* Spule. Nur der Eisenzylinder kann sich drehen, und wenn er das tut, brennt die Lampe, die an die Spulenden angeschlossen ist. Wieso?

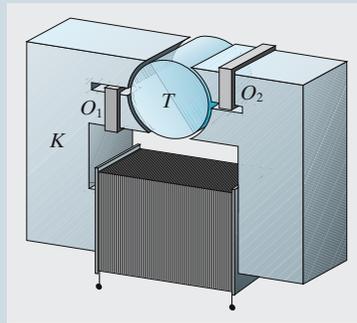


Abb. 7.121. Warum dreht sich der Läufer dieses Spaltpolmotors?

7.2.21 Spaltpolmotor

Kleine Wechselstrommotoren in Haushaltsgeräten usw. sind oft nach dem einfachen Schema von Abb. 7.121 aufgebaut. K ist ein Eisenkern, meist aus dünnen Blechen. O_1 und O_2 sind Metallringe, T ist ein Rotor, auf eine Achse montiert, aber ohne jede Stromwicklung. Wie und warum dreht sich der Rotor?

7.2.22 Asynchronmotor

Ein Drehstrom-Asynchronmotor mit Schleifringläufer wird mit 50 Hz betrieben. Wir untersuchen zunächst das Verhalten des Motors mit kurzgeschlossenem außenliegenden Widerständen in der Schleifringwicklung. Er rotiert im Leerlauf (ohne äußeres Lastmoment) mit 730 U/min, mit einem Lastmoment von 1 000 Nm rotiert er nur noch mit 670 U/min. Wenn man das Lastmoment langsam bis auf 1 500 Nm steigert, bleibt der Motor plötzlich stehen, nachdem er bei etwas kleinerem Lastmoment mit 570 U/min rotiert hat. Zeichnen Sie, so weit wie möglich, die $T(\omega)$ -Kennlinie und tragen Sie wichtige Werte ein. Warum bleibt der Motor bei Lastmomenten $\geq 1 500$ Nm stehen? Wie viele Polpaare hat der Motor? Geben Sie für die genannten Belastungen die Werte des Schlupfes an. Was kann man über den ohmschen Widerstand und die Induktivität des Rotors aussagen? Welches Anlaufmoment hat der Motor? Was

verändert sich an den obigen Beobachtungen und Betrachtungen, wenn man die äußeren Widerstände in der Schleifringwicklung einschaltet?

7.3.1 Skineffekt

Gibt es Drahtmaterialien, bei denen der **Skineffekt** schon bei Netzfrequenz wesentlich ist? Schätzen Sie die Widerstandszunahme für normale Kupferdrähte als Funktion der Frequenz. Kontrollieren Sie die Angaben im Abschn. 7.3.8 (Tesla-Transformator).

7.3.2 Beweg sie sich doch?

In einer geschlossenen Metallhohlkugel befindet sich ein geladener kleiner Körper. Wie kann man am einfachsten zerstörungsfrei feststellen, ob und wie sich die Ladung bewegt? Macht es einen Unterschied, ob die große Kugel aus Eisen oder Aluminium ist?

7.3.3 Vektorpotential

Warum kann man eigentlich ein elektrostatisches Feld immer als $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ darstellen? Hängt das mit der Wirbelfreiheit von \mathbf{E} zusammen? \mathbf{B} ist nicht wirbelfrei, aber quellenfrei. Man kann es also nicht als grad eines Skalarpotentials darstellen, sondern ...? Kann man sagen, diese Definition löse automatisch eine der Maxwell-Gleichungen oder mache sie überflüssig? Lässt sich das elektrische Feld auch im dynamischen Fall als grad φ darstellen? Beispiele: Gleichstrom, Wechselstrom durch geraden Draht. Zeigen Sie, dass man einen allgemein gültigen Ausdruck für \mathbf{E} erhält, wenn man das Vektorpotential \mathbf{A} in einfacher Weise einbezieht. Hinweis oder Kontrolle: Eine andere Maxwell-Gleichung muss dadurch automatisch erfüllt sein. Bestimmen φ und \mathbf{A} das Feld ebenso vollständig wie \mathbf{E} und \mathbf{B} ? Haben sie rechentechnische Vorteile? Sind φ und \mathbf{A} durch diese Definitionen vollständig festgelegt, wenn \mathbf{E} und \mathbf{B} gegeben sind? Kann man z. B. $\text{div } \mathbf{A} = 0$ oder $\text{div } \mathbf{A} = -\dot{\varphi}/c^2$ festsetzen? Wie lauten die übrigen Maxwell-Gleichungen, in φ und \mathbf{A} geschrieben, speziell im Vakuum und

mit diesen Konventionen (die zweite heißt Lorentz-Konvention)? Man beachte die Identität $\text{rot rot } \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A}$.

●● 7.3.4 Poynting-Vektor

Stellen Sie sich eine geladene Kugel nahe beim Zentrum eines Stabmagneten vor. Welche Aussage können Sie über den Poynting-Vektor im Feld von Magnet und Ladung treffen? Welche zum Energiefluss?

● 7.3.5 Antenne

Ist die Stabantenne eines Autos auf Radiowellen abgestimmt? Warum wird der Empfang besser, wenn man die Antenne auszieht? Warum sind Sendetürme so hoch (zwei Gründe)?

●● 7.3.6 Ionosphäre

Appleton und Barnett sandten (1924) ein Funksignal aus, dessen Frequenz sie langsam änderten. Ein Empfänger in 200 km Abstand empfing eine Amplitude, die bei Frequenzänderung periodisch zwischen einem Maximum und einem Minimum schwankte. Der Abstand zwischen zwei Minima der Empfangsamplitude war 3 kHz. Dieses Ergebnis wurde als Interferenz der direkten Welle mit einer Welle gedeutet, die in einer bestimmten Höhe reflektiert wurde. In welcher Höhe lag die reflektierende Schicht?

● 7.3.7 Fading

Ein Mittelwellensender wird eine Weile fast unhörbar, dann ist er wieder in voller Stärke da, usw. Wie kommt das? Werden nahe oder ferne Sender mehr durch diesen „Fading-Effekt“ gestört? Welche Höhenänderungen der reflektierenden Schicht sind nötig, um Fading zu bewirken? Warum gibt es kein Fading beim UKW-Sender?

●● 7.3.8 UHF-Wellen

Warum hat die Elektronik bei der Überschreitung der Meterwellengrenze wesentlich neue Bauprinzipien entwickeln müssen? Schätzen Sie Kapazität und Induktivität eines geraden Drahtes von einigen cm Länge und einigen Zehntelmillimetern Dicke (benutzen Sie die Ausdrücke für

die Feldenergien). Schätzen Sie auch Kapazität und Induktivität eines Hohlraumoszillators in Abhängigkeit von seinen Abmessungen.

●● 7.3.9 TV-Signal

Ein Fernsehbild stelle ein Gitter aus abwechselnd hellen und dunklen senkrechten Streifen dar. Welches Signal emittiert der Sender (Idealfall und reales Signal)? Wie viele Striche kann das Gitter maximal haben? Die Bandbreite eines Fernsehkanals ist 3 bis 10,4 MHz.

●● 7.3.10 Lecher-Bleche

Die Feldverteilung um eine Doppelleitung (zwei parallele Lecher-Drähte) ist recht kompliziert. Wir betrachten statt dessen ein Doppelblech (zwei parallele Bleche, Länge l , Breite b , Abstand d , mit $l \gg b \gg d$) und ein Koaxialkabel. Wie verteilen sich das E - und das B -Feld zwischen den Leitern? Welche Kapazität/Längeneinheit und Induktivität/Längeneinheit haben Doppelblech bzw. Koaxialkabel?

●●● 7.3.11 Wellenleiter

Stellen Sie Doppelleitung, Doppelblech oder Koaxialkabel durch ein Ersatzschaltbild aus Induktivitäten und Kapazitäten dar, zunächst für Leiter ohne ohmschen Widerstand und ideale Isolation der beiden Leiter gegeneinander. Dann berücksichtigen Sie auch den Leiterwiderstand und eine Leitfähigkeit des Isoliermaterials. Wie breitet sich ein hochfrequentes Signal längs einer solchen Leitung aus? Welche Bedeutung und welchen Zahlenwert hat die Größe U/I in einem solchen System?

●● 7.3.12 TV-Kabel

Sie gehen ein Fernsehantennenkabel kaufen. Es gebe Kabel mit 240Ω und mit 60Ω Wellenwiderstand, sagt der Verkäufer. Ob das nicht von der Kabellänge abhängt? Nein, sagt der Verkäufer, und auch für alle Sender sei dieser Wert gleich. Versteht der Verkäufer sein Fach, und was folgt aus seinen Angaben?

●● 7.3.13 Kabelabschluss

Wenn man ein Kabel nicht richtig „abschließt“, sondern wenn man seine Enden offen hängen lässt oder einfach kurzschließt, trifft die Welle, die längs des Kabels läuft, am Ende auf eine abrupte Änderung des Wellenwiderstandes und wird reflektiert. Was ist die Folge für den Energiefluss? Man vermeidet dies durch einen Abschlusswiderstand. Wie groß muss er sein? Denken Sie dabei auch an Aufgabe 6.3.9.

●● 7.3.14 Wellenwiderstand

Im Text von Abschn. 7.4.3 wurde der Wellenwiderstand einer Leitung oder eines Mediums als Verhältnis der Felder definiert: $Z = E/H$, in Aufgabe 7.3.11 wie üblich als $Z = U/I$. Wie reimt sich das zusammen? Stellen Sie die Leistung, die längs der Leitung fließt, dar als Joule-Leistung und als Leistungsfluss im Feld. Vergleichen Sie beide.

●● 7.3.15 Widerspruch?

In einem Doppelblech oder einem Koaxialkabel laufen elektromagnetische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit, in einem Hohlleiter, der fast genauso aussieht, laufen sie nach Abschn. 7.4.10 schneller oder bei zu kleiner Frequenz gar nicht. Wie erklärt sich dieser Widerspruch?

●●● 7.3.16 Tscherenkow-Strahlung

Die Betrachtung, zu der Sie hier verleitet werden, ist etwas vereinfacht, liefert aber ungefähr den richtigen Wert z. B. für die Intensität der **Tscherenkow-Strahlung**. Ein Teilchen mit der Ladung Ze fliegt mit der Geschwindigkeit v . Stellen Sie das E - und B -Feld der Ladung auf und bilden den Poynting-Vektor S , ohne aber irgendwelche Feinheiten der Richtungen zu beachten, d. h. so, als stünde E überall senkrecht auf v . Bilden Sie auch die Gesamtleistung so, als zeige S überall radial. Woran kann man sofort sehen, dass das Ergebnis nicht stimmt? Jetzt kommt der entscheidende Schritt: Aus dem

Abstand r betrachtet sieht der Vorbeiflug des Teilchens aus wie ein Feldimpuls der Dauer \dots , dessen Fourier-Zerlegung die beherrschende Kreisfrequenz \dots liefert. Ersetzen wir in P also r durch \dots . Wenn dies alles nur hinauf bis zu einer Frequenz ω_m gilt (Begründung Aufgabe 12.9.7), welche Leistung ergibt sich dann? Wie viele Photonen strahlt ein sehr schnelles Teilchen auf 1 cm seiner Bahn ab? Antwort des Experiments und der genaueren Theorie: $490Z^2$ Photonen/cm. Haben Sie das auch heraus?

●●● 7.3.17 Pulsar

Gibt es auch magnetische Antennen? **Pulsare** sind Sterne, deren Radio- und auch Röntgenintensität kurzperiodisch schwankt. Man kennt zwei Gruppen mit Schwankungsperioden von 30 ms und darüber, sowie neuerdings auch mit 1,5 ms und etwas mehr. Diese Strahlung und ihre Periodizität

wird dadurch erklärt, dass das riesige Magnetfeld dieses Sterns etwas schief zur Rotationsachse steht. Die Strahlungsleistung wird der Rotationsenergie entnommen, sodass 30 ms-Pulsare ihre Periode im Jahr um etwa $10 \mu\text{s}$ verlängern, 1,5 ms-Pulsare dagegen nur um 3 ps/Jahr. Vier Abschätzungen für den Pulsarradius: 1. Wie groß darf er sein, damit sein Äquator nicht schneller rotiert als c ? 2. Wie groß, damit er nicht zentrifugal auseinander fliegt? 3. Wie stark müsste sich die Sonne (Rotationszeit 26 Tage) kontrahieren, damit sie so schnell rotierte? 4. Wie groß wäre ein Klumpen enggepackter Neutronen von Sonnenmasse? Zur Strahlung: Die magnetische Achse stehe etwa 1° schief. Welche Strahlungsintensität ergibt sich daraus (denken Sie an *H. Hertz*), welcher Verlust an Rotationsenergie? Schätzen Sie die Magnetfelder der beiden Pulsargruppen. Überreste einer Supernova wie der Crab-Pulsar rotieren in 30 ms und

werden dann langsamer; die superschnellen Pulsare sollen viel älter sein, und zwar durch Einfang der Außenhülle eines nahen Begleiters wiederbelebt worden sein, der in seinem Roten-Riesen-Stadium über seine Roche-Grenze hinausschwoll. Es gibt aber auch Einzelsterne, die superschnelle Pulsare sind. Um die Doppelsternhypothese zu retten, nimmt man an, dass sie ihren Retter zum Dank durch ihre Strahlung zerblasen haben.

●● 7.3.18 Röntgenquelle

Der **Pulsar** Hercules X-1 hat in seiner extrem starken Röntgenemission eine etwas verbreiterte Linie bei 58 keV. Können Sie dies als charakteristische Strahlung einem Atom zuweisen? Was sagen Sie zur Deutung als landausche Zyklotron-Strahlung: Übergang zwischen gequantelten Kreisbahnen im Magnetfeld, analog zum Bohr-Modell? Wie stark müsste dieses Magnetfeld sein?

Freie Elektronen und Ionen

■ Inhalt

8.1	Erzeugung von freien Ladungsträgern	447
8.2	Bewegung freier Ladungsträger	452
8.3	Gasentladungen	465
8.4	Plasmen	473

▼ Einleitung

Fast noch mehr als die Elektronen in Metalldrähten beherrschen Elektronen und Ionen im Vakuum oder in Halbleitern unser modernes Leben. Sie leuchten in Gasentladungslampen, heizen im Mikrowellengerät, unterhalten uns in Radio und Fernsehen, denken für uns im Computer, ganz abgesehen von den zahllosen elektronischen Mess- und Steuergeräten in Haus, Labor und Fabrik, von der Glühlampe des Spannungsprüfers über das Oszilloskop bis zu den Riesenbeschleunigern; sie enthüllen heute neue Tiefenschichten in der Struktur der Materie, in die man vor fast hundert Jahren mit Hilfe der Gasentladungen einzudringen begann. Wir werden hier hauptsächlich geladene Teilchen in Gasen und im Vakuum untersuchen. Im Festkörper verhalten sich die Teilchen in vieler Hinsicht ähnlich, wie wir in Kap. 17 feststellen werden.

8.1 Erzeugung von freien Ladungsträgern

Um Elektronen aus neutralen Atomen oder Molekülen zu befreien, braucht man Energie. Innerhalb von Metallen sind zwar einige Elektronen frei beweglich, aber sie ganz herauszureißen, kostet ebenfalls Energie. Diese Energie kann man auf viele Arten zuführen: Durch Stoß von Nachbarpartikeln (thermisch), von Photonen (optisch), von schnellen Teilchen von außen. Starke elektrische Felder können diese Energiezufuhr sogar ersparen.

8.1.1 Glühemission (Richardson-Effekt)

Die Kathode einer Fernseh- oder Verstärkerröhre lässt Elektronen erst austreten, wenn sie sehr heiß ist. Im Innern eines Metalls lassen sich die am losesten gebundenen Elektronen, die **Leitungselektronen**, frei verschieben, aber wenn sie in die Nähe der Oberfläche geraten, zieht das positive Ionengitter sie zurück. Man muss eine **Ablöse-** oder **Austrittsarbeit** W leisten, um ein Elektron ganz aus dem Metall zu entfernen. W liegt zwischen 1 und 5 eV (Aufgabe 8.1.1). Energetisch lässt sich also ein Metall als ein **Potentialkasten** darstellen, in dem die Elektronen überwiegend in einer Tiefe W unter dem Niveau eines ruhenden freien Elektrons sitzen (Abb. 8.1).



„... über die Natur der Kathodenstrahlen gibt es sehr verschiedene Ansichten. Die deutschen Physiker erklären sie fast einstimmig als ätherisch, andere als durchaus materiell, ... Teilchen mit negativer Elektrizität ...“

J. J. Thomson, Phil. Mag. 1896

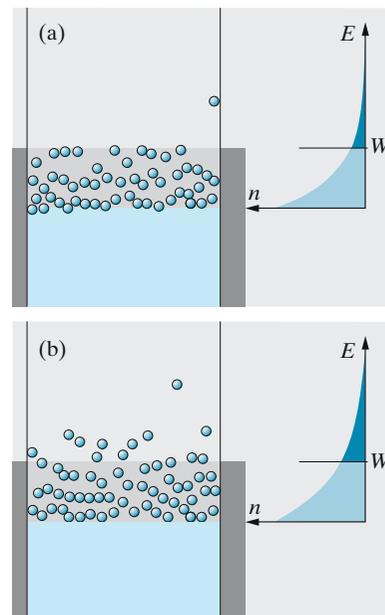


Abb. 8.1a,b. Elektronensee mit Dampf-atmosphäre bei (a) $T = 300$ K und (b) $T = 1000$ K

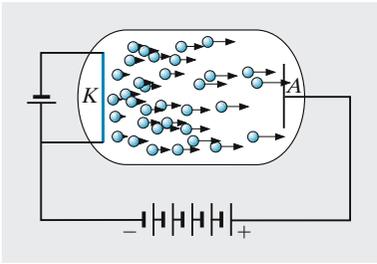


Abb. 8.2. Die Glühkathode emittiert Elektronen, die das elektrische Feld zur Anode absaugt

Die mittlere thermische Translationsenergie eines Teilchens bei Zimmertemperatur $\frac{3}{2}kT = 6 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$ (Faustregel: $kT \approx \frac{1}{40} \text{ eV}$) ist viel zu gering zur Ablösung eines Elektrons. Das gilt auch noch bei Rotglut, aber bei jeder Temperatur gibt es einige Teilchen mit Energien um 1 eV. Sie liegen ganz fern im „Schwanz“ der Maxwell-Verteilung. Strenggenommen gilt für die Metallelektronen eine etwas andere Energieverteilung, die **Fermi-Verteilung** (Abschn. 19.3.2), aber auch sie hat einen hochenergetischen Schwanz von der gleichen Form, wenn auch anderer Höhe. Einige Elektronen können also, wenn sie sich von innen her der Oberfläche nähern, die Austrittsarbeit W aufbringen und aus dem Metall „herausdampfen“. Über dem Elektronensee im Metall bildet sich die **Dampf-atmosphäre freier Elektronen**. Mit steigender Temperatur wächst der Bruchteil austrittsfähiger Elektronen schnell an, und im Gleichgewicht folgt die Teilchenzahldichte freier Elektronen n genau wie der Dampfdruck über einer Flüssigkeit dem Boltzmann-Faktor $e^{-W/(kT)}$.

× Beispiel . . .

Welcher Bruchteil der Elektronen aus einem Caesium-Film auf Wolfram ist imstande, diesen zu verlassen bei Zimmertemperatur bzw. bei Rotglut (1 000 K)?

$$W = 1,36 \text{ eV} = 2,2 \cdot 10^{-19} \text{ J}, \quad kT = 4,1 \cdot 10^{-21} \text{ J} \quad \text{bzw.} \quad 1,4 \cdot 10^{-20} \text{ J}, \\ e^{-W/(kT)} = 5 \cdot 10^{-24} \quad \text{bzw.} \quad 1,5 \cdot 10^{-7}.$$

Praktisch arbeitet man meist nicht im thermischen Gleichgewicht, sondern saugt alle aus der Kathode herausdampfenden Elektronen durch ein Feld zur Anode ab (Abb. 8.2). Auch dieses Nichtgleichgewicht wird vom Boltzmann-Faktor $e^{-E/(kT)}$ beherrscht. Er gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Elektron, das gegen die Oberfläche anläuft, die zur Ablösung notwendige Energie W über dem Durchschnittsniveau der anderen Elektronen hat. Die Anzahl der pro Zeit- und Flächeneinheit austretenden Elektronen ergibt sich daraus durch Multiplikation mit einem Faktor, der angibt, wie häufig Elektronen gegen die Oberfläche anrennen. Dieser Faktor wächst auch mit steigender Temperatur, aber so viel schwächer als der Boltzmann-Faktor, dass seine exakte T -Abhängigkeit experimentell sehr schwer zu ermitteln ist. Man erhält so (Aufgabe 8.1.2) für die Dichte des in den Außenraum getragenen Stroms

$$j = CT^2 e^{-W/(kT)} \quad (\text{Richardson-Gleichung}) \quad (8.1)$$

Abbildung 8.26 zeigt die Charakteristik, d. h. die Strom-Spannungs-Abhängigkeit einer Glühkathode in der Anordnung von Abb. 8.2. Die verschiedenen Bereiche der Charakteristik werden in Abschn. 8.2.6 diskutiert. Hier interessiert der **Sättigungsstrom** I_s (Plateau ganz rechts in den Charakteristiken). Abbildung 8.3 zeigt die Abhängigkeit des Sättigungsstromes I_s von der Kathodentemperatur T , in (b) aufgetragen als $\ln I_s$ über $1/T$. Es ergibt sich eine Gerade, deren Steigung, wie man aus (8.1) leicht bestätigt, direkt $-E/k$ ist, also die Ablösearbeit ergibt.

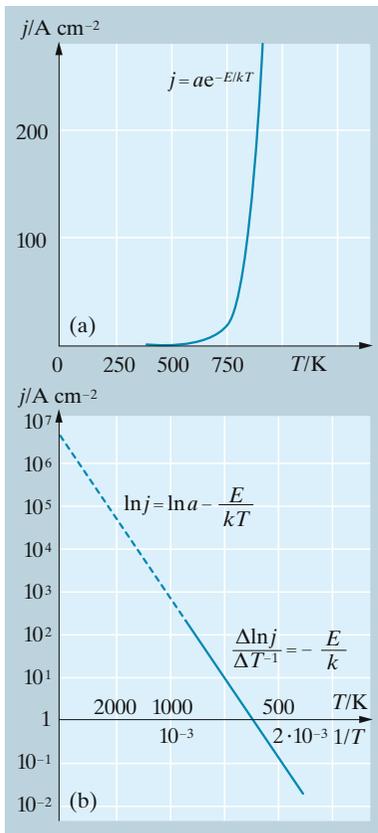


Abb. 8.3. (a) Der Glühemissionsstrom als Funktion der Temperatur, (b) dasselbe in Arrhenius-Auftragung

Dieses graphische Verfahren (**Arrhenius-Auftragung**) ist für die Auswertung von Experimenten aus den verschiedensten Gebieten nützlich, nämlich immer dann, wenn eine Messgröße durch die Verteilung von Teilchen über zwei oder mehrere Energiezustände bestimmt wird (thermisches Gleichgewicht), oder wenn diese Messgröße durch die Wahrscheinlichkeit der Überwindung einer Energiedifferenz geregelt wird (kinetische Messung, Aufgaben 8.1.3–8.1.5).

Tabelle 8.1 enthält die Ablösearbeit W für einige Kathodenmaterialien. Für reine Metalle mit gleichmäßig emittierender Oberfläche hat C angenähert den gleichen Wert $60 \text{ A cm}^{-2} \text{ K}^{-2}$.

In der Praxis finden als Glühkathoden häufig direkt oder indirekt geheizte Metallbleche (aus Nickel oder Platin) Verwendung, welche mit einer Paste aus BaO unter Beigabe anderer Erdalkalioxide belegt sind. Nach vorangegangener **Formierung** geben diese Oxidkathoden (sog. **Wehnelt-Kathoden**) schon bei schwacher Rotglut eine erhebliche Emission.

Vakuumröhren der oben beschriebenen Art bezeichnet man als **Dioden**. In ihnen fließt nur dann ein Strom (Abb. 8.4), wenn die Kathode negativ und die Anode positiv ist; sie sperren den Stromdurchgang aber bei Umpolung, weil die aus der heißen Kathode verdampfenden Elektronen nicht gegen die negative Gegenelektrode anlaufen können (Abb. 8.5). Deshalb finden sie als **Gleichrichter** eine wichtige technische Anwendung (Abschn. 8.2.7 und 8.2.8).

8.1.2 Photoeffekt (Lichtelektrischer Effekt)

1888 bestrahlte *W. Hallwachs* negativ geladene Metallplatten mit ultraviolem Licht und stellte mit dem angeschlossenen Elektrometer fest, dass diese Ladung allmählich verschwindet. Eine positive Ladung blieb dagegen erhalten. Allgemein löst hinreichend kurzwelliges Licht aus Metalloberflächen negative Ladungsträger, Elektronen, aus. Draußen kommen sie mit einer gewissen kinetischen Energie E an, die man durch die Gegenspannung messen kann, gegen die die Elektronen gerade noch anlaufen können (Abb. 8.6):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = eU .$$

Wie die Messung zeigt, werden die Elektronen umso energiereicher, je höher die Frequenz des auslösenden Lichtes ist. Die Strahlungsenergie ist ja in Portionen $h\nu$, den Photonen, abgepackt, und nach Abzug der Austrittsarbeit W_0 bleibt dem Elektron noch die kinetische Energie:

$$E = h\nu - W_0 \quad (\text{Einstein-Gleichung}) . \quad (8.2)$$

Dabei wird h bezeichnet als:

$$\begin{aligned} &\text{Plancksches Wirkungsquantum} \\ &= (6,626\,068\,8 \pm 0,000\,000\,5) \cdot 10^{-34} \text{ J s} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Tabelle 8.1. Austrittsarbeit W eines Elektrons aus verschiedenen Metallen und Oxiden

Stoff	E/eV
W	4,54
Mo	4,16
Ag	4,05
Cu	4,39
BaO-Paste	0,99
Cs-Film auf W	1,36

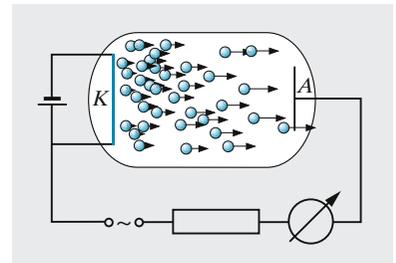


Abb. 8.4. Nur wenn die Kathode der Vakuumdiode wirklich Kathode (negativ) ist, gelangen die von ihr emittierten Elektronen zur Anode

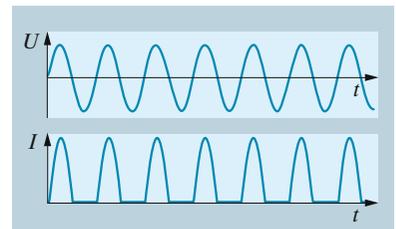


Abb. 8.5. Eine sinusförmige Anodenspannung U an einer Vakuumdiode treibt auch Anodenstrom-Halbwellen, die aber nicht genau sinusförmig sind, denn der Strom hängt nicht linear, sondern wie $U^{3/2}$ von U ab. Auch wenn die Anode negativ ist, fließt ein sehr kleiner Strom: Einige Elektronen im Maxwell-Schwanz können gegen das Gegenfeld anlaufen

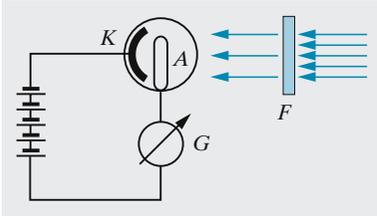


Abb. 8.6. Photozelle. Sie dient hier zur Messung der Absorption des einfallenden Lichtes durch ein Graufilter F . Das Verhältnis der durchtretenden zur auffallenden Intensität ist gleich dem Verhältnis der Galvanometerauslässe mit und ohne Filter

(Aufgabe 8.1.6). Die Intensität des auslösenden Lichts hat dagegen keinen Einfluss auf die Energie der austretenden Elektronen; sie bestimmt nur ihre Anzahl pro m^2 und s. Das steht in scharfem Gegensatz zur elektromagnetischen Lichttheorie, nach der man annehmen sollte: Je mehr Strahlungsleistung auf die Fläche fällt, die einem Elektron zugeordnet ist, desto mehr Energie kann das Elektron auf sich versammeln. Die Photonenvorstellung klärt diesen Widerspruch sehr einfach.

x Beispiel ...

Von welchen Frequenzen ab ist für die in Tabelle 8.1 aufgeführten Materialien Photoeffekt möglich?

$\nu > E/h$ ab $1,1 \cdot 10^{15}$ Hz, $\lambda = 270$ nm (UV) für W, ab 1 400 nm (IR) für BaO, ab 900 nm (nahes IR) für Cs auf W.

In der **Photozelle** steht einer metallverspiegelten Wand (K, Cs, Cd o. Ä.) eine ringförmige Anode gegenüber (Abb. 8.6). Licht, das auf die Metallschicht (Kathode) fällt, löst dort Elektronen aus, die von der Anode gesammelt und vom Galvanometer G als Photostrom gemessen werden. Dieser Strom ist der Lichtintensität proportional und oberhalb einer **Sättigungsspannung** unabhängig von der angelegten Spannung. Photozellen können evakuiert oder gasgefüllt sein. Im zweiten Fall wird der Elektronenstrom durch Stoßionisation verstärkt (Abschn. 8.3.2). Heute spielen Halbleiterelemente (Photowiderstände, Photodioden, Abschn. 11.3.2, 17.4.3) als Strahlungsempfänger eine immer größere Rolle (Aufgabe 8.1.7).

8.1.3 Feldemission

Bringt man ein Metall auf ein hohes negatives elektrisches Potential gegenüber seiner Umgebung, so kippt das entsprechende Feld die potentielle Energie für Elektronen so stark, dass beim Austritt keine Stufe, sondern nur noch eine Schwelle zu überwinden ist, umso niedriger und dünner, je größer das Feld ist (Abb. 8.7). Besonders an feinen Metallspitzen erreicht man schon mit mäßigen Spannungen Felder von 10^7 V/cm und mehr. Bei solchen Feldern treten, besonders im Vakuum, ständig Elektronen aus (**Feldemission**).

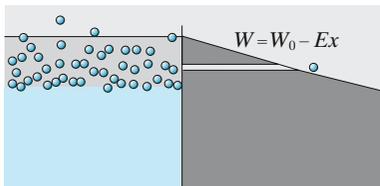


Abb. 8.7. Feldemission aus einem Metall: Elektronen können die dreieckige Potentialschwelle quantenmechanisch durchtunneln, wenn sie dünn genug ist

Aus photoelektrischen Messungen (Einstein-Gleichung (8.2)) weiß man, dass die Austrittsarbeit W einige eV beträgt. Ein Feld von 10^7 V/cm verwandelt eine solche Energiestufe in eine Schwelle von der Dicke $1 \text{ V} / 10^7 \text{ V cm}^{-1} = 10^{-9} \text{ m}$. Schwellen dieser Dicke und Höhe können von Elektronen auch ohne Energiezufuhr ziemlich leicht *durchtunnelt* werden (Abschn. 13.7.2). Die Feldemission ist also überwiegend ein quantenmechanischer Effekt (Aufgaben 8.1.8 und 8.1.9).

Der **Tunnelstrom**, ausgelöst durch das hohe Feld vor einer sehr dünnen Metallspitze, steuert das **Raster-Tunnelmikroskop** (Binnig und Rohrer, Nobelpreis 1986). Da dieser Strom exponentiell von winzigsten Abstandsänderungen abhängt, kann man damit Strukturen aus einzelnen Atomen abtasten und sogar umbauen (Abschn. 9.5.4).

8.1.4 Sekundärelektronen

Wenn ein Metall ein Elektron, das aus dem Vakuum kommt, „einsaugt“, wird dabei im Prinzip ebenso viel Energie frei, wie nötig ist, um ein anderes Elektron abzulösen. Zum Ersatz der Energieverluste muss das auftreffende Elektron aber etwas kinetische Energie W mitbringen, um ein **Sekundärelektron** auslösen zu können. Das **Sekundäremissionsvermögen**, definiert als Anzahl der ausgelösten Elektronen/Anzahl der auftreffenden Elektronen, hängt also stark von W ab. Schnelle Elektronen können mehrere Sekundärelektronen freisetzen. Das nutzt man im **Sekundärelektronen-Vervielfacher** (kurz SEV oder **Multiplifier** genannt) aus, um einzelne Elektronen, vor allem aber geringe Lichtintensitäten bis herab zu einzelnen Photonen nachzuweisen. Das Licht löst aus der Photokathode Elektronen aus, diese werden durch eine Spannung von einigen 100 V bis zur nächsten Elektrode (**Dynode**) beschleunigt, wo jedes mehrere Sekundärelektronen auslöst usw., bis nach mehreren (oft 10 und mehr) Verstärkungsstufen ein gut messbarer Stromstoß entsteht (Abb. 8.8, Aufgabe 8.1.10).

8.1.5 Ionisierung eines Gases

Ähnlich wie aus einem Metall kann man aus Gasatomen oder -molekülen Elektronen abtrennen, also diese Teilchen ionisieren, indem man thermische, optische, elektrische oder kinetische Energie zuführt. Wir betrachten hier zunächst die **thermische Ionisation** durch Stoß mit anderen Gasteilchen. Über Ionisation durch hinreichend hochfrequente Strahlung und die Feldemission aus Atomen und Molekülen wird in Abschn. 16.1 und 16.4 einiges gesagt, über Stoßionisation durch sehr schnelle Teilchen in Abschn. 18.3.1. Alle diese Effekte – Hitze, Ultraviolett, radioaktive Strahlung – machen z. B. die Luft elektrisch leitend; durch die Entladung eines aufgeladenen Elektroskops hat man sie meist auch zuerst nachgewiesen.

Auch die Ablösearbeit W eines Elektrons vom Atom oder Molekül, die **Ionisierungsenergie**, liegt in der Größenordnung 10 eV (etwas weniger bei Metallen, besonders Alkali, etwas mehr bei Nichtmetallen). Auch hier haben bei hinreichend hoher Temperatur einige Teilchen im Schwanz der Maxwell-Verteilung solche kinetischen Energien und können stoßionisieren. Im thermischen Gleichgewicht ergibt sich der **Ionisierungsgrad**, d. h. das Verhältnis der Ionenzahldichte n_i zur Gesamtteilchenzahldichte n , aus der Boltzmann-Verteilung: Die n_i Teilchen/ m^3 , die ionisiert sind, liegen energetisch mindestens um W höher als die $n_0 = n - n_i$ Teilchen/ m^3 , die ihr Elektron noch besitzen (mindestens um W , weil Elektron und Ion auch kinetische Energie haben können). Also wird nach (5.37) n_i/n_0 gegeben durch $e^{-W/(kT)}$, multipliziert mit einem Faktor, der die statistischen Gewichte des Elektron-Ion-Paares und des neutralen Teilchens vergleicht (Abschn. 5.2.9). So erhält man für schwache Ionisation die

Eggert-Saha-Gleichung (Abb. 8.9)

$$\frac{n_i}{n_0} = \frac{(2\pi mkT)^{3/4}}{n_0^{1/2} h^{3/2}} e^{-W/(2kT)} = 4,91 \cdot 10^{10} \frac{T^{3/4}}{n_0^{1/2}} e^{-W/(2kT)}. \quad (8.4)$$

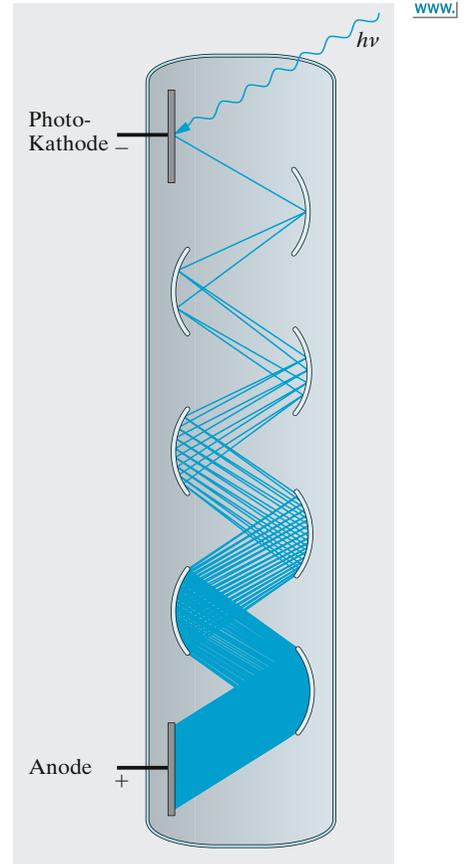


Abb. 8.8. Photomultiplier (schematisch; die Spannungszuleitungen zu den Dynoden sind nicht mitgezeichnet; die räumliche Anordnung der Elektroden ist auch ganz anders; warum wohl?)

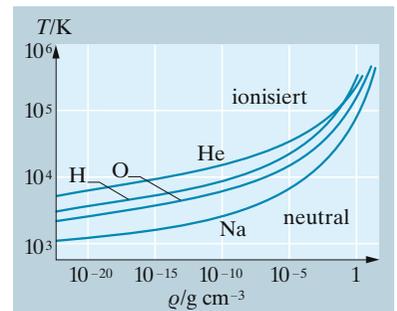


Abb. 8.9. Grenzen zwischen neutralem und ionisiertem Zustand im T, ρ -Diagramm für H, He, O, Na nach der Eggert-Saha-Gleichung

Bei Sterntemperaturen sind alle Gase stark ionisiert (Aufgabe 8.1.11 und 8.1.12).

Ein elektrisch geladenes Metallstück (eine **Sonde**), das mit einem Elektrometer verbunden ist, wird in einer Flamme entladen. Die Entladung ist davon unabhängig, ob die Sonde positiv oder negativ geladen ist; sie erfolgt durch Anlagerung von aus der Flamme stammenden, entgegengesetzt geladenen Ionen. Der Versuch zeigt, dass die Flamme sowohl positive als auch negative **Flammenionen** enthält. Die Ionendichte kann durch Einbringen von geeigneten, leicht flüchtigen Salzen, z. B. Alkalihalogeniden oder Na_2CO_3 , in die Flamme um Größenordnungen gesteigert werden.

8.2 Bewegung freier Ladungsträger

Geladene Teilchen werden von elektrischen und magnetischen Feldern unvergleichlich viel stärker beeinflusst als vom Gravitationsfeld, außer unter extremen Umständen wie in der Nähe schwarzer Löcher. Wir untersuchen diese Bewegung im Vakuum und teilweise auch im Festkörper. Die moderne Technik (Leistungs- wie Informationselektronik) lebt von diesen Vorgängen, und auch die Grundlagenforschung bringt immer neue Überraschungen auf diesem Gebiet.

8.2.1 Elektronen im homogenen elektrischen Feld

Zwischen zwei planparallelen Platten mit dem Abstand d im Vakuum liege die Spannung U (Abb. 8.10). Wenn zwischen den Platten nur so wenige Ladungsträger schweben, dass sie das Feld nicht merklich verzerren, ist dieses homogen: $E = U/d$, übt auf die Ladung e die Kraft $F = eE$ aus und beschleunigt sie mit

$$a = \frac{e U}{m d}. \quad (8.5)$$

Der Ladungsträger „fällt“ wie ein Stein im Erdschwerefeld gleichmäßig beschleunigt. Endgeschwindigkeit v_d und Fallzeit t_d ergeben sich aus den Fallgesetzen. Falls der Träger an einer Elektrode mit $v = 0$ startete, erreicht er die andere mit bzw. nach

$$v_d = \sqrt{\frac{2eU}{m}}, \quad t_d = \sqrt{\frac{2m}{eU}} d. \quad (8.6)$$

v_d folgt allein aus dem Energiesatz, gilt also bei beliebiger Feldverteilung und beliebigem d , solange U gegeben ist und sich keine bremsende Materie im Feld befindet.

In einem **Ablenk Kondensator**, in den man ein Elektron zunächst mit v_0 senkrecht zum E -Feld einschießt, beschreibt das Elektron eine Wurfparabel. Zum Durchgang durch die Kondensatorlänge l braucht es die Zeit $t = l/v_0$. Senkrecht dazu, in Feldrichtung, hat es in dieser Zeit die Geschwindigkeit

$$v_{\perp} = at = \frac{e}{m} E \frac{l}{v_0} \quad (8.7)$$

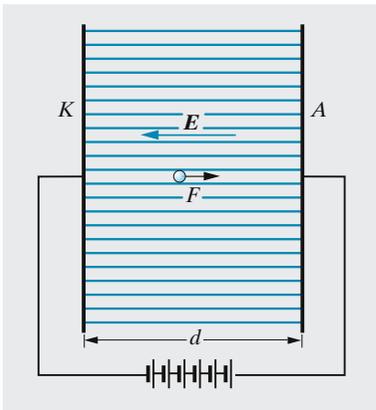


Abb. 8.10. Im homogenen elektrischen Feld $E = U/d$ erfährt das Elektron die Kraft $F = -eE$. Im Vakuum erreicht es von K bis A die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2eU/m}$, in Materie, selbst einem verdünnten Gas, fliegt es konstant mit $v = \mu E$

gesammelt. Daher hat sich die Flugrichtung gedreht um den Winkel α mit

$$\tan \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \frac{e}{m} E \frac{l}{v_0^2}. \quad (8.8)$$

Auf einem Schirm im Abstand D hinter dem Kondensator trifft das Elektron nicht bei A (Abb. 8.11), sondern in einem Abstand

$$s = D \tan \alpha = \frac{e}{m} E \frac{l}{v_0^2} D \quad (8.9)$$

davon ein, oder, ausgedrückt durch die Ablenkspannung $U_K = Ed$ und die Spannung $U_0 = mv_0^2/(2e)$, mit der die Elektronen vor dem Eintritt in den Kondensator beschleunigt worden sind:

$$s = \frac{1}{2} \frac{l}{d} D \frac{U_K}{U_0}. \quad (8.10)$$

Dies hängt nur von der Geometrie der Anordnung und dem Verhältnis der beiden Spannungen ab, nicht von den Eigenschaften des Teilchens.

8.2.2 Elektronen im homogenen Magnetfeld

Wenn eine Ladung e mit der Geschwindigkeit v durch ein Magnetfeld B fliegt, erfährt sie eine Kraft

$$F = ev \times B, \quad (8.11)$$

die **Lorentz-Kraft**. Diese verschwindet nur dann, wenn v parallel zu B ist, steht sowohl auf der Feldrichtung (B) wie auf der Bewegungsrichtung (v) senkrecht und ist maximal, nämlich vom Betrag evB , wenn v senkrecht zu B ist. Wir beschränken uns zunächst auf diesen Fall $v \perp B$ und untersuchen die Bewegung der Ladung, die dabei herauskommt.

Eine Kraft, die immer senkrecht auf der Bewegung des Teilchens steht, kann nach Abschn. 1.5.1 keine Arbeit leisten, also die Energie und damit die Geschwindigkeit des Teilchens nicht steigern. Es handelt sich also um eine Bewegung mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag und einer Beschleunigung, die immer senkrecht zur Bahn erfolgt. Dies sind die Kennzeichen einer gleichförmigen Kreisbewegung (Abschn. 1.4.2). Die Lorentz-Kraft wirkt als Zentripetalkraft, der im Bezugssystem des Teilchens eine Zentrifugalkraft die Waage hält:

$$\frac{mv^2}{r} = evB. \quad (8.12)$$

Das Teilchen läuft mit einer Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{e}{m} B \quad (8.13)$$

um, der **Larmor-Frequenz**. Sie ist wichtig für die Deutung optischer und elektromagnetischer Effekte wie Faraday- und Zeeman-Effekt, paramagnetische Resonanz, Kern- und Zyklotronresonanz, de Haas-van Alphen-Effekt usw. (Abschn. 10.3.4, 14.3.4). Die Kreisbahn hat den Radius

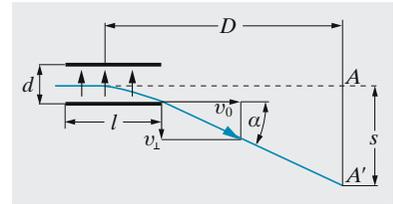


Abb. 8.11. Ablenkung von Elektronen im homogenen elektrischen Querfeld

$$r = \frac{mv}{eB} . \quad (8.14)$$

x Beispiel...

Wie bewegt sich ein kosmisches 1 GeV-Proton im Magnetfeld der Erde ($\approx 10^{-5}$ T) in einiger Entfernung?

Es beschreibt Kreis oder Spirale von knapp 1 000 km Radius in knapp 10 ms, erreicht also i. Allg. den Erdboden nicht, außer in Polnähe.

Nimmt das Feld nur ein kleines Bogenstück dieses Kreises ein, d. h. ist seine räumliche Ausdehnung $l \ll r$, so erfolgt eine Ablenkung um den Winkel

$$\alpha \approx \frac{l}{r} = \frac{leB}{mv} . \quad (8.15)$$

Kennt man die kinetische Energie der Teilchen (sie ergibt sich aus der benutzten Beschleunigungsspannung U als $\frac{1}{2}mv^2 = eU$), so folgt $v = \sqrt{2eU/m}$, und aus (8.13) lässt sich e/m ausdrücken:

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{rB} = \frac{1}{rB} \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2}} . \quad (8.16)$$

Rechts stehen nur messbare Größen, wenn man z. B. folgende Anordnung wählt: In einem auf ca. 10^{-3} mbar evakuierten Glaskolben, in dem ein Paar von **Helmholtz-Spulen** ein weitgehend homogenes Magnetfeld erzeugt, sendet ein System aus Glühkathode und Anoden-Lochblende (besser Wehnelt-Zylinder) ein paralleles Bündel schneller Elektronen aus, die bei richtiger Wahl der Magnetfeldstärke eine saubere Kreisbahn ziehen (Abb. 8.12). Diese ist als Leuchtspur infolge des Stoßanregungs-Leuchtens des Restgases gut zu erkennen (Aufgaben 8.2.2 und 8.2.3).

Für die Atomphysik wichtig ist auch der Fall, dass eine Ladung schon in einem anderen (z. B. elektrischen) Feld auf eine Kreisbahn gezwungen wird. Setzt man ein solches System einem zusätzlichen Magnetfeld aus, das z. B. senkrecht auf der Bahnebene stehe, so stellt die entsprechende Lorentz-Kraft je nach Umlaufsinn einen zusätzlichen Beitrag zur Zentripetal- oder Zentrifugalkraft dar. Die Bahn wird also weiter bzw. enger, die Umlauffrequenz verringert bzw. vergrößert sich, und dies genau um den Betrag eB/m : Die Kreisfrequenz im Magnetfeld ist $\omega_B = \omega_0 \pm eB/m$, wenn sie ohne Magnetfeld ω_0 war.

Wenn das Magnetfeld nicht senkrecht auf der Umlaufsebene steht, kann man so argumentieren: Die umlaufende Ladung stellt einen Kreistrom dar, der nach Abschn. 6.7.3 ein magnetisches Moment senkrecht zur Bahnebene, also schief zum Magnetfeld hat. Das Magnetfeld übt auf dieses magnetische Moment ein Drehmoment aus, unter dessen Einfluss die kreisende Ladung, wie jeder Kreisel, eine Präzessionsbewegung ausführt (Abschn. 2.4.2). Die Frequenz dieser Präzession ergibt sich wieder zu eB/m . Das Elektron kann also eigentlich machen was es will: Im Magnetfeld tritt immer eine kreisende Bewegung mit der Frequenz eB/m (der **Larmor-Frequenz**) auf.

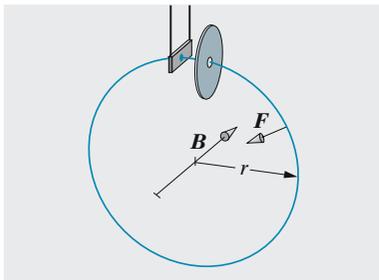


Abb. 8.12. Kreisbahn von Elektronen im homogenen Magnetfeld

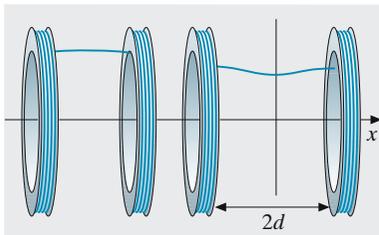


Abb. 8.13. Es ist gar nicht so leicht, ein großräumiges homogenes Magnetfeld herzustellen. Eine Annäherung bringt das Helmholtz-Spulenpaar, vom Strom I in gleicher Richtung durchflossen. Wenn der Abstand d der Ringe gleich dem Ringradius R ist, wird das Magnetfeld ziemlich homogen. Jede Abweichung vom Verhältnis 1 : 1 verstärkt die Inhomogenität. Die blaue Kurve zeigt den Betrag der Feldstärke $H = \frac{1}{2}IR^2(1/(R^2 + (d-x)^2)^{3/2} + 1/(R^2 + (d+x)^2)^{3/2})$ längs der Achse. In radialer Richtung ist es ähnlich

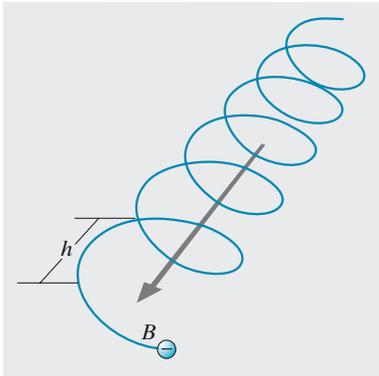


Abb. 8.14. Ein geladenes Teilchen beschreibt eine Schraubenlinie um die Magnetfeldlinien. Die zum Feld senkrechte v -Komponente bestimmt den Radius $r = v_{\perp}/\omega$ des begrenzenden Zylinders, v_{\parallel} bestimmt die Ganghöhe $h = 2\pi v_{\parallel}/\omega$. Die Larmor-Frequenz $\omega = eB/m$ hängt nicht von der v -Richtung ab

Ein freies Elektron, dessen Geschwindigkeit v nicht senkrecht zum Feld B steht, beschreibt eine **Schraubenlinie** um die Feldrichtung. Die zu B parallele Komponente v_{\parallel} bleibt unbeeinflusst, die andere Komponente v_{\perp} tritt an die Stelle von v in den Formeln für Bahnradius und Larmor-Frequenz. Die Ganghöhe der Schraube ist also $h = 2\pi m v_{\parallel}/(eB)$.

8.2.3 Oszilloskop und Fernsehöhre

Ferdinand Braun benutzte um 1900 Elektronenstrahlen als „Zeiger“ für schnell veränderliche elektrische Spannungen, die diese Elektronen ablenkten. Die **braunsche Röhre** des Kathoden- oder **Elektronenstrahloszilloskops** ist zu einem der wichtigsten Messgeräte entwickelt worden.

Aus der Glühkathode K (Abb. 8.15) treten Elektronen und werden durch die Anodenspannung U_A (einige kV) zwischen K und der durchbohrten Anode A beschleunigt. Durch das Loch in A treten sie hindurch und werden bei passender Formgebung (**Wehnelt-Zylinder** W) sogar noch enger gebündelt (fokussiert). Sie treten dann durch den Ablenkcondensator C und treffen auf den Leuchtschirm S . Die zu analysierende Spannung U_y wird an den Ablenkcondensator C gelegt. Ist diese Spannung eine periodische Wechselspannung, so wird der Leuchtfleck zu einem vertikalen Strich auseinander gezogen. Will man den zeitlichen Verlauf beobachten, dann legt man an den hinter C angebrachten, um 90° gedrehten Kondensator C_K eine sägezahnförmige **Kippspannung** U_K , deren zeitlicher Verlauf in Abb. 8.16 dargestellt wird. Sie allein bewirkt auf dem Schirm eine horizontale Ablenkung. Durch Überlagerung beider Ablenkungen entsteht dann das in Abb. 8.16 dargestellte Bild. Durch passende Wahl der Kippfrequenz erreicht man, dass die zu analysierende periodische Spannung immer die gleiche Phase besitzt, wenn die Kippspannung (zu den Zeiten $t', t'' \dots$) zusammenbricht und der Strahl nach A „zurückspringt“. Dann überdecken sich alle Ablenkungsbilder auf dem Leuchtschirm, es ergibt sich ein stehendes Bild (Aufgabe 8.2.4).

Das elektronenoptische System einer **Fernsehöhre** funktioniert ähnlich, aber mit magnetischer Ablenkung. Die Helligkeitssteuerung (Steuerung der Anzahl von Elektronen im Strahl), die beim Oszillographen

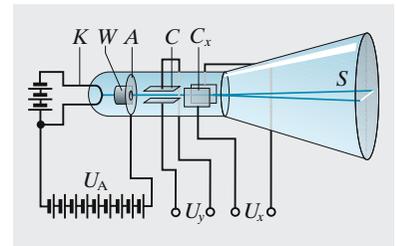


Abb. 8.15. Elektronenstrahloszillo-graph, schematisch

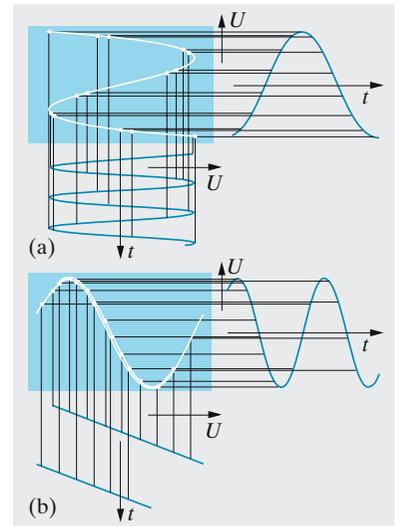


Abb. 8.16. (a) Zwei verschiedene Signale an den x - und y -Platten (Einstellung EXT) ergeben eine Lissajous-Figur. (b) Eine Kippspannung passender Frequenz an x (oder richtige Triggerung) gibt den y -Spannungsverlauf wieder

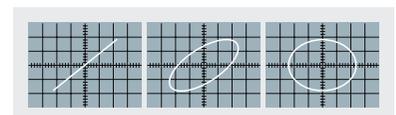


Abb. 8.17. An den x - und y -Ablenkplatten des Oszillographen liegen Wechselspannungen gleicher Frequenz, aber verschiedener Phase

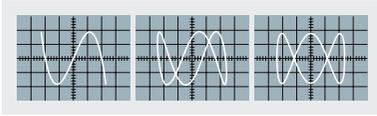


Abb. 8.18. An den x - und y -Platten liegen Spannungen verschiedener Frequenz

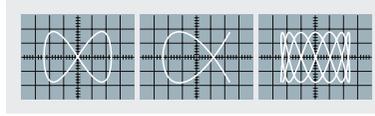


Abb. 8.19. Frequenzen und Phasen der Signale an den x - und y -Platten sind verschieden. Nämlich? Sind die Signale noch sinusförmig? Kann man auch eine exakte Parabel zeichnen?

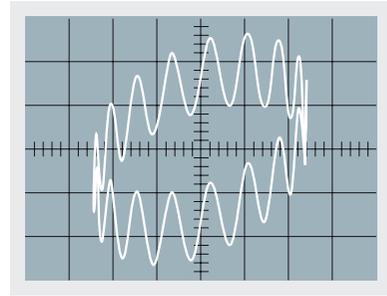


Abb. 8.20. Die y -Frequenz ist sehr viel höher als die x -Frequenz. Außerdem liegt an den y -Platten noch ein Signal der Grundfrequenz mit einer Phasenverschiebung gegen das x -Signal

manuell geschieht, folgt bei der Fernsehöhre den Lichtwerten des wiederzugebenden Bildes. Das einfachste Mittel hierzu wäre die Heizspannung der Glühkathode, von der deren Temperatur und Elektronenemission sehr empfindlich abhängen (Abschn. 8.1.1). Leider ist die Kathode thermisch zu träge, um die schnellen Bildwertschwankungen (die in ungefähr 10^{-7} s erfolgen müssen) wiederzugeben. Man benutzt daher echt elektronenoptische Mittel (**Wehnelt-Zylinder**), um einen variablen Teil der emittierten Elektronen abzufangen (Aufgabe 8.2.5).

Beim Oszillographen wie in der Fernsehöhre ist die Schirminnenseite mit einer lumineszierenden Substanz überzogen (Sulfide und Silikate von Zink und Cadmium, welche die Energie der aufschlagenden Elektronen in Licht geeigneter Farbe umsetzen; Abschn. 13.3.3).

8.2.4 Thomsons Parabelversuch; Massenspektroskopie

Die Ablenkbarkeit eines Teilchens im Magnetfeld (ausgedrückt durch die Bahnkrümmung, d. h. den reziproken Bahnradius) ist

$$\frac{1}{r} = \frac{eB}{mv} \quad (8.17)$$

(vgl. (8.14)). Im elektrischen Feld ist die Ablenkbarkeit (Tangens des Ablenkwinkels pro Wegeinheit, (8.8))

$$\frac{\tan \alpha}{l} = \frac{eE}{mv^2}. \quad (8.18)$$

Die „Steifheit“ des Strahls wächst also im Magnetfeld mit dem Impuls mv , im elektrischen Feld mit der kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv^2$.

Aus einer Quelle trete ein Strahl geladener Teilchen mit unbekanntem Eigenschaften. Offenbar reicht die Ablenkung im elektrischen Feld allein oder im Magnetfeld allein nicht aus, um m und v einzeln zu messen – selbst wenn man die Ladung als eine Elementarladung ansetzt –, denn die Ablenkbarkeiten enthalten in beiden Fällen m und v kombiniert. Benutzung beider Felder zusammen erlaubt eine Trennung von m und v . Die eleganteste Realisierung dieses Gedankens stammt von *J. J. Thomson* und

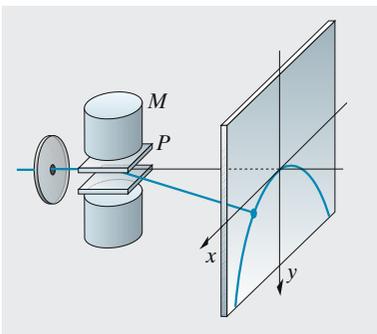


Abb. 8.21. Anordnung von *J. J. Thomson* zur Ionenmassenbestimmung nach der Parabelmethode. P Ablenk-kondensator, M Magnetpole. (Nach W. Finkelnburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

wurde später von *Aston* zum **Massenspektrographen** vervollkommenet (Abschn. 18.1.2).

Ein eng ausgeblendeter Teilchenstrahl tritt durch einen Ablenkkondensator, der sich zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten befindet, sodass elektrisches und Magnetfeld parallel, z. B. beide vertikal stehen. Ohne Felder würde der Strahl in 0 auftreffen. Dieser Punkt sei Ursprung der Koordinaten x (horizontal) und y (vertikal). Beide Felder lenken unabhängig voneinander ab: Das elektrische Feld vertikal um

$$y = \frac{eED}{mv^2}, \tag{8.19}$$

das Magnetfeld, das so schwach sei, dass seine Abmessung l nur einen kleinen Bogen des Bahnkreises darstellt, lenkt horizontal ab um

$$x = \frac{eBlD}{mv}. \tag{8.20}$$

E , B , l , D sind Konstanten der Apparatur. Dagegen kann der Strahl Teilchen mit verschiedenen Ladungen, Massen und Geschwindigkeiten enthalten. Wir betrachten zunächst Teilchen gleicher Art (gleiches e und m), aber verschiedener Geschwindigkeit. Sie landen auf Punkten (x, y) , die sich ergeben, wenn v alle erlaubten Werte annimmt. Aus (8.20) kann man v eliminieren und in (8.19) einsetzen:

$$v = \frac{eBlD}{mx}, \quad \text{also} \quad \boxed{y = \frac{mE}{eB^2lD}x^2}. \tag{8.21}$$

Das ist die Gleichung einer zur Vertikalen symmetrischen Parabel. Die schnellen Teilchen treffen näher zum Scheitel dieser Parabel auf (vgl. (8.20)). Dieser Scheitel liegt in 0 und würde unendlicher Geschwindigkeit (unendlicher Strahlsteifheit) entsprechen (Aufgabe 8.2.6).

Eine andere Teilchenart mit einer anderen spezifischen Ladung e/m zeichnet eine andere Parabel; sie ist umso enger, je kleiner e/m ist. So lassen sich sehr präzise Massenbestimmungen vornehmen (Nachweis und Trennung von Isotopen, Molekülen, chemischen, besonders organischen Radikalen). Die kombinierte Ablenkung im elektrischen und magnetischen Feld ist im **Massenspektrographen** zu noch größerer Präzision entwickelt worden.

8.2.5 Die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse

Sehr schnelle Elektronen (z. B. radioaktive β -Teilchen, allgemein Elektronen oberhalb von 100 keV) zeichnen im Thomson-Versuch keine exakten Parabeln mehr. Die Kurve weicht besonders in Scheitelnähe nach innen hin ab (Abb. 8.23). Scheitelnähe Punkte entsprechen hohen Energien, engere Parabeln größeren m/e -Werten. Der Punkt für eine Energie von 500 keV liegt schon auf der Parabel, die doppeltem m/e entspricht. Entweder nimmt also die Elektronenladung mit wachsender Energie ab (wofür sonst keinerlei Belege existieren), oder die Masse nimmt zu, und zwar so, dass sie bei 500 keV doppelt so groß ist. Allgemeiner entspricht die Abhängigkeit

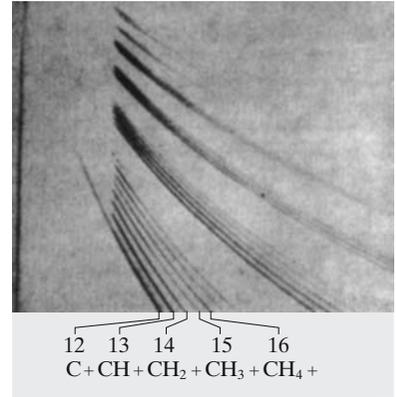


Abb. 8.22. Trennung eines Gemisches organischer Ionen nach der Parabelmethode von *J. J. Thomson*. Man erkennt die verschiedenen homologen Paraffine: Unten Methan und seine Dehydrierungsprodukte, darüber das gleiche für Ethan usw. (Nach *Conrad*, aus *W. Finkelnburg: Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

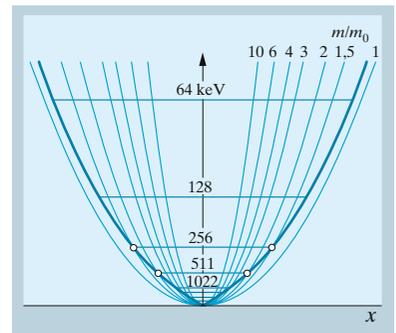


Abb. 8.23. Bei hohen Elektro-nenenergien deformiert sich die Thomson-Parabel infolge der relativistischen Massenzunahme

der Formel

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

wo m_0 die normale Elektronenmasse (für kleine Geschwindigkeiten) und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum sind. Alle diese Befunde entsprechen genau einem der wichtigsten Postulate der Relativitätstheorie (Abschn. 12.2.6).

x Beispiel ...

Jemand tippt auf dem Taschenrechner: .9 INV SIN COS 1/x. Was soll das?

Er berechnet, um wie viel schwerer ein Teilchen mit $v = 0,9c$ ist als in Ruhe: $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$.

8.2.6 Die Elektronenröhre

Der Stromtransport im Vakuum (**Elektronenröhre**) und der im Festkörper (Draht, Halbleiter) unterscheiden sich wie der freie Fall und die Bewegung durch ein zähes Medium. Im *Vakuum* ergibt sich die Geschwindigkeit der Ladungsträger nach dem Energiesatz aus der durchfallenen *Spannung* U

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \quad \text{also} \quad v = \sqrt{\frac{2e}{m}U}, \quad (8.22)$$

im *Festkörper* ist die Geschwindigkeit proportional zur treibenden Kraft, also zur *Feldstärke*

$$v = \mu E \quad (8.23)$$

(μ ist die **Beweglichkeit**, Abschn. 6.4.2). In beiden Fällen ist die Stromdichte j (d. h. die durch 1 m^2 in der Sekunde transportierte Ladung) gegeben durch die Teilchenzahldichte n der Ladungsträger, ihre Ladung e und ihre Geschwindigkeit v :

$$j = env \quad (8.24)$$

In einem *homogenen* Feld fließt also im Vakuum die Stromdichte

$$j = en\sqrt{\frac{2e}{m}U}, \quad (8.25)$$

im Festkörper ergibt sich

$$j = en\mu E = en\mu \frac{U}{d} \quad (\text{ohmsches Gesetz}) \quad (8.26)$$

Der Gesamtstrom I folgt aus j durch Multiplikation mit dem Querschnitt des felderfüllten Raumes.

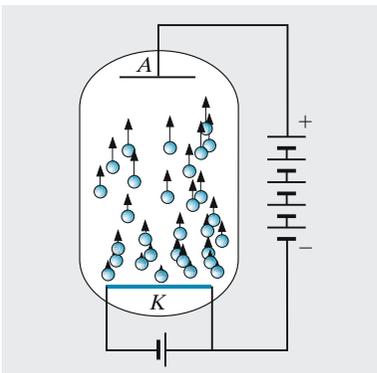


Abb. 8.24. In der Vakuumdiode fließt der Strom nur in der angegebenen Polung, denn nur die geheizte Elektrode lässt Elektronen austreten. Sie werden zur Anode abgesaugt, wobei ihre Anzahldichte längs der Beschleunigungsstrecke nach der Kontinuitätsgleichung abnimmt

Die Abhängigkeit des Stromes I , der durch ein System fließt, von der angelegten Spannung heißt **Strom-Spannungs-Kennlinie** des Systems. Gleichung (8.26) stellt eine proportionale oder ohmsche Kennlinie dar. Das homogen felderfüllte Vakuum hat eine $U^{1/2}$ -Kennlinie, wenn es nur sehr wenige Ladungen enthält. Das entspricht nun allerdings selten der Realität: Entweder ist Materie, mindestens ein Gas, vorhanden, und dann erfolgt die Ladungsbewegung nicht ungebremst, oder man hat ein hinreichendes Vakuum und muss dann die Ladungsträger von außen zuführen, meist von der Kathode aus (Glühkathode, Photokathode). Dann ist es aber i. Allg. mit der Homogenität des Feldes vorbei: Die Ladungsträger verzerren durch ihre **Raumladung** das Feld erheblich; das kann so weit gehen, dass am Erzeugungsort, der Kathode, gar kein Feld mehr ankommt, sondern dass es schon vorher durch Raumladungen abgefangen wird (Abb. 8.25). Man spricht dann von einem **raumladungsbegrenzten Strom**. In der Vakuumröhre ist der Strom praktisch immer, im Festkörper manchmal (besonders in Halbleitern) raumladungsbegrenzt. Die Ladungsträgerkonzentration n ist unter diesen Umständen ortsabhängig. Sie regelt sich von selbst auf die Bedingung ein, dass die Stromdichte überall gleich ist. Wäre das nicht der Fall, so würde sich dort, wo z. B. ein großes j in ein kleines übergeht, Ladung anhäufen; diese zusätzliche Raumladung würde das Feld im dahinterliegenden Raum so weit abschirmen, dass j dort absinkt, bis es sich dem allgemeinen Niveau angepasst hat. Dieser Ausgleichsvorgang hört erst auf, wenn ein durch $j = \text{const}$ gekennzeichnetes Quasigleichgewicht herrscht. $j = env = \text{const}$ bedeutet aber $n \sim 1/v$: Wo wenige Träger sind, fliegen sie entsprechend schneller.

Andererseits werden in Gebieten hoher Trägerkonzentration viele Feldlinien verschluckt: Das Feld ändert sich dort stark (Abb. 8.25). Diesen Zusammenhang beschreibt

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0}\rho = -\frac{1}{\epsilon\epsilon_0}ne \quad \text{(Poisson-Gleichung)} \quad (8.27)$$

Wir untersuchen den raumladungsbegrenzten Fall, wo an der Kathode kein Feld ankommt: $E_{\text{kath}} = 0$. An der Anode herrscht das volle Feld $E_{\text{an}} \approx U/d$, oder sogar etwas mehr. Wenn dieses Feld auf der Länge d abgebaut wird, ist seine räumliche Änderung annähernd $E_{\text{an}}/d \approx U/d^2$. Die Poisson-Gleichung lautet dann angenähert

$$\frac{U}{d^2} \approx \frac{ne}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (8.28)$$

oder mit (8.24)

$$\frac{U}{d^2} \approx \frac{j}{v\epsilon\epsilon_0}. \quad (8.29)$$

Für die **Vakuumröhre** folgt mit (8.22) und $\epsilon = 1$

$$\frac{U}{d^2} \approx \frac{1}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} j U^{-1/2} \quad \text{oder} \quad \boxed{j \approx \epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{U^{3/2}}{d^2}} \quad (8.30)$$

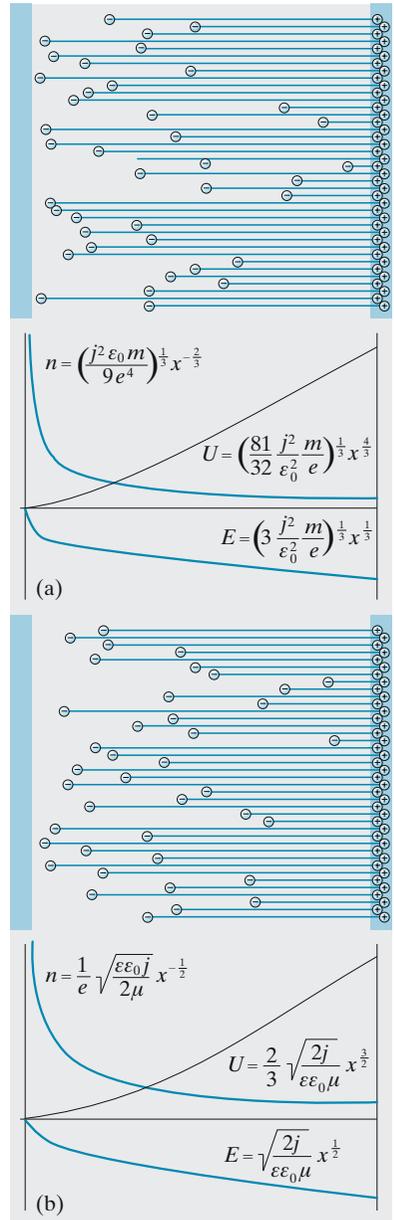


Abb. 8.25a,b. Negative Raumladung verschluckt Feldlinien, verringert also das von der Anode ausgehende Feld und krümmt das Potential. (a) für eine Vakuumröhre, (b) für einen Halbleiter

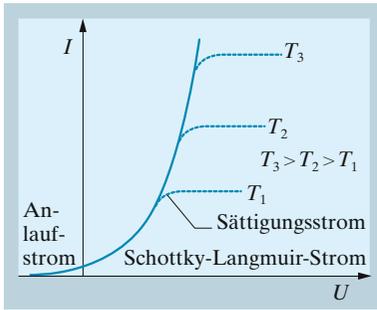


Abb. 8.26. Abhängigkeit des Emissionsstromes von der Anodenspannung in einer Elektronenröhre bei verschiedenen Kathodentemperaturen

Die exakte Rechnung liefert die **Schottky-Langmuir-Raumladungsformel**, die sich von unserem Näherungsausdruck nur um den Faktor $\frac{4}{9}$ unterscheidet. Sie beschreibt den aufwärts gekrümmten Teil der Kennlinie einer Elektronenröhre für mittlere Spannungen (Abb. 8.26).

Im **Festkörper** erhält man analog aus (8.29) und (8.23)

$$\frac{U}{d^2} \approx \frac{j}{\varepsilon\varepsilon_0\mu E} \approx \frac{jd}{\varepsilon\varepsilon_0\mu U} \quad \text{oder} \quad \boxed{j \approx \varepsilon\varepsilon_0\mu \frac{U^2}{d^3}}. \quad (8.31)$$

Dies ist das **Child-Gesetz** für raumladungsbegrenzte Halbleiterströme. Es gilt besonders für Halbleiter, die nur wenige eigene Träger haben, sondern diese aus einer injizierenden Elektrode geliefert erhalten.

Für die Elektronenröhre beschreibt (8.30) noch nicht die ganze Kennlinie. Bei $U = 0$ sollte nach (8.30) der Strom verschwinden. Er tut es aber nicht ganz, und sogar bei schwachen Gegenfeldern (bis zu annähernd 1 V) kommt noch etwas Strom an, und zwar umso mehr, je heißer die Glühkathode ist (auf den Schottky-Langmuirschen Teil hat die Kathodentemperatur dagegen keinen Einfluss). Bei diesem so genannten **Anlaufstrom** handelt es sich um Elektronen, die nach dem Austritt aus der Kathode genügend thermische Energie haben, um auch gegen ein schwaches Gegenfeld anzulaufen. Die Anlaufstromkennlinie ist ein Abbild des hochenergetischen „Schwanzes“ der **Maxwell-Verteilung**. Sie wird beherrscht durch den Faktor $e^{-e|U|/(kT)}$:

$$\boxed{I(U) = I(0)e^{-e|U|/(kT)}}. \quad (8.32)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man die Kathodentemperatur messen. Die von 0 verschiedene Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen hat übrigens zur Folge, dass der Ort $E = 0$, also das Minimum der Potentialkurve, sich nicht genau an der Kathodenoberfläche, sondern etwas vor ihr befindet.

× Beispiel . . .

Bei 0,2 V Gegenspannung sei der Anodenstrom einer Röhre $0,3 \mu\text{A}$, bei 0,1 V sei er $1,1 \mu\text{A}$. Wie heiß ist die Kathode?

$$T = eU/(k \ln(I_1/I_2)) = 900 \text{ K}.$$

Für große Anodenspannungen geht die $U^{3/2}$ -Kennlinie in einen horizontalen Teil über, der wieder umso höher liegt, je heißer die Kathode ist. Dieser von der Spannung unabhängige **Sättigungsstrom** kommt so zustande, dass das hohe Feld *alle* Ladungsträger absaugt, die die Kathode liefern kann, ohne dass sich der raumladungsbildende Stau vor der Kathode ausbildet. Die Temperaturabhängigkeit des Sättigungsstromes entspricht dem Richardson-Gesetz (Abschn. 8.1.1); die Kurve liegt umso höher, ist aber auch umso flacher, je kleiner die Austrittsarbeit aus der Kathode ist. Der Übergang zwischen dem Schottky-Langmuir- und dem Sättigungsbereich erfolgt so, dass die Feldlinien immer tiefer in den Raum vor der Kathode eingreifen und den Strom anwachsen lassen, bis die Raumladung vor der Kathode abgebaut ist und *alle* austretenden Elektronen unmittelbar erfasst und zur Anode geführt werden.

8.2.7 Elektronenröhren als Verstärker

Im raumladungsbegrenzten Bereich (Schottky-Langmuir-Bereich) einer Vakuumdiode treten aus der geheizten Kathode so viele Elektronen aus, dass ihre Raumladung das Feld dort ganz aufzehrt. Diese Wolke ist als negative Kondensatorplatte aufzufassen. Ihre Gesamtladung ergibt sich aus der Anodenspannung U_A und der Kapazität C_{AK} des Anode-Kathode-Systems zu $Q = C_{AK}U_A$. Jetzt bauen wir ein Gitter zwischen Anode und Kathode und legen es auf ein positives Potential U_G (die Kathode sei immer geerdet: $U_K = 0$). Dann muss die Elektronenwolke vor der Kathode noch mehr Feldlinien abfangen: $Q = C_{AK}U_A + C_{GK}U_G$. Das Kapazitätsverhältnis $D = C_{AK}/C_{GK}$ ist nur von der Geometrie der Röhre abhängig und meist viel kleiner als 1; wir nennen es den **Durchgriff** der Röhre. Die Ladung der Wolke ist also $Q = C_{GK}(U_G + DU_A)$. Mit Q hängt auch die Stromdichte $j = \rho v$ und damit der Kathodenstrom von U_G und U_A , kombiniert zur **Steuerspannung** $U_G + DU_A$, ab: Anstelle des U_A der Diode tritt bei der **Triode** $U_G + DU_A$, also heißt die Schottky-Langmuir-Formel jetzt

$$I_K = I_A + I_G \sim (U_G + DU_A)^{3/2}. \tag{8.33}$$

Die Kennlinien $I_K(U_G)$ bei konstantem U_A haben die bekannte S-Form (Abb. 8.28): Schottky-Langmuir-Bereich mit $U_G^{3/2}$, dann Sättigungsbereich. Je größer U_A wird, desto mehr verschieben sie sich nach links, ohne aber ihre Form zu ändern. Uns interessiert besonders der Bereich schwach negativer Gitterspannung U_G . Bei genügend großem U_A fließt dann immer noch ein beträchtlicher Kathodenstrom, aber die Elektronen können auf dem negativen Gitter nicht landen, der Gitterstrom ist praktisch 0, und statt I_K kann man auch den Anodenstrom I_A setzen. Die **Steilheit** dieser Kennlinien $S = \partial I_A / \partial U_A$ ist variabel, hängt aber nach (8.33) mit $\partial I_A / \partial U_A$ immer zusammen wie $S = D^{-1} \partial I_A / \partial U_A$. Die Größe $\partial U_A / \partial I_A$ definiert man sinngemäß als **Innenwiderstand** R_i der Röhre (Aufgabe 8.2.7). So ergibt sich die **Barkhausen-Röhrenformel**

$$\boxed{SDR_i = 1} \tag{8.34}$$

als mathematische Identität.

Durch Änderung von U_G lässt sich also der Anodenstrom bei konstantem U_A steuern. Darauf beruht die Anwendung der Triode als **Verstärker** (Abb. 8.27 und 8.28). Man stellt die Gitterspannung aus der Batterie U_{G_0} so ein, dass der **Arbeitspunkt** A der Röhre in einen möglichst geraden Kennlinienteil fällt. Um diesen Punkt A pendelt das Gitterpotential im Rhythmus des zu verstärkenden Wechselsignals δU_G . Eine solche Änderung $\delta U_G = AA'$ ruft eine Änderung $\delta I_A = BB'$ des Anodenstroms hervor. Damit vergrößert sich auch der Spannungsabfall am **Arbeitswiderstand** R_A um $R_A \delta I_A$. Da diese Spannungsänderung der Anodenspannung entgegengerichtet ist, bedeutet sie eine Verkleinerung der Ausgangsspannung zwischen den Buchsen 3 und 4:

$$\delta U_A = -R_A \delta I_A. \tag{8.35}$$

Diese Änderung der Anodenspannung muss in der Steuerspannung und ihrem Einfluss auf I_A mitberücksichtigt werden:

$$\delta I_A = S(\delta U_G + D \delta U_A). \tag{8.36}$$

Aus (8.35) und (8.36) zusammen erhalten wir die **Spannungsverstärkung**

$$\boxed{V = \frac{\delta U_A}{\delta U_G} = -\frac{SR_A}{1 + DSR_A} = -\frac{1}{D} \frac{R_A}{R_i + R_A}}. \tag{8.37}$$

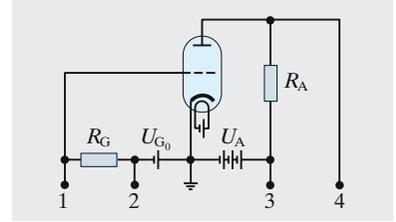


Abb. 8.27. Vakuum-Triode in Verstärkerschaltung. Die bei 1 2 eingegebene Spannung kann bei 3 4 verstärkt abgegriffen werden. Die Röhre wird heute fast überall durch einen Transistor ersetzt, außer für hohe Leistung (Röhrensender)

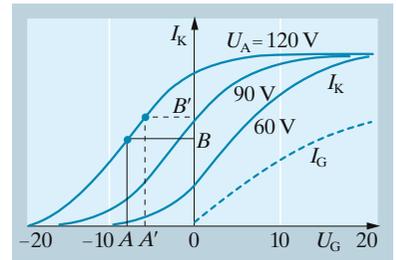


Abb. 8.28. Kennlinien der Triode. Abhängigkeit des Kathodenstroms von Gitter- und Anodenspannung. Für positive Gitterspannungen tritt auch ein Gitterstrom I_G auf

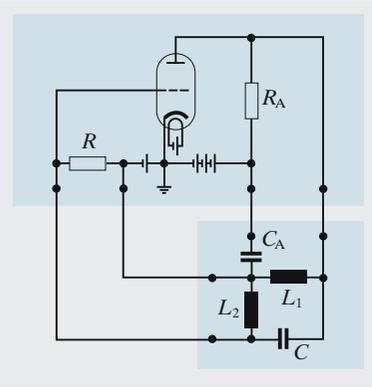


Abb. 8.29. Verstärkerschaltungen mit Rückkopplungsglied (Meißner-Dreipunktschaltung)

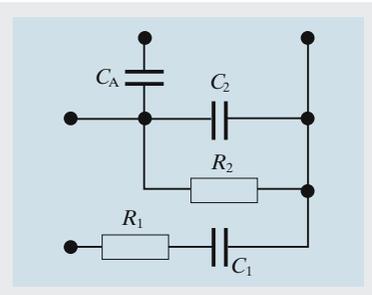


Abb. 8.30. Phasenschieber-Rückkopplungsglied, an die Verstärkerschaltung von Abb. 8.27 anzuschließen

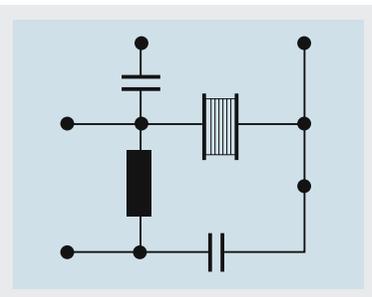


Abb. 8.31. Schwingquarz-Stabilisierung des Rückkopplungsgliedes einer Verstärkerschaltung, an Abb. 8.27 anzuschließen

V ist negativ, weil Eingangs- und Ausgangssignal entgegengesetzte Phasen haben. Wenn das Gitter negativ wird, lässt es ja weniger Elektronen durch, und vom positiven U_A fällt ein geringer Anteil $I_A R_A$ am Arbeitswiderstand ab. Der Betrag der Verstärkung kann höchstens $1/D$ sein (falls $R_A \gg R_i$). Röhren mit hoher Verstärkung haben einen sehr kleinen Durchgriff. Diesen kann man mittels weiterer Gitter noch verringern (**Tetrode**, **Pentode** usw.). Der Innenwiderstand von Röhren liegt in der Größenordnung einiger $k\Omega$. Die Verstärkung lässt sich steigern, indem man mehrere Verstärkerstufen in Reihe schaltet, wobei immer die Anode einer Stufe am Gitter der nächsten liegt und sich die Verstärkungen im Idealfall multiplizieren.

8.2.8 Schwingungserzeugung durch Rückkopplung

Mit einer Triode oder einem anderen Verstärkerelement, z. B. einem **Transistor**, kann man ungedämpfte elektrische Schwingungen erzeugen, die z. B. in einer **Sendeanlage** als **Trägerwelle** dienen. Der Verstärker wandle seine sinusförmige Eingangsspannung U_E in die Ausgangsspannung U_A um. Da U_A und U_E selten phasengleich sind, ist der Verstärkungsfaktor $V = U_A/U_E$ i. Allg. eine komplexe Größe. Nun wird U_A in ein Rückkopplungsglied eingespeist, das an seinem Ausgang die Spannung U_R liefert. $K = U_R/U_A$, der **Rückkopplungsfaktor**, ist i. Allg. ebenfalls komplex. Wenn nun $VK = 1$, d. h. wenn V und K entgegengesetzte Phasenverschiebungen enthalten und dem Betrag nach zueinander reziprok sind, ist $U_R = U_E$, und man kann den Ausgang des Rückkopplungsgliedes mit dem Verstärkereingang verbinden. Diese **Selbsterregungsgleichung**

$$VK = 1$$

(8.38)

sichert, dass jede zufällig entstandene Schwingung immer erhalten bleibt. Sie beschreibt einen labilen Betriebszustand, denn V ist nie ganz konstant. Bei $VK < 1$ erlischt die Schwingung, bei $VK > 1$ facht sie sich selbst an, in der Praxis allerdings meist nur bis zu einer bestimmten gewünschten Amplitude, bei der wieder $VK = 1$ wird, und zwar jetzt stabil. Diese Begrenzung erfordert mindestens ein nichtlineares Element, z. B. eine nichtlineare Verstärkerkennlinie.

Bei der Triode sind U_E und U_A gegenphasig (vgl. (8.37)). Auch das Rückkopplungsglied muss dann die Phase umkehren. Abbildungen 8.29, 8.30 und 8.54 zeigen drei hierzu geeignete Schaltungen. Sie erfüllen die Selbsterregungsbedingung nur für eine bestimmte Frequenz und erzeugen daher Sinusschwingungen eben dieser Frequenz (Aufgaben 8.2.11–8.2.14).

Auch der Fall einer Verringerung der Eingangsleistung (**Gegenkopplung**) wird technisch mehr und mehr ausgenutzt. Man nimmt hierbei den Verstärkungsverlust in Kauf,

- um die Übertragungseigenschaften zu verbessern (den Frequenzzugang zu linearisieren, Klirrfaktor und Störspannungen zu reduzieren),
- um Stabilität der Schaltung zu sichern, wo Selbsterregung unerwünscht ist oder zeitliche Änderung der aktiven Schaltelemente Änderungen von K und V herbeiführen könnte, oder
- um eine bestimmte Abhängigkeit der Verstärkung von der Größe der Eingangsspannung zu erzielen (**Operationsverstärker** als Grundbausteine von Analogrechnern, **logarithmische Verstärker**).

Diese Schaltungen werden heute überwiegend auf Halbleiterbasis realisiert und kommen als integrierte Miniatur-Schaltmoduln in den Handel, die trotz mehrtausendfacher Volumenverkleinerung im Wesentlichen dieselben oder viel weit reichendere Zwecke erfüllen als die riesigen alten Röhrenschaltungen.

8.2.9 Erzeugung und Verstärkung höchstfrequenter Schwingungen

Die Selbsterregung, Aufrechterhaltung oder Verstärkung von Schwingungen geht im Prinzip immer ähnlich vor sich wie bei der alten Pendeluhr. Man braucht eine *Energiequelle* (das sinkende Gewicht), ein *schwingungsfähiges Gebilde* (das Pendel) und einen *Rückkopplungsmechanismus* (Anker und Steigrad), der Energie in den richtigen Augenblicken aus der Quelle in den Schwinger einspeist, indem er im mechanischen Fall Kraft F und Pendelgeschwindigkeit v , im elektrischen Fall Strom I und Spannung U in Phase bringt. Leistung ist ja Fv bzw. UI . Wenn nur einer der Partner, z. B. U oder I , eine Gleichstromkomponente enthält, hebt sich ihr Leistungsanteil im Zeitmittel weg. Wir brauchen also nur Wechselgrößen zu betrachten.

In einer üblichen Vakuumtriode, als Senderöhre benutzt, dient der Elektronenstrahl, letzten Endes also die Anodenspannungsquelle als Energiequelle. Das Gitter erzeugt einen wechselnden Elektronenstrom nach dem Prinzip der Verkehrsampel, die den Fahrzeugstrom periodisch sperrt bzw. durchlässt. Koppelt man eine mit diesem Strom wechselnde Spannung zurück ans Gitter, dann schwingt das Feld, das die Elektronen durchlaufen, in Phase oder Gegenphase mit dem Strom. Bei Gleichphasigkeit werden die Elektronen immer beschleunigt, bei Gegenphasigkeit immer gebremst und geben Energie ans Feld ab. Eine zufällig entstandene kleine Schwingung facht sich selbst an.

Die **Dichtemodulation** im Fahrzeugstrom, die eine Verkehrsampel hinter und vor sich erzeugt, reicht zwar weit, verliert sich schließlich aber doch, einfach weil Autos verschieden schnell fahren. Nach einer Fahrzeit, die nicht viel größer ist als die Ampelperiode (genauer: Nach etwa $v/\Delta v$ Perioden, wo Δv die Geschwindigkeitsspanne der Fahrzeuge ist), merkt man von der Dichtemodulation nichts mehr. Bei $U = 1$ kV fliegen Elektronen mit $7 \cdot 10^6$ m/s, brauchen also für einige mm Laufstrecke zwischen Gitter und Anode knapp 1 ns. Sie verstärken oder generieren also nur bis etwa 1 GHz. Dazu kommt, dass bei so hohen Frequenzen die Kapazitäten und Induktivitäten normaler Zuleitungsdrähte störende Schwingkreise bilden.

Statt sich von den Laufzeiteffekten stören zu lassen, nutzt man sie im dm-, cm- und mm-Bereich gerade aus, um die erwünschte Modulation des Elektronenstroms zu erzeugen. Die wichtigsten Möglichkeiten dazu sind die **Klystrons** und die **Lauffeldröhren**. Daneben benutzt man heute mehr und mehr **Halbleiterelemente** wie **Tunnel-, Lawinen- und Gunn-Dioden**, in denen Ähnliches passiert.

Im **Zweikammer-Klystron** (Abb. 8.33) schießt man einen Elektronenstrahl durch einen Hohlraumresonator. Das in ihm schwingende elektrische Feld beschleunigt und verlangsamt abwechselnd die durchtretenden Elektronen. Genau wie solche v -Unterschiede aus einem mit konstanter Dichte dahinfließenden Autoström schließlich getrennte Pakete oder gar „Staus“ machen, verwandelt sich die v -Modulation nach einer gewissen Laufstrecke in eine Dichtemodulation (vgl. den graphischen Fahrplan der Elektronenbewegung, Abb. 8.32). In einem zweiten Resonator, der meist an der Stelle maximaler Grundschwingungsamplitude steht, facht dieser modulierte Strom ein Feld passender Frequenz an, indem er ihm immer wieder Bremsenergie der Elektronen zuführt. Nach Abb. 8.32 ist der Strom annähernd rechteckförmig, also reich an Oberwellen. Man kann den zweiten Resonator also auch auf ein Vielfaches der Frequenz des ersten abstimmen.

Das **Reflexklystron** legt die beiden Resonatoren mittels eines hohen Minuspentials, das die Elektronen reflektiert, zu einem einzigen zusammen (Abb. 8.34). Zur Selbsterregung der entsprechenden Schwingung braucht man dann keine äußere Rückkopplung. Hier muss man noch beachten, dass schnelle Elektronen weiter gegen die reflektierende Elektrode vordringen als langsame.

In den **Lauffeldröhren** lässt man ein elektrisches Wellenfeld einem Elektronenstrahl etwas langsamer als dieser nachlaufen. Indem es die Elektronen bremst, eignet

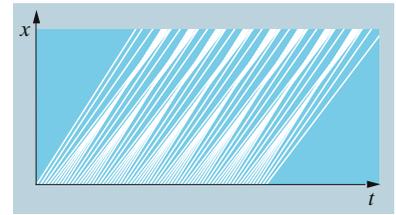


Abb. 8.32. Graphischer Fahrplan für Teilchen, die geschwindigkeitsmoduliert aus einer Quelle austreten. Ihre Geschwindigkeit ändert sich zeitlich gemäß $v = v_0 + v_1 \sin(\omega t)$. Nach einer Laufstrecke von etwa $v_0^2/(\omega v_1)$ hat sich die Geschwindigkeitsmodulation in eine Dichtemodulation verwandelt

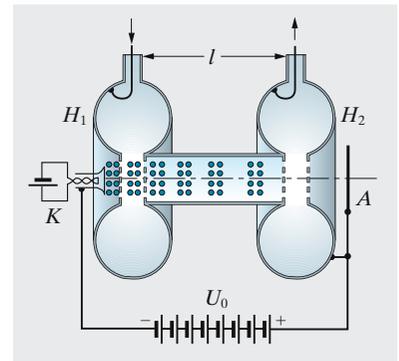


Abb. 8.33. Klystron

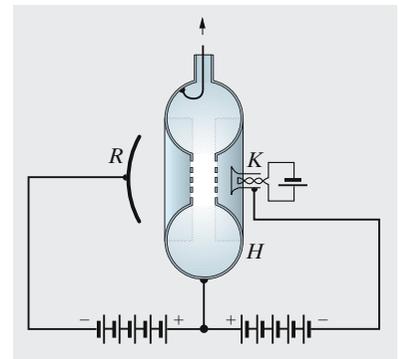


Abb. 8.34. Reflexklystron

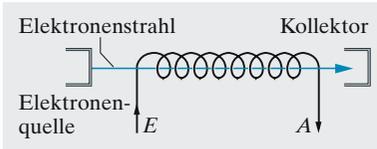


Abb. 8.35. Wanderfeld-Verstärker

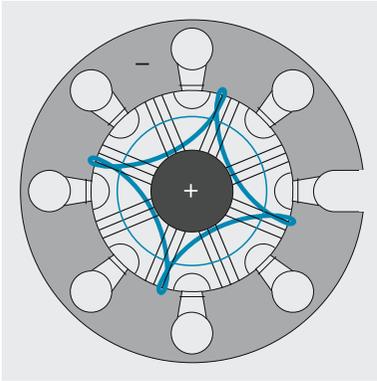


Abb. 8.36. Im axialen Magnetfeld und überwiegend radialen E -Feld des Magnetrons beschreiben die Elektronen eine epizykloidenähnliche (karoförmige) Bahn. Ihr Strom, hier zu jedem zweiten „Pol“ der Anode, führt dieser „Verzögerungsleitung“ Energie zu, die Aufladung erzeugt einen azimuthalen E -Feldanteil E_a . Die Karobahn rotiert mit einigen GHz; ebenso schnell läuft die E_a -Welle um und wird durch ein Loch ausgekoppelt

sich das Feld einen Teil von deren Energie an. In der **Wanderfeldröhre (travelling wave tube, Abb. 8.35)** läuft dieser Strahl geradlinig, im *Magnetron*, wie es im Mikrowellenherd und in der Radaranlage steckt, wird er durch die Lorentz-Kraft in einem axialen Magnetfeld zum Kreis gekrümmt, auf dem infolge eines radialen E -Feldes ein kleiner Kreis abrollt (Epizykloide, vgl. Abb. 6.106). Da Elektronen bei gebräuchlichen Beschleunigungsspannungen nur mit etwa $c/10$ laufen, muss die Welle in beiden Fällen durch eine **Verzögerungsleitung** verlangsamt werden. Bei der Wanderfeldröhre kann man diese als gewendelten Lecher-Draht ausbilden oder als eine Kette von Hohlraumresonatoren mit Kopplung durch ein zentrales Loch, im **Magnetron** ebenfalls als Kette von Resonatorschlitzen, die radial vom Elektronen-Laufraum abzweigen. Die Umsetzung von Elektronen- in Feldenergie hat allerdings einen geringen Wirkungsgrad ($\eta \approx 2 \Delta v/v \approx 0,3$), denn der Geschwindigkeitsunterschied Δv zwischen Welle und Strahl muss klein bleiben, weil beide sonst außer Phase fallen. Im Magnetron erreicht man $\eta = 0,8$.

Wanderfeldröhre und Magnetron lassen sich auch mit dem linearen bzw. dem rotierenden **Asynchronmotor** oder besser -generator vergleichen (Abschn. 7.3.10). Anstelle des Läufers hat man hier ein Elektronenpaket oder mehrere. Bevor die Röhre „eingeschwungen“ ist (der Motor auf seiner Nenndrehfrequenz läuft), gibt es immer auch Feldanteile, die in „falscher“ Phase schwingen, d. h. so, dass sie die Elektronen (den Läufer) beschleunigen. Der entsprechende Energieverlust dämpft aber diese Anteile bald weg, die phasenrichtigen wachsen an. Die Teilchenbeschleuniger sind umgekehrt mit den Motoren gleichzusetzen (Abschn. 18.3.3).

Wie fast überall lassen sich auch in der Höchstfrequenztechnik die Vakuumröhren durch handlichere, billigere und betriebssichere **Halbleiterelemente** ersetzen, falls nicht zu viel Leistung umgesetzt werden muss. Auch hier nutzt man oft Laufzeiteffekte aus (**Lawinen-Laufzeitdiode**). Eine andere, hier meist einfachere Beschreibung der Arbeitsweise solcher Bauteile geht von der Entdämpfung eines Schwingkreises mittels einer fallenden $I(U)$ -Kennlinie, also eines negativen differentiellen Widerstandes dU/dI aus. Wir wissen ja, dass ein Schwingkreis unbegrenzt weiterschwingen könnte, wenn der dämpfende Widerstand R nicht da wäre. R lässt sich durch ein Element mit fallender Kennlinie kompensieren oder überkompensieren, sodass Schwingungen ungedämpft bleiben oder sich selbst anfachen.

Eine solche **fallende Kennlinie** entsteht auf verschiedene Art. Wir kennen sie von der Gasentladung (Abschn. 8.3.3), wo sie durch Vorschaltung von R oder L überkompensiert werden muss, damit die Entladung nicht „durchgeht“. Ganz ähnlich entsteht die fallende Kennlinie in der **Lawinendiode**, wo im sehr hohen E -Feld ebenfalls Ladungsträgermultiplikation durch Stoßionisation stattfindet. Die Kennlinie der **Gunn-Diode** fällt, weil ein starkes E -Feld die Ladungsträger in Bandbereiche mit geringerer Beweglichkeit hebt (Abschn. 17.3.6), in der **Tunnel-Diode (Esaki-Diode)** beruht sie auf quantenmechanischem Tunneln (Abschn. 13.7.2) durch die sehr dünne Übergangsschicht zwischen n - und p -leitendem Gebiet des Kristalls.

8.2.10 Teilchenfallen

Elektromagnetische Felder können geladene Teilchen nicht nur führen und beschleunigen, sondern auch bremsen und auf engem Raum einfangen. Ein statisches elektrisches Feld kann zwar im Vakuum kein Energieminimum haben, in dem man ein Teilchen fangen könnte; in einen solchen Potentialtopf für ein positives Teilchen z. B. müssten ja von allen Seiten Feldlinien hineinführen, was nach *Gauß* nur möglich wäre, wenn dort ein negatives Teilchen säße. Mit kombinierten E - und B -Hochfrequenzfeldern gelingt das aber. *Dehmelt* und *Paul* konnten in solchen Fallen wenige, sogar einzelne Elektronen und Ionen über Monate halten und ihre

Eigenschaften, z. B. ihre magnetischen Momente mit relativen Genauigkeiten bis fast 10^{-12} messen. Neutrale Atome und Neutronen kann man bei ihrem magnetischen Moment packen; die Potentialtöpfe, die man ihnen bietet, sind aber so flach (kaum 0,1 meV), sodass man sie auf weniger als 1 K „kühlen“ muss, z. B. indem man ihnen Licht entgegenschickt, das sie absorbieren. Diese Forschung steht an der Nahtstelle vieler Gebiete, der Physik der Laser (Kap. 15), der Beschleuniger (Abschn. 18.3.3), der Teilchenmikroskope (Abschn. 9.5.4), der Resonanzmethoden (Abschn. 14.9.3); dies zeigt schon die Verleihung des Nobelpreises 1989 an *Dehmelt* und *Paul* gemeinsam mit *Ramsey*, der die **Cs-Uhr** durch Resonanz zweier Felder auf Ganggenauigkeiten von 10^{-13} brachte und den **H-Maser** zur bisher stabilsten elektromagnetischen Strahlungsquelle machte.

8.3 Gasentladungen

Blitze, Funken, Lichtbögen gehören zu den spektakulärsten Naturerscheinungen. Gezähmt geben sie uns Licht aus energiesparenden Lampen, warnen uns vor schnellen Teilchen in Geiger-Zähler und Ionisationskammer oder registrieren sie in der Drahtkammer. **Gasentladungen**, beherrschbar gegen Ende des 19. Jh. durch Fortschritte in Vakuum- und Hochspannungstechnik, waren auch der Schlüssel zur Erforschung des Atoms.

8.3.1 Leitfähigkeit von Gasen

Gase leiten nur, wenn sie Ladungsträger, also Ionen oder Elektronen enthalten. Diese können durch Erhitzung oder energiereiche Strahlung (Röntgen- oder radioaktive Strahlung) erzeugt werden. Anders als im Elektrolyten, wo sie durch Solvathüllen energetisch stabilisiert werden, sind Ionen in Gasen nicht beständig, sie rekombinieren mit Teilchen entgegengesetzten Vorzeichens.

a) Ionenkinetik. Wir erzeugen Ionenpaare mit der Rate α Ionenpaare $\text{s}^{-1} \text{m}^{-3}$. Ohne Rekombination würden die Anzahldichten positiver und negativer Teilchen mit der Zeit anwachsen wie $n_+ = n_- = n = \alpha t$. Je mehr Ionen umherwimmeln, desto wahrscheinlicher werden aber Begegnungen, die zur **Rekombination** führen. Wir betrachten ein bestimmtes positives Ion. Es legt die mittlere freie Weglänge $l = 1/(An_-)$ in der Zeit $t_l = l/v$ zurück, bevor es von einem der n_- negativen Träger mit dem **Rekombinationsquerschnitt** A eingefangen wird. Im m^3 sind n_+ solche positiven Ionen, also ist die Rekombinationsrate (Einfangakte $\text{s}^{-1} \text{m}^{-3}$),

$$A v n_- n_+ = \beta n_- n_+ .$$

Erzeugung und Rekombination zusammen ergeben als zeitliche Änderung von $n_+ = n_- = n$:

$$\dot{n} = \alpha - \beta n^2 . \quad (8.39)$$

Setzt die Erzeugung plötzlich aus, klingt n gemäß $\dot{n} = -\beta n^2$ oder integriert

$$n = \frac{n_0}{1 + t/\tau}$$

ab, wobei die **Lebensdauer** $\tau = 1/(\beta n_0)$ umso kürzer ist, je mehr Träger da waren. Entsprechend stellt sich etwa eine Zeit τ nach dem Einschalten der Erzeugung ein **stationärer Zustand** ein, wo $\dot{n} = 0$, also Erzeugung = Rekombination ist

$$n = n_\infty = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

In der Einstellzeit

$$\tau = \frac{1}{\beta n_\infty} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{n_\infty}{\alpha}$$

könnte die Ionenquelle gerade die stationäre Ionendichte nachliefern, wenn es keine Rekombination gäbe.

x Beispiel ...

Bestimmen Sie die Anklingkurve $n(t)$ von $n_0 = 0$ aus durch Integration von (8.39).

$$\int_0^n \frac{dn}{(1 - \beta n^2/\alpha)} = \alpha t = \sqrt{\alpha/\beta} \int_0^{\sqrt{\beta/\alpha} n} \frac{dx}{(1 - x^2)} = \sqrt{\alpha/\beta} \operatorname{artanh}(\sqrt{\beta/\alpha} n), \quad n = \sqrt{\alpha/\beta} \tanh(\sqrt{\alpha\beta} t).$$

Kosmische Strahlung und die Radioaktivität von Boden und Luft stellen in Bodennähe eine Erzeugungsrate von $\alpha \approx 10^6 \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$ dar. Der **Rekombinationskoeffizient** ist $\beta \approx 10^{-12} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ (Aufgabe 8.3.1). Luft enthält also mindestens $n_\infty \approx 10^9$ Ionen/ m^3 , die etwa $\tau \approx 10^3$ s leben. In der Nähe kräftiger radioaktiver Präparate oder in Kernreaktoren kann α etwa 10^{10} mal, n_∞ etwa 10^5 mal größer, τ etwa 10^5 mal kleiner sein (Abschn. 18.3.4).

b) Die Ionisationskammer. Im gasgefüllten Platten- oder Zylinderkondensator (Abb. 8.37) fallen die Ionen im Feld nicht frei, sondern bewegen sich wie im Elektrolyten mit einer **Driftgeschwindigkeit**

$$v = \mu E. \quad (8.40)$$

Sie stoßen ja ständig mit Gasmolekülen zusammen. Auf der **freien Weglänge** l zwischen zwei solchen Stößen, d. h. während der **freien Flugdauer** $t_l = l/v_{\text{th}}$ (v_{th} : thermische Geschwindigkeit) wird das einwertige Ion beschleunigt mit $a = eE/m$, gewinnt also schließlich die Geschwindigkeit $\Delta v = at_l = eEt_l/m$ in Feldrichtung. Beim folgenden Stoß geht diese gerichtete Geschwindigkeit wieder verloren, da das Ion in jeder beliebigen Richtung zurückprallen kann. Nach jedem Stoß muss das Ion also neu „auftanken“ und hat im Zeitmittel nur

$$v_d = \frac{1}{2} \Delta v = \frac{eEt_l}{2m}.$$

Mit dieser **Driftgeschwindigkeit** treiben alle positiven Ionen in Feldrichtung, die negativen entgegengesetzt. Darüber lagert sich die meist viel größere, aber ungeordnete thermische Geschwindigkeit v_{th} . Wenn nicht mehr $v_d \ll v_{\text{th}}$ gilt, wie in verdünnten Gasen oder sehr hohen Feldern, spricht man von heißen Trägern, und unsere Betrachtung gilt nicht mehr.

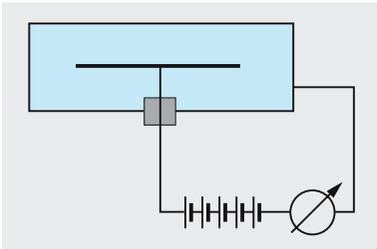


Abb. 8.37. Ionisationskammer. Ihr Sättigungsstrom mißt linear die Erzeugungsrate von Ionen durch radioaktive Strahlung oder ähnliche Einflüsse. Im Proportionalbereich gilt eine Wurzel-Abhängigkeit

Vergleich mit (8.40) liefert

$$\mu = \frac{e\ell}{2m} = \frac{e\ell}{2mv_{th}} = \frac{e}{2mv_{th}nA} \quad (\text{Beweglichkeit}) \quad (8.41)$$

Hier ist natürlich n die Anzahldichte neutraler Gasmoleküle, A ihr Stoßquerschnitt.

x Beispiel...

Wie groß ist die Beweglichkeit von Luftionen in Normalluft?

$$n = 3 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}, \quad A \approx 2 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2, \quad v_{th} = 500 \text{ m/s}, \quad \text{also} \quad \mu \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{V s}.$$

Messwerte: $\mu_+ = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{V s}$, $\mu_- = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{V s}$.

Wir steigern jetzt allmählich die Spannung an unserer Ionisationskammer und messen die **Kennlinie** $I(U)$ (Abb. 8.38).

- Solange das Feld noch viel weniger Ladungen zur Elektrode absaugt, als durch Rekombination verloren gehen, gilt Gleichgewicht zwischen Erzeugung und Rekombination: $n_\infty = \sqrt{\alpha/\beta}$. Die Stromdichte ist dann

$$j = en(\mu_+ + \mu_-)E = e\sqrt{\alpha/\beta}(\mu_+ + \mu_-)E.$$

Die Kennlinie steigt ohmsch, also proportional, ihre Steigung geht mit der Wurzel aus der Dosisleistung. Die Anfangsleitfähigkeit $\sigma = j/E$ hat für Normalluft, die nur der Hintergrundstrahlung ausgesetzt ist, den Wert $\sigma \approx 5 \cdot 10^{-14} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ (Aufgabe 8.3.1). Bei sehr hoher Dosisleistung kann $\sigma \approx 10^{-8} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ werden. Noch weiter steigt σ auch nicht, wenn man noch mehr Moleküle ionisiert, denn dann begrenzen die Ionen mit ihrem viel größeren Stoßquerschnitt (Coulomb-Querschnitt) die freie Weglänge, und somit wird $\mu \sim l \sim n^{-1}$ und $\sigma = \text{const}$.

- Wenn bei hoher Spannung die Ionen so schnell abgesaugt werden, dass es kaum noch zur Rekombination kommt, gelangen alle in einer Säule von der Höhe d (Elektrodenabstand) erzeugten Träger zur Elektrode:

$$j = 2ed\alpha.$$

Dieser **Sättigungsstrom** hängt nicht mehr von der Spannung ab, ist aber proportional zur Dosisleistung. Gewöhnlich mißt man daher in diesem Bereich (Abb. 8.38).

- Bei noch höherer Spannung bilden sich **Stoßionisationslawinen**, und der Strom steigt wieder mit der Spannung an.

Geiger und Müller verwendeten als Anode einen nur wenige μm dicken Draht (Abb. 8.39). Nahe diesem Draht ist dann das Feld so groß, dass man schon mit einigen 100 V Spannung im Sättigungsbereich liegt und der Durchgang eines ionisierenden Teilchens durch das **Zählrohr** eine Entladung auslöst, die nach Verstärkung einen Lautsprecher zum Knacken oder ein Zählwerk zum Ansprechen bringt (Abschn. 18.3.2d).

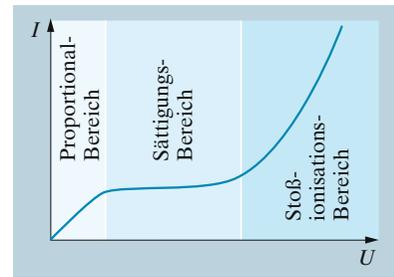


Abb. 8.38. Charakteristik einer unselbständigen Gasentladung (**Ionisationskammer**)

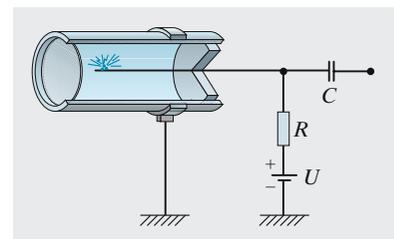


Abb. 8.39. Im starken Feld um den dünnen Draht des **Geiger-Müller-Zählers** lösen die wenigen Elektronen und Ionen, die ein schnelles Teilchen erzeugt, Ionisierungslawinen aus und führen so zu einer leicht messbaren unselbständigen Entladung

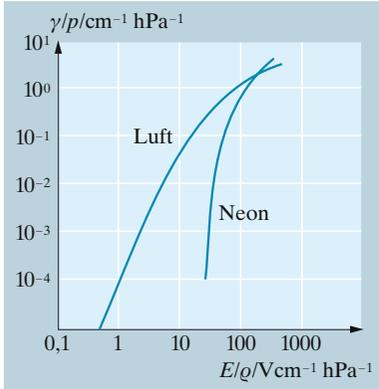


Abb. 8.40. Das auf den Druck 1 hPa bezogene Ionisierungsvermögen von Elektronen in Luft und Neon als Funktion von Feldstärke/Druck

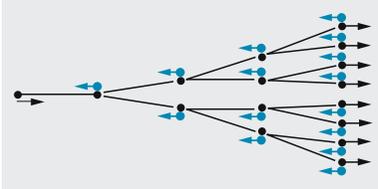


Abb. 8.41. Schematische Darstellung einer Trägerlawine bei der Stoßionisation

8.3.2 Stoßionisation

Ein Ion oder Elektron in einem kühlen Gas kann nur dann durch Stoß ein anderes Gasmolekül ionisieren, wenn es auf seiner freien Weglänge l mindestens dessen Ionisierungsenergie E_i aufnimmt. Es muss sein

$$eEl \geq E_i.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stoß zur Ionisierung führt, ist eine Funktion des Verhältnisses eEl/E_i , die **Ionisierungsfunktion**

$$P_{\text{Ion}} = P\left(\frac{eEl}{E_i}\right).$$

Auf 1 m Weg stößt jeder Träger l^{-1} mal, erzeugt also $l^{-1} \cdot P_{\text{Ion}}$ Ionen/m. Dieses Ionisierungsvermögen γ kann man wegen $l \sim n^{-1} \sim p^{-1}$ auch durch das Feld E und den Druck p ausdrücken:

$$\gamma = pf\left(\frac{E}{p}\right). \quad (8.42)$$

Abbildung 8.40 zeigt das **differentielle Ionisierungsvermögen** γ/p für Luft und Neon. Wie erwartet, liegt die Kurve für Neon mit seiner höheren Ionisierungsenergie weiter rechts (Aufgabe 8.3.3).

Jetzt betrachten wir einen Strahl von N Trägern, die im Feld beschleunigt werden. Auf der Wegstrecke dx erzeugen sie $dN = \gamma N dx$ neue Träger. Diese können auch stoßionisieren, und an der Elektrode kommt schließlich eine ganze *Lawine* an (Abb. 8.41), bestehend aus $N_d = N_0 e^{\gamma d}$ Trägern, wenn an der anderen Elektrode N_0 Träger starteten, z. B. an der Kathode als Photoelektronen ausgelöst wurden. Außer den negativen Trägern, die sich dieser Lawine anschließen, erzeugt aber jedes dieser Mutterelektronen ebenso viele, nämlich $e^{\gamma d} - 1$ positive Ionen (die 1 gilt für das Mutterelektron, zu dem kein positives Ion gehört). Diese positiven Ionen werden ebenfalls beschleunigt und können beim Aufprall auf die Kathode **Sekundärelektronen** auslösen (Abschn. 8.1.4). Wenn jedes dieser Ionen δ Sekundärelektronen macht, entstehen im Ganzen $\delta N_0 (e^{\gamma d} - 1)$ Sekundärelektronen. Diese laufen ihrerseits zur Anode und erzeugen auf ihrem Weg $\delta N_0 (e^{\gamma d} - 1) e^{\gamma d}$ negative Träger usw. usw. Die Gesamtzahl der negativen Ladungen ist

$$N = N_0 e^{\gamma d} + N_0 \delta (e^{\gamma d} - 1) e^{\gamma d} + N_0 \delta^2 (e^{\gamma d} - 1)^2 e^{\gamma d} + \dots$$

Diese geometrische Reihe mit dem Faktor $\delta(e^{\gamma d} - 1)$ hat, falls dieser Faktor < 1 ist, die Summe

$$N = N_0 \frac{e^{\gamma d}}{1 - \delta(e^{\gamma d} - 1)} \quad (\text{Townsend-Formel}) \quad (8.43)$$

Der Entladungsstrom ist proportional dazu und wächst entsprechend dem steilen Anstieg des Ionisierungsvermögens γ mit dem Feld E . Immer noch ist aber die Entladung unselbständig: Sie erlischt, wenn wir keine Elektronen mehr aus der Kathode auslösen (Aufgabe 8.3.2).

Das wird erst anders, wenn

$$\delta(e^{\gamma d} - 1) \geq 1 \quad \text{oder} \quad \gamma \geq \frac{1}{d} \ln \left(1 + \frac{1}{\delta} \right). \quad (8.44)$$

Dann entwickelt sich aus jedem zufällig entstandenen Ladungsträger eine laut (8.43) unendlich anschwellende Lawine. Bei hinreichend hoher Feldstärke, die von Gasart und Druck ($\gamma = p \cdot f(E/p)$) sowie vom Elektrodenmaterial (δ) abhängt, wird diese **Zündbedingung** schließlich immer erfüllt: Die Entladung brennt selbständig ohne künstliche Trägersauslösung, denn die wenigen Startelektronen erzeugt auch die Hintergrundstrahlung immer.

8.3.3 Einteilung der Gasentladungen

Im Zählrohr oder der Vakuum-Röhre ist die Entladung normalerweise **unselbständig**: Strom fließt nur, wenn man Ladungsträger durch Prozesse erzeugt, die mit dem Stromtransport nichts zu tun haben. **Selbständig** wird die Entladung, wenn die Träger selbst durch Stoßionisation für ihren eigenen Ersatz sorgen, wie in **Glimm-**, **Spektral-**, **Leuchtstoff-** und **Hochdrucklampen**. Beide Entladungstypen haben unsere Kenntnis vom Bau der Materie sowie unsere Elektro- und Lichttechnik entscheidend gefördert. Da Anregung von Atomen mit anschließender Lichtemission weniger Stoßenergie erfordert als Ionisierung, sind die meisten Entladungen mit Lichterscheinungen verbunden. Bevor eine selbständige Entladung zündet, fließt allerdings nach (8.43) der geringe Townsend-Strom, der zum Leuchten i. Allg. nicht ausreicht (**Dunkelentladung**). Bei höherer Spannung zündet im verdünnten Gas die Glimmentladung und geht bei sehr hoher Stromdichte in die Bogenentladung über. Bei höherem Druck kommt es in sehr hohen Feldern zur **Corona-Entladung**, die Hochspannungsfreileitungen oberhalb 110 kV knistern lässt und sie mit einer bläulichen Hülle umgibt. Im großen Feld an scharfen Spitzen tritt dies schon bei sehr viel kleineren Spannungen auf. Vor dem **Gewitter** summt das **Elmsfeuer** um Drahtseile im Gebirge, Schiffsmasten oder Blitzableiter. Wer trockenes Haar hat und sein Perlonhemd über den Kopf zieht, kann im dunklen Zimmer ganze Gewitterszenarien mit Flächenblitzen erzeugen. Bei allen diesen Corona-Entladungen fließen nur winzige Ströme; erheblicher sind sie im **Funken** und seiner gewaltigsten Form, dem **Blitz**. Ein Funkenüberschlag über den Abstand d erfordert eine angenähert zu d proportionale Spannung U , d. h. die **Durchschlagsfeldstärke** ist für jedes Material charakteristisch. Für Luft liegt sie um 10^6 V/m, für manche Dielektrika ist sie etwa 10mal höher. Bei niedrigerer Spannung, aber sehr großem Strom brennt der **Lichtbogen**, z. B. zwischen zwei Kohlestäben, die man zur Zündung zur Berührung bringt und dann auseinanderzieht (Aufgaben 8.3.5, 8.3.6).

In der Glimm- und Bogenentladung ist das Feld nicht mehr homogen. Die endlichen und unterschiedlichen Beweglichkeiten der Trägerarten führen zum Aufbau von **Raumladungen**. Nach der Poisson-Gleichung (6.16) krümmt sich im Raumladungsgebiet das Potential U : $dE/dx = \rho/\epsilon\epsilon_0 = -d^2U/dx^2$. Wenn sich z. B. positive Träger vor dem

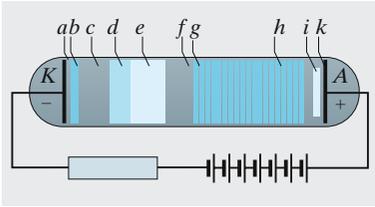


Abb. 8.42. Leuchterscheinungen in einer Glimmentladung. (Was im Rohr hier grau gezeichnet ist, stellt Dunkelräume dar.) (a) astonscher Dunkelraum; (b) Kathodenschicht; (c) Hittorfscher Dunkelraum; (d) Glimmsaum; (e) negatives Glimmlicht; (f) Faradayscher Dunkelraum; (g) Scheitel der positiven Säule; (h) positive Säule; (i) anodisches Glimmlicht; (k) Anodendunkelraum

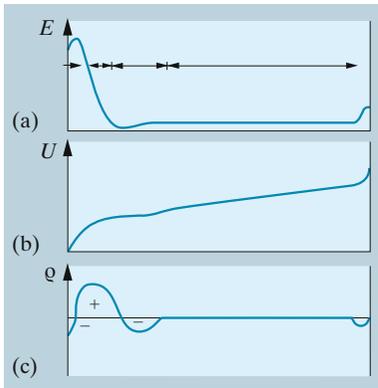


Abb. 8.43a–c. Feldstärke, Potentialanstieg und Raumladung zwischen Kathode und Anode in einer Glimmentladung. Der scharfe Potentialanstieg unmittelbar nach der Kathode bzw. vor der Anode wird als Kathoden- bzw. Anodenfall bezeichnet

Eintritt in die Kathode oder nach dem Austritt aus der Anode stauen, gehen von dort neue Feldlinien aus, und das Potential macht einen Buckel.

Typisch für selbständige Entladungen ist die **fallende Widerstandskennlinie** (Aufgabe 8.3.11) oder sogar der negative differentielle Widerstand dU/dI . Für $R = U/I$ erhält man im Proportionalbereich (Abb. 8.38) einen konstanten Wert, im Sättigungsbereich einen linearen Anstieg, im Stoßionisationsbereich einen steilen Abfall. Vielfach biegt die $I(U)$ -Kurve sogar wieder nach links um: Je mehr Strom fließt, desto geringer wird der Spannungsabfall an der Entladungsstrecke. Dann wird der differentielle Widerstand dU/dI negativ. Die Entladung würde „durchgehen“, wenn man einfach eine konstante Spannung anlegte. Um die fallende $U(I)$ -Abhängigkeit auszugleichen, legt man einen Widerstand oder bei Wechselspannungen eine **Drosselspule** vor die Entladungsröhre.

8.3.4 Glimmentladungen

Im **Geißler-Rohr**, evakuiert auf etwa 1 mbar, beginnt die Luft bläulichrot zu leuchten, wenn man einige kV anlegt. Diese Zündspannung hängt nach *Paschen* nur von pd ab (Druck mal Elektrodenabstand), was aus (8.42) leicht zu verstehen ist. Die Schichtung der Leuchterscheinungen (Abb. 8.42) entspricht der Feldverteilung (Abb. 8.43). Am größten ist das Feld im **Kathodenfall**. Dort werden die durch Aufprall positiver Ionen erzeugten Elektronen stark beschleunigt und erzeugen im Abstand einer freien Weglänge das intensive **negative Glimmlicht** (in Luft blau). Gleichzeitig und auch etwas weiter zur Anode hin werden besonders viele Ionen erzeugt, stauen sich infolge ihrer geringeren Beweglichkeit und schirmen fast das ganze Feld ab, sodass schließlich selbst die beweglicheren Elektronen im breiten **Faraday-Dunkelraum** überwiegend durch Diffusion weiterkriechen müssen. Eben diese negative Raumladung krümmt aber das Potential wieder aufwärts, und im größten Teil des Rohrs, der **positiven Säule**, herrscht ein geringes, aber konstantes Feld, das die Kontinuität des Stroms und ein diffuses Leuchten sichert und die durch Rekombination an der Wand verlorenen Träger nacherzeugt. Bei noch geringerem Druck zerfällt die positive Säule in leuchtende Scheibchen, deren Abstand die freie Weglänge anschaulich macht.

Glimmlampen mit Elektrodenabständen um 1 mm, die um 100 V oder darunter zünden, dienen heute als Signal- oder Kontrolllampen, z. B. in **Phasenprüfern**, mit denen man feststellt, ob ein Draht Spannung führt.

8.3.5 Bogen und Funken

Bei großen Entladungsströmen erhitzen sich die Elektroden (joulesche Wärme, z. T. infolge Aufprallens der Ladungsträger) so stark, dass die Glühemission die wesentlichste Rolle bei der Elektronenauslösung aus der Kathode übernimmt. Dann geht die Glimmentladung in eine **Bogenentladung (Lichtbogen)** über. Infolge der zusätzlichen Elektronenauslösung nimmt die Brennspannung erheblich ab. Bei sehr großen Entladungsströmen erzeugt die positive Raumladung (Stau der positiven Ionen vor der Kathode) ein so hohes Feld, dass Feldemission von Elektronen aus der Kathode möglich wird (im **Feldbogen**, wie er im Gleichrichter mit flüssiger

Quecksilberelektrode brennt). Der Bereich der Bogenentladung spannt sich von den Niederdruckbögen (einige mbar) bis zu Hochdruckbögen (10 bis 100 bar wie in Quecksilber- und Xenonhochdrucklampen). Von großer praktischer Bedeutung sind die Quecksilberdampfampe und der **Kohlebogen** (Abb. 8.44), der in atmosphärischer Luft brennt.

Zwei Kohlestäbe werden über einen Widerstand R mit den Polen einer Gleichspannungsquelle verbunden. Nach Stromschluss durch Berührung der Kohlestäbe werden diese auseinander gezogen. Es bildet sich zwischen den Kohlespitzen der Lichtbogen, der bläulichviolett brennt. Die Kohlespitzen werden weißglühend. Die positive Kohle, die erheblich heißer wird (Temperatur $T > 4\,000\text{ K}$), brennt zu einem tiefen Krater aus, die negative Kohle ($T > 3\,500\text{ K}$) nimmt Kegelform an. Brennt der Bogen unter erhöhtem Druck, so kann die positive Kohle Temperaturen wie die Sonne ($T > 6\,000\text{ K}$) annehmen. Der Krater der positiven Kohle wird als Lichtquelle in Projektionsgeräten verwendet. Unter normalen Betriebsbedingungen liegt die Brennspannung zwischen 30 und 40 V. Sie nimmt mit wachsender Stromstärke ab (fallende Charakteristik). Zum stationären Betrieb muss daher in den Stromkreis ein Widerstand R (30 bis 50 Ω) eingeschaltet werden.

Funken sind rasch erlöschende Bogenentladungen. Bei gegebener Elektrodenform und gegebenem Gasdruck ist die Spannung, die zur Zündung eines Funkens erforderlich ist, sehr genau definiert. Man verwendet daher **Funknestrecken** (Kugelelektroden), deren Abstand sich mit einer Mikrometerschraube einstellen lässt, zur Spannungsmessung. Abbildung 8.45 zeigt die **Funkenschlagweite** s zwischen Kugeln von 1 cm Radius in Luft von 1 013 mbar und 18 °C.

8.3.6 Gasentladungslampen

In der wichtigsten **Gasentladungslampe**, der **Leuchtstoffröhre**, merkwürdigerweise immer noch vielfach Neonröhre genannt, obwohl Neon rot leuchtet und höchstens für Reklamezwecke brauchbar ist, wird nicht Neon, sondern Quecksilber von geringem Druck (einige μbar , entsprechend dem Dampfdruck des Quecksilbers bei der Betriebstemperatur) durch Elektronenstoß zum Leuchten angeregt. Die Hg-Atome senden dabei überwiegend UV-Licht aus (254 nm, entsprechend dem 4,9 eV-Übergang der Elektronen, der auch beim Franck-Hertz-Versuch ausgenutzt wird, Abschn. 13.4). Dies Licht ist natürlich unsichtbar, würde das Auge in wenigen Minuten zerstören, tötet Bakterien ab (**Sterilisationslampe**), bräunt und verbrennt die Haut (**Höhensonne**). Alle diese Wirkungen beruhen darauf, dass seine Energie ausreicht, um die Peptidbindung zwischen Aminosäuren in Proteinen aufzusprengen und auch in den Nukleinsäuren, dem genetischen Material, ähnliche photochemische Reaktionen auszulösen. Außer der UV-Linie werden noch eine violette, eine blaue und eine grüne Hg-Linie emittiert. Wenn die Leuchtstoffschicht auf der Innenwand defekt ist (bei alten Röhren oft nahe den Elektroden), sieht man das direkte Hg-Licht fahlbläulich durchschimmern (Vorsicht!).

Die Leuchtstoffschicht aus Sulfiden, Silikaten, Wolframaten von Zink, Cadmium usw. wandelt das UV-Licht des Hg in sichtbares Licht um, dessen spektrale Zusammensetzung sich in weiten Grenzen dem Ver-

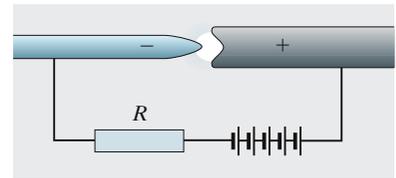


Abb. 8.44. Lichtbogenentladung mit Schaltbild des Bogens

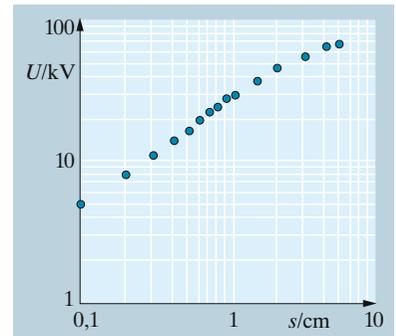


Abb. 8.45. Welche Spannung ist nötig, um den Abstand s zwischen zwei Kugeln zu durchschlagen?

wendungszweck anpassen lässt (z. B. Licht mit hohem photosynthetisch wirksamen Rotanteil um 670 nm für **Gewächshauslampen**). Diese Frequenzabnahme in der Leuchtstoffschicht, z. B. von 254 auf 500 nm, bedeutet nach $W = h\nu$ etwa eine Halbierung der Energie W des Photons (**Stokes-Verschiebung**, Abschn. 13.3.3). Die andere Hälfte der Photonenenergie bleibt im Leuchtstoff und erwärmt ihn. Dies ist aber auch fast der einzige Energieverlust in diesen Lampen. Die Leuchtstoffröhre wandelt fast die Hälfte der elektrischen Energie in sichtbares Licht um, verglichen mit knapp 10% der Leistung, die bei der üblichen Glühlampe nach der Planck-Kurve in den sichtbaren Bereich fallen. Daher wird die Leuchtstoffröhre, abgesehen von den Elektroden, im Betrieb auch kaum warm (Aufgabe 8.3.7).

Ohne Leuchtstoff-Auskleidung gibt die Entladungsröhre das Linienspektrum des Füllgases ab, also kräftig gefärbtes Licht (rot bei Neon, blau bei Hg). Wie bei der Leuchtstoffröhre leuchtet hier die positive Säule einer Glimmentladung mit relativ schwacher Leuchtdichte. Höhere Leuchtdichten erreicht man mit sehr dichtem Füllgas, z. B. in den **Hg-** und **Xe-Höchstdrucklampen** (HBO und XBO). Erhitzung des Kolbens durch einen Lichtbogen lässt den Dampfdruck hier auf Werte bis 100 bar steigen; der kalte HBO-Kolben enthält Hg-Tröpfchen. Eine Glimmentladung kommt in so dichtem Gas nicht zustande, weil die freie Weglänge zu klein ist. Man muss dafür sorgen, dass die Elektroden genügend heiß für eine Bogenentladung werden. Eine andere Folge des hohen Drucks ist Verbreiterung der Spektrallinien, bis sie zum Kontinuum verschmelzen. Die HBO-Lampe leuchtet daher weiß, die Hg-Linien sind nur noch als schwache Buckel angedeutet. In der **Na-Dampflampe** ist der Druck nicht so hoch, die gelben Linien dominieren weiterhin. Das gelbe Licht ist zur Straßen- und Tunnelbeleuchtung günstig, weil es Nebel und Smog besser durchdringt, oder zum Anstrahlen von Gebäuden mit warmem Goldton.

In der **Glimmlampe** sind die Elektroden mit einem Metall geringer Austrittsarbeit, oft Barium, überzogen. Bei Füllung mit Neon zündet die Lampe schon um 90 V. Die Elektroden sind so nahe beieinander, dass sich keine positive Säule ausbildet, sondern nur das negative Glimmlicht, das die Kathode rötlich umgibt. Im **Phasenprüfer** kann man so einfach durch Berühren feststellen, welche Drähte des Drehstromnetzes spannungsführende Phasendrähte sind. Bei Gleichspannung kann man auch die Pole unterscheiden. Wenn die Glimmlampe einmal brennt, kann man die Spannung bis erheblich unter die **Zündspannung**, bis zur **Löschspannung** senken, ohne dass die Entladung abbricht. Die positive Raumladung drängt das E -Feld auf eine kürzere Strecke zusammen, sodass noch bei kleinerer Spannung Stoßionisation eintritt.

8.3.7 Kathoden-, Röntgen- und Kanalstrahlung

Verringert man in einem Geißler-Rohr den Druck noch mehr (etwa unter 0,01 mbar), dann rücken alle Leuchterscheinungen von der Kathode fort. Die Dunkelräume wachsen; zugleich wird das Leuchten blässer. Je schwächer es wird, umso stärker fluoresziert die Glaswand blaugrün.

Immer noch lösen positive Ionen beim Aufprall auf die Kathode Elektronen aus, aber diese durchlaufen mit ihren cm-langen freien Weglängen den Kathodenfall praktisch ungestört und erreichen dabei alle fast die gleiche freie Fallgeschwindigkeit $v = \sqrt{2eU/m}$. Da der Rest der Röhre, die positive Säule, fast feldfrei ist, fliegen sie dort als **Kathodenstrahlen** geradlinig weiter bis zur Glaswand, wo ihr Stoß Fluoreszenz auslöst. Sie fliegen so geradlinig, dass hinter einem Hindernis ein scharfbegrenzter Schatten entsteht (Abb. 8.46). Ein Magnet, den man z. B. mit dem *N*-Pol voran von der linken Seite nähert, verschiebt den Schatten ziemlich unverzerrt nach oben, womit die negative Ladung der Träger nachgewiesen ist (Aufgabe 8.3.10). *J. J. Thomson* führte so eine erste ***e/m*-Bestimmung** durch, die zeigte, dass es sich nicht um negative Ionen, sondern um viel leichtere Teilchen handelt (Aufgabe 8.3.9). Natürlich verschieben sich auch die Lichterscheinungen in der Glimmentladung dramatisch im Magnetfeld. Die kinetische Energie, die die Elektronen in der Gegenwand abladen, ist erheblich und kann außer zur Fluoreszenz auch zur Aufheizung und Materialzerstörung führen (**Kathodenstrahlöfen**, **Kathodenstrahlbohrer**). In der **Bildröhre** von Fernseher und Oszilloskop werden Außenelektronen, in der **Röntgenröhre** auch tiefliegende Atomelektronen angeregt. Bei etwas höherem Druck und hoher Spannung können die positiven Ionen beim Aufprall auf die Kathode auch Atome aus ihr herausschlagen: **Kathodenerstäubung** oder **Sputtering**. Diese Atome können sich als dünne Schichten auf gekühlten Oberflächen niederschlagen.

Hinter einer durchbohrten Kathode setzt sich die Lichterscheinung fort: Ein scharfbegrenzter **Kanalstrahl** (*Goldstein*, 1886) tritt durch das Loch. Positive Ionen, die zur Kathode flogen, rasen infolge ihrer Trägheit durch das Loch und behalten ihre Geschwindigkeit im feldfreien Raum hinter der Kathode bei. Aufgabe 13.3.3 untersucht einige Eigenschaften der Kanalstrahlionen (Abb. 8.47).

8.4 Plasmen

Der größte Teil der Materie im Weltall ist hochionisiert, ist ein **Plasma**. So verhält es sich in den Sternen, in weiten Bereichen der interstellaren Materie, schon oberhalb von knapp 100 km über der Erdoberfläche. Kalte Materie, wie wir sie am Erdboden kennen, ist eine Ausnahmeerscheinung.

8.4.1 Der „vierte Aggregatzustand“

Mit steigender Temperatur schließt sich an die drei klassischen Aggregatzustände ein vierter, der Plasmazustand an. Natürlich gibt es keinen scharfen Übergang zwischen Gas und Plasma, aber nach der Eggert-Saha-Gleichung (8.4) steigt der Ionisationsgrad in einem Bereich von einigen 1 000 K von fast 0 auf fast 1. Bei sehr hohem Druck kommt man noch zu weiteren Aggregatzuständen, in denen die Materie ganz neue Eigenschaften entwickelt: Zum **Fermi-Gas**, zum **relativistischen Fermi-Gas**, zum **Neutronengas** (Abb. 8.48).

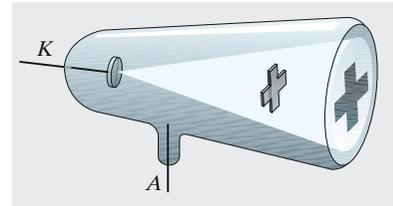


Abb. 8.46. Nachweis der geradlinigen Ausbreitung der Kathodenstrahlen

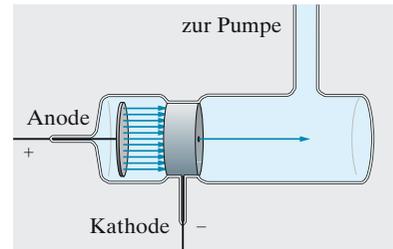


Abb. 8.47. Positive Ionen, durch Elektronenstoß in der Anode oder (weniger) im Restgas erzeugt, sausen auf die Kathode zu und durch die Bohrung hindurch

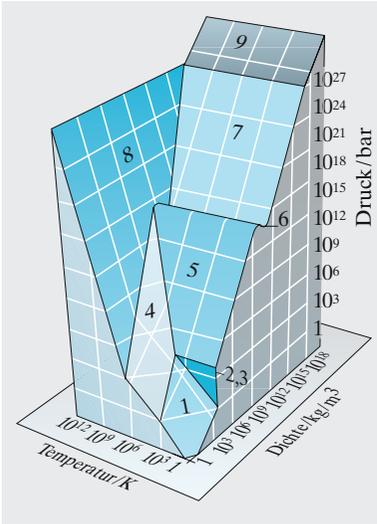


Abb. 8.48. Zustandsflächen der acht Aggregatzustände (die Übergänge sind schematisiert, weil das Modell keinen speziellen Stoff, sondern das ungefähre Verhalten aller Stoffe darstellen soll; z. B. ist der van der Waals-Maxwell-Übergang gasförmig-kondensiert nicht erkennbar). (1): Gas; (2, 3): flüssig-fest; (4): Plasma; (5): Elektronen-Fermi-Gas; (6): Relativistisches Fermi-Gas; (7): Neutronengas; (8): Photonengas; (9): Relativistisches Neutronengas-Schwarzes Loch

Plasmen sind im Wesentlichen quasineutral, enthalten also gleich viele positive wie negative Ladungen. Trennung und Isolierung makroskopischer Mengen geladener Teilchen würde ja so ungeheure Kräfte erfordern, wie sie nirgends verfügbar sind. Lokale Abweichungen von der Quasineutralität in mikroskopischen Bereichen sind dagegen die Regel. Rings um jede positive Ladung überwiegen die negativen als Debye-Hückel-Wolke und umgekehrt. Sind Atome mit hoher Elektronenaffinität (Halogene, Chalkogene usw.) vorhanden, dann lagern sich die von positiven Ionen abgespaltenen Elektronen an sie an. Das Plasma besteht dann aus Ionen beider Vorzeichen. Bei höheren Temperaturen, wenn die Ionisierung die Außenschalen aller Atome erfasst, gibt es nur noch positive Ionen und Elektronen. Wegen ihrer geringen Masse bewegen sich die Elektronen viel schneller als die Ionen, sowohl thermisch als auch im elektrischen Feld. Sie fliegen durch ein praktisch unbewegliches Ionengitter, das allerdings im Unterschied zum Festkörper ungeordnet ist. Daher bestehen enge Beziehungen zwischen Plasma- und Festkörperphysik.

Ein Plasma besteht aus mindestens drei Teilsystemen: Dem **Elektro-nengas**, dem **Ionengas**, dem **Neutralgas**, wozu man noch das „Gas“ der Photonen des emittierten Lichts rechnen kann. Durchaus nicht immer stehen alle Teilsysteme untereinander im thermischen Gleichgewicht, selbst wenn innerhalb jedes Systems ein solches Gleichgewicht herrscht. Dementsprechend kann jedes Teilsystem seine eigene Temperatur haben. Das ist typisch für Gasentladungen, sonst müssten sie ja eine „schwarze“ Strahlung abgeben, und deren Intensität wäre viel geringer. Die Energie aus der äußeren Spannungsquelle teilt sich zunächst den Elektronen mit und geht erst allmählich auf die Ionen und noch viel unvollständiger auf das Neutralgas über. Manchmal herrscht nicht einmal in einem Teilsystem Gleichgewicht. Es wäre z. B. sinnlos, dem 100 GeV-Teilchenstrahl eines Großbeschleunigers entsprechend $W \approx kT$ eine Temperatur $T \approx 10^{15}$ K zuzuschreiben, denn außerhalb des Gleichgewichts hat der Temperaturbegriff keinen Sinn.

Die **elektrische Leitfähigkeit** eines Plasmas ergibt sich wie beim Elektrolyten als $\sigma = en\mu$, die Beweglichkeit nach dem **Drude-Ansatz** (8.41) als $\mu = el/(2mv)$. Dabei hängt die freie Weglänge $l = 1/(nA)$ vom Stoßmechanismus ab. Für Stöße mit Neutralteilchen gilt ungefähr deren geometrischer Stoßquerschnitt A . Meist überwiegen aber die Stöße mit geladenen Teilchen, denn deren **Coulomb-Stoßradius** $r \approx e^2/(4\pi\epsilon_0\epsilon kT)$ ist viel größer als der geometrische. Für n tritt dann in l die Anzahl-dichte geladener Teilchen und kürzt sich daher aus σ ganz heraus: Bei höherer Ionisierung hängt die Leitfähigkeit nicht mehr von der Ionen-zahldichte ab. Dasselbe gilt für die **Wärmeleitfähigkeit** λ , die sich nach Wiedemann-Franz aus σ einfach durch Multiplikation mit $3k^2T/e^2$ ergibt. Von der Temperatur hängen beide stark ab: σ wie $T^{3/2}$ ($A \sim T^{-2}$, $v \sim T^{1/2}$), λ sogar wie $T^{5/2}$. Besonders die Hochtemperaturplasmen haben extreme Eigenschaften. Ein Fusionsplasma von 10^7 K, das heute als „zu kühl“ für die Fusion gilt, hat die elektrische Leitfähigkeit von metallischem Kupfer, aber die 30 000fache Wärmeleitfähigkeit; bei 10^8 K leitet es 30mal besser elektrisch und 10^7 mal besser die Wärme als Kup-

fer. Man kann sich vorstellen, welche ungeheuren Leistungen ein solches Plasma mit seinem extremen T -Gradienten allein durch Wärmeleitung verliert.

8.4.2 Plasmaschwingungen

Abweichungen von der Quasineutralität, die größere Bereiche umfassen, bilden sich schwingend zurück. Alle Elektronen in einem Plasma seien gegen die Ionen um die gleiche Strecke x verschoben, z. B. nach links. Dann ist das Innere des Plasmas immer noch quasineutral, nur am linken Rand gibt es eine Schicht der Dicke x , die nur Elektronen enthält, also die Flächenladungsdichte $q = -enx$ hat. Ihr steht eine ebenso stark positiv geladene Schicht gegenüber. In dem z. B. quaderförmigen Plasma dazwischen herrscht nach (6.9) die elektrische Feldstärke $E = q/(\epsilon_0\epsilon) = nex/(\epsilon_0\epsilon)$, die die Teilchen mit der Kraft $F = ne^2x/(\epsilon_0\epsilon)$ in ihre Ruhelagen zurückzieht. Diese Kraft ist proportional zu x , führt also zu einer harmonischen Schwingung um seine Ruhelage mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0\epsilon m}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Plasmafrequenz oder} \\ \text{Langmuir-Frequenz} \end{array} \right). \quad (8.45)$$

Auch wenn die anfängliche Störung der Quasineutralität nicht so einfach gebaut ist, ergibt sich die gleiche Frequenz. Irgendwo sei nicht $n_+ = n_-$, sondern es herrsche die Raumladung $\rho = e(n_+ - n_-)$. Sie stellt eine Queldichte für das E -Feld dar: $\text{div } \mathbf{E} = \rho/(\epsilon_0\epsilon) = e(n_+ - n_-)/(\epsilon_0\epsilon)$. Andererseits werden im E -Feld praktisch nur die Elektronen beschleunigt mit $\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}/m$. Die Stromdichte $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}$ ändert sich also im Feld zeitlich wie $\dot{\mathbf{j}} = -en\dot{\mathbf{v}} = e^2n\mathbf{E}/m$. Da $\text{div } \mathbf{j} = -\dot{\rho}$ (Kontinuitätsgleichung), können wir auch sagen $\ddot{\rho} = -e^2n\rho/(m\epsilon_0\epsilon)$. Das ist wieder die Gleichung einer harmonischen Schwingung mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{e^2n/(m\epsilon_0\epsilon)}$.

Für ein gut ionisiertes Plasma bei 10^{-2} mbar ist n von der Größenordnung 10^{10} cm^{-3} , die Plasmafrequenz beträgt also mehrere 100 MHz. In diesem Frequenzbereich beobachtet man tatsächlich Plasmaschwingungen, die allerdings von so starkem **Rauschen** begleitet sind, dass ein Plasma als Höchsfrequenzgenerator praktisch vorerst nicht in Betracht kommt.

Dagegen spielen Plasmaschwingungen für die Erforschung der **Ionosphäre** und die Ausbreitung von Funkwellen in ihr die entscheidende Rolle. Kurzwellige Sonnenstrahlung (vom mittleren UV bis ins weiche Röntgengebiet) ionisiert und dissoziiert die Luftbestandteile (O_2 , O , N_2 , dort oben auch NO) und erzeugt daher in relativ dünnen Höhenzonen (D-, E-, F_1 -, F_2 -Schicht) hohe Elektronen- und Ionenkonzentrationen n_e bzw. n_i . Jede dieser Schichten, die einem bestimmten Ionisierungsprozeß entspricht, hat ein scharfes Maximum in der Höhenverteilung von n_e (Abb. 8.50). Das Maximum und seine Schärfe kommen deswegen zustande, weil schon einige Dutzend km oberhalb davon zu wenige ionisierbare Teilchen da sind (exponentieller Abfall der Dichte mit der

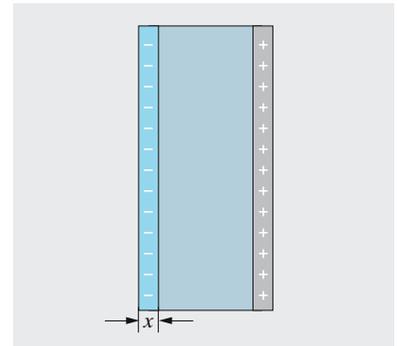


Abb. 8.49. Verschiebung der Ladungen gegeneinander erzeugt ein rücktreibendes Feld und führt zu einer Plasmaschwingung

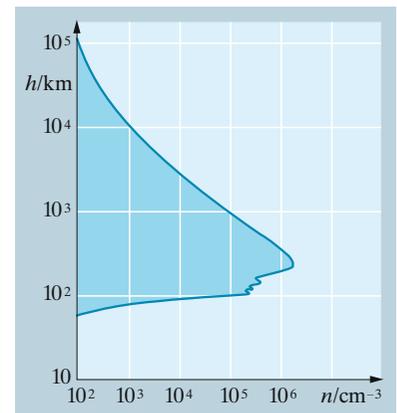


Abb. 8.50. Elektronendichte in der Atmosphäre als Funktion der Höhe zu einer Zeit relativ starker Ionisierung

Höhe), während schon einige km darunter die zur Ionisierung fähige Strahlungskomponente eben infolge dieser Ionisierungsprozesse zu schwach geworden ist. So ergeben sich, besonders bei Tage, Elektronenkonzentrationen n_e bis zu 10^7 cm^{-3} , die nachts infolge der Rekombination auf 10^5 bis 10^6 cm^{-3} abfallen. Beiderseits des Maximums sind natürlich auch die kleineren n_e -Werte vertreten. Entsprechend (8.45) treten also Plasmafrequenzen bis zu einigen MHz auf, aber alle Werte unterhalb dieser Maximalfrequenz sind ebenfalls in irgendeiner Höhe realisiert (Aufgabe 8.4.1).

Dies hat drastischen Einfluss auf den **Funkverkehr**, der klassische Funkverkehr (Lang-, Mittel- und Kurzwellen) wäre ohne die Ionosphäre überhaupt nicht möglich. Eine Radiowelle der Frequenz f kommt in der Höhe, wo die Plasmafrequenz ähnliche Werte hat, in Resonanz mit den Ionosphärenelektronen. Die Folge ist ein eigenartiges Dispersions- und Absorptionsverhalten. Die Radiowelle wird in einem großen Bereich des Einfallswinkels totalreflektiert – genau in der Resonanz, also bei $f = f_p$ sogar bei senkrechtem Einfall, was die „Echoauslotung“ der Ionosphäre ermöglicht. Längstwellen und Kurzwellen (5 bis 30 km bzw. 10 bis 20 m) erhalten so ihre enorme Reichweite, die Längstwellen durch einen Hohlleitereffekt (Abschn. 7.4.10), die Kurzwellen durch Vielfachreflexion an der Ionosphäre, während die Lang- und Mittelwellen (200 bis 5 000 m) stark absorbiert und durch Interferenzen zwischen direkten und indirekten Wellen (fading) verzerrt werden. Nur Wellen oberhalb der Maximalfrequenz, also UKW-, Fernseh- und Radarwellen usw. dringen glatt durch die Ionosphäre, was einerseits die Kommunikation mit Raumfahrzeugen gestattet, andererseits aber die Reichweite eines UKW- oder Fernsehsenders auf den „optischen Horizont“ beschränkt.

8.4.3 Plasmen im Magnetfeld

Es ist fast unvermeidlich, dass in einem Plasma Ströme fließen. Dazu brauchen das negative und das positive Teilgas nur verschieden schnell zu strömen, wodurch die Quasineutralität nicht beeinträchtigt werden muss. Ebenso unvermeidlich sind dann auch die Magnetfelder, die solche Ströme begleiten. Dabei ergibt sich etwas Merkwürdiges: Das Plasma und sein Magnetfeld sind aneinander gefesselt. Das Magnetfeld im Plasma hat Schwierigkeiten, sich zeitlich zu ändern, und ebenso schwer ist es für das Plasma, ein Magnetfeld zu verlassen, z. B. senkrecht zu dessen Feldlinien auszurechnen. Dies würde ja, vom Bezugssystem des Plasmas aus gesehen, auch eine zeitliche Änderung $\dot{\mathbf{B}}$ bedeuten. Wir betrachten z. B. ein schlauchförmiges Gebiet, in dem sich das Magnetfeld um $\dot{\mathbf{B}}$ ändert, mit $\dot{\mathbf{B}}$ parallel zur Schlauchachse. Diese Änderung induziert eine Ringspannung $U = \pi r^2 \dot{B}$, also ein elektrisches Feld $E = \frac{1}{2} r \dot{B}$ und eine Stromdichte $j = \sigma E = \frac{1}{2} \sigma r \dot{B}$ rings um den Schlauch, aber auch innerhalb davon (r kann auch kleiner sein als der Schlauchradius R). Im Ganzen fließt also ein Ringstrom $\frac{1}{4} \sigma R^2 \dot{B}$ pro m Schlauchlänge (das zweite $\frac{1}{2}$ stammt von der Integration) und erzeugt ebenso wie in einer Spule ein Magnetfeld $B_1 = -\frac{1}{4} \mu_0 \sigma R^2 \dot{B}$ in Gegenrichtung zur Änderung \dot{B} des ursprünglichen

Feldes (daher das $-$). Das B -Feld kann also nicht plötzlich zusammenbrechen, sondern höchstens nach dem Gesetz $\dot{B} = -4B/(\mu_0\sigma R^2)$, also $B = B_0 e^{-t/\tau}$ abklingen mit der Zeitkonstante

$$\tau = \frac{1}{4}\mu_0\sigma R^2, \quad (8.46)$$

der **magneto-hydrodynamischen Relaxationszeit**.

Auf die Ringstromdichte $j \approx \sigma R \dot{B}$, die ja senkrecht zum B -Feld fließt, wirkt eine Lorentz-Kraftdichte jB (Kraft/m³). Über die Schichtdicke R integriert ergibt das einen **magnetischen Druck** (Kraft/m²)

$$\mu = jBR \approx \sigma R^2 B \dot{B} \approx \frac{B^2}{\mu_0}, \quad (8.47)$$

falls das B -Feld sich so schnell ändert wie es kann, z. B. in einer Zeit τ zusammenbricht. Dieser Druck ist etwa gleich der Energiedichte des B -Feldes. Er hält das Plasma zusammen, d. h. verhindert sein seitliches Ausbrechen aus dem B -Feld. In Aufgabe 18.1.13 wird er auf etwas andere Weise abgeleitet.

In den hydrodynamischen Gleichungen, speziell der Bernoulli-Gleichung, kommt der magnetische Druck zum gaskinetischen hinzu. Im interplanetaren und interstellaren Raum und auch in manchen technischen Plasmen (Pinch beim Fusionsplasma) ist er viel größer als der gaskinetische. Die Ausströmgeschwindigkeit aus dem B -Feld ist dann analog zu *Torricelli* $v \approx \sqrt{2\mu/\rho} \approx \sqrt{2/(\mu_0\rho)}B$. Es würde eine Zeit $t \approx R/v$ dauern, bis das Plasma aus seinem Feld herausgequollen ist. Wenn t viel kürzer ist als die Relaxationszeit τ , schleppt das Plasma sein Feld mit, das Feld ist im Plasma „eingefroren“. Das ist der Fall unter der **Alfvén-Bedingung**

$$\tau \approx \mu_0\sigma R^2 \gg \frac{R}{v} \approx \frac{R}{B} \sqrt{\rho\mu_0}, \quad \text{d. h. } \boxed{B\sqrt{\mu_0\sigma R} \gg \sqrt{\rho}}, \quad (8.48)$$

Wenn ein Plasmaschlauch sich und sein Feld irgendwo einschnürt, wird B dort größer, der magnetische Druck ebenfalls. μ übernimmt die Rolle, die der gaskinetische Druck in der Schallwelle spielt: Längs der B -Linien breitet sich eine **Alfvén-Welle** aus mit der Geschwindigkeit

$$c \approx \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \approx \frac{B}{\sqrt{\mu_0\rho}}. \quad (8.49)$$

Fast alle kosmischen Plasmen sind so groß oder leiten so gut, dass sie ihr eingefrorenes Magnetfeld mitschleppen. Schon von etwa einem Sternradius an wird τ größer als das Weltalter. In solchen Plasmen gleiten die Teilchen praktisch nur längs der B -Linien wie Perlen auf der Schnur, nicht ohne diese manchmal zu deformieren. Technische Plasmen, z. B. im Fusionsreaktor, sind i. Allg. zu klein, um magnetisch sicher zusammengehalten zu werden. Ein Übergangsfall sind die **Sonnenflecken**. Für sie folgt aus (8.46) $\tau \approx 1\,000$ Jahre, viel mehr als die tatsächliche Lebensdauer von einigen Wochen. Man erklärt diese Diskrepanz daraus, dass die Turbulenz im Fleck, die im Fernrohr gut zu erkennen ist, die effektive Leitfähigkeit stark

herabsetzt. Die Flecken selbst sollen die Enden magnetischer Schläuche sein, die tiefer in der Sonnenatmosphäre entstanden und zur Oberfläche durchgebrochen sind, sodass ihre Enden ein bipolares Fleckenpaar bilden. Infolge des behinderten Aufwärtsstroms heißer Tiefengase sind die Flecken kühler und dunkler (nur 4 000 K in der „Umbrä“). An den aus der Photosphäre ausgebrochenen Bögen der B -Feldschleife steigen manchmal Plasmaballen bis in Höhen von mehr als 10 Erdradien auf, die **Protuberanzen**. Corona, Sonnenwind, Magnetosphäre der Erde werden ebenfalls von der **Magnetohydrodynamik** beherrscht. Auch bei der Entstehung des Planetensystems können die **magnetischen Speichen** wichtig für die Übertragung des Drehimpulses von der Sonne auf die Planeten gewesen sein.

8.4.4 Fusionsplasmen

Kernfusion, die Energiequelle der Sterne und unserer Zukunft, setzt ein sehr heißes, möglichst dichtes Plasma voraus. Die Sonne hat es leicht, ihren 10^7 K heißen und 10^5 kg/m³ dichten Kern durch die 10^9 bar Gravitationsdruck der äußeren Schichten zusammenzuhalten. Wir erreichen vorerst noch viel zu kleine Einschusszeiten, Abmessungen und Dichten und brauchen daher Temperaturen von 10^8 K. Der Einschuss gegen den entsprechenden Gasdruck gelingt in der **H-Bombe** und bei der **Laserfusion** durch Implosion, andernfalls in einer **magnetischen Flasche**. Ein axialer Strom, der das Plasma aufheizt, erzeugt gleichzeitig ein ringförmiges Magnetfeld, das es zusammenhält. Oder man erzeugt, meist mit supraleitenden Spulen, ein axiales Magnetfeld. Ein Feld von 10 T mit seinem Druck von 10^3 bar kann aber bei 10^8 K nur einer Plasmadichte um 10^{-3} kg/m³ standhalten. Ohne Stöße würden die Teilchen dann einfach auf Schraubenlinien um die B -Linien laufen. Die Stöße werfen sie gelegentlich aus dem Feld hinaus oder an die Wände. Eine unendlich lange Spule würde so einen annähernden Einschuss garantieren. Endliche Spulen kann man auf zwei Arten abdichten: Durch magnetische Pfropfen, d. h. verstärktes Feld mit konvergierenden Feldlinien an den Enden, wo die meisten Teilchen reflektiert werden (Abschn. 18.5.3); oder indem man die Spule zum Ring schließt. Leider dichten beide Systeme nicht ideal: Teilchen, die fast parallel zu den Feldlinien fliegen, dringen durch den magnetischen Pfropfen durch. Für die im Ring umlaufenden Teilchen muss die Zentrifugalkraft durch eine andere Kraft kompensiert werden, die nach Lage der Dinge nur eine zusätzliche Lorentz-Kraft sein kann, die einwärts zeigt. Eine solche Kraft entsteht aber nur, wenn die Teilchen mit $v' = mv^2/(ReB)$ senkrecht zur Ringebene driften, z. B. die Elektronen langsam nach oben, die Ionen schnell nach unten (Abb. 8.51). Diese **Zentrifugaldrift** führt also die Teilchen notwendig zu den Wänden. Genauso driftet die Luft im Coriolis-Feld der rotierenden Erde senkrecht zum antreibenden Druckgradienten. Eine andere, ähnliche Drift entsteht so: Wickelt man einen Draht zur Ringspule, dann liegen die Windungen innen zwangsläufig dichter, B ist dort größer. Die Schraubenbahn der Teilchen um die Feldlinien hat dann keinen Kreisquerschnitt mehr, sondern die Krümmung ist innen stärker. Folge ist eine Drift senkrecht zum Feldgradienten, also

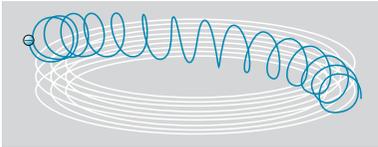


Abb. 8.51. Zentrifugaldrift von Elektronen im ringförmigen Magnetfeld. Die Spirale, die die Elektronen um die Magnetfeldlinien beschreiben (hier nach links), rutscht infolge Zentrifugaldrift immer weiter aufwärts. Die Ionen driften in viel größeren Spiralbögen, aber ebenso schnell nach unten

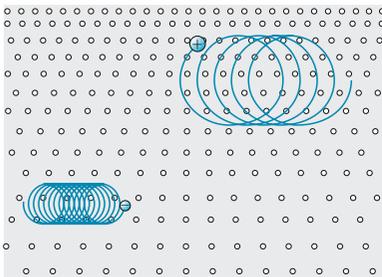


Abb. 8.52. Gradientendrift im inhomogenen Magnetfeld. Wo B schwächer ist, wird die Bahn schwächer gekrümmt und schließt sich nicht mehr zum Kreis, sondern Ionen und Elektronen driften senkrecht zu B und $\text{grad } B$ in entgegengesetzter Richtung. In dieser Simulation ist nur ein Massenverhältnis 1 : 10 angenommen, nicht 1 : 1 840

wieder senkrecht zur Ringebene (Abb. 8.52). Diese **Gradientendrift** (aber nicht die Zentrifugaldrift) lässt sich teilweise ausgleichen, wenn man den Ring zur 8 verwindet (Stellarator-Prinzip).

Wenn der Strom durch einen Plasmaschlauch rasch ansteigt, wächst auch sein ringförmiges Magnetfeld. Dieser Anstieg induziert ein E -Feld rings um die B -Linien, also axial, und zwar innen im Schlauch entgegengesetzt zu j , außen in j -Richtung. Dadurch wird der Strom innen geschwächt, außen verstärkt. Er fließt wie beim Skin-Effekt überwiegend in der Außenhaut des Schlauches. Innen herrscht auch kein B -Feld mehr (parallele Ströme), sondern nur außen. Dieses Feld übt auf den Skinstrom eine Lorentz-Kraft nach innen aus. Der Schlauch schnürt sich auf einen winzigen Querschnitt ein, wo j und damit die im Plasma umgesetzte Leistung $P = Alj^2\sigma$ extrem hoch werden (σ ist ja praktisch unabhängig von n und $j \sim 1/A$, also $P \sim 1/A$). Die Verluste durch die verkleinerte Oberfläche sind geringer, der Plasmafaden wird durch diesen **Pinch-Effekt** schlagartig auf bis zu 10^7 K aufgeheizt. Dann dehnt er sich allerdings wieder aus, und der Vorgang wiederholt sich. Außer diesem z -**Pinch** (Strom in z -Richtung der Zylinderkoordinaten) gibt es auch einen ϑ -**Pinch** (ringförmiger Strom, axiales B -Feld).

Leider ist auch ein Pinch vielen Instabilitäten ausgesetzt. Wenn sich z. B. ein z -Pinch verbiegt, werden die B -Linien an der Innenseite der Biegung enger, der magnetische Druck wächst dort und vergrößert die Störung. Ähnlich verhält sich eine Stelle, wo die Einschnürung weiter fortgeschritten ist als anderswo. Sie kann den Pinch in „Tropfen“ zerlegen, ähnlich wie bei einem Wasserstrahl. Ein starkes eingefrorenes Magnetfeld wirkt diesen Instabilitäten entgegen (Steigerung des magnetischen Innendrucks in einer Einschnürung). Auch die leitenden Wände des Reaktionsgefäßes können Biegungsinstabilitäten heilen, weil sich die B -Linien vor der Wand stauen. Ähnliche Probleme zusammen mit den ungeheuren Leistungsverlusten aus dem Plasma haben den „break-even“, d. h. den Zustand, in dem das Fusionsplasma so viel Energie liefert wie es zu seinem Aufbau verzehrt hat, bis heute noch verhindert.

▲ Ausblick

Ordnet man die Physik-Nobelpreise den Kapiteln dieses Buches zu, dann kommt Kap. 8 gar nicht schlecht weg: *W. C. Röntgen* (1901), *H. A. Lorentz* (1902), *Ph. Lenard* (1905, Kathodenstrahlung), *J. J. Thomson* (1906), *K. F. Braun* (1909, Oszillograph), *R. Millikan* (1923, Photoeffekt), *O. Richardson* (1929), *H. Alfvén* (1970), *G. Binnig*, *H. Rohrer* (1986), *H. G. Dehmelt*, *W. Paul* (1989, Ionenfalle), *G. Charpak* (1992, Drahtkammer). Auch für Sie bestehen offenbar noch Chancen. Von der Ionenfalle bis zum Schwarzen Loch, vom Kopiergerät bis zum Fusionsreaktor steht das Verhalten geladener Teilchen an der Front von Grundlagen- wie Anwendungsforschung.

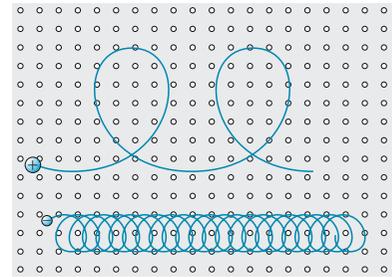
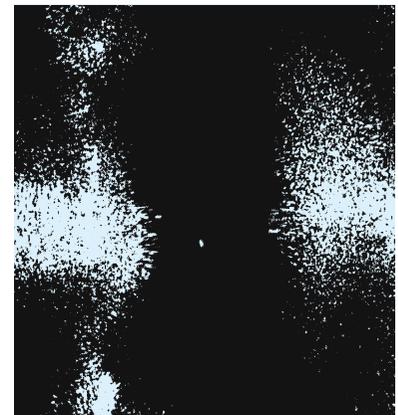


Abb. 8.53. Elektrische Diffusion in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern. Beide Teilchen weichen auf Zykloidenbahnen senkrecht zum E -Feld aus, und zwar im Mittel gleich schnell, obwohl die Elektronen viel engere Bögen ziehen (vgl. Abb. 6.106)



Der weiße Fleck in der Bildmitte ist ein einzelnes Barium-Ion in einer Ionenfalle, durch sehr schmalbandiges Laserlicht zum Leuchten angeregt. Die Falle besteht aus einem Ring mit hyperbolischem Querschnitt und zwei axial angebrachten ebenfalls hyperbolischen Schalen, zwischen denen eine Gleichspannung liegt

✓ Aufgaben ...

●● 8.1.1 Austrittsarbeit

Wie sieht das Feld eines Elektrons aus, das dicht vor einer ebenen Metallfläche schwebt? Suchen Sie eine Anordnung von Ladungen, deren Feld genauso aussieht, wenigstens außerhalb des Metalls. Welche Kraft zwischen Elektron und Metall folgt daraus? Bis zu welchem Minimalabstand gilt dieses Kraftgesetz? Wie groß ist also die Austrittsarbeit ungefähr? Warum ist sie gerade bei Cs und Ba besonders klein?

●●● 8.1.2 Glühemission

Versuchen Sie das Richardson-Gesetz (8.1), speziell den Faktor vor der e -Funktion modellmäßig zu verstehen. Wenn Sie dabei auf Widersprüche stoßen, versuchen Sie es nochmal, nachdem Sie die Fermi-Verteilung (Abschn. 19.3) studiert haben.

● 8.1.3 Arrhenius-Auftragung

Von der Physik bis zur Biologie ist diese Auftragung eines der wichtigsten Auswertungsmittel. Warum? Was bedeutet der Schnittpunkt der Geraden mit der Ordinatenachse? Wie findet man ihn, wenn man nur in einem engen T -Bereich gemessen hat, und mit welcher Genauigkeit? Wie liest man am schnellsten die Aktivierungsenergie ab?

●● 8.1.4 Kompensationseffekt

Bei vielen Prozessen, die sich durch ein Arrhenius-Gesetz $Ae^{-W/(kT)}$ beschreiben lassen, ändern sich A und W bei Variation der Versuchsmaterialien und -bedingungen, und zwar oft so, dass die verschiedenen Arrhenius-Geraden sich alle in einem Punkt, dem „Inversionspunkt“, schneiden (Kompensationseffekt). Wie müssen die Änderungen von A und W zusammenhängen, damit das der Fall ist? Was bedeuten die Koordinaten des Inversionspunktes? Wie könnte es zu diesem Effekt kommen?

●● 8.1.5 Aktivierungsenergie

Für viele chemische Reaktionen lässt sich die Reaktionsgeschwindigkeit darstellen als $\alpha e^{S/R} e^{-E/(RT)}$ (S , E Aktivierungsentropie und -energie pro

mol). Begründen Sie dieses Gesetz kinetisch. Wenn ein Atom in zwei Zuständen vorkommen kann (z. B. frei und gebunden), wird das Konzentrationsverhältnis in den beiden Zuständen oft gegeben durch $\beta e^{S'/R} e^{-E'/(RT)}$. Warum? Sind S und S' , E und E' identisch? Wenn nicht: Kann man sagen, welcher Wert größer ist? Ist das bei der Glühemission auch so?

● 8.1.6 h -Messung

Wie kann man aus dem Photoeffekt möglichst genau die Planck-Konstante h bestimmen? Versuchsanordnung! Welche Größe muss man variieren?

● 8.1.7 Lichtschranke

Entwerfen Sie ein Lichtschrankensystem für eine automatische Tür, als Einbruchsicherung o. Ä. Wählen Sie Lichtquelle, Strahlgeometrie, Kathodenmaterial, Anodenspannung, Galvanometer bzw. Nachweisschaltung.

●● 8.1.8 Feldemission

Wie hängt die Dicke der Potentialschwelle vor einer Metalloberfläche von der angelegten Feldstärke ab? Wie groß sind Tunnelwahrscheinlichkeit und Feldemissionsstrom? Bei welchen Feldstärken wird der Effekt wesentlich? Wie erreicht man solche Felder?

● 8.1.9 Feldemissionsmikroskop

Wie sieht ein Feldemissionsmikroskop aus, und was kann man damit sehen? Weshalb und wie erreichen solche Mikroskope fast beliebig hohe Vergrößerungen?

● 8.1.10 Multiplier

Welche Spannungen muss man zwischen die Dynoden eines Multipliers legen, damit man mit acht Stufen eine Verstärkung von 10^8 erzielt (Schätzung)? Wie weist man den Anodenstrom am besten nach? Wie sieht die Gesamtschaltung aus? Welche Hilfsgeräte braucht man?

●●● 8.1.11 Eggert-Saha-Gleichung

Thermische Ionisation erfolgt im einfachsten Fall nach der Reaktion

$A \rightleftharpoons A^+ + e^-$. Das Massenwirkungsgesetz für diese Reaktion ist die Eggert-Saha-Gleichung. Damit ergibt sich eine Verfeinerung des Ausdruckes (8.4) (der nur für schwache Ionisierung gilt). Können Sie diese Verfeinerung angeben? Dabei erklärt sich auch, warum der Exponent nicht $E_i/(kT)$, sondern $E_i/(2kT)$ heißt. Gibt es eine allgemeine Regel, wann $E/(kT)$ und wann $E/(2kT)$ gilt? Der „Gewichtsfaktor“ $(2\pi mkT)^{3/4}/h^{3/2}$ lässt sich nach der Quantenstatistik richtig verstehen. Kommen Sie nach dem Studium von Kap. 19 wieder darauf zurück. Ist Rekombination nicht eigentlich nur im Dreierstoß möglich? Ist das bisher berücksichtigt worden?

●● 8.1.12 Thermische Ionisation

Der Ionisationsgrad hängt nach (8.4) von T und p ab. Wie verläuft in einem p, T -Diagramm die Grenze zwischen überwiegend neutralem und überwiegend ionisiertem Zustand der Atome? Von welchen Atomeigenschaften hängt ihre Lage ab? Lässt sich auch für die Moleküldissoziation ein ähnliches Diagramm zeichnen?

● 8.1.13 Ionisation in der Sonne

Sind H und He in der Sonnenphotosphäre (6000 K, 0,1 bar) bzw. 10 000 km darunter (10^6 K, $3 \cdot 10^6$ bar) weitgehend ionisiert?

● 8.2.1 Wettkampf der Felder

Wie stark müsste ein Schwerfeld sein, um in seiner Wirkung auf geladene Teilchen mit ganz üblichen elektromagnetischen Feldern konkurrieren zu können?

● 8.2.2 E -Ablenkung

In (8.10) sind Ladung und Masse der Teilchen herausgefallen. Trotzdem zeigt sich, dass Protonen und Elektronen in entgegengesetzter Richtung abgelenkt werden. Wie kommt das?

● 8.2.3 α -, β -, γ -Strahlung

Kann man Masse, Ladung und Geschwindigkeit von Teilchen aus der Ablenkung im elektrischen oder im Magnetfeld allein bestimmen, oder

muss man beide kombinieren, oder braucht man zusätzliche Auskünfte? Projektieren Sie solche Messungen für α -Strahlung, β -Strahlung, den Nachweis, dass γ -Strahlung nicht aus Teilchen besteht, usw.

● **8.2.4 Oszillograph**

Man kann die Kippspannung an den x -Ablenkplatten durch eine beliebige Spannung ersetzen. Was für Spannungen muss man an x - und y -Platten legen, um auf dem Schirm Kreise, Ellipsen verschiedener Exzentrizität, schrägliegende Gerade zu zeichnen? Kann man eine 8 oder ein ∞ zeichnen? Wie ändern sich die Figuren, wenn man bei gleichem x - und y -Spannungsverlauf die Anodenspannung ändert?

●● **8.2.5 Fernsehröhre**

Welche Forderungen stellt man an Bild-, Zeilen-, Punktfrequenz, Helligkeitssteuerung usw., und wie kann man sie elektronenoptisch realisieren? Gibt es eine Grenze, bei der die Elektronen zu träge werden, und wie weit ist man gegebenenfalls noch von ihr entfernt?

● **8.2.6 Thomson-Parabel**

Wie sieht die Krurve aus, die (a) ein Kathodenstrahl einheitlicher Energie, (b) ein β -Strahlenbündel aus einem radioaktiven Reinnuklid zeichnet?

● **8.2.7 Triode**

Schätzen Sie den Innenwiderstand einer Vakuumröhre bzw. die Steilheit einer Triode im Schottky-Langmuir-Bereich.

● **8.2.8 Durchgriff**

Wieso ist der Durchgriff einer Triode kleiner als 1, und wozu ist das gut? Warum sollte der Arbeitspunkt im linearen Teil der Kennlinie liegen?

● **8.2.9 Anoden-Basisschaltung**

Man kann das Eingangssignal auch zwischen Gitter und Anode legen. Wie verhält sich dann die Schaltung?

● **8.2.10 Logarithmische Kennlinie**

Wie kann man mit einer Röhren- oder Halbleiterdiode einen logarithmischen Zusammenhang erzeugen?

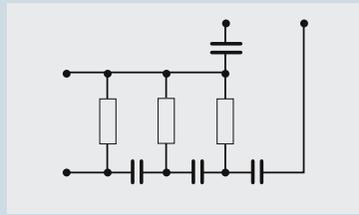


Abb. 8.54. Rückkopplungsglied (Dreikondensatorschaltung), an Abb. 8.27 anzuschließen, vgl. Abb. 8.29

●● **8.2.11 Phasenschieberoszillator**

Warum hat er drei RC-Glieder (Abb. 8.54). Würden eins oder zwei nicht auch genügen? Welches V muss der Verstärker haben, damit die Selbsterregungsbedingung erfüllt ist, falls alle drei R und alle drei C unter sich gleich sind? Welche Frequenz erzeugt das System?

●● **8.2.12 Meißner-Dreipunktschaltung**

Mit welcher Frequenz schwingt sie (Abb. 8.29)? Spielt die Größe von C_A eine Rolle? Welchen Verstärkungsfaktor setzt sie voraus?

●● **8.2.13 Brückenschaltung**

Sie kann als Rückkopplungsglied für einen zweistufigen Verstärker dienen (Abb. 8.30). Warum muss er zweistufig sein? Welche Frequenz kann die Schaltung erzeugen und welche Verstärkung ist vorausgesetzt?

●●● **8.2.14 Quarzuhr**

Fast jeder hat heute eine Quarzuhr, die viel genauer geht als eine zehnmal so teure mechanische Uhr. Man sagt so schön, die piezoelektrisch angeregte Schwingung des Quarzes stabilisiert den Schwingkreis in der Uhr. Aber wie macht er das? Wie verhält sich ein Quarzplättchen in einem Kondensator schaltungstechnisch? Suchen Sie Ersatzschaltbilder für die verschiedenen Frequenzbereiche.

●● **8.3.1 Rekombinationskoeffizient**

Begründen Sie zunächst den Zusammenhang $\beta = vA$ (v : thermische Geschwindigkeit, A Einfangquerschnitt). Beschreiben Sie dann die durch A

charakterisierte Wechselwirkung genauer. Wie nahe mindestens müssen zwei entgegengesetzt geladene Ionen kommen, um einander einfangen und ihre Ladung neutralisieren zu können? Stichwort: Beziehung zwischen E_{kin} und E_{pot} . Wie hängen demnach A und β von Temperatur und Druck ab? Kommt die in Abschn. 8.3.1 genannte Größenordnung von β heraus? Sind alle Annahmen dieser einfachen Theorie immer plausibel, besonders die über den Verlauf des Einfanges?

● **8.3.2 Glimmentladung**

Diskutieren Sie die Kennlinie (8.43) für verschiedene Fälle $\delta > 1$, $\delta < 1$ usw.). Tragen Sie zunächst I über γ auf und rechnen Sie dann mittels Abb. 8.40 auf E um. Beachten Sie die Gültigkeitsbedingung der Summation.

●● **8.3.3 Zündspannung**

Geben Sie eine atomistische Deutung für die Paschen-Regel, nach der bei gegebenem Füllgas und Elektrodenmaterial die Zündspannung einer Glimmentladung nur von dem Produkt aus Druck und Elektrodenabstand abhängt. Benutzen Sie die Begriffe Feldstärke und freie Weglänge.

● **8.3.4 Durchschlag**

Wie groß ist die Feldstärke nahe einem $10 \mu\text{m}$ dicken Draht, wenn 500 V daran liegen? In welchem Bereich ist die Durchschlagsfeldstärke der Luft (10^6 V/m) überschritten?

● **8.3.5 Funken**

Zu welcher Entladungsform gehört der Blitz? Sind die Funken eines Feuers, eines Feuerzeuges Funkenentladungen im oben definierten Sinne? Wohin gehören die Lichterscheinungen, die man im dunklen Zimmer sieht, wenn man sich ein Nylonhemd über den Kopf zieht? Welchen Einfluss haben das Wetter und der Zustand der Haare sowie das Material des Hemdes? Gewisse Schuhsohlen (Krepp usw.) haben die Eigenschaft, dass ihr Träger nach einem kurzen „Solotanz“ imstande ist, ausströmendes Gas mit dem bloßen Finger (aus etwa 1 cm Abstand) anzuzünden. Erklären Sie das (quantitative Schlussfolgerungen).

Andererseits ergeben sich z.T. erschreckende Effekte beim Berühren von Türklinken usw.

● 8.3.6 Blitz

Aus einer großen Gewitterwolke zucken mehrere Blitze. Schätzen Sie unter vernünftigen Annahmen die Spannung zwischen Wolke und Erde (beachten Sie Abb. 8.45), die Ladung, die in der Wolke steckt, den Strom, den ein Blitz transportiert, und seine Leistung und Energie. Wie lange könnten Sie Ihre Tischlampe mit der Ladung bzw. der Energie des Blitzes betreiben? Fließt im Blitz mehr oder weniger Ladung als bei einer Elektrorasur?

● 8.3.7 Leuchtstoffröhre

Zum Zünden einer Leuchtstoffröhre dient die nebenstehend vereinfachte Schaltung. Die Glimmentladung im Glimmzylinder setzt ein, wenn etwa 100 V daranliegen, und heizt ihn auf. Die Entladung in der Leuchtstoffröhre selbst setzt erst bei etwa 400 V ein; wenn sie erst einmal eingesetzt hat, brennt sie auch bei 200 V weiter. Wie entsteht die erhöhte Spannung, die die Leuchtstoffröhre zur Zündung braucht?

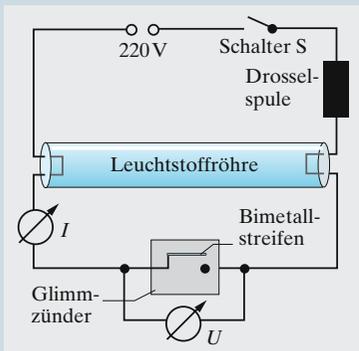


Abb. 8.55.

● 8.3.8 Elektronenmühle

Kathodenstrahlung kann ein Flügelrädchen antreiben. Vergleichen Sie mit dem analogen Effekt für Licht. Handelt es sich um eine direkte Wirkung der Kathodenstrahlung oder um einen indirekten, z. B. thermischen Effekt?

● 8.3.9 e/m

Projektieren Sie eine e/m -Messung, die wenigstens genau genug ist, um Ionen auszuschließen, möglichst aber etwas genauer. Lenken Sie elektrisch oder magnetisch ab, oder müssen Sie beides kombinieren? Welche Hilfsgrößen müssen Sie messen?

● 8.3.10 Elektronenschatten

Bringt man die Kathodenstrahlröhre, z. B. mit dem klassischen Abschirmkreuz (Abb. 8.46) in ein Magnetfeld, dann wird der Schatten des Kreuzes nicht nur verschoben, sondern auch unscharf, selbst im homogenen Feld. Wie kommt das?

●● 8.3.11 Fallende Kennlinie

Was würde geschehen, wenn man den Vorwiderstand in einem Kreis, der eine Bogenentladung mit fallender Kennlinie enthält, weglasse oder falsch dimensionierte, oder wenn man ihn parallel legte? Können Sie eine qualitative Erklärung für das Fallen der Kennlinie geben?

●● 8.3.12 Mikrowellenherd

In einem solchen Herd kann man keine Metalltöpfe verwenden. Keramik- oder Plastikgeschirr wird höchstens indirekt durch die darin enthaltenen wasserhaltigen Lebensmittel erhitzt. Man sagt doch, elektrische Felder dringen in Wasser oder biologische Substanzen gar nicht ein. Wie verträgt sich das? Kernstück dieser Herde ist i. Allg. ein **Magnetron** mit 2,5 GHz. Erklären Sie das alles, speziell, warum man gerade diese Frequenz benutzt.

●●● 8.3.13 Brathendl

Ein Hähnchen kann man im Mikrowellenherd braten, eine Gans kaum. Vergleichen Sie Wellenlänge und Eindringtiefe der Strahlung. Ist die Übereinstimmung zufällig?

●● 8.3.14 Mikrowellenheizung

Unser Zimmer sei wie ein Mikrowellenherd mit schwächerer hochfrequenter Strahlung erfüllt, unsere Tapeten seien metallisiert. Vergleichen Sie diese Heizung mit einer konventionellen. Was muss jeweils erwärmt werden: Luft, Bewohner, Wände, Möbel? Wo und wie erfolgen Verluste?

● 8.4.1 Plasmafrequenz

Welchem Ionisationsgrad entspricht eine Elektronenkonzentration $n \approx 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ bei 10^{-2} mbar ? Wie groß sind die Plasmafrequenzen in der Sonnenphotosphäre (Aufgabe 8.1.13)? Welche Plasmafrequenzen erwartet man für Halbleiter (n zwischen 10^{12} und 10^{20} cm^{-3}) und Metalle (n zwischen 10^{21} und 10^{23} cm^{-3})? Bestehen Beziehungen zur Optik?

● 8.4.2 Nordlicht

Warum entstehen die **Polarlichter** vorwiegend in Höhen um 100 km?

● 8.4.3 Durchschlag

Wenn Sie die Größenordnung der Durchschlagsspannung durch dünne Luftschichten (mm bis cm) vergessen haben, wie können Sie sie ableiten? (Hinweis: Die Begriffe Feldstärke und freie Weglänge müssen in der Ableitung vorkommen.) Für welche praktischen Zwecke ist die Kenntnis der Durchschlagsspannungen nützlich? Wie ist es zu erklären, dass die 220 V der Lichtleitung bei einem Kurzschluss oft erheblich längere Luftzwischenräume überspringen (der eine der sich berührenden Drähte kann gelegentlich auf fast 1 cm wegschmelzen, bevor die Entladung abbricht)?

● 8.4.4 Ionenrakete

Positive Ionen (welcher Art?) werden beschleunigt (wie?) und nach Vereinigung mit Elektronen (warum?) ausgestoßen. Diskutieren Sie Auströmungsgeschwindigkeit, Energiebedarf, Fahrpläne usw. Kann man genügend Sonnenenergie einfangen oder braucht man Kernreaktoren? Planen Sie Raumfahrten. Vergleichen Sie mit thermischen und Kernraketen.

● 8.4.5 Photonenrakete

Welche Temperatur müsste ein Plasma von vernünftigen Abmessungen haben, um einen Schub von interessanter Größenordnung durch Photonenrückstoß zu erzielen? Diskutieren Sie, soweit möglich, die Spiegel- und Strahlenschutzverhältnisse sowie die Energiequellen.

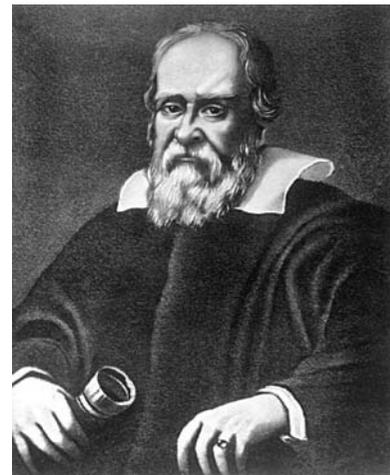
Geometrische Optik

■ Inhalt

9.1	Reflexion und Brechung	483
9.2	Optische Instrumente	490
9.3	Die Lichtgeschwindigkeit c	502
9.4	Matrizenoptik	506
9.5	Geometrische Elektronenoptik	507

▼ Einleitung

Die Strahlenoptik beschreibt sehr einfach einige Züge der Lichtausbreitung. Aber sogar der Mechanismus von Reflexion und Brechung wird erst im Wellenbild klar. Allem, was mit Beugung, Polarisation usw. zusammenhängt, steht die Strahlenoptik völlig hilflos gegenüber.



„... enthält und erklärt Beobachtungen, die kürzlich mithilfe eines neuartigen Augenglases gemacht wurden, am Antlitz des Mondes, an der Milchstraße und den Nebelsternen, an unzähligen Fixsternen sowie an vier Planeten, Mediceische Gestirne genannt, die noch nie bisher gesehen wurden.“

Galileo Galilei, Sidereus Nuncius, 1610

9.1 Reflexion und Brechung

Die Alten Griechen stritten sich nicht nur darüber, ob sie mit dem Zwerchfell dachten oder womit sonst, sondern auch, ob das Licht von den Dingen ausgeht oder ob unser Auge Strahlen aussendet, die die Dinge irgendwie abtasten. *Empedokles* von Agrigent war mit der ersten Ansicht in der Minderheit gegen *Aristoteles*, *Platon*, *Euklid*, sogar viel später noch *Descartes*. Erst der große arabische Augenarzt *Ibn al Haitham* (*Alhazen*) scheint um das Jahr 1000 klargestellt zu haben, dass die sichtbaren Dinge Licht aussenden, d. h. selbst leuchten oder fremdes Licht zurückwerfen.

9.1.1 Lichtstrahlen

Wir stellen das Licht eines leuchtenden Punktes durch eine Kugelwelle dar, die von ihm ausgeht, oder durch ein **Büschel** von *Strahlen*, die überall senkrecht auf den Wellenfronten stehen und die Wege sind, auf denen die Lichtenergie reist. Zunächst gehen sie in alle oder fast alle Richtungen; will man ein enges Büschel, muss man es *ausblenden*. Wenn der leuchtende Punkt sehr weit weg ist, wird der Ausschnitt der Kugelwelle zur ebenen Welle, aus dem Büschel wird ein (paralleles) **Bündel** (Abb. 9.1). Ohne Störung läuft der Lichtstrahl geradlinig, was Geodäsie und Astronomie bis *Einstein* stillschweigend voraussetzten und zu äußerst genauen Messungen ausnutzten. Stören lässt er sich auch z. B. durch andere Strahlen nicht, die ihn kreuzen. Sonst gäbe z. B. die **Lochkamera** (Abb. 9.2) kein so klares Bild. Die Lichtbüschel, die von jedem Punkt des Objekts durch das Loch in *B* treten, zeichnen jeder einen hellen Fleck auf dem Schirm *S*,

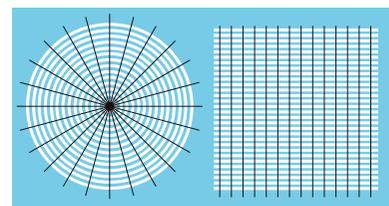


Abb. 9.1. Wellenfronten (weiß) und Strahlen (schwarz) einer Kreiswelle (Strahlenbüschel) von einer Punktquelle und einer ebenen Welle (Parallelbündel)

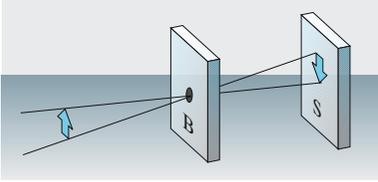


Abb. 9.2. Die Lochkamera erzeugt im dunklen Innenraum ein umgekehrtes Bild; Verkleinerung des Loches macht es schärfer bis zu einem Optimum, aber dunkler

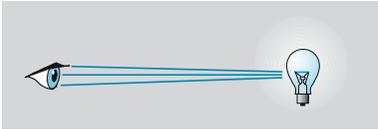


Abb. 9.3. Direkte Beobachtung einer Lichtquelle

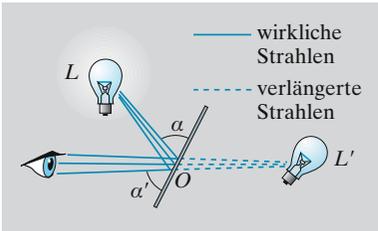


Abb. 9.4. Der ebene Spiegel erzeugt ein virtuelles unverzerrtes Bild

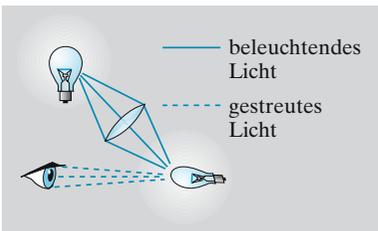


Abb. 9.5. Die Linse erzeugt auf einem Schirm ein reelles, aber verzerres Bild

und diese formieren sich zum Bild, das nach Konstruktion umgekehrt ist. Der Versuch, das Bild durch Verkleinern des Loches absolut scharf zu machen, scheitert nicht nur an der zu geringen Helligkeit: Wenn das Loch zu klein wird, verbreitert sich das Bündel dahinter wieder; die Beugung, ein typisches Wellenphänomen, mit dem wir uns in Kap. 10 beschäftigen, lenkt Licht um die Ecke, in den geometrisch definierten „Schattenraum“ hinein. Linsen sind z. B. für Röntgenlicht unwirksam ($n < 1$), aber mit Lochblenden oder Fresnel-Zonenplatten kann man auch hier Bilder erzeugen.

Das Auge setzt automatisch voraus, die Strahlen, die es empfängt, seien immer geradlinig gelaufen. Wenn ein von L ausgehendes Bündel z. B. durch einen Spiegel abgelenkt wird, verlegen wir den Ausgangspunkt in die rückwärtige Verlängerung der Strahlen und sehen ein **virtuelles Bild** in L' (Abb. 9.4).

Allgemein ist ein **Bild** eine Stelle, wo sich entweder die Strahlen des Bündels selbst oder ihre Verlängerungen in einem Punkt schneiden: reelles bzw. virtuelles Bild.

9.1.2 Reflexion

An der Grenzfläche zweier Medien wird ein Lichtstrahl ganz oder teilweise reflektiert, und zwar genauso wie eine elastisch abprallende Kugel: LO und OL' in Abb. 9.4 liegen in einer Ebene, und es ist $\alpha = \alpha'$. Alle Strahlen des Bündels aus der Punktquelle L , die den Spiegel treffen, werden so reflektiert, als kämen sie vom (virtuellen) Spiegelbild L' her, das ebenso weit hinter dem Spiegel liegt wie L davor. Das folgt aus der Konstruktion. Der ebene Spiegel bildet im Prinzip den ganzen Raum vollkommen ab, d. h. überall scharf und unverzerrt, wenn auch ohne Vergrößerung. Er ist auch das einzige optische Gerät, das dies leistet.

In einem **Winkelspiegel** sieht man sich mehrfach, weil die Spiegelbilder nochmals gespiegelt werden. Zwei Spiegel, die im rechten Winkel stehen, werfen in der dritten dazu senkrechten Ebene jeden Strahl in genau entgegengesetzte Richtung zurück, egal woher er kommt (Abb. 9.7); drei Spiegel, die eine Würfecke bilden, tun dies überhaupt mit jedem Strahl. Der Rückstrahler am Fahrrad besteht aus vielen solchen Würfecken.

Ein **Hohlspiegel** bildet i. Allg. einen Teil einer Kugelfläche vom Radius r mit dem Zentrum M . Ein leuchtender Punkt A stehe im Abstand g vor dem Spiegel. Was wird aus den Strahlen eines Bündels aus A , die den Spiegel in verschiedenen Abständen y von der Achse AM treffen? Ein solcher Strahl schneidet die Achse nach der Reflexion wieder im Abstand b vom Spiegel. Wenn y klein, also das Bündel eng ist, sind alle Winkel in Abb. 9.8 klein, und wir lesen ab

$$\beta = \frac{y}{g}, \quad \gamma = \frac{y}{r}, \quad \delta = \frac{y}{b},$$

$$\alpha = \gamma - \beta = \delta - \gamma = \frac{y}{r} - \frac{y}{g} = \frac{y}{b} - \frac{y}{r}. \tag{9.1}$$

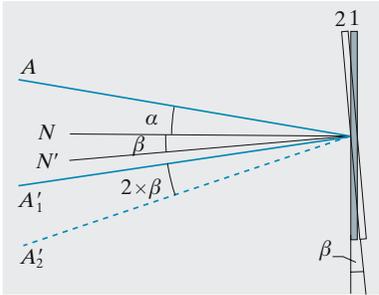


Abb. 9.6. Bei Drehung des Spiegels dreht sich der reflektierte Strahl um den doppelten Winkel

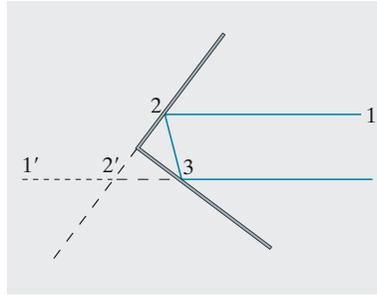


Abb. 9.7. Der rechtwinkliger Spiegel lenkt jeden Strahl, der in der zu beiden Seiten senkrechten Ebene einfällt, in umgekehrter Richtung zurück

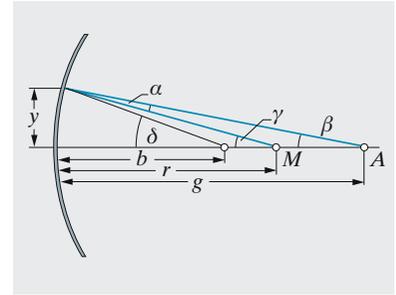


Abb. 9.8. Der Hohlspiegel vereinigt näherungsweise alle von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkt, falls sie nahe der Achse einfallen

Hier kann man y wegstreichen, d. h. b ist unabhängig von y , alle Strahlen des Bündels schneiden sich im gleichen Punkt, dem Bild, solange alle Winkel klein gegen 1 sind. Es folgt

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \tag{9.2}$$

Für $g = \infty$ wird $b = r/2$: Ein Parallelbündel wird halbwegs zwischen dem Spiegel und seiner Mitte wieder vereinigt. Dies ist ein **Brennpunkt** des Spiegels (er hat unendlich viele, für jede Bündelrichtung einen).

Die **Brennweite** ist $f = r/2$; sie hängt mit **Dingweite** g und **Bildweite** b nach der **Abbildungsgleichung** zusammen:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{9.3}$$

Mit den Abständen vom Brennpunkt, $g' = g - f$, $b' = b - f$ ergibt sich *Newtons* Form dieser Gleichung

$$g'b' = f^2 \tag{9.4}$$

Bei $g = \infty$ folgt $b = f$, was wir schon wissen. Bei $g = f$ wird umgekehrt $b = \infty$. Allgemein kann man Bild und Gegenstand vertauschen, in (9.3) und auch in der Zeichnung, in der Einfallswinkel und Ausfallswinkel gleich sind und von der Ausbreitungsrichtung kein Gebrauch gemacht wird.

× Beispiel ...

Wie weit weicht der Schnittpunkt F' des am sphärischen Hohlspiegel reflektierten Parallelstrahles mit der Hauptachse vom „Brennpunkt“ ab? Gibt es einen reflektierten Strahl, der durch den Spiegelscheitel S geht?

$F'M = \frac{1}{2}r / \cos \alpha$ (Abb. 9.36) statt des angenäherten Wertes $\frac{1}{2}$. Bei $\alpha = 60^\circ$ geht der Strahl durch S .

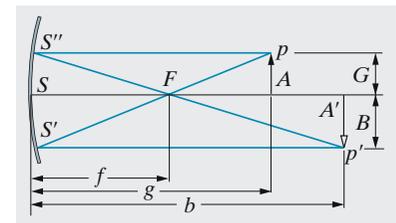


Abb. 9.9. Bildkonstruktion für den Hohlspiegel

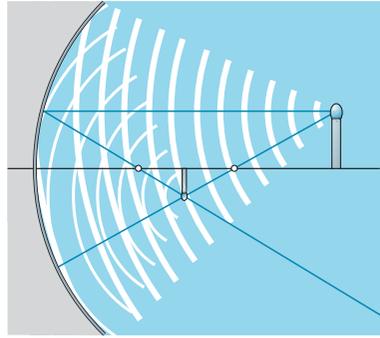


Abb. 9.10. Der Spiegel wirft nicht nur die Strahlen, sondern auch die Wellenfronten unter gleichen Winkeln zurück. Eine Lichtquelle jenseits des Mittelpunkts eines Hohlspiegels hat ein Bild zwischen Brennpunkt und Mittelpunkt, und umgekehrt

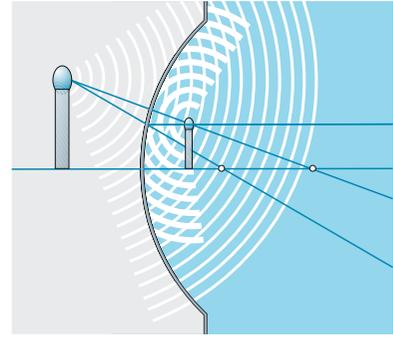


Abb. 9.11. Die Wellenfronten einer Lichtquelle zwischen Hohlspiegel und seinem Brennpunkt treten so vorgewölbt wieder aus dem Spiegel aus, als kämen sie von einem virtuellen Bild her

Beim **Wölbspiegel** rechnet man f als negativ, wie alle Abstände hinter dem Spiegel. Dann gilt (9.3) unverändert und liefert immer ein negatives b (virtuelles Bild hinter dem Spiegel).

Der **parabolische Hohlspiegel** (Abb. 9.13), der durch Rotation einer Parabel $y^2 = 2px$ um die x -Achse entsteht, vereinigt alle parallel zu dieser Achse einfallenden Strahlen in einem exakten Brennpunkt F , auch bei großem Achsabstand. Es ist $SF = p/2$.

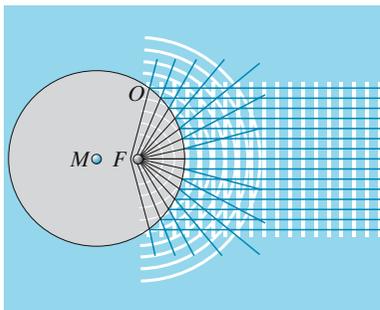


Abb. 9.12. Der sphärische Konkavspiegel hat seinen Brennpunkt in der Mitte des Radius. Reflektiertes parallel einfallendes Licht scheint von dorthier zu kommen

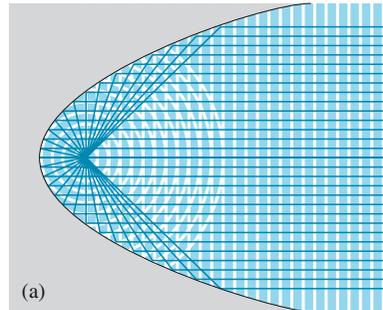
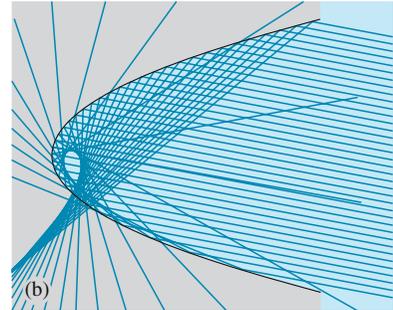


Abb. 9.13a,b. Ein parabolischer Hohlspiegel vereinigt achsparallele Strahlen in einem exakten Brennpunkt. Schon für geringfügig schiefe ist er schlechter als ein Kugelspiegel. Es entsteht eine cissoidenförmige Brennlinie



9.1.3 Brechung

Fällt ein Lichtstrahl aus dem Vakuum, um α_1 gegen das Einfallslot geneigt, auf die Oberfläche eines Mediums, so wird ein Teil reflektiert, der Rest tritt unter Richtungsänderung, **Brechung** (Abb. 9.14), in das Medium ein und läuft dort unter dem Winkel α_2 gegen das Lot weiter. Nach *Snellius* ist

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n \quad (9.5)$$

n heißt **Brechzahl** oder **Brechungsindex** des Mediums.

Für eine bestimmte Lichtfarbe (Wellenlänge) ist sie eine Materialkonstante.

Nach Abschn. 4.3.3 beruht Brechung einer Welle auf ihren unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten c in den beiden Medien, und zwar

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} .$$

Also gibt die Brechzahl an, um wie viel langsamer das Licht im Medium läuft (c_m) als im Vakuum (c_0):

$$n = \frac{c_0}{c_m} \quad (9.6)$$

Für den Übergang zwischen zwei beliebigen Medien 1 und 2 ergibt sich

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (9.7)$$

Von zwei Stoffen nennt man den mit der größeren Brechzahl **optisch dichter**. Wenn sich n nicht sprunghaft, sondern allmählich ändert, z. B. in einer Lösung mit Konzentrationsschichtung, knickt der Lichtstrahl nicht, sondern krümmt sich stetig (Abschn. 9.5.1). In der Astronomie und der Nautik ist die **Lichtkrümmung** in der Dichteschichtung der Luft, die **atmosphärische Refraktion**, eine wichtige Fehlerquelle.

9.1.4 Totalreflexion

Beim Übergang von einem optisch dichteren zum dünneren Medium ($n_2 < n_1$) wird das Licht vom Lot weggebrochen, und zwar immer stärker, je schräger es ankommt. Schließlich wird ein Zustand erreicht, wo das Licht streifend, d. h. parallel zur Oberfläche austritt. Zu diesem $\alpha_2 = 90^\circ$ gehört nach (9.7) der Einfallswinkel α_T mit

$$\sin \alpha_T = \frac{n_2}{n_1} \sin 90^\circ = \frac{n_2}{n_1} \quad (9.8)$$

Wenn dieser **Grenzwinkel** α_T überschritten wird, ist der Übergang ins dünnere Medium nicht möglich; das Licht wird zu 100% reflektiert

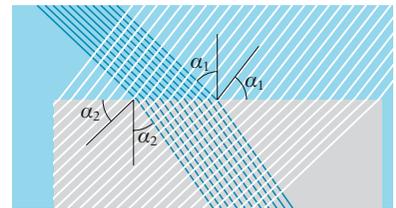


Abb. 9.14. Brechung: Trotz der kleineren Wellenlänge müssen die Wellenfronten im dichteren Medium mit denen im dünneren zusammenpassen. Sie müssen also entsprechend dem Snellius-Gesetz kippen

Tabelle 9.1. Brechzahlen einiger Stoffe bei 20 °C für $\lambda = 589 \text{ nm}$

Substanz	n
Luft von 1 013 mbar	1,000 272
Wasser	1,333
Benzol	1,501
Schwefelkohlenstoff	1,628
Diamant	2,417
Steinsalz	1,544
Kronglas (BK 1)	1,510
Flintglas (F 3)	1,613

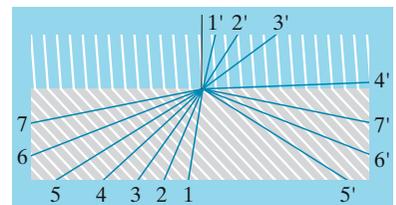


Abb. 9.15. Totalreflexion tritt ein, wenn die Wellenfronten in den beiden Medien bei keiner Kippung zusammenpassen. Auf dem Bild tun sie es gerade noch (Grenzwinkel)

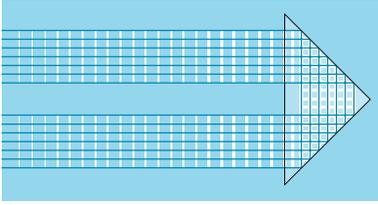


Abb. 9.16. Ein gleichseitig-rechtwinkliges Glasprisma lenkt das Licht durch Totalreflexion um 180° um und vertauscht dabei rechts und links. In anderer Richtung kann man auch um 90° ablenken

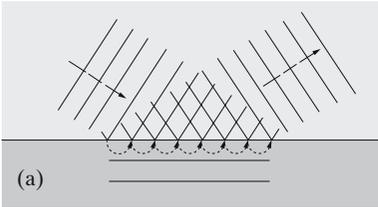


Abb. 9.17a,b. Eindringen einer Welle in ein totalreflektierendes Medium; (a) schematisch; (b) stroboskopische Aufnahme von Ultraschallwellen; nach *Rshevkin und Makarow, Soviet Physics Acoustics*. Auch der Spiegelgipfel eines Strahls liegt nicht mehr genau an der Grenzfläche, sondern geringfügig dahinter (Goos-Hänchen-Effekt)

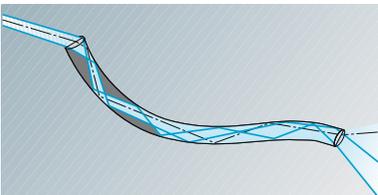
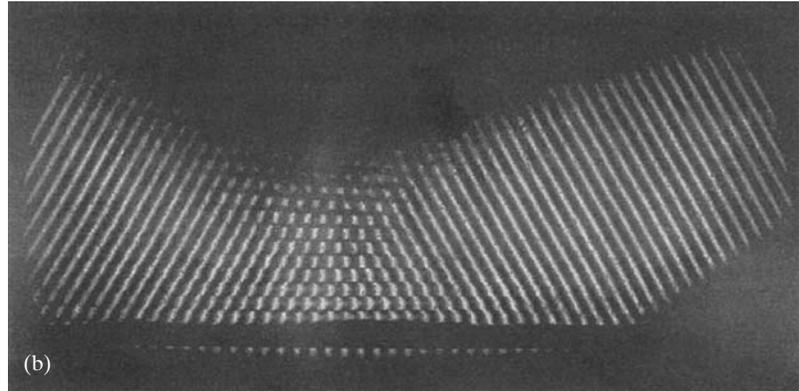


Abb. 9.18. Glasfaser als **Lichtleiter**. Die ursprüngliche Anordnung der Teilstrahlen im Bündel geht durch Mehrfachreflexion verloren. Zur Bilderzeugung braucht man sehr viele Fasern

(Abb. 9.15). Glas mit $n \approx 1,5$ hat einen Grenzwinkel $\alpha_T \approx 42^\circ$. Das 45° -Prisma (Abb. 9.16) reflektiert daher besser als jeder Spiegel und wird im Feldstecher und vielen anderen Geräten zum Umlenken benutzt. Nach (9.8) ist der Grenzwinkel ein empfindliches Maß für die Brechzahl. Man misst diese z. B. für eine Flüssigkeit im **Totalrefraktometer** (*Pulfrich, Abbe*), indem man Licht aus einem optisch dichteren Glas mit bekanntem n in die Flüssigkeit eintreten lässt.

Genauere Beobachtung zeigt hier die Grenzen der Strahlenoptik. Nimmt man als dünneres Medium eine fluoreszierende Flüssigkeit, dann beobachtet man trotz Totalreflexion eine dünne fluoreszierende Schicht. Etwas Licht tritt also doch ein. Die Schicht ist allerdings nur wenige Wellenlängen dick; die Intensität nimmt exponentiell mit der Entfernung von der Grenzfläche ab. Für Schallwellen gilt dasselbe. In Abb. 9.17 fällt eine Ultraschallwelle von links oben auf eine Grenzfläche, wo die Schallgeschwindigkeit größer (also n kleiner) wird; sie wird nach rechts oben totalreflektiert. Das Schallwellenmuster dient als Beugungsgitter für Licht (Abschn. 4.3.4) und wird dadurch sichtbar.



Eine dünne Wasserhaut zwischen zwei Glasblöcken wird auch bei Überschreitung des Grenzwinkels lichtdurchlässig, falls der zweite Glasblock in die von „unerlaubten“ Wellen erfüllte Zone reicht, d. h. wenn die Haut dünner ist als eine Wellenlänge. Dies ist analog zum quantenmechanischen **Tunneleffekt** (Abschn. 13.7.2), was man am besten aus dem Zusammenhang zwischen Potential und Brechzahl (Abschn. 9.5.1) erkennt. Nach der geometrischen Optik oder der klassischen Mechanik könnte kein Teilchen eine Zone zu niedriger Brechzahl bzw. zu hohen Potentials durchdringen; nach der Wellenoptik bzw. Wellenmechanik ist das doch mit einer Wahrscheinlichkeit möglich, die wie $e^{-d/\lambda}$ von Wellenlänge und Schichtdicke abhängt.

Wenn ein Lichtbündel an der Stirnfläche in eine dünne **Glasfaser** eintritt, wird es durch vielfache Totalreflexion gehindert, die Faser wieder zu verlassen, und tritt an der anderen Stirnfläche, nur durch Absorption geschwächt, wieder aus. Die Faser kann dabei, wenn sie nur dünn genug ist, praktisch beliebig gebogen sein. Interferenz zwischen den verschiedenen hin- und herlaufenden Bündeln gestattet aber Ausbreitung nur unter gewissen Winkeln zur Faserachse (Ausbreitungsmoden). In den übrigen Richtungen tritt Auslöschung ein. Bündel solcher Fasern übermitteln sogar erkennbare Bilder von sonst unzugänglichen Objekten, besonders in der inneren Medizin. Natürlich müssen die Fasern so gelagert sein, dass ihre Anordnung zueinander am „Eingang“ die gleiche ist wie am „Ausgang“.

Glasfasern spielen als Leiter für Laserlicht in der Nachrichtentechnik eine große Rolle. Auf einen Laserstrahl mit seiner enormen Trägerfrequenz kann man ja nach Abschn. 7.4.8 z. B. ebenso viele gleichzeitige Telefongespräche aufmodulieren, wie es Menschen gibt.

9.1.5 Prismen

Bei Durchgang durch ein dreiseitiges **Prisma** (Abb. 9.19) wird ein Lichtstrahl um den Winkel δ abgelenkt, und zwar von der „brechenden Kante“ fort. Dieser Ablenkwinkel ist am kleinsten, wenn das Licht so einfällt, dass es im Innern des Prismas senkrecht zu dessen Symmetrieebene verläuft (**symmetrischer Durchgang**).

Nach Abb. 9.19 tritt γ als Außenwinkel des Dreiecks ABD wieder auf, also

$$\begin{aligned} \text{allgemein } \gamma &= \alpha_2 + \alpha'_2; \\ \text{bei symm. Durchgang } \gamma &= 2\alpha_2. \end{aligned}$$

δ ist Außenwinkel des Dreiecks ABC :

$$\begin{aligned} \text{allgemein } \delta &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha'_1 - \alpha'_2; \\ \text{bei symm. Durchgang } \delta &= 2(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{allgemein } \gamma + \delta &= \alpha_1 + \alpha'_1; \\ \text{bei symm. Durchgang } \gamma + \delta &= 2\alpha_1. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Das Brechungsgesetz liefert dann bei symmetrischem Durchgang

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n = \frac{\sin(\gamma + \delta)/2}{\sin \gamma/2}$$

oder

$$\sin \frac{\gamma + \delta}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2}. \tag{9.10}$$

Die Brechzahl eines Stoffes ist i. Allg. für Licht verschiedener Farbe verschieden: n hängt von der Wellenlänge ab. Dies bezeichnet man als **Dispersion**. Nach (9.10) hängt der Ablenkwinkel δ von n und damit von λ ab: Man kann zusammengesetztes Licht mit dem Prisma spektral zerlegen (Abb. 9.21). Fast alle Stoffe brechen langwelliges Licht schwächer als kurzwelliges, d. h. die Funktion $n(\lambda)$ fällt: Die Dispersion ist **normal**.

Im **Spektralapparat** trennt das Prisma die Farben nur sauber, wenn das Licht aus sauber definierter Richtung kommt, z. B. aus dem engen Spalt (Abb. 9.21). Er sei zunächst mit einfarbigem (monochromatischem) Licht beleuchtet. Ohne Prisma erzeugt die Linse L ein Bild des Spaltes in B . Das Prisma verschiebt dieses Bild nach B' , aber für jede Wellenlänge ist die Ablenkung etwas anders, und alle diese Spaltbilder verschiedener Farbe zusammen ergeben das **Spektrum** der Lichtquelle.

Der **Spektrograph** (Abb. 9.22) hat meist zwei (achromatische) Linsen; eine vor dem Prisma macht das Licht aus dem Spalt parallel, die andere hinter dem Prisma vereinigt es auf dem Schirm oder Film. Im **Spektroskop**

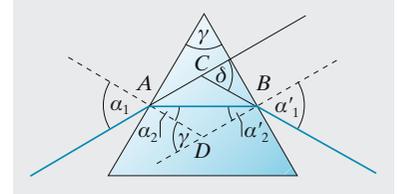


Abb. 9.19. Ablenkung eines Lichtstrahles durch ein Prisma, symmetrischer Durchgang

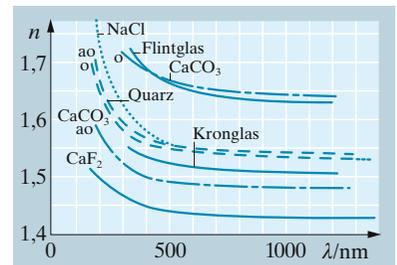


Abb. 9.20. Dispersionskurven $n(\lambda)$ für verschiedene Prismenmaterialien

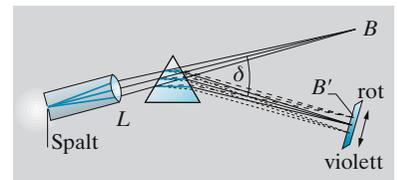


Abb. 9.21. Spektrale Zerlegung von zusammengesetztem Licht durch ein Prisma

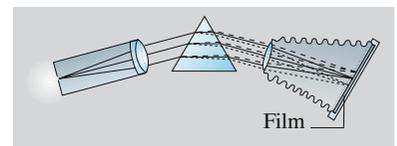


Abb. 9.22. Spektrograph

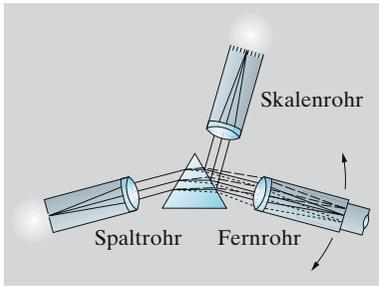


Abb. 9.23. Spektroskop

(Abb. 9.23) ist die zweite Linse durch ein kleines Fernrohr ersetzt, in dem man das Spektrum vor absolut dunklem Hintergrund besonders brillant sieht. In die Brennebene des Fernrohrobjektivs stellt oder projiziert man eine Skala, sodass man jeder Linie ihre Wellenlänge zuordnen kann. Meist sitzt die Lichtquelle nicht direkt vor dem Spalt, sondern wird mit einer Linse auf diesen abgebildet.

Mit einem **Beugungsgitter** (s. Abschn. 10.1.3) statt des Prismas erhält man auch ein Spektrum, aber mit umgekehrter Farbfolge als beim Prisma: Das Gitter lenkt Rot stärker ab, das Prisma Violett. Beim Gitter ist im Gegensatz zum Prisma der Ablenkwinkel etwa proportional zur Wellenlänge: Ein Beugungsspektrum ist ein „normales“ Spektrum.

9.2 Optische Instrumente

Seit *Galilei* 1610 die Welt im Großen und *Leeuwenhoek* 1674 die Welt der „Vele kleine Diertjes“ erschloss, hat man aus Linsen, Spiegeln, Prismen Dinge zusammengebaut, von denen wir alle profitieren, besonders wenn wir sie verstehen.

9.2.1 Brechung an Kugelflächen

Linsen sind aus fertigungstechnischen Gründen meistens durch Kugelflächen begrenzt. Eine Kugel hat ja überall gleiche Krümmung und schleift sich daher unter seitlicher Verschiebung in einer entsprechend gekrümmten Mulde.

Wir betrachten zunächst den Durchgang durch *eine* Kugelfläche, die die Medien 1 und 2 trennt. Den leuchtenden Punkt *A* im Medium 1 verbinden wir durch die Achse *AM* mit dem Kugelmittelpunkt *M* und fragen wie in Abschn. 9.1.2, was aus einem engen von *A* stammenden Strahlenbüschel wird, speziell ob und wo diese Strahlen die Achse wieder schneiden. Aus Abb. 9.26 lesen wir für kleine *y* ab:

$$\varphi_1 = \frac{y}{g}, \quad \gamma = \frac{y}{r}, \quad \varphi_2 = \frac{y}{b}, \quad \alpha = \gamma + \varphi_1, \quad \beta = \gamma - \varphi_2 \quad (9.11)$$

Abb. 9.24. Ein Prismenstapel vereinigt Licht, das aus einem Punkt kommt, annähernd wieder in einem Punkt. Hier ist der symmetrische Durchgang gezeichnet, d. h. Gegenstand und Bild liegen in doppelter „Brennweite“. Die brechenden Winkel der Prismen müssen so abgestuft sein, dass sie proportional zum Abstand von der Achse sind. Das ist annähernd die Bedingung für eine Kugelfläche

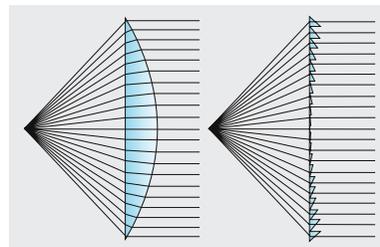
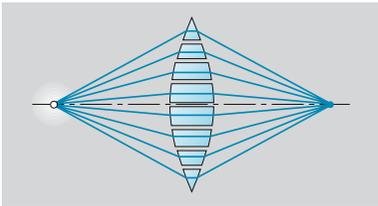


Abb. 9.25. Gibt man den Prismen nur so viel Dicke wie nötig, kommt man zu Fresnels Stufenlinse (*rechts*). Sie bricht praktisch ebenso wie die dicke Linse (*links*), ist aber viel leichter

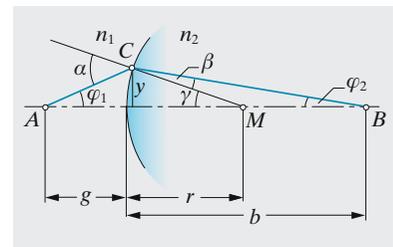


Abb. 9.26. Brechung an der kugelförmigen Grenze zweier Medien mit verschiedenen Brechzahlen

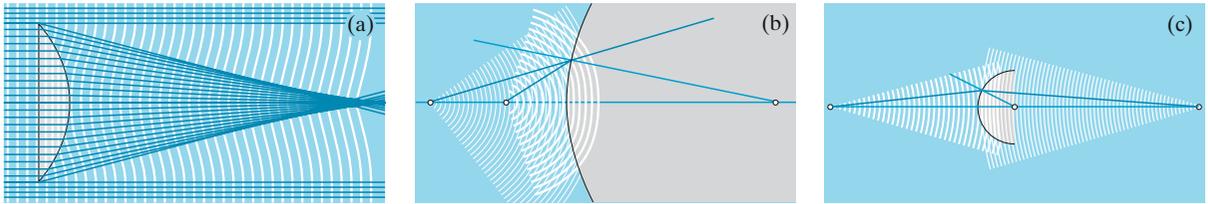


Abb. 9.27. (a) Die Sammelwirkung der Linse beruht darauf, dass die Wellenfronten umso mehr zurückbleiben, je dicker das Glas an dieser Stelle ist. Die Strahlen stehen überall senkrecht auf den Wellenfronten; sie vereinigen sich nicht exakt in einem Punkt (sphärischer Astigmatismus). (b) Im Glas (hier mit $n = 1,6$ berechnet) flachen sich die Wellenfronten einer nahen Lichtquelle so ab, als kämen sie von einer fernerer virtuellen Quelle. (c) Hier ist die Quelle weiter weg. Die Fronten im Glas beulen sich anders herum und laufen in einem reellen Bild zusammen

und nach dem Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} \approx \frac{n_2}{n_1} .$$

Setzen wir hier α und β nach (9.11) ein, dann kürzt sich y wieder weg: Alle Strahlen des engen Büschels gehen durch den gleichen Bildpunkt, und es wird

$$\frac{1/r + 1/g}{1/r - 1/b} = \frac{n_2}{n_1}$$

oder

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} . \tag{9.12}$$

Einfallende Parallelstrahlen ($g = \infty$) vereinigen sich im Punkt mit der **hinteren Brennweite**

$$b = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r = f .$$

Damit die Strahlen nach der Brechung parallel werden ($b = \infty$), müssen sie aus einem Punkt mit der **vorderen Brennweite**

$$g = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r = F$$

kommen. Mittels f und F wird aus (9.12)

$$\boxed{\frac{F}{g} + \frac{f}{b} = 1} , \tag{9.13}$$

oder mit den **Brennpunktswerten** $g' = g - F$, $b' = b - f$, vom jeweiligen Brennpunkt aus gemessen

$$g' b' = f F . \tag{9.14}$$

Ist die brechende Fläche nach rechts vorgewölbt, so ist der Strahlengang spiegelbildlich zu Abb. 9.26. Man müsste die Bedeutungen von n_1 und n_2 sowie von g und b vertauschen. Das kommt auf das Gleiche heraus, als wenn man in (9.12) ohne eine solche Vertauschung das Vorzeichen von r umkehrt: Konkave brechende Flächen haben einen negativen Krümmungsradius.

Eine Einzellinse besteht aus zwei brechenden Flächen, ein Linsensystem aus mehreren. Man unterscheidet dünne und dicke Linsen, je nachdem der Abstand zwischen den brechenden Flächen gegen die übrigen Abstände

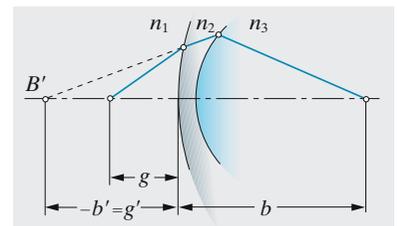


Abb. 9.28. Kombinierte Wirkung zweier Kugelflächen

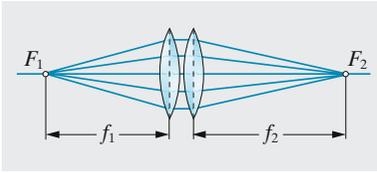


Abb. 9.29. Die Brechkraften (reziproken Brennweiten) mehrerer Linsen addieren sich zur Brechkraft des Gesamtsystems: $1/f = 1/g + 1/b = 1/f_1 + 1/f_2$

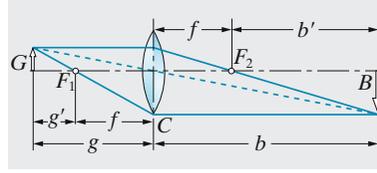


Abb. 9.30. Ein Gegenstand jenseits der Brennweite einer Sammellinse gibt ein reelles umgekehrtes Bild

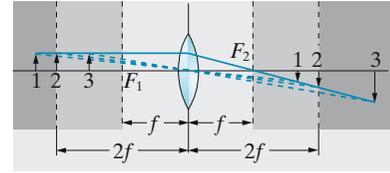


Abb. 9.31. Nähert sich der Gegenstand der Brennebene, wird das Bild größer und ferner; in der Mittelpunktsebene ist es ebenso groß wie der Gegenstand

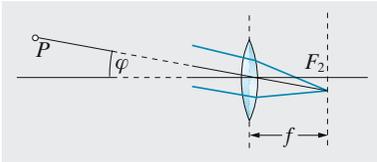


Abb. 9.32. Abbildung eines unendlich fernen Gegenstandes

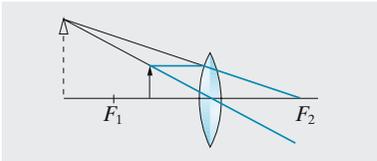


Abb. 9.33. Ein Gegenstand diesseits der Brennebene gibt ein virtuelles aufrechtes Bild, das mit Annäherung an die Brennebene größer und ferner wird

zu vernachlässigen ist oder nicht. Bei dünnen Linsen addieren sich einfach die Ablenkwinkel durch die beiden brechenden Flächen. Die Brennweite ist aber umgekehrt proportional zum Ablenkwinkel eines achsparallelen Strahls: $f = y/\varphi_2$. Also addieren sich die reziproken Brennweiten oder die **Brechkraft**e der Einzelflächen

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}} \quad (9.15)$$

Die Brechkraft $1/f$ hat sinngemäß die Einheit $1 \text{ m}^{-1} = 1 \text{ dp}$ (eine Dioptrie).

Eine **dünne Linse** aus einem Material, das die Brechzahl n hat, und mit den Krümmungsradien r_1 und r_2 (beide als positiv gerechnet, wenn nach links vorgewölbt) in Luft mit $n_1 = n_3 = 1$ hat nach (9.12) und (9.15) die Brechkraft

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{f} \quad (9.16)$$

Eine Bikonvexlinse hat $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ und positive Brechkraft, ist eine **Sammellinse**, ebenso eine konvex-konkav-Linse mit $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, aber $r_2 > r_1$. Diese Linsen sind in der Mitte dicker als außen, bei der **Zerstreuungslinse** ist es umgekehrt.

× Beispiel...

Ein Fotoapparat, Objektiv 50 mm Brennweite, erlaubt als kleinste Gegenstandsentsfernung 50 cm. Wie wird technisch der Übergang von Fern- auf Naheinstellung bewerkstelligt? Wie ändert sich der Tiefenschärfenbereich dabei?

Bei Einstellung auf $g = \infty$ muss die Linse um $b = f = 50 \text{ mm}$ von der Filmebene entfernt sein, bei Einstellung auf $g = 50 \text{ cm}$ um $b = fg/(g-f) = 55,6 \text{ mm}$. Das Objektiv rückt umso weiter nach vorn, je näher der Gegenstand ist, maximal um knapp 6 mm. Tiefenschärfenbereich: Vgl. Aufgabe 9.1.13.

9.2.2 Dicke Linsen

Bei dünnen Linsen war es näherungsweise erlaubt, die zweifache Brechung an den beiden Glas-Luft-Trennflächen durch eine einzige zu ersetzen und dazu die Strahlen von beiden Seiten in das Glas hinein bis zur Mittelebene der Linse darzustellen. Wenn der Lichtweg im Glas eine gewisse Länge überschreitet, sodass die in Abschn. 9.2.1 gemachte Näherung nicht mehr gilt, muss man anders verfahren. Auch dann kommt man noch mit einer einzigen Brechung aus, aber wo sie zu erfolgen hat, hängt davon ab, aus welcher Richtung der Strahl kommt. Für alle von links parallel einfallenden Strahlen zeichne man eine Ebene hh' senkrecht zur optischen Achse, aber etwas rechts von der Mittelebene der Linse (Abb. 9.34). Hier hat die einmalige Brechung zu erfolgen, wenn sie die eigentlich zweimalige richtig beschreiben soll. Die Mittelebene zerfällt so in zwei getrennte **Hauptebenen**. Deren Schnittpunkte mit der optischen Achse heißen **Hauptpunkte**. Als Brennweiten der Linse bezeichnet man jetzt die Abstände der Brennpunkte vom benachbarten Hauptpunkt. Auch Gegenstands- und Bildweite werden von der entsprechenden Hauptebene an gemessen.

Die Lage des Hauptpunktes einer dicken symmetrischen Bikonvexlinse mit den Krümmungsradien $r_1 = r_2 = r$ und der Dicke d ergibt sich so: Wir setzen $HS_2 = vd$ und suchen den Bruchteil v . Die Brennweite der vorderen (linken) Trennfläche allein ist nach (9.12)

$$A'F_1 = f_1 = \frac{n}{n-1}r. \tag{9.17}$$

Die ganze Linse hat angenähert nach (9.16) die Brennweite

$$HF = f = \frac{1}{2(n-1)}r. \tag{9.18}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $AA'F_1$ und $BB'F_1$ folgt nun

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{A'F_1}{B'F_1} = \frac{f_1}{f_1 - d},$$

und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CHF und $BB'F$

$$\frac{CH}{BB'} = \frac{HF}{B'F} = \frac{f}{f - vd}.$$

Die linken Seiten dieser beiden Gleichungen sind aber identisch, denn $AA' = CH$. Also

$$\frac{f_1}{f_1 - d} = \frac{f}{f - vd}, \quad \text{d. h.}$$

$$f_1(f - vd) = f_1 f - vd f_1 = f(f_1 - d) = f_1 f - fd,$$

woraus mittels (9.17) und (9.18) folgt

$$v = \frac{f}{f_1} = \frac{1}{2n}. \tag{9.19}$$

Für Glas mit $n = 1,5$ teilen also die beiden Hauptebenen die Linsendicke in drei gleiche Teile.

Aus Abb. 9.35 leitet man dann trotz der geänderten Definition der Gegenstandsweite g , der Bildweite b und der Brennweite f wiederum die Abbildungsgleichung her:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

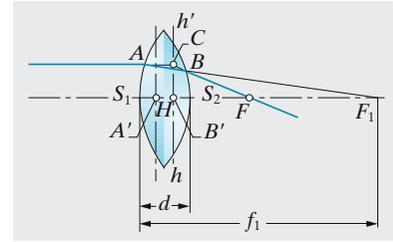


Abb. 9.34. Dicke Linsen, Hauptebenen und Hauptpunkte

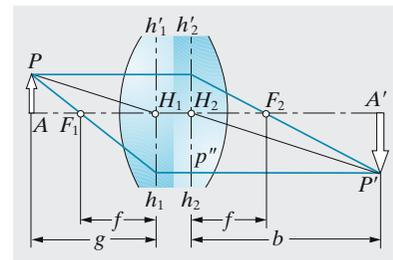
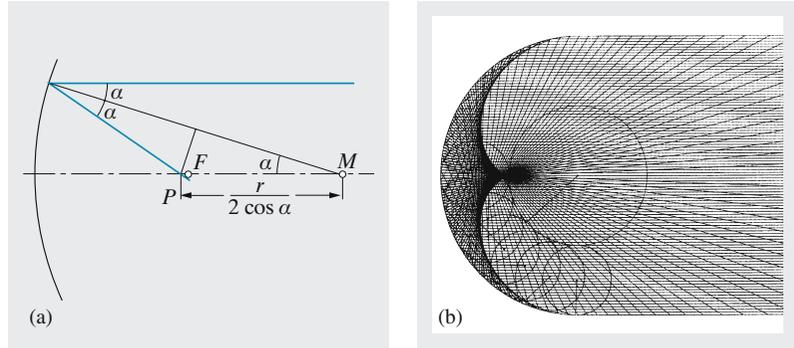


Abb. 9.35. Bildkonstruktion mithilfe der Hauptebenen und Hauptpunkte

Abb. 9.36. (a) Achsferne Strahlen schneiden die Achse eines Kugelspiegels nicht genau im Brennpunkt F mit $FM = r/2$, sondern in P mit $PM = r/(2 \cos \alpha)$. (b) Strahlen, die parallel in einen kugel- oder zylinderförmigen Hohlspiegel fallen, schneiden sich nach der Reflexion nicht alle im Brennpunkt, sondern auf einer Brennlinie oder Kaustik, die eine Epizykloide darstellt. Die „Moiré-Muster“ haben keine Realität, außer wenn es sich um diskrete Strahlen handelt, die z. B. durch ein enges Gitter fallen



Auch ein System aus mehreren Linsen mit gemeinsamer Achse ist durch zwei Hauptebenen zu kennzeichnen, auf die die Brennweiten des Systems zu beziehen sind. Die Bildkonstruktion ist dann analog zu Abb. 9.35.

9.2.3 Linsenfehler

Sphärische Aberration. Sphärisch geschliffene Linsen und kugelförmige Spiegel bilden einen Punkt nur dann befriedigend als Punkt ab, wenn alle auftretenden Winkel klein sind, d. h. wenn das Bündel eng ausgeblendet ist. Für weite Bündel stimmt diese Voraussetzung zu (9.1) und (9.11) nicht mehr. Aus Abb. 9.36 liest man z. B. für ein Parallelbündel ab $F'M = r/(2 \cos \alpha)$; F' ist der Schnittpunkt mit der Achse, dicht neben F . Hier können wir mit den beiden ersten Gliedern der cos-Reihe nähern:

$$F'M = \frac{r}{2 \cos \alpha} \approx \frac{r}{2(1 - \alpha^2/2)} \approx \frac{r}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right).$$

Achsferne Strahlen schneiden also die Achse nicht bei $F = r/2$, sondern näher am Spiegel. In jeder schräg beleuchteten Kaffeetasse sieht man eine herzförmige Linie. Auf ihr schneiden sich benachbarte achsferne Strahlen. An ihrer Spitze, wo der Brennpunkt liegen sollte, ist sie am hellsten. Die Linie ist eine Epizykloide, die durch Abrollen eines Kreises vom Radius $r/4$ auf den Kreis mit $r/2$ um M entsteht.

Astigmatismus. Eine Zylinderlinse bricht nur in einer Richtung (in der Ebene senkrecht zur Zylinderachse), aber nicht in der anderen. Aus einem Parallelbündel macht sie keinen Brennfleck, sondern eine Brennlinie parallel zur Zylinderachse (Abb. 9.38). Dies ist der Extremfall einer Situation, wo die Linsenflächen nicht in allen Richtungen gleich stark gekrümmt sind. Dann gibt es i. Allg. zwei Ebenen maximaler bzw. minimaler Krümmung, die Hauptebenen, und entsprechend eine linsennahe und eine linsenferne **Brennlinie** F_1 und F_2 , wo Strahlen, die in die Hauptebenen fallen, zusammentreffen.

Auch exakt kugelförmig begrenzte Linsen zeigen **Astigmatismus schiefer Bündel**: Punkte weit außerhalb der Achse haben als Bild günstigstenfalls je einen Strich in zwei verschiedenen Abständen von der Linse. Beide Striche stehen senkrecht zueinander; der eine ist parallel zu der Richtung, um die der Gegenstand gegen die Linsenachse geschwenkt ist.

www.

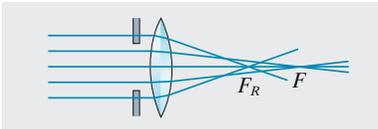


Abb. 9.37. Sphärische Aberration und ihre Verringerung durch eine Blende

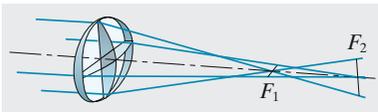


Abb. 9.38. Die astigmatische Linse hat keinen Brennpunkt, sondern zwei Brennlinien, entsprechend ihren beiden Hauptkrümmungsrichtungen. (Nach H.-U. Harten: *Physik für Mediziner*, 4. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1980))

Chromatische Aberration (Abb. 9.39). Wegen der Dispersion des Glases liegt der Brennpunkt für das stärker gebrochene blaue Licht näher an der Linse als der für das rote. Eine einfache Linse kann daher von einem weißen Gegenstand höchstens für jeweils eine der darin enthaltenen Farben ein scharfes Bild herstellen, das mit andersfarbigen Rändern umgeben ist. Kombiniert man die Sammellinse mit einer Zerstreuungslinse von geringerer (negativer) Brechkraft (Abb. 9.40), aber aus einem Glas mit höherer Dispersion, dann kann man die Farbzerstreuung wenigstens für zwei Farben, durch kompliziertere Linsensysteme aber auch für mehr Farben aufheben. Solche Linsensysteme heißen **Achromate**. Auch die übrigen Linsenfehler lassen sich durch Kombination mehrerer Linsen erheblich reduzieren.

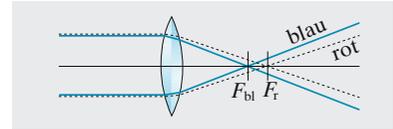


Abb. 9.39. Die chromatische Aberration

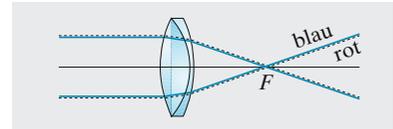


Abb. 9.40. Die Beseitigung der chromatischen Aberration durch die Kombination einer Sammell- und einer Zerstreuungslinse aus Gläsern mit verschiedener Dispersion

9.2.4 Abbildungsmaßstab und Vergrößerung

Ein optisches System erzeugt von einem Gegenstand der Größe G ein reelles Bild von der Größe B .

Der **Abbildungsmaßstab** $\beta = B/G$ hängt nur von der Brennweite des Systems und der Gegenstandsweite ab, nicht aber vom Standpunkt des Beobachters:

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{F}{g'} = \frac{b'}{f} \tag{9.20}$$

Etwas ganz anderes ist die Größe, unter der ein Gegenstand einem Betrachter *erscheint*. Sie hängt vom Abstand zwischen Auge und Gegenstand ab (Abb. 9.41): Durch diesen Abstand ist der **Schwinkel** festgelegt. Das ist der Winkel, den zwei Grenzstrahlen vom Gegenstand zum Auge bilden (genauer zum hinteren Scheitel der Augenlinse). Nach Übereinkunft erklärt man, einen Gegenstand unter der Vergrößerung 1 zu sehen, wenn er sich 25 cm vor dem Auge des Betrachters, in der **Bezugssehweite** oder **deutlichen Sehweite** befindet. Der zugehörige Schwinkel sei ε_0 . Ist der Abstand größer, so sieht man G verkleinert, ist er kleiner, so erscheint G vergrößert. Der Schwinkel in der gegebenen Entfernung sei ε .

Die **Vergrößerung** v ist das Verhältnis dieses Schwinkels ε zu dem Schwinkel ε_0 in 25 cm Abstand:

$$v = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{9.21}$$

In einem Abstand von etwa 10 cm (**Nahpunkt**) versagt aber die Akkommodationsfähigkeit selbst des jugendlichen menschlichen Auges. Um den Gegenstand bzw. sein Bild näher heranzuholen, also den Schwinkel zu vergrößern, braucht man dann optische Instrumente: Lupe, Mikroskop, Fernrohr. Dann gilt

$$\text{Vergrößerung} = \frac{\text{Schwinkel mit Instrument}}{\text{Schwinkel ohne Instrument}} \tag{9.21'}$$

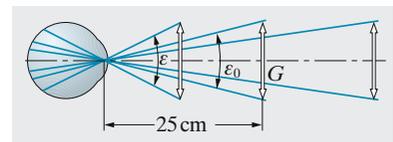


Abb. 9.41. Zur Definition des Begriffes Vergrößerung

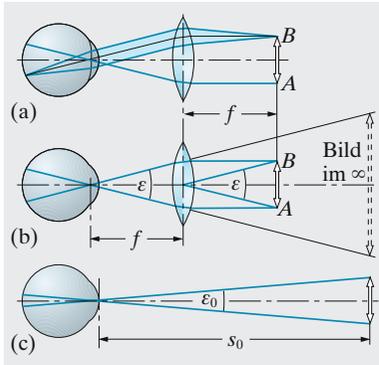


Abb. 9.42a–c. Eine Lupe der Brennweite f spreizt den Sehwinkel des unbewaffneten Auges um den Faktor s_0/f

Das normale Auge nimmt in der Netzhautzone schärfsten Sehens (**Fovea centralis**) zwei Punkte noch getrennt wahr, wenn sie unter einem Sehwinkel von etwa einer Bogenminute erscheinen. Das folgt aus der Theorie des Auflösungsvermögens (Abschn. 10.1.5). Je größer die Vergrößerung, desto kleinere Einzelheiten werden erkennbar.

9.2.5 Die Lupe

Am wenigsten anstrengend für das Auge ist die Einstellung auf Unendlich, bei der die Linse entspannt ist. Abbildung eines näheren Gegenstandes verlangt ja stärkere Brechung, also eine stärker gekrümmte Linse. Betrachtet man mit entspanntem Auge durch eine Sammellinse der kurzen Brennweite f einen Gegenstand der Größe G , dessen virtuelles Bild also im Unendlichen liegt – das ist der Fall, wenn der Gegenstand in der Brennebene liegt –, dann erscheint dieses Bild nach Abb. 9.42 unter dem Sehwinkel $\varepsilon = G/f$. Würde man den gleichen Gegenstand *ohne* Lupe aus der Bezugssehweite $s_0 = 25$ cm betrachten, erschiene er unter dem Sehwinkel $\varepsilon_0 = G/s_0$. Die **Lupe** vergrößert also um

$$v_L = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{s_0}{f}. \quad (9.22)$$

Der Gegenstand erscheint also noch etwas größer, wenn man ihn näher an die Linse rückt, sodass sein virtuelles Bild ins Endliche wandert, z. B. in den Abstand s . Allerdings muss das Auge dazu akkommodiert werden. Dann ist die Vergrößerung

$$v'_L = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{B/s}{G/s_0} = \frac{s_0 b}{s g}.$$

Dabei müssen wir das Auge ganz dicht hinter die Linse halten, was für ein virtuelles Bild im Unendlichen keine Rolle spielte. Es ist also $s = -b$ und $v'_L = s_0/g$. Nach der Abbildungsgleichung (9.13) ist $1/g = 1/f - 1/b$, also

$$v'_L = \frac{s_0}{f} + \frac{s_0}{s}. \quad (9.23)$$

Für kurze Brennweite ist das von (9.22) nur wenig verschieden. Wenn speziell das Bild in der Bezugssehweite liegt, wird $v'_L = s_0/f + 1$. Mit Lupen kann man 20–30-mal vergrößern.

9.2.6 Das Mikroskop

Beim **Mikroskop** multiplizieren sich die Wirkungen zweier Linsen oder Linsensysteme. Das **Objektiv** erzeugt von dem gut beleuchteten Gegenstand ein möglichst großes reelles **Zwischenbild**. Im Prinzip könnte man schon dieses Bild beliebig groß machen, indem man den Gegenstand immer näher an die Brennebene des Objektivs rückt. Aber erstens wird es dadurch umso lichtschwächer und ist selbst im dunklen Tubus schlecht zu sehen, zweitens müsste dieser Tubus unbequem lang sein, drittens wüchsen die Abbildungsfehler, viertens erlaubt das beschränkte Auflösungsvermögen doch keine beliebig kleinen Einzelheiten zu er-

kennen. Man erzeugt daher das Bild fast am Ende des Tubus, dessen Länge $t \approx 25 \text{ cm}$ ist. Der Gegenstand liegt dann ganz dicht außerhalb der Objektivbrennweite f_1 , und der Abbildungsmaßstab wird

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{t}{f_1} \quad (9.24)$$

Nach (9.14) wird dies trotz des kleinen Unterschiedes zwischen g und f_1 streng richtig, wenn man b' statt b benutzt, also die **optische Tubuslänge** vom hinteren Objektivbrennpunkt aus rechnet. Offenbar muss das Objektiv eine kurze Brennweite haben, damit das Zwischenbild groß wird.

Man betrachtet das Zwischenbild mit dem **Okular** als Lupe, meist mit entspanntem Auge, und erzielt dadurch eine nochmalige Vergrößerung $v_L = s_0/f_2$. Das Zwischenbild muss dazu um die Brennweite f_2 hinter dem Okular sitzen. Die Gesamtvergrößerung des Mikroskops ergibt sich aus dem Abbildungsmaßstab β des Objektivs multipliziert mit der Lupenvergrößerung v_L des Okulars:

$$v_M = \frac{t}{f_1} \frac{s_0}{f_2} \quad (9.25)$$

Objektiv und Okular müssen in Bezug auf sphärische und chromatische Aberration korrigiert sein. Da das Okular nur von schmalen Büscheln durchsetzt wird (Abb. 9.43), ist seine Korrektur nicht so anspruchsvoll.

Das **Huygens-Okular** besteht aus zwei Linsen, der **Kollektiv-** oder der **Feldlinse** und der **Augenlinse** (Abb. 9.44). Die Feldlinse macht die vom Objektiv kommenden Strahlen noch etwas konvergenter, sodass das Zwischenbild nicht bei ZB , sondern bei $Z'B'$ entsteht. Es wird mit der Augenlinse als Lupe betrachtet. Die Vorteile sind:

- Das Sehfeld wird größer.
- Weil der Strahl 2 die Feldlinse weiter außen als 1, die Augenlinse aber weiter innen als 1 durchsetzt, heben die sphärischen Aberrationen beider Linsen einander fast auf.
- Ein Strahl von weißem Licht wird infolge der chromatischen Aberration im Kollektiv in verschiedenfarbige Strahlen zerlegt (Abb. 9.44b), von denen der rote weniger abgelenkt wird als der blaue Strahl. Da aber der rote die Augenlinse näher am Rande durchsetzt, wird er dort stärker zur Achse gebrochen als der blaue, beide treten parallel ins Auge des Beobachters, die chromatische Aberration wird also aufgehoben, da das auf ∞ eingestellte Auge parallele Strahlen in einem Punkt vereinigt.

In der Ebene $Z'B'$ kann auf einer Glasplatte eine Teilung (**Okularskala**) angebracht werden. Da sie durch die Augenlinse mit dem Zwischenbild gemeinsam betrachtet wird, kann die Teilung zur Ausmessung des Bildes dienen.

Die Korrektur des von einem breiten Bündel durchsetzten Objektivs ist sehr viel schwieriger. Man verwendet Linsensysteme von mehr als 10 Einzellinsen aus verschiedenen Glassorten und einer resultierenden Brennweite bis zu 1 mm hinab.

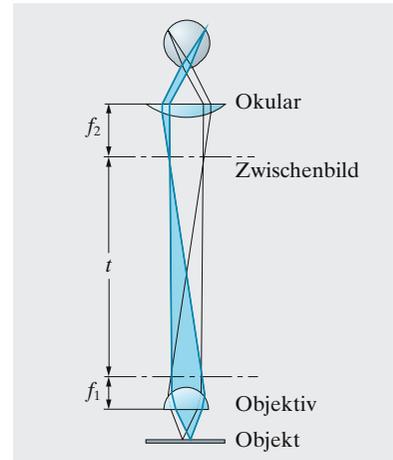


Abb. 9.43. Der Strahlengang im Mikroskop

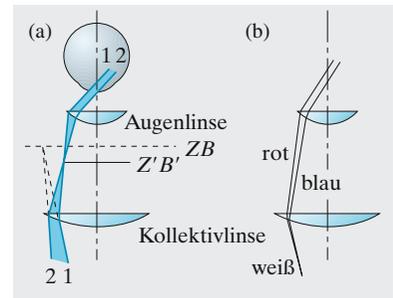


Abb. 9.44a,b. Die sphärische (a) und die chromatische Aberration (b) werden im Huygens-Okular verringert

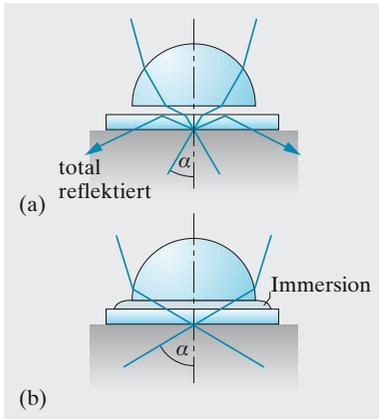


Abb. 9.45a,b. Das Immersionsobjektiv und die durch die Immersion erzielte Vergrößerung der numerischen Apertur

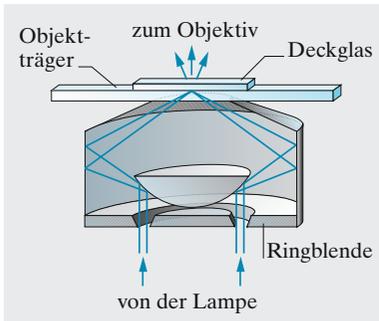


Abb. 9.46. Der Dunkelfeldkondensator lässt kein direktes, sondern nur am Objekt gestreutes Licht ins Objektiv. (Nach R. W. Pohl, aus H.-U. Harten: *Physik für Mediziner*, 4. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1980))

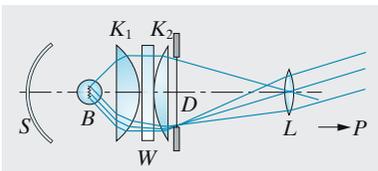


Abb. 9.47. Der Kondensator K (zwei Konvexlinsen mit Wärmeschutzfilter W dazwischen) vereinigt möglichst viel Licht der Lampe B auch auf Randpunkte des Dias D . Gleichzeitig sorgt er dafür, dass dieses Licht vollständig durch die Projektionslinse tritt, die es auf dem sehr fernen Projektionsschirm vereinigt

Man unterscheidet bei den Objektiven **Trockensysteme** und **Immersionssysteme**. In Abb. 9.45 ist der Verlauf von Strahlen gezeichnet, die von dem mit einem Deckgläschen bedeckten mikroskopischen Präparat ausgehen und in die **Frontlinse** des Objektivs (a) bei einem Trockensystem, (b) bei einem Immersionssystem eintreten. Bei letzterem ist der Raum zwischen Deckgläschen und Frontlinse mit einer Flüssigkeit, z. B. Zedernholzöl ($n = 1,5$) ausgefüllt, wodurch Totalreflexion des Lichtes an der oberen Fläche des Deckgläschens vermieden wird. Beim Immersionssystem ist deshalb der Öffnungswinkel, unter dem Licht in die Frontlinse eintritt, und daher auch die Lichtstärke größer. Bezeichnet α den Winkel zwischen der optischen Achse und dem Randstrahl des Lichtkegels, der von einem Punkt des mikroskopischen Objektes in das Objektiv einzutreten vermag, so heißt $n \sin \alpha$ dessen **numerische Apertur**. Die Bedeutung der numerischen Apertur für das **Auflösungsvermögen** des Mikroskops wird in Abschn. 10.1.5 behandelt.

Erkennbarkeit besonders bei biologischen Präparaten ist häufig weniger durch Vergrößerung oder Auflösungsvermögen begrenzt als durch mangelnden **Kontrast**. Das klassische Mittel zur Kontrasterhöhung ist das **Einfärben**, das die verschiedene Affinität oder Absorbierbarkeit gewisser Farbstoffe für die einzelnen Gewebstypen und Zellorganellen ausnutzt. Diese Farbstoffe sind aber fast immer Zellgifte: Es gibt praktisch keine Vitalfärbung. Zum Glück haben die Strukturdetails meist verschiedene Brechzahl. Sie streuen das Primärlicht und sind so im **Dunkelfeldkondensator** erkennbar, der das Primärlicht vollständig ausblendet. Aus ähnlichen Gründen erzeugen sie einen **Phasenkontrast**, selbst wenn sie ebenso absorbieren wie ihre Umgebung, also keinen Helligkeitskontrast erzeugen (Abschn. 4.1.4).

9.2.7 Der Dia-Projektor

Es kommt hier darauf an, das Dia möglichst gut „auszuleuchten“, d. h. einen möglichst hohen Anteil des Lichts der Projektorlampe B auf das Dia D zu konzentrieren und durch die Linse L treten zu lassen. Das ist offenbar der Fall, wenn der **Kondensator** K möglichst nahe an der Lampe B steht, damit er einen möglichst großen Raumwinkel überdeckt (der Spiegel S kann den Raumwinkel effektiv noch fast verdoppeln), und wenn der Kondensator ein Bild der Lampe in der Ebene der Linse L oder ganz nahe dabei erzeugt. An dieser Stelle, wo das Bild von B liegt, ist das Lichtbündel so eng wie möglich und tritt daher ohne Verlust durch die Linse L . Dazu ist keineswegs eine hervorragende optische Qualität von K nötig, sondern nur, dass die Einschnürung des Lichtbündels, das „Bild“, **ungefähr** in der Ebene von L liegt. Damit haben wir, zunächst ohne Dia, eine maximal helle Fläche auf dem Projektionsschirm P . Stellen wir nun das Dia mit seinen mehr oder weniger durchlässigen Stellen gleich hinter den Kondensator, dann kann man jede Stelle des Dias als Sekundärstrahler auffassen. Er sendet Licht in einen Kegel nach vorn, dessen Öffnungswinkel gleich dem Schwingel ist, unter dem der Glühfaden der Lampe B vom Dia aus erscheint. Gleichgültig, wie groß dieser Öffnungswinkel ist: Alle Strahlen dieses Kegels werden durch die Linse L auf dem Schirm P vereinigt,

wenn L notfalls so verschoben wird, dass Dingweite $g = DL$ und Bildweite $b = LP$ die Abbildungsgleichung $1/g + 1/b = 1/f$ erfüllen. Wegen $b \gg f$ muss näherungsweise $g = bf/(b - f) \approx f(1 + f/b)$ sein. Die kleinen Verschiebungen Δg , die sich aus der verschiedenen Dicke der Dias, der Durchbeulung eines unverglasten Dias in der Hitze usw. ergeben, werden vom beleuchtenden Strahlengang leicht toleriert: Der Kondensator bündelt das Licht der Lampe immer noch auf die Linse.

9.2.8 Das Fernrohr oder Teleskop

Eine Sammellinse erzeugt von einem fernen Gegenstand ein Bild praktisch in ihrer Brennebene, das wegen $B/G = b/g = f/g$ umso größer ist, je länger die Brennweite ist. An dieses Bild könnte man mit dem Auge z. B. bis zur Bezugssehweite s_0 herangehen. Es erschiene dann unter dem Sehwinkel $\varepsilon = B/s_0$, der ferne Gegenstand, direkt betrachtet, dagegen unter $\varepsilon_0 = G/g$. Schon so hätte man also eine Vergrößerung $v = \varepsilon/\varepsilon_0 = f/s_0$. Ein Okular als Lupe erhöht diese Vergrößerung nochmals um ihr $v_L = s_0/f_2$, sodass die Gesamtvergrößerung des Fernrohrs wird

$$v_F = vv_L = \frac{f}{f_2}. \quad (9.26)$$

In der Praxis besteht fast immer, wie beim Mikroskop, das Okular aus Feldlinse und Augenlinse.

Für die Beobachtung irdischer Objekte ist es unbequem, dass im astronomischen Fernrohr das Bild umgekehrt erscheint. Man vermeidet dies, indem man entweder Umkehrprismen einschaltet (**Prismenfernrohr**) oder als Okular eine Zerstreuungslinse verwendet (**terrestrisches Fernrohr**; Galilei 1609); diese Okularlinse wird dann *innerhalb* der Objektivbrennweite angebracht.

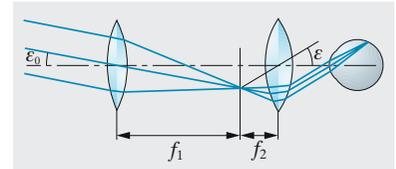


Abb. 9.48. Der Strahlengang im astronomischen Fernrohr (Refraktor)

× Beispiel ...

Erzherzog Maximilian III. von Tirol beklagte sich 1615 bei Christoph Scheiner, sein Fernrohr zeige alles Kopf stehend. Welche Möglichkeiten hatte Scheiner, das zu beheben?

(1) Zerstreuungslinse als Okular statt der Sammellinse (Galilei-Fernrohr). (2) Altes Okular etwas herausziehen, damit es ein zweites Zwischenbild erzeugt; dieses mit zusätzlicher Sammellinse umkehren (terrestrisches Fernrohr). (3) Zwei gekreuzte Spiegel oder besser Umkehrprismen; eins vertauscht oben und unten, das andere rechts und links (Porro-Prisma im Feldstecher). Scheiner wählte die Lösung (2). Maximilian war so beeindruckt, dass er die Gründung der Universität Freiburg genehmigte.

Die Vergrößerung ergibt sich wie beim **Kepler-Fernrohr** als Verhältnis der Brennweiten von Objektiv und Okular. In der Astronomie bevorzugt man das Kepler-Fernrohr, weil man in seiner Brennebene ein Fadenkreuz oder eine Skala einsetzen kann, die sich mit dem reellen Bild überlagern und exakte Positionsbestimmungen ermöglichen.

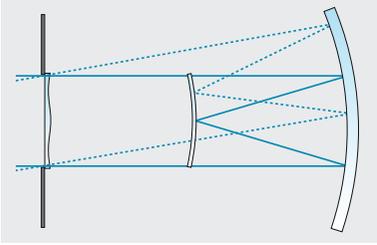


Abb. 9.49. Schmidt-Optik: Ein Parallelbündel vom sehr fernen Gegenstand wird in der Fokalfäche des Spiegels vereinigt, einer zum Spiegel konzentrischen Kugel vom halben Radius. Die Korrekptionsplatte sorgt dafür, dass dies auch für achsferne Strahlen zutrifft. Ihre Form reduziert gleichzeitig die chromatische Aberration, die eine solche Zusatzlinse sonst mit sich brächte

Die größten astronomischen Fernrohre sind **Reflektoren** (*Newton* 1671). Bei ihnen erzeugt ein Hohlspiegel das Bild, das dann mit dem Okular betrachtet wird. Spiegel lassen sich mit größerem Durchmesser, also größerem Auflösungsvermögen herstellen als Linsen. Der Hauptgrund ist der, dass Glas eigentlich eine Flüssigkeit ist. Große Linsen „sacken“ unter ihrem eigenen Gewicht in ihrer Fassung durch, und zwar in einem optisch unerträglichen Maße, sobald der Durchmesser 1 m wesentlich überschreitet.

Reflektoren haben keine chromatische Aberration. Der Kugelspiegel zeigt sphärische Aberration, d. h. achsenferne Strahlen werden näher am Spiegel vereinigt, selbst wenn sie exakt achsparallel sind. Eine große Eintrittsblende, also hohe Lichtstärke, führt also zu unscharfem Bild. Beim Parabolspiegel könnte die Öffnung beliebig groß sein, wenn nur achsparallele Strahlen einträten. Zur Achse geneigte Strahlen finden einen anderen Krümmungsradius und damit eine andere Brennweite. Beide sind zudem in den verschiedenen Richtungen längs des Spiegels verschieden (Astigmatismus) und nicht rotationssymmetrisch (**Koma**: Das Bild eines Lichtpunkts wird ein einseitig unscharfer ovaler oder kommaförmiger Fleck). Winkelbereich und Bildfeld müssen daher sehr eng gehalten werden.

Erst 1930 fand *B. Schmidt* eine Möglichkeit, große Öffnung mit einigermaßen großem Winkelbereich zu kombinieren (großes, helles Bild). Die **Schmidt-Optik** (Abb. 9.49) benutzt einen Kugelspiegel, muss also mit engen Bündeln arbeiten, die aber beliebige Richtung haben können (Eintrittsblende um den Kugelmittelpunkt M bei $2f$). Für jede Richtung ergibt sich ein anderer Brennpunkt. Alle Brennpunkte liegen aber auf einer Kugel um M mit dem Radius f und werden auf einem entsprechend gekrümmten Film scharf. Die verbleibende sphärische Aberration wird durch eine Glasplatte in der Eintrittsöffnung weitgehend korrigiert, die in der Mitte konvex, weiter außen konkav geschliffen ist, also die achsnahen Strahlen etwas vorbündelt und damit ihren Schnittpunkt näher an den Spiegel zieht. Erst so kann man für ausgedehnte Objekte die Steigerung der Auflösung ausnützen, die ein großer Spiegel ermöglicht (Abschn. 10.1.5). In der Praxis ist die Erkenntnis eines Objekts aber selbst in korrigierten Instrumenten eher durch die **atmosphärische Turbulenz**



Abb. 9.50. Hubble Space Telescope mit geöffneter Klappe zum 2,4 m-Spiegel (ESA und Jan Erik Rasmussen, mit freundlicher Erlaubnis)

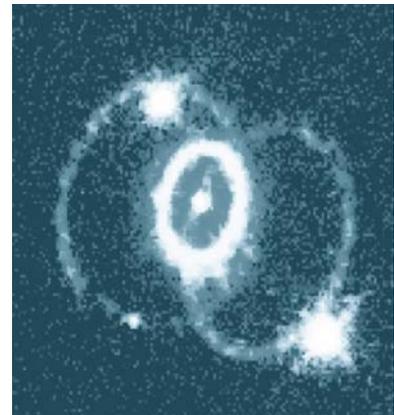


Abb. 9.51. Leuchtende Gasringe bei der Supernova 1987a, aufgenommen mit dem Hubble Space Telescope 1994. (Dieses und andere Bilder findet man unter www.stsci.edu)

und das **Nachthimmelleuchten** (Szintillation) begrenzt statt durch die Fernrohr-optik – die Bilder aus einem guten Schülerfernrohr mit 10 cm-Spiegel sind viel lichtschwächer, aber nicht weniger scharf als Bilder von einem Spiegel mit Meter-Durchmesser! In jüngster Zeit gibt es sehr erfolgreiche Versuche, die Turbulenz durch den Vergleich des gewünschten Bildes mit einem bekannten Referenzbild zu eliminieren. Das **Hubble-Space-Teleskop** (HST) jedoch wird auf seiner Welt-raumbahn durch diese Einflüsse erst gar nicht beeinträchtigt und beliefert uns seit einem Jahrzehnt mit faszinierenden Bildern, die im Internet einfach zu finden sind wie zum Beispiel: *Hubble ESA Information Center* <http://www.stecf.org>. oder *Best of Hubble*: <http://www.seds.org/hst>.

Mit Fernrohren wird der Himmel auch im UV-, Röntgen- und Gamma-Spektralbereich beobachtet. Diese Form der Astronomie ist überhaupt nur mit satellitengestützten Fernrohren möglich.

9.2.9 Das Auge

Helmholtz sagte, er würde einen Optiker hinauswerfen, der ihm ein Instrument wie das menschliche **Auge** brächte, und hat doch keines nachbauen können. Zwar sind Formgebung und Zentrierung der abbildenden Flächen (**Hornhaut** und **Linse**) schlechter als bei einer billigen Kamera, die Abbildungsfehler sind unzureichend korrigiert, aber alle diese Schwächen sind durch raffinierte Regelmechanismen weitgehend kompensiert, dazu ist der überbrückbare Leuchtdichtebereich größer als bei jedem physikalischen Gerät (fast 15 Zehnerpotenzen), und die lichtempfindliche Schicht ist ständig empfangsbereit und ändert ihre Empfindlichkeit automatisch – wie ein Polaroid-Farbfilm-pack mit wenigen ms Entwicklungszeit, das automatisch von 10 auf 40 DIN umschalten würde.

Hornhaut und Linse mit dem dazwischenliegenden Kammerwasser und dem gallertigen **Glaskörper** hinter der Linse haben, wie alle überwiegend aus Wasser bestehenden Gewebe, nur geringe Brechzahlunterschiede. Den Hauptbeitrag zur Brechkraft (über 40 Dioptrien) leistet daher die noch besonders vorgewölbte Hornhaut, da sie an Luft grenzt. Ohne diese Vorwölbung, als reine Kugelfläche, müsste das Augeninnere die Brechzahl 2 haben, um ein fernes Objekt auf seine Rückwand abbilden zu können. Der Rest von etwa 15 Dioptrien ist mittels eines Ringmuskels, der die Linsenkrümmung ändert, regelbar. Bei Einstellung auf den Nahpunkt ist die Linse am rundesten, auf den Fernpunkt am flachsten. Diese **Akkommodation** wird unterstützt durch Einstellung der Schärfentiefe, d. h. Abblenden mittels der **Iris**, die den Pupillendurchmesser von 1 bis 8 mm regeln kann. Außer der Schärfentieferegelung trägt sie durch Regelung des durchtretenden Lichtstroms um knapp zwei Zehnerpotenzen zur **Adaptation** bei. Die Hauptlast der Adaptation liegt aber auf der **Retina** selbst. Bei Helladaptation schiebt sie die farbenempfindlichen **Zapfen** nach vorn, bei Dunkeladaptation die **Stäbchen**. Beide Zelltypen können ihre Empfindlichkeit in weiten Grenzen mittels des Redox-Gleichgewichts des Sehstoffs regeln. Mehrere Stäbchen können so zusammengesaltet werden, dass ihre Gesamterregung den Schwellenwert übersteigt, wobei natürlich das Auflösungsvermögen leidet.

Scharfe Abbildung auf die Retina wird dadurch beeinträchtigt, dass aus ernährungsphysiologischen und schalttechnischen Gründen über den lichtempfindlichen Zellen noch andere Zellschichten liegen. Nur im Zentralteil,

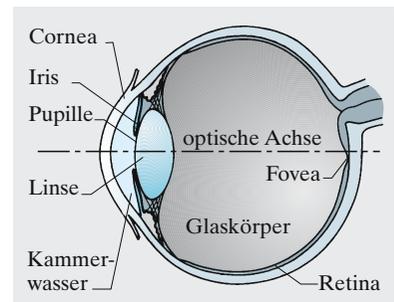


Abb. 9.52. Schnitt durch das menschliche Auge. (Nach H.-U. Harten: *Physik für Mediziner*, 4. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1980))

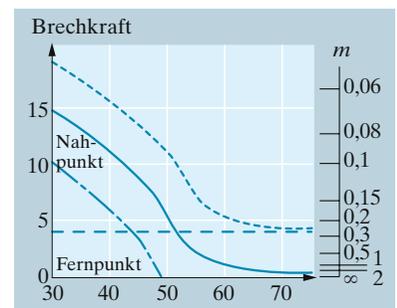


Abb. 9.53. Akkommodationsbreite in Abhängigkeit vom Alter. (—) normalsichtiges, (---) kurzsichtiges (-5 dp), (- - -) übersichtiges Auge (+5 dp). Um die Gesamtbrechkraft des Auges zu erhalten, muss man 40–45 dp addieren

der **Fovea**, sind diese Deckschichten seitlich verschoben. Hier, speziell in der Foveola (nur 0,3 mm Durchmesser), liegen die Zapfen auch am dichtesten, die Sehschärfe ist maximal, von jedem Zapfen geht genau eine Nervenfaser aus. Weiter außen sind immer mehr Zapfen an einer Nervenfaser zusammengeschaltet.

Die Brechkraft des Auges lässt sich objektiv messen, die Sehschärfe nicht, da sie stark von außerphysikalischen Faktoren abhängt. Die **Sehschärfe** ist definiert als Kehrwert des Winkels (in Minuten), unter dem ein Objekt noch deutlich erkannt wird. Dieser Wert ist verschieden, je nachdem Punkte oder Linien vom Untergrund zu trennen sind (**minimum perceptibile**), Abstände zwischen Punkten oder Linien wahrzunehmen (**minimum separabile**) oder Texte zu lesen sind (**minimum legibile**).

Ein Auge, dessen Fernpunkt nicht im Unendlichen liegt, heißt *fehlsichtig*, und zwar **kurzsichtig (myop)**, wenn der Fernpunkt außerhalb, **übersichtig (hyperop)**, wenn er innerhalb des Akkommodationsbereichs liegt. Im Alter wird die Linse steifer. Der Nahpunkt wandert auf den Fernpunkt zu, besonders schnell zwischen 40 und 50 Jahren. Beim Übersichtigen wird der Akkommodationsverlust etwas früher fühlbar.

× Beispiel ...

Wie schätzt man am schnellsten ohne Hilfsmittel, welche Brillenstärke (in Dioptrien) jemand braucht?

Kurzsichtige: Das Reziproke des größten Abstandes (in m), in dem sie gerade noch scharf sehen, ist die erforderliche Brechkraft. Bei alten Leuten nehme man die kürzeste Entfernung, in der sie noch scharf sehen, und ziehe ihr Reziprokes von 4 (d. h. von $1/0,25$) ab. Mit einer solchen +-Brille können sie dann in 25 cm Abstand lesen.

9.3 Die Lichtgeschwindigkeit c

Die Lichtgeschwindigkeit c (von lat. **em celeritas**) ist eine der wichtigsten Naturkonstanten. Nicht nur in der Astronomie, auch in der Mikrophysik taucht sie überall auf. Ihre fundamentale Rolle wurde besonders in der Relativitätstheorie klar.

9.3.1 Astronomische Methoden

Um die geographische Länge des Schiffsortes zu bestimmen, braucht der Seemann eine Uhr. Er muss nämlich z. B. feststellen, wie viel später die Sonne im Mittag steht als in seinem Heimatort. *Galilei* schlug als astronomische Uhr den Umlauf der Jupitermonde vor. Bei dem Versuch, diese Uhr zu eichen, stieß *Ole Rømer* 1676 auf etwas Merkwürdiges: Die Jupitermonde verfinstern sich wie der Erdmond, nur viel öfter, durch Eintritt in den Schatten ihres Planeten.

Die Zeit zwischen zwei Verfinsterungen des innersten, am schnellsten umlaufenden Mondes Io beträgt ca. 42,5 h. Wenn sich Licht mit endlicher Geschwindigkeit, und nicht wie die berühmten Naturphilosophen *Descartes* und *Kepler* behaupteten, instantan ausbreitete, musste diese Pe-

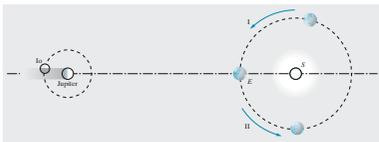


Abb. 9.54. Astronomische Methode von *Ole Rømer* zur Messung der Lichtgeschwindigkeit. Während der Jupiter-Opposition (Erde zwischen Jupiter und Sonne) misst man eine mittlere Umlaufzeit des Jupitermondes. Bei Annäherung der Erde an Jupiter führt die Lichtlaufzeit zu einer Verkürzung (Position I) bzw. bei Entfernung zu einer Verlängerung (Position II) der beobachteten Perioden

riode etwas kürzer sein als der Mittelwert, wenn sich die Erde auf Jupiter zubewegte (Position I in Abb. 9.54), weil das Licht bei der jeweils folgenden Verfinsternung einen kürzeren Weg zurücklegen musste und deshalb eher ankam. Umgekehrt sollte die Periode etwas länger werden, wenn sie sich von ihm entfernte (Position II). *Rømer* fand einen messbaren Unterschied, als er 40 Perioden des Io, gemessen von der Erde in Position I mit 40 Perioden aus Position II verglich. Er schloß aus seinen Messungen, daß das Licht den Durchmesser der Erdbahn nicht unendlich schnell, sondern in 22 Minuten durchquert (O. Rømer, Eine Demonstration der Bewegung des Lichtes, Übersetzung der Originalarbeit von 1676 in *Der Weg der Physik*, S. Sambursky, Hrsg. (dtv, München 1978)). Erst sein Zeitgenosse *C. Huyghens* ermittelte aus seinen Angaben auch die Lichtgeschwindigkeit: Er schätzte den Durchmesser der Erdbahn auf 24 000 Erd-Durchmesser, welcher wiederum 12 750 km betragen sollte. Dann sollte das Licht ungefähr 1000 Bahndurchmesser pro Minute durchlaufen, oder sich mit 212 400 km/s fortpflanzen.

1725 suchte *Bradley* nach einem anderen astronomischen Grundphänomen, der Jahresparallaxe der Fixsterne, d.h. ihrer scheinbaren Verschiebung infolge des jährlichen Umlaufs der Erde. Diese Parallaxe, erst 100 Jahre später von *Bessel* gemessen, hätte endlich Entfernungsbestimmung der Fixsterne erlaubt. *Bradley* fand, dass tatsächlich *alle* Fixsterne im Lauf des Jahres sich um $21''$ verschieben, teils kreisförmig (wenn sie nahe am Pol der Ekliptik stehen), teils elliptisch. Diese Verschiebung konnte nicht die Parallaxe sein, da sie für alle Sterne gleich ist, es sei denn, es gäbe Ptolemäus' Himmelskugel doch, auf der alle Sterne in gleichem Abstand von uns sitzen.

Ein Mann steht im Regen, der ihm genau auf den Kopf fällt, ein anderer rennt, und der Regen trifft ihn schräg von vorn, unter einem Winkel α gegen die Senkrechte, der sich aus der Fallgeschwindigkeit c der Regentropfen und Laufgeschwindigkeit v zu $\alpha = v/c$ ergibt ($v \ll c$). Genauso kommt das Licht eines Sterns aus verschiedener Richtung, je nachdem wie schnell sich der Beobachter mit der Erde bewegt. Die Umlaufgeschwindigkeit $v = 30$ km/s der Erde war aus ihrem Abstand von der Sonne bekannt, also ergab sich aus dieser **Aberration** ebenfalls

$$c = \frac{v}{\alpha} = \frac{30 \text{ km/s}}{21''} = \frac{30 \text{ km/s}}{10^{-4}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} .$$

9.3.2 Laufzeitmessungen im Labor

Die Jupitermonde ermöglichten die Messung der Lichtgeschwindigkeit, weil sie durch ihre Finsternisse bei relativ großen Entfernungen bequeme Zeitmarken setzen konnten. Auf der Erde versuchte *Galilei* schon im 1600 die Lichtgeschwindigkeit zu messen, indem er zwei Männer mit Blendlaternen auf zwei Hügeln postierte. Der erste sollte seine Lampe plötzlich öffnen, der zweite sollte das gleiche tun, sobald er das Licht des ersten sah. Der erste versuchte dann die Verzögerung zwischen dem Öffnen seiner Lampe und dem Aufblitzen der anderen zu schätzen, erhielt aber natürlich nur die menschliche Reaktionszeit, unabhängig vom Abstand: Erst die Anwendung technisch unbestechlicher Modulationsverfahren er-

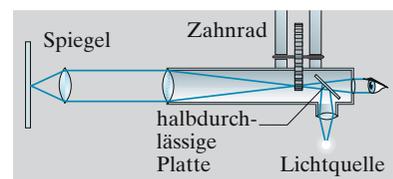


Abb. 9.55. Fizeaus Zahnradmethode zur Messung der Lichtgeschwindigkeit

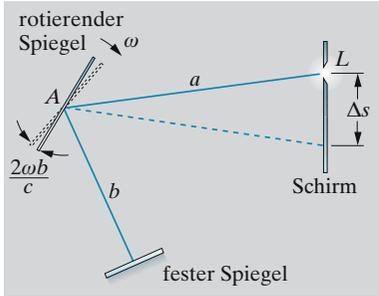


Abb. 9.56. Foucaults Drehspiegel-methode zur Messung der Lichtgeschwindigkeit

möglichte die genaue Bestimmung der kurzen Laufzeiten bei irdischen Laborentfernungen.

Zahnradmethode. Fizeau ersetzte den zweiten Mann durch einen Spiegel und die Klappe durch ein schnelllaufendes Zahnrad, das den weggehenden und den wiederkommenden Strahl periodisch unterbricht (Abb. 9.55). Wenn das Rad mit N Zähnen die Drehfrequenz ν hat, dauert es eine Zeit $T = 1/(\nu N)$, bis eine Lücke an der Stelle der vorigen ist. Wenn der Spiegel im Abstand s steht und das Licht für diese Strecke $2s$ gerade diese Zeit T braucht, sieht der Beobachter den Reflex, bei der halben Drehfrequenz steht ein Zahn im Weg.

Man kann das Zahnrad durch eine **Kerr-Zelle** ersetzen, die den Lichtstrahl im Takt einer Wechselspannung moduliert (Abschn. 10.2.10) oder noch einfacher eine **Leuchtdiode** als Lichtquelle modulieren. Führt man dieses Licht mit zwei Spiegeln auf eine Photodiode zurück (Aufgabe 9.3.6, Abb. 9.83) und legt die Spannung von Leuchtdiode und Photodiode an die x - bzw. y -Platten eines Oszilloskops, dann gibt die Form der Lissajous-Ellipse die Phasenverschiebung des Lichts auf der Laufstrecke. So kann man heute c auf dem kleinsten Labortisch und auch seine Änderung z. B. durch Einbringen einer Wasserwanne oder eines Glasstabs messen.

Drehspiegelmethode. In Abb. 9.56 ist der zurückkehrende Lichtstrahl (gestrichelt) gegen den einfallenden doppelt so stark geschwenkt, wie sich der rotierende Spiegel während der Laufzeit $2b/c$ zum festen Spiegel dreht. Diese wird in eine kleine Ablenkung Δs verwandelt, aus der $4ab\omega/\Delta s$ bestimmt wird. Mit dieser Methode, die wesentlich kürzere Messstrecken braucht als die von Fizeau, hat Foucault erstmals direkt nachgewiesen, dass das Licht in anderen Medien langsamer läuft als in Luft, im Gegensatz zu Newtons Korpuskular- und im Einklang mit Huygens' Wellenbild.

Interferenzmethoden liefern Laufzeitunterschiede noch genauer. Fizeau konnte so die „Mitführung“ des Lichts mit einer strömenden Flüssigkeit messen, die später zum experimentum crucis für die spezielle Relativitätstheorie wurde. Noch wichtiger für diese war das Scheitern des **Michelson-Versuchs**, die Mitführung durch den „Äther“ zu messen (Abschn. 12.1.2).

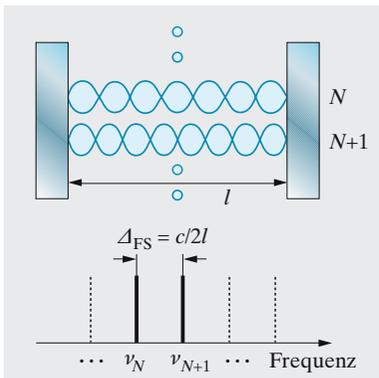


Abb. 9.57. Der Abstand benachbarter Resonatorfrequenzen wird von der Resonatorlänge bestimmt

9.3.3 Resonatormethoden

Zwischen zwei Spiegeln im Abstand l entsteht durch Interferenz eine optische Stehwelle (vgl. Abschn. 10.1.13, Fabry-Perot-Interferometer), wenn gerade N halbe Wellenlängen hineinpassen: $l = N\lambda_N/2 = Nc/2\nu_N$.

Die Lichtgeschwindigkeit kann bestimmt werden, wenn neben l oder der Wellenlänge λ_N die Frequenz ν_N der N -ten Resonanz bestimmt wird. Der Frequenzabstand benachbarter Resonanzen $\Delta\nu_{FS} = \nu_{N+1} - \nu_N$ lässt sich auch bei optischen Wellen durch Überlagerung mit einem elektronischen Frequenzzähler ermitteln und hängt mit der Lichtgeschwindigkeit durch den so genannten **Modenabstand** oder **freien Spektralbereich** zusammen (Abb. 9.57):

$$\Delta\nu_{FS} = c/2l . \tag{9.27}$$

Die Resonatormethode ist die genaueste bekannte Methode, sie erfordert die Messung einer Länge und einer Frequenz. Letztere lassen sich aber durch einen Vergleich mit der Atomuhr sehr viel genauer messen als Längen. Seit 1983 hat man daher das Verfahren umgedreht und führt nun jede Längenmessung auf eine Frequenzmessung zurück: Die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum ist dann eine exakt festgelegte Naturkonstante

Definition: $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$.

Sie gilt für alle Frequenzen und dient auch zur Definition des Meters als der Strecke, die das Licht im Vakuum in $1/299\,792\,458 \text{ s}$ zurücklegt. Damit ist die phantastische Präzision der heutigen **Atomuhren** (relativer Fehler um 10^{-15} , s. Abschn. 14.9.7) im Prinzip auch für die Längenmessung verfügbar.

9.3.4 Anwendungen

Die Laufzeit von elektromagnetischen Wellen gibt bei bekanntem c genaue Auskunft über die zurückgelegte Strecke. Bei der **Radar-Ortung** benutzt man cm-Mikrowellen statt Lichtwellen, um die Entfernung reflektierender Ziele zu messen. Für den Mond und nahe Planeten ist diese Abstandsmessung sogar erheblich genauer als astronomische Methoden (s. Abschnitt 15.2). Umgekehrt konnte man mit dem bekannten Abstand der Venus direkt nachweisen, dass das Licht im Schwerefeld der Sonne einer gekrümmten Bahn folgt (Abb. 17-17). Das Laser-Radar (**Lidar**) gestattet es, Höhenprofile von Spurengasen in der Atmosphäre zu ermitteln.

Bewegte Ziele verursachen auch eine Frequenzverschiebung (**Doppler-Effekt**) des reflektierten Lichts. Die **Radar- oder Laserreflexion** liefert die Geschwindigkeitsinformation nicht nur von Autos, sondern auch von Teilchen in Flüssigkeitsströmungen, Molekular- oder Neutronenstrahlen. Auch die äußerst langsame Rotation der Venus wurde so gemessen.

9.3.5 Lichtgeschwindigkeit im Medium

In einem Medium mit Brechzahl n breitet sich das Licht mit der **Phasengeschwindigkeit** $v_\phi = c/n = \omega/k$ aus. Wie bei allen Wellenformen spielen aber auch andere Geschwindigkeiten eine wichtige Rolle. Zum Beispiel beschreibt die **Gruppengeschwindigkeit** $v_g = d\omega/dk$ (vgl. Abschn. 4.2.4) die Propagation eines Lichtimpulses in einem Medium mit Dispersion und spielt für die Übertragungsgeschwindigkeit einer optischen Kommunikationsverbindung die entscheidende Rolle, während die Phasengeschwindigkeit für die Informationsübertragung keine Bedeutung besitzt, sie ist eine „Scheingeschwindigkeit“. Man muss also sehr genau wissen, welche Geschwindigkeit gemeint ist, wenn z. B. von **langsamem Licht** oder **Überlichtgeschwindigkeiten** die Rede ist.

Langsames Licht. Die Gruppengeschwindigkeit $v_g = d\omega/dk = c/n_g$ ist meistens kleiner als die Phasengeschwindigkeit $v_\phi = \omega/k$ und wird umso geringer, je stärker sich die Brechzahl mit der Frequenz ändert. Atomare Gase besitzen sehr scharfe Resonanzen (vgl. Abschn. 10.3.3) und wirken

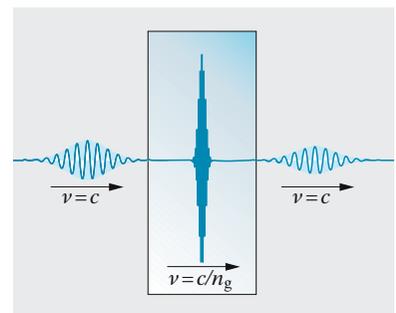


Abb. 9.58. Ein Puls breitet sich in einem Medium mit starker Dispersion mit geringerer Geschwindigkeit als im Vakuum aus. Dabei wird er stark gestaucht

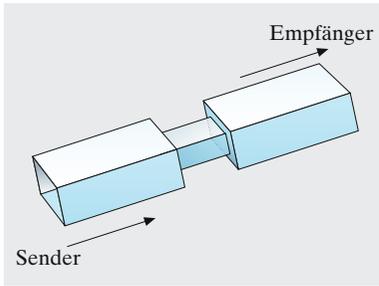


Abb. 9.59. Die Hohlleiter-Verengung können Mikrowellen nur durch den Tunneleffekt überwinden

daher auf die Lichtausbreitung nur in einem sehr schmalen Frequenzbereich. Dort ist die Dispersion aber so stark, dass Lichtimpulse sogar von Fußgängern überholt werden können!

Überlichtgeschwindigkeit. Eine fundamentale Aussage der Relativitätstheorie (vgl. Kap. 12) besagt, dass sich keine Wirkung, kein kausaler Zusammenhang schneller als das Licht ausbreiten kann. Berichte über Beobachtungen so genannter superluminaler Phänomene scheinen diese Aussage immer wieder in Frage zu stellen, und ein häufiges Beispiel ist die Transmission von elektromagnetischen Wellen durch verbotene Zonen, z. B. kurze Hohlleiterstücke, die so eng sind, dass die angebotene Mikrowellen-Frequenz nicht propagieren kann. Durch den Tunneleffekt (vgl. Abschn. 13.7.2) kommt es aber zu einer geringen Transmission und man kann tatsächlich eine Tunnelgeschwindigkeit definieren, die größer wird als die Lichtgeschwindigkeit. Aber selbst in diesem Fall (und in allen anderen bekannten Fällen) bleibt die so genannte Frontgeschwindigkeit, mit der sich bei einem Impuls der Ort bewegt, an dem die Feldstärke erstmals von Null abweicht, kleiner als c !

9.4 Matrizenoptik

Optische Systeme werden häufig für flache, achsnahe Strahlen konzipiert, die ihre Richtung in Linsen und anderen Elementen nur wenig ändern. Dann unterscheidet sich der Sinuswert eines Winkels (in *rad* gemessen) kaum von seinem Argument, $\sin(\alpha) \approx \alpha$, und in der *paraxialen* Näherung nimmt das Brechungsgesetz (9.7) die vereinfachte, linearisierte Form

$$\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 \approx \alpha_1 / \alpha_2 = n_2 / n_1$$

an. Ein paraxialer Lichtstrahl wird durch den Achsabstand r und seinen (kleinen) Laufwinkel α ausreichend bestimmt (Abb. 9.60). Diese Werte werden beim Durchgang vom Medium 1 durch eine gekrümmte brechende Fläche mit Radius R nach Medium 2 nach

$$r' = r$$

$$\alpha' = \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} r + \frac{n_1}{n_2} \alpha \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} r' \\ \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}$$

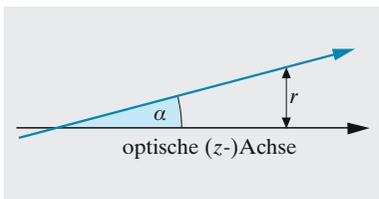


Abb. 9.60. Ein achsnaher optischer Strahl wird durch seinen Abstand r von der z -Achse und den Laufwinkel α bestimmt

berechnet (Aufgabe 9.4.1). Viele optische Elemente (Abb. 9.61) lassen sich mit Hilfe derartiger (2×2)- oder *ABCD*-Matrizen beschreiben. Die Matrizenoptik gewinnt ihre besondere Stärke aus dem Umstand, dass die Wirkung eines kombinierten Systems dem Matrizenprodukt der Einzelelemente entspricht:

✕ Beispiel...

Die Matrix für ein System aus zwei Linsen mit Brennweiten f_1, f_2 im Abstand d lautet

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 - d/f_1 & d \\ \left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} - \frac{d}{f_1 f_2}\right) & 1 - d/f_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus erhält man direkt die Brennweite des zusammengesetzten Systems,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}.$$

Zur sinnvollen Verwendung der *ABCD*-Matrizen müssen wir noch einige nützliche Konventionen festlegen:

- Die Lichtstrahlen laufen von links nach rechts in positiver Richtung der *z*-Achse.
- Der Radius einer konvexen (konkaven) Fläche ist positiv (negativ).
- Die Steigung α ist positiv, wenn der Strahl von der Achse wegläuft, negativ, wenn er auf die Achse zuläuft.
- Eine Gegenstandsweite ist positiv (negativ), wenn sie vor (hinter) dem abbildenden Element liegt.
- Die Gegenstandsgröße ist oberhalb (unterhalb) der *z*-Achse positiv (negativ).

Mit den *ABCD*-Matrizen kann man auch Systeme aus Hohlspiegeln ($f = R/2$, vgl. Abschn. 9.1.2) betrachten, wenn der Strahlengang nach jeder Reflexion umgeklappt wird.

9.5 Geometrische Elektronenoptik

Seit *Hans Busch* 1926 erkannte, dass man mit Elektronenstrahlen ganz ähnlich und vielfach besser als mit Licht abbilden kann, hat sich die **Elektronenoptik** enorm entwickelt. Man denke nur, was es heißt, im Fernseher oder Oszilloskop einen Elektronenstrahl in wenigen ns zu steuern und auf einen wenige μm großen Punkt zu fokussieren. Im Beschleuniger muss das nach einer Laufstrecke gelingen, die gleich dem Erdumfang sein kann. Sende- und Verstärkerröhren für Höchstfrequenz (Abschn. 8.2.9) und vor allem das **Elektronenmikroskop** sind Höchstleistungen der Elektronenoptik.

9.5.1 Das Brechungsgesetz für Elektronen

Ein Plattenkondensator, d. h. eine Zone der Dicke d , in der das Feld E herrscht, lässt sich als Übergang zwischen den Gebieten 1 und 2 mit den Potentialen U_1 und U_2 auffassen, die sich um Ed unterscheiden. Wir bilden die Platten als Netze aus, sodass Elektronen zum Teil durchkönnen. Die Kathode, aus der die Elektronen stammen, habe das Potential 0. Dann haben die Elektronen in 1 die Energie $W_1 = mv_1^2/2 = eU_1$, in 2 die Ener-

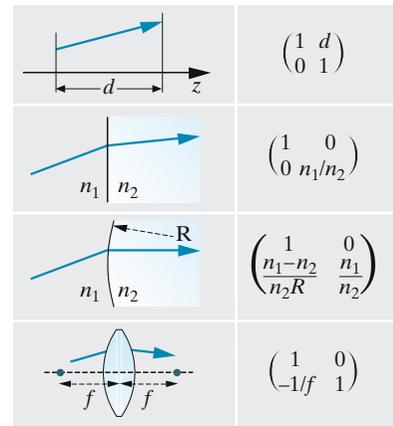


Abb. 9.61. Optische Elemente und ihre *ABCD*-Matrizen: Translation – Brechung an der ebenen Fläche – Brechung an der gekrümmten Fläche – dünne Linse

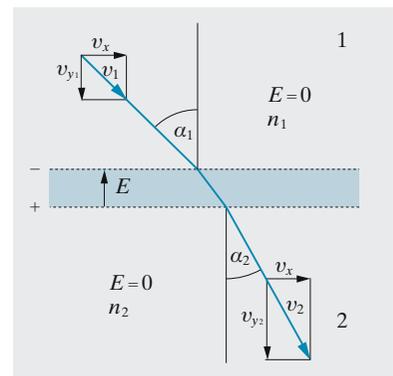


Abb. 9.62. Zum Brechungsgesetz der Elektronenoptik

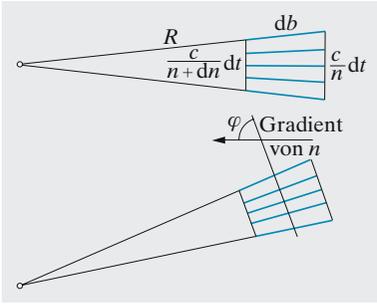


Abb. 9.63. Krümmung eines Lichtbündels in einem Gradienten der Brechzahl. Ausbreitung senkrecht (*oben*) bzw. schräg (*unten*) zum Gradienten

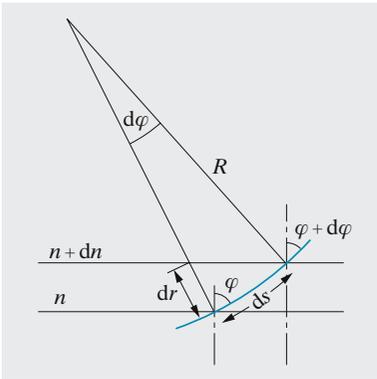


Abb. 9.64. Krümmung von Lichtstrahlen oder Elektronenbahnen in einem Medium (Feld) mit stetig veränderlicher Brechzahl

gie $W_2 = mv_2^2/2 = eU_2$. Das Feld E ändert nur die y -Komponente der Elektronengeschwindigkeit (Abb. 9.62), die x -Komponente ist in 1 und 2 dieselbe: $v_{x1} = v_{x2}$. Wir bilden die Sinus der Ein- und Ausfallswinkel α_1 und α_2 :

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_{x1}/v_1}{v_{x2}/v_2} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Dies Verhalten lässt sich allein durch die Energien, d. h. die Potentiale U_1 und U_2 ausdrücken:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{\frac{U_2}{U_1}},$$

hängt aber nicht vom Winkel ab, ebenso wie bei der Lichtbrechung. Dem Gebiet mit dem Potential U (immer gegen die geerdete Kathode) kann man eine Brechzahl $n \sim \sqrt{U}$ zuordnen, dann kommt das Brechungsgesetz auf die übliche Form, bei der ja nur die *Verhältnisse* der Brechzahlen interessieren.

Krummes Licht. Wenn sich das Potential nicht sprunghaft, sondern stetig ändert, knickt die Elektronenbahn nicht, sondern krümmt sich. Die Elektronen fliegen unter dem Winkel α gegen die Feldrichtung. Die Feldkomponente $E \cos \alpha$ beschleunigt dann das Elektron, die Komponente $E \sin \alpha$ krümmt seine Bahn, sie erzeugt nämlich eine Zentripetalkraft $eE \sin \alpha = mv^2/R$, also eine Bahnkrümmung

$$\frac{1}{R} = \frac{eE \sin \alpha}{mv^2}. \tag{9.28}$$

Wegen $mv^2/2 = eU$ und $E \sin \alpha = dU/dy$ kann man auch schreiben

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2U} \frac{dU}{dy}. \tag{9.29}$$

Auch diese Krümmung hängt also nicht vom Winkel ab, sondern nur von den Potentialen.

Bei Licht gilt dasselbe, wenn die Brechzahl n stetig vom Ort abhängt. Man sieht das am besten im Wellenbild (Abb. 9.63). Ein Stück einer Wellenfront von der Breite db laufe an einem seiner Enden („rechts“) in einem Medium mit der Brechzahl n , am anderen Ende („links“) sei die Brechzahl $n + dn$. In der kurzen Zeit dt ist die Welle dann rechts um $c dt/n$, links um $c dt/(n + dn) \approx c dt/n \cdot (1 - dn/n)$ fortgeschritten. Die Front ist also etwas nach links umgeschwenkt. Die Verlängerungen der Wellenfronten würden sich in einem um R entfernten Punkt treffen. Man liest ab $db/R = dn/n$ oder

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n} \frac{dn}{db}. \tag{9.30}$$

Dies ist das Krümmungsmaß der Lichtstrahlen, die ja an jeder Stelle auf der Wellenfront senkrecht stehen. Am größten ist die Krümmung, wenn

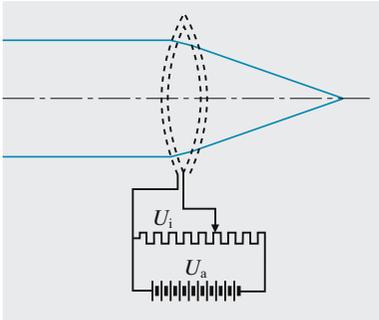


Abb. 9.65. Die Doppelschichtlinse trennt einen Innenraum mit anderem Potential vom Außenraum ab. Die beiden Übergangszonen zwischen den Netzen wirken auf Elektronen wie eine Linse mit $n = \sqrt{U_i/U_a}$

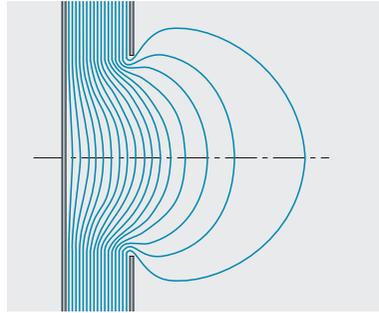


Abb. 9.66. Äquipotentialflächen zwischen einer Platte und einer kreisförmigen Lochblende, zwischen denen eine Spannung besteht



Abb. 9.67. Schichten mit gleicher Brechzahl in der Augenlinse

der Lichtstrahl senkrecht zum Gradienten der Brechzahl steht. Wenn ein Winkel φ zwischen Strahlrichtung und n -Gradient liegt, ist die Krümmung um den Faktor $\sin \varphi$ kleiner als der maximal mögliche Wert (Abb. 9.63). Die Äquivalenz mit (9.29) folgt aus $dn/n = d \ln n = \frac{1}{2} d \ln U = dU/2U$.

9.5.2 Elektrische Elektronenlinsen

Zwei Kondensatoren aus gewölbten Netzen, entsprechend Abb. 9.65 aneinander gesetzt, grenzen einen linsenförmigen Innenraum mit dem Potential $U_2 = U_1 + U$ vom Außenraum mit U_1 ab. Die beiden Übergangszonen zwischen den Netzen wirken auf Elektronen wie eine Linse aus Glas mit der Brechzahl $n = \sqrt{U_2/U_1}$ gegen den Außenraum mit $n = 1$. Nach (9.16) hat diese Linse die Brechkraft

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \left(\sqrt{\frac{U_2}{U_1}} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Über die Spannungen lässt sich die Brechkraft in weiten Grenzen ändern. Aber die Feldstörungen durch die einzelnen Drähte im Netz sind zu groß. Es kommt ja auch nur auf die Wölbung der Potentialflächen an, und die kann man auf viele Arten auch ohne störende Leiter erzeugen, z. B. mit Lochblenden oder unterbrochenen Rohren. Allerdings entspricht ein Feld wie in Abb. 9.68 keiner durch Kugelflächen begrenzten einheitlichen Glaslinse, sondern besteht aus Schichten mit verschiedenen Potentialen U , also verschiedenen Brechzahlen n , wie übrigens auch unsere Augenlinse. Das System Abb. 9.66 mit negativer linker Platte wirkt wie ein **Elektronen-Hohlspiegel**, ebenso Abb. 9.72. In Abb. 9.68 treten die Elektronen sofort nach Verlassen der Quelle (auf der linken Platte) ins Feld, also ins brechende System ein, wie bei einem Lichtobjektiv mit Immersionstropfen davor. Daher spricht man von **Immersionsoptiken**, im Gegensatz zu den Einzellinsen, die in einem feldfreien Raum stehen, wo die Elektronen beiderseits geradlinig fliegen.

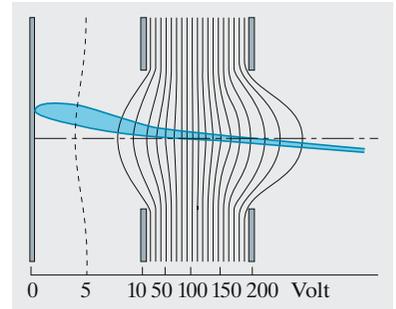


Abb. 9.68. Eine gebräuchliche Immersionsoptik zur Abbildung einer Elektronen emittierenden Kathode

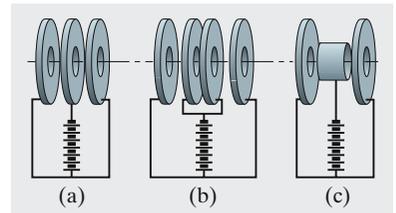


Abb. 9.69. Einzellinsen aus Lochblenden (a, b) und Zylindern (c)

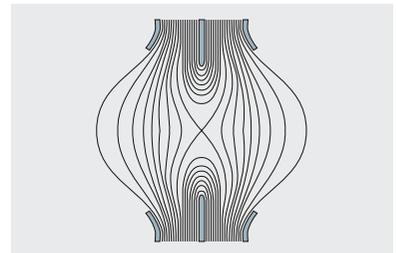


Abb. 9.70. Äquipotentialflächen im Feld einer Einzellinse vom Typus der Abb. 9.69a

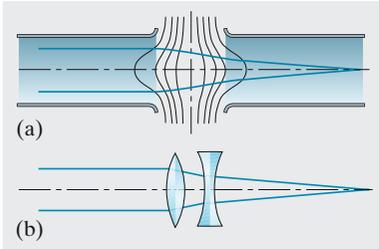


Abb. 9.71a,b. Rohrlinse (a) und ihr optisches Analogon (b)

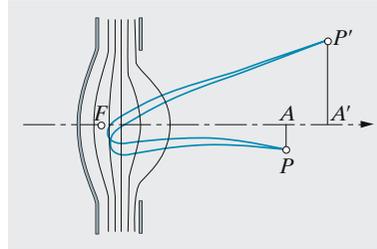


Abb. 9.72. Elektronenspiegel

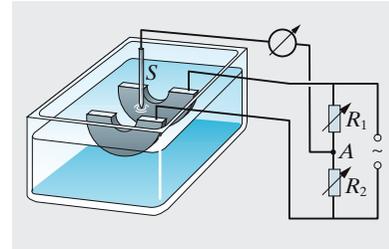


Abb. 9.73. Elektrolytischer Trog zur experimentellen Auffindung der Potentialverteilung

In Abb. 9.71 wirken die nach links gewölbten Potentialflächen sammelnd, die nach rechts gewölbten zerstreud (das rechte Rohr ist positiver); weil aber die Elektronen nach rechts schneller werden, ist die zerstreue Ablenkung schwächer als die sammelnde: Die **Rohrlinse** wirkt wie das darunter dargestellte achromatähnliche Linsensystem.

Wenn man alle Spannungen einschließlich der Beschleunigungsspannung im gleichen Verhältnis ändert, z. B. halbiert, ändern sich nach (9.29) die Brechzahlverhältnisse nicht, ebenso wenig die Elektronenbahnen. Ladung und Masse der Teilchen kommen in (9.29) auch nicht vor. Ein Elektronenmikroskop ist daher im Prinzip auch für Protonen oder Deuteronen korrigiert.

Ein Feld wie in Abb. 9.70 ist äußerst schwer zu berechnen. Man bestimmt es besser experimentell im **elektrolytischen Trog**. Das Feld um ein Elektrodensystem ändert sich nämlich nicht, wenn man dieses in eine Elektrolytlösung taucht, falls der Trog viel größer ist als das Modell. Dies folgt aus der Proportionalität von Stromdichte und Feld: $j = \sigma E$. Um Polarisationspannungen zu vermeiden (Abschn. 6.5.3), muss man freilich mit Wechselspannung arbeiten. Weil im rotationsymmetrischen Feld durch eine Ebene, die die Achse enthält, kein Strom tritt, braucht man nur die Hälfte des Modells genau bis zur Flüssigkeitsoberfläche einzutauchen. Man sucht nun das Potential in der Oberfläche und tastet es mit einer Sonde ab, die stromlos bleiben muss, damit sie das Feld nicht verzerrt. Dies erreicht man mit der Brückenschaltung von R_1 und R_2 . Wenn man die Sonde so verschiebt, dass sie immer stromlos bleibt, beschreibt sie die zu R_1/R_2 , also $R_2 U / (R_1 + R_2)$ gehörige Potentialfläche (Spannungsquelle unten geerdet, oben auf Potential U).

9.5.3 Magnetische Linsen

Außerhalb der Achse einer langen Spule liege eine primäre oder sekundäre Elektronenquelle, die nach allen Richtungen Elektronen emittiert oder streut. Wir wollen dieses Bündel von Elektronenbahnen möglichst vollständig in einem Punkt vereinigen, also ein Bild der Quelle herstellen. Im homogenen Magnetfeld läuft ein Elektron mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = eB/m$ auf einer Schraubenlinie um. ω ist unabhängig von der Geschwindigkeit, also auch von der Bahnrichtung. Nach der Zeit $t = 2\pi/\omega = 2\pi m/(eB)$ schneiden also alle Bahnen wieder die Feldlinie, auf der die Quelle liegt. In dieser Zeit sind sie in Achsrichtung um $tv \cos \varphi$ geflogen. Für hinreichend kleine φ , also ein enges Bündel, erhält man als

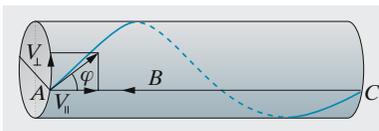


Abb. 9.74. Die stromdurchflossene lange Spule als magnetische Linse. Die Spule ist nicht gezeichnet, sondern nur die Elektronenbahn im homogenen Spulenfeld

Brennweite (halber Abstand Gegenstand/Bild)

$$f = \frac{\pi m v}{e B} .$$

× Beispiel...

Ist Abb. 9.74 so zu verstehen, dass die Achse der Spiralbahn des Elektrons mit der Spulenchse zusammenfällt?

Im annähernd homogenen Feld im Innern der langen Spule ist die Achse durch nichts ausgezeichnet. Das Elektron beschreibt, wo immer es ist, eine Spirale, deren Querschnittsradius r durch die Kreisbahnbedingung $\omega^2 r = B v \sin \varphi \cdot e/m$ bestimmt wird.

Anders als beim elektrischen Feld ändert der Durchgang durch ein Magnetfeld die Elektronengeschwindigkeit nicht. Eine magnetische Linse verdreht das Bild (die lange Linse um 360° , also eigentlich gar nicht), die elektrische kehrt es um. Die lange magnetische Linse hat einen Abbildungsmaßstab $1 : 1$, bei der kurzen (Abb. 9.75) wirkt sich die Feldinhomogenität ganz anders aus: Vor der kurzen Spule konvergieren die Feldlinien nach rechts, haben also eine Radialkomponente. Angenommen, die Feldlinien laufen auch nach rechts. Ein achsparallel von links einfliegendes Elektron erfährt eine Lorentz-Kraft nach vorn, im Gegensatz zur langen Spule, wo für dieses Elektron $B \parallel v$ wäre. Allmählich baut sich eine Geschwindigkeitskomponente nach vorn auf, die mit der axialen Feldkomponente eine nach innen gerichtete Lorentz-Kraft ergibt. Im divergierenden Feld hinter der Spule wird die Komponente nach vorn größtenteils wieder aufgehoben, es bleibt die Komponente nach innen (übrigens auch bei anderer Richtung des B -Feldes): Die achsparallelen Elektronen laufen in einem Abstand f hinter der Linse zusammen. Die Rechnung liefert eine Brechkraft

$$\frac{1}{f} = \frac{e}{8mU} \int_{-\infty}^{\infty} B^2 dz \tag{9.31}$$

(längs der Achse integriert). In Aufgabe 9.5.7 können Sie das nachprüfen.

Kurze Brennweite trotz geringer Ausdehnung des Feldes erreicht man mit den sehr hohen Feldstärken eisengepanzelter Spulen (Abb. 9.77).

9.5.4 Elektronenmikroskope

Nur Objekte wie Metalle oder andere Kristalle emittieren Elektronen oder auch Ionen, ohne dabei zerstört zu werden, und eignen sich zur **Emissionsmikroskopie**. Auf feine Spitzen montiert, ergeben solche Proben ohne jedes optische System ungeheuer vergrößerte Bilder (Abb. 9.78; Aufgabe 6.1.17). Biologische Objekte durchstrahlt man mit Elektronen oder lässt diese an ihnen oder an Abgüssen (Repliken) reflektieren.

Wie in einem Lichtmikroskop zur Mikrophotographie ist im **Elektronenmikroskop** das Okular durch eine Projektionslinse ersetzt (Abb. 9.79). Das Bild wird auf einem Fluoreszenzschirm oder dem photographischen

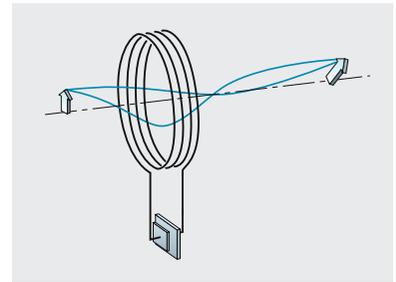


Abb. 9.75. Die Spiralbahnen der Elektronen treffen sich nach dem Durchgang durch die kurze magnetische Linse wieder im Bildpunkt

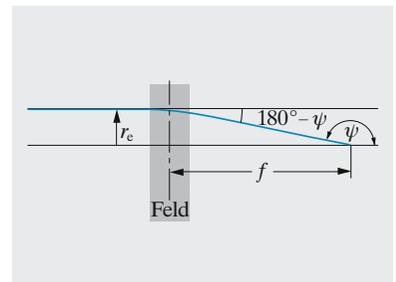


Abb. 9.76. Zur Berechnung der Brennweite einer kurzen magnetischen Linse

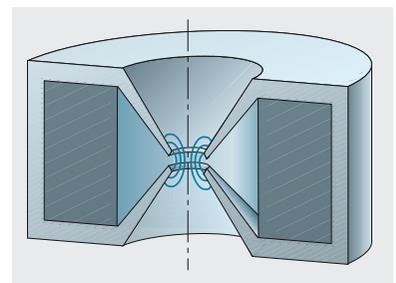


Abb. 9.77. Eisengepanzerte Spule mit Schlitz als kurzbrennweitige Linse

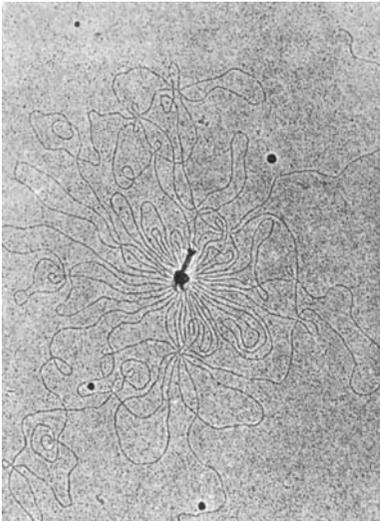


Abb. 9.80. Ein **Bakteriophage** (T2) bestehend aus Kopf (Proteinhülle mit normalerweise eingeschlossener Erbsubstanz DNS) und Schwanz. T2 ist ein „Raubtier“, das dem 1 000-mal so großen Darmbakterium *Escherichia coli* seine DNS injiziert (durch den Schwanz als Injektionsspritze). Drinnen zwingt die Phagen-DNS die biochemische Fabrik des Bakteriums, Kopien dieser DNS und des Hüllproteins herzustellen. Das ausgelaugte *E. coli* zerfällt und entlässt etwa 100 fertig zusammengebaute Viren. Im Bild (nach *Kleinschmidt*) ist die Hülle durch osmotischen Schock (hypotonische Lösung) explodiert, und der vorher sorgfältig verpackte DNS-Strang ist nach außen geschneit. Länge des Virus $0,2\ \mu\text{m}$, Länge seines DNS-Stranges $34\ \mu\text{m}$. *E. coli*-DNS, ebenfalls ein einziger Strang, ist sogar $1,2\ \mu\text{m}$ lang – eines der längsten Moleküle. (Nach H.-U. Harten: *Physik für Mediziner*, 4. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1980))

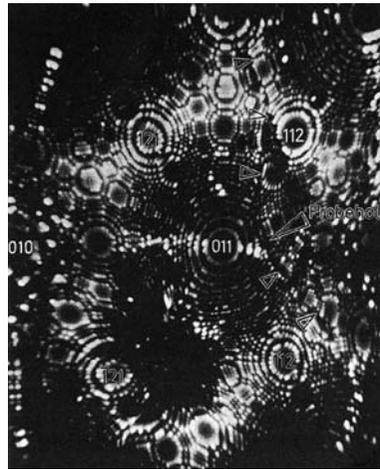


Abb. 9.78. Feldionenmikroskop-Aufnahme: Atome des Füllgases werden im hohen Feld an einer sehr feinen Metallspitze (hier Wolfram) ionisiert und übertragen das Bild von atomaren Bereichen unterschiedlicher Ionisierungswahrscheinlichkeit radial auswärts auf den Leuchtschirm. (Nach E. W. Müller: *Naturwissenschaften* **57**, 222 (1970))

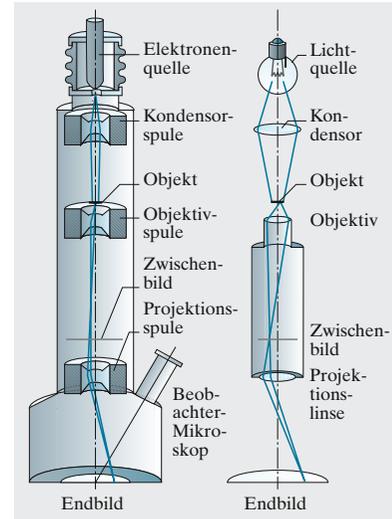


Abb. 9.79. Elektronenmikroskop mit magnetischen Linsen, daneben Strahlengang im optischen Projektionsmikroskop

Film aufgefangen. Da das Absorptionsvermögen der einzelnen Objektteile für Elektronen meist ganz anders ist als für Lichtwellen, ist auch die Deutung des Bildes oft anders.

Elektronenlinsen haben natürlich auch **Linsenfehler**, die sich nie ganz unterdrücken lassen, besonders **sphärische Aberration**. Sie sind für Auflösung und Vergrößerung des Elektronenmikroskops entscheidender als die beugungstheoretische Grenze, die durch die de Broglie-Wellenlänge λ des Elektrons bestimmt wird. $\lambda = h/p$ ist schon bei $0,1\ \text{kV}$ -Elektronen von der Größenordnung des Atomradius. Trotzdem bringt Steigerung der Spannung auf mehrere MV Vorteile; mit solchen Mikroskopen kann man tatsächlich einzelne Atome sehen. Hier lautet das Brechungsgesetz etwas anders, weil die Elektronen relativistisch sind.

Mit dem **Rastermikroskop (scanning microscope)** macht man Aufnahmen von verblüffender Raumillusion. Es handelt sich nicht um Abbildungen im üblichen Sinn, sondern das Bild entsteht Punkt für Punkt wie beim Fernsehen. Ein sehr fein fokussierter Elektronenstrahl tastet das Objekt zeilenweise ab, und die Sekundäremissionen der einzelnen Punkte werden registriert und wieder zum Bild zusammengesetzt.

Mit dem **Raster-Tunnelmikroskop** (genauer: **Tunneleffekt-Rastermikroskop, RTM**) von *Binnig* und *Rohrer* (Nobelpreis 1986) kann man Strukturen erkennen, die sogar kleiner sind als ein Atom. Eine ultrafeine, im Idealfall aus einem einzigen Atom bestehende Elektroden spitze wird der Probe so weit genähert, bis ein Tunnelstrom übertritt. Die Stärke

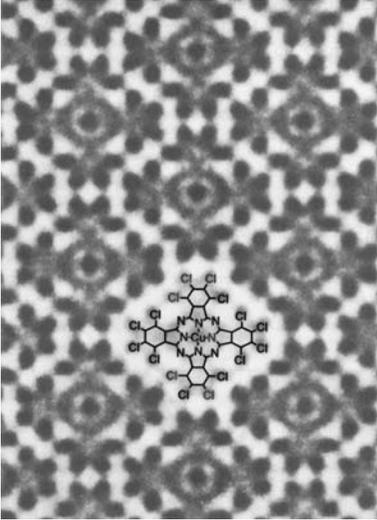


Abb. 9.81. Mit einem 500 keV-Elektronenmikroskop kann man einzelne Atome sehen, hier besonders die schweren, elektronenreichen Atome im chlorierten Kupfer-Phtalocyanin. Organische Moleküle sehen tatsächlich aus wie im Chemiebuch (Auflösung etwa $1,3 \cdot 10^{-10}$ m; Aufnahme von *N. Uyeda*, Univ. Kyoto)

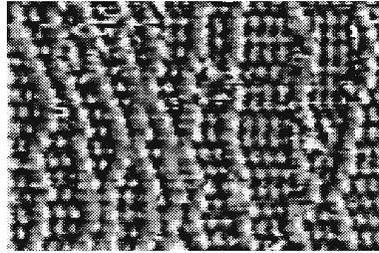


Abb. 9.82. RTM-Bild einer Cu-Oberfläche mit adsorbiertem Schwefel. Die hellen „Perlenketten“ sind monoatomare, $1,8 \text{ \AA}$ hohe Stufen auf der 100-Cu-Oberfläche. Ursprünglich bildete diese eine von links nach rechts in parallelen, ca. 14 \AA breiten Stufen abfallende Treppe. Da die adsorbierten S-Atome (schwache helle Flecken) 32% größer sind als die Cu-Atome, prägen sie der Cu-Oberfläche z. T. ihre eigene Flächenstruktur auf, indem sie einige Cu-Atome zum Umlagern zwingen. So werden die Stufen unregelmäßig: Wo das S-Gitter quadratisch ist, laufen sie im Bild noch senkrecht, dagegen schräg, wo das S-Gitter hexagonal ist (mit freundlicher Genehmigung von *S. Rousset*, Groupe de Physique des Solides de l'École Normale Supérieure, Paris)

dieses Stroms reagiert exponentiell auf den Abstand Spitze–Probe (Abschn. 13.7.2). Ein Piezosystem verschiebt nun die Spitze so, dass der Tunnelstrom auf einen konstanten Wert eingeregelt wird. Dann muss die Spitze allen Rauigkeiten der Oberfläche folgen. So kann man Flächen von einigen μm^2 mit einer Auflösung um 10^{-11} m senkrecht zur Oberfläche und um $2 \cdot 10^{-10}$ m parallel dazu abtasten.

Im **Ionenleitungsmikroskop** ersetzt man den Elektronen-Tunnelstrom durch einen Ionenstrom, die feine Metallspitze durch eine Mikropipette. So kann man nichtleitende, speziell biologische Oberfläche zerstörungsfrei abtasten, indem man die Sonde piezoelektrisch immer in dem Abstand hält, wo die Oberfläche den Ionenfluss zu sperren beginnt. Wenn auch die seitliche Auflösung noch weit von der des RTM entfernt ist, erkennt man doch so die nur postulierten Kanäle in den Zellmembranen, die den Stoffaustausch vermitteln.

▲ Ausblick

Als Wirtschaftsfaktor steht die Optik der Mikroelektronik gar nicht so viel nach. Nicht nur jeder PC, auch jede Kamera, ob Video oder klassisch, die Sie kaufen, ist schon wieder unmodern. Ebenso schnell ►



Der Reflektor vom Mt. Palomar (Hale-Teleskop) in Südkalifornien (5 m Spiegel, 16,8 m Brennweite)

ist die Entwicklung im Forschungsbereich, für Teleskope und Mikroskope. Man projiziert schon 25 m-Reflektoren, aus Einzelspiegeln zusammengesetzt, baut Spiegel mit adaptiver Optik, die Bildverzerrungen infolge atmosphärischer Dichteschwankungen durch winzige Verbiegungen automatisch korrigieren, ganz abgesehen von Weltraum- und Radioteleskopen, die inzwischen das Auflösungsvermögen klassischer Instrumente überholt haben. Die Mikroskopie stößt ständig in neue Bereiche vor, sie sieht nicht nur Einzelatome, sie schiebt sie sogar hin und her und baut Strukturen daraus, deren Feinheit wohl nicht mehr zu übertreffen ist.

✓ Aufgaben ...

www. CD

● 9.1.1 Sonnenkringel

Die Sonne malt Kringel auf den Waldboden. Wie kommen sie zustande? Geben sie die Form der Blattlücken wieder, oder was sonst? Hängt es von den Abstandsverhältnissen ab, was sie wiedergeben?

● 9.1.2 Log K. May hier auch?

Winnetou und Old Shatterhand reiten wieder einmal durch eine ihrer beliebten tief eingeschnittenen Schluchten: Senkrechte Wände, 2 000 Fuß hoch. Plötzlich reißt Winnetou die Silberbüchse hoch, schießt – und der Indianer, der sie oben vom Schluchtrand aus bespät hat, schlägt vor ihnen auf dem Pfad auf, bevor noch sein Todeschrei ihr Ohr erreicht. Niemand als Winnetou hätte natürlich den Schatten auf dem Pfad bemerkt.

●● 9.1.3 Finsternisse

Beantworten Sie graphisch oder rechnerisch folgende Fragen für einige der möglichen Abstandskombinationen, z. B. minimaler Abstand Sonne–Erde, mittlerer Abstand Erde–Mond: Welchen Durchmesser hat das Totalitätsgebiet bei einer **Sonnenfinsternis**? Wie lange dauert die Totalität höchstens? Wie groß ist die maximale Verfinsterung (abgedeckte Sonnenfläche in Prozent) in 1 000–2 000 km Abstand von der Totalitätszone (Schätzung ausgelegener Skizze)? Wie

Abstände (km)	Sonne– Erde	Mond– Erdoberfläche
minimal	$146,6 \cdot 10^6$	356 400
mittel	$149,5 \cdot 10^6$	378 060
maximal	$152,6 \cdot 10^6$	406 700

lange kann eine totale **Mondfinsternis** dauern (Kernschatten)? Wie groß kann die Gesamtdauer einer Mondfinsternis sein (Kern- und Halbschatten)? *Aristarch* von Samos (um 300 v. Chr.) wusste zwar den Durchmesser der Erde, aber zunächst nicht den des Mondes. Er bestimmte ihn bei einer totalen Mondfinsternis. Können Sie sich vorstellen, wie?

● 9.1.4 **Finsternisse auf dem Mars**
Gibt es auf dem Mars Sonnen- oder Mondfinsternisse?

● 9.1.5 **Was vertauscht der Spiegel**
Warum sieht man im Spiegel rechts und links vertauscht, aber nicht oben und unten?

●● 9.1.6 Brennspeigel

Kann man mit einem Rasierspiegel Feuer machen? Papier muss auf ca. 500 °C erhitzt werden, damit es Feuer fängt. Benutzen Sie die Strahlungsgesetze (Kap. 11).

● 9.1.7 Wunderwaffe

Archimedes soll auf den Zinnen von Syrakus Hohlspiegel angebracht haben, um die römischen Schiffe in Brand zu setzen. Glauben Sie das?

●● 9.1.8 Brennlinie

Wie kommt die „herzförmige“ helle Linie zustande, die man oft in Weingläsern, Ringen usw. beobachten kann? Die Brennlinie im Glas vom Radius r ist eine Epizykloide, die Spur eines Punktes auf der Peripherie eines Rades vom Radius $r/4$, das auf einem konzentrischen Kreis vom Radius $r/2$ abrollt. Beweisen Sie das.

●● 9.1.9 Weltraumspiegel

Ein stationärer Erdsatellit, als Hohlspiegel von 600 m Durchmesser ausgebildet, wird auf eine Umlaufbahn um die Erde gebracht. Er soll ein bestimmtes Gebiet auf der Erdoberfläche auch nachts beleuchten, indem er dort ein Bild der Sonne erzeugt. Welchen Abstand vom Erdmittelpunkt muss der Spiegel haben, damit er immer über dem gleichen Punkt des Äquators bleibt? Wie hoch steht er über der Erdoberfläche? Wie groß müssen Brennweite und Krümmungsradius des Spiegels sein? Welchen Durchmesser hat das beleuchtete Gebiet? Um welchen Faktor etwa ist die nächtliche Beleuchtungsstärke durch den Spiegel geringer als die bei Tage durch die Sonneneinstrahlung? Infolge der Beugung am Spiegel entsteht um das Sonnenbild eine Folge von dunklen und hellen Ringen. Welchen Abstand vom Rand des oben berechneten Sonnenbildes hat der erste Dunkelring? Wird durch die Beugung das beleuchtete Gebiet wesentlich ver-

größert? Von wann bis wann ist es trotz Spiegel dunkel (Ortszeit)? Aus welchem Abstand könnte der Spiegel von einem Astronauten zum Rasieren benutzt werden?

●● 9.1.10 Echo-Satellit

Wie hell erscheint ein kugelförmiger **Erdsatellit** vom Durchmesser d (z. B. $d = 1 \text{ m}$, 30 m) aus blankem Metall? Vergleichen Sie mit einem Stern. Sterngrößenklassen sind so definiert: Die Sonne hat die Größe -27 . Ein Stern ($n + 5$)-ter Größe erscheint 100-mal weniger hell als ein Stern n -ter Größe. Hinweis: Welche Beziehung besteht zwischen den Leuchtdichten von Bild und Gegenstand?

● 9.1.11 Parabolspiegel

Ist der Parabolspiegel optisch ideal? Was macht er mit nicht achsenparallelen Strahlen?

●● 9.1.12 Riesenfernrohr

In einem Bergwerksschacht rotiert eine Wanne mit Quecksilber, dessen Oberfläche als idealer Parabolspiegel gedacht ist. Diskutieren Sie das Projekt. Welche wären seine Vorteile, welche technischen Schwierigkeiten sehen Sie?

●● 9.1.13 Schärfentiefe

Wie groß ist die **Schärfentiefe** bei der Abbildung durch den Hohlspiegel? Wie definieren Sie die Schärfentiefe sinnvoll für die Beobachtung des Bildes mit bloßem Auge bzw. für die Photographie? Wie kann man sie steigern?

●● 9.1.14 Refraktometer

Im abbeschen Refraktometer tupft man ein Tröpfchen der zu untersuchenden Flüssigkeit auf ein Glasprisma und klappt dann eine mit einem Okular verbundene Glasplatte darauf. An einem Drehknopf dreht man so lange, bis im Blickfeld des Okulars eine scharfe Grenze zwischen Licht und Dunkelheit erscheint. Die Skala am Drehknopf zeigt dann direkt die Brechzahl der Flüssigkeit an (manchmal gibt es noch eine zweite

Skala, die den Zuckergehalt angibt). Können Sie sich vorstellen, wie das Gerät funktioniert?

●● 9.1.15 Asymmetrischer Durchgang

Ein Lichtbündel fällt senkrecht auf eine Fläche eines Dreieckprismas und tritt durch die um γ dagegen geneigte Fläche wieder aus. Um wie viel wird es abgelenkt? Ist die Ablenkung immer größer als bei symmetrischem Durchgang, und um wie viel?

●● 9.1.16 Minimale Ablenkung

Man kann auch ohne Rechnung zeigen, dass die Ablenkung bei symmetrischem Durchgang durch ein Prisma am kleinsten ist. Alles, was man braucht, ist die Umkehrbarkeit des Lichtweges.

● 9.1.17 Dreieckprisma

Warum benutzt man zur Erzeugung eines Spektrums ein Dreieckprisma und nicht z. B. eines mit quadratischem Querschnitt?

●● 9.1.18 Rückstrahler

Die Richtung, in die ein Spiegel ein Lichtbündel ablenkt, ist empfindlich gegen Verdrehung des Spiegels. Dies kann als vorteilhaft ausgenutzt werden (wo?), aber auch ein Nachteil sein. Wie verhält sich ein Winkelspiegel (bestehend aus zwei gegeneinander um den Winkel α gekippten Spiegeln)? Warum benutzt man technisch zum Umkehren der Richtung von Lichtbündeln meist nicht Winkelspiegel, sondern Prismen? Was kehrt sich noch um? Welche Rolle spielen Brechung und Dispersion bei **Umkehrprismen**? Sollte man im **Prismenfeldstecher** die Gegenstände nicht mit bunten Rändern sehen? Wie kann man Lichtbündel in sich selbst zurückwerfen, unabhängig von allen Kippungen des reflektierenden Systems („Rückstrahler“)?

● 9.1.19 Camera obscura

Unbegabte Landschaftsmaler früherer Zeiten setzten sich in ein Zelt, das bis auf ein Loch in der Seitenwand lichtdicht war, und pinselten das Bild auf

der gegenüberliegenden Wand nach. Wie entsteht dies Bild? Ist es seitenrichtig? Unter welchen Umständen ist es optimal scharf? Wie steht es mit der Helligkeit?

●● 9.1.20 Kommen wir da durch?

Wenn man mit dem Boot durch ein klares, flaches Gewässer fährt, meint man oft, unter dem Boot sei es gerade noch ausreichend tief, weiter vorn aber werde man bestimmt auf Grund laufen. Zum Glück verschiebt sich die scheinbare Mulde immer mit dem Boot. Welche Form hat sie?

●● 9.2.1 Gärtnerlatein?

Manche Gärtner raten ab, Blumen bei Sonne zu gießen, weil die Brennglaswirkung der Tröpfchen auf den Blättern diese zerstöre. Was sagen Sie?

●● 9.2.2 Astigmatismus

Welche Abbildungseigenschaften hat eine **Zylinderlinse** (brechende Fläche gleich Ausschnitt eines Zylindermantels)? Kann man mit zwei Zylinderlinsen punktförmig abbilden? Sind sie dann ganz äquivalent zu einer sphärischen Linse? Erläutern Sie, warum die Optiker statt von Astigmatismus auch von einem Zylinderfehler reden?

●● 9.2.3 Aphakie

Betrachten Sie Abb. 9.52 (Maßstab $1,4 : 1$). Bei manchen Augenleiden muss die Linse entfernt werden. Zurück bleibt das **aphake** Auge. Liegt das Bild eines unendlich fernen Gegenstandes auf der Netzhaut oder wo sonst? Wo entsteht das Bild eines näheren Gegenstandes? Kann man einem Menschen mit einem aphaken Auge durch eine oder mehrere Brillen helfen? Wie stark muss die Brille sein? Probieren Sie aus (ohne Brille): Wie nah und wie fern können Sie gerade noch scharf sehen? Geben Sie den Brechkraftbereich Ihrer Augen an. Wie funktioniert die Entfernungseinstellung des Auges? Vergleichen Sie mit dem Fotoapparat. Welche Brechkraft hat Ihre Augenlinse (nur die Linse allein)? Können Sie aus den

bisherigen Beobachtungen und Überlegungen schließen, ob Sie eine Brille brauchen und was für eine?

● 9.2.4 Taucherbrille

Kann man unter Wasser (ohne Taucherbrille) scharf sehen? Sind Weit-sichtige oder Kurzsichtige wesentlich im Vorteil? Würden +- oder –-Brillengläser helfen? Wie viele Dioptrien müssten sie haben? Welches ist das Prinzip der Taucherbrille? Jemand nimmt eine normale Kamera (die nicht in einem Glasehäuse sitzt) unters Wasser mit. Abgesehen von den mechanischen Konsequenzen: Kann er scharfe Bilder erwarten? Kann er mittels der Entfernungseinstellung korrigieren?

●● 9.2.5 Wenigstens ein Vorteil

Warum können Kurzsichtige kleine Dinge besser erkennen? Wie viel kann dieser Effekt einbringen?

● 9.2.6 Dicke Linse

An welchen Ebenen muss man bei einer dicken Linse einmalige Brechung ansetzen für (a) Parallelstrahlen von rechts, (b) Brennstrahlen von links, (c) Brennstrahlen von rechts, (d) Strahlen, die weder Parallel- noch Brennstrahlen sind?

●● 9.2.7 Sphärische Aberration

Warum werden in sphärischen Konvexlinsen die Randstrahlen eines Parallelbündels näher an der Linse vereinigt als achsennahe Strahlen? Wie ist die Lage bei Konkavlinsen?

●● 9.2.8 Trikolore

Unser Auge ist offenbar chromatisch gut korrigiert. Da aber rotes Licht schwächer gebrochen wird als blaues, muss der Akkommodationsmuskel die Linse stärker wölben, wenn eine rote, als wenn eine blaue Fläche in gleichem Abstand betrachtet wird. Wie kommt es, dass Rot, wie die Maler sagen, „aggressiv auf uns zukommt“ und Blau „uns in seine Tiefen zieht“? Wenn man bunte Kirchenfenster betrachtet, scheinen die verschiedenen Farben oft in verschiedenen Ebenen zu stehen. In

der französischen Trikolore ist der rote Streifen merklich breiter (37%) als der weiße (33%) und dieser breiter als der blaue (30%). Warum?

●● 9.2.9 Lupe

Warum kann eine Lupe nicht mehr vergrößern als 20- bis 30mal?

● 9.2.10 Mikroskop

Die Brennweiten des Okularsatzes eines Mikroskops sind 50; 25; 17 mm, die des Objektivsatzes 10; 5; 3; 1,5 mm. Die Tubuslänge ist 25 cm. Welche Vergrößerungen kann man kombinieren? Wie weit müssen die einzelnen Objektive dem Objekt genähert werden?

● 9.2.11 Immersionsobjektiv

Das Immersionsöl mit der Brechzahl $n \approx 1,5$ verringert die Wellenlänge des ins Objektiv einfallenden Lichtes, wodurch das Auflösungsvermögen verbessert wird (kleinster auflösbarer Schwinke $\approx \lambda/a$, a Durchmesser der Eintrittspupille). Ist das ein weiterer Vorzug des Immersionssystems oder ist er äquivalent mit einem der in Abschn. 9.2.6 genannten?

●● 9.2.12 Auflösungsvermögen

Gilt die abbesche Theorie des Auflösungsvermögens auch für Elektronenmikroskope? Es gibt ein Mittel, das für Lichtmikroskope nur sehr beschränkt, für Elektronenmikroskope aber in großem Umfang anwendbar ist, um das Auflösungsvermögen zu steigern. Welches?

●● 9.2.13 Wie misst man Vergrößerung?

Besteht beim Fernrohr ein Zusammenhang zwischen der Vergrößerung und dem Verhältnis der Durchmesser des eintretenden und des austretenden Lichtbündels? Wie kann man die Vergrößerung mit einer Schublehre messen?

● 9.2.14 Entfernungseinstellung

Warum kommt auf dem Entfernungseinstellung der Kamera ∞ so bald nach 10, während 0,55 und 0,5 viel weiter auseinander liegen?

●●● 9.2.15 Hohlwelt

Nach der **Hohlwelttheorie** leben wir auf der **Innenseite** einer Kugel, in die auch das ganze Weltall eingeschlossen ist. Dass wir bei klarem Wetter nicht bis Australien sehen, liege einfach daran, dass das Licht krumm läuft. Das mag ein Bierwitz sein, aber es ist ein wesentlich besserer als Astrologie oder Weltelehre. Beweisen Sie erst mal das Gegenteil! Sie werden feststellen, dass die üblichen optischen und positions-astronomischen Gegenargumente nicht zwingend sind. Gibt es einen allgemeinen Grund dafür? Wie müsste das Licht in der Hohlwelt laufen, damit alles stimmt? Kann man dieses Verhalten durch eine Brechzahl beschreiben, und wie müsste sie vom Ort abhängen? Hinweis: Spiegelung an Kreis oder Kugel. Geben Sie ein quantitatives Hohlweltmodell für Sonne, Mond und Sterne (Größen, Bahnen usw.). Wie kommen Tages- und Jahreszeiten, Finsternisse usw. zustande? Ergibt sich eine Parallaxe bei der Bewegung auf der Erde, im Lauf des Jahres? Liefern andere Gebiete der Physik zwingendere Gegenargumente?

●● 9.2.16 Halo

Die häufigste **Haloerscheinung** ist ein Ring um Sonne oder Mond mit 22° Radius, ganz schwach gefärbt mit Rot innen. Eis hat die Brechzahl 1,31. Nadelförmige Eiskriställchen, wie sie sich in der Hochtroposphäre bilden, haben vorwiegend Prismenform mit gleichseitig-dreieckigem Querschnitt. Wie kommt der 22° -Halo zustande?

●● 9.3.1 Römer oder Doppler

Kann man **Römers** Beobachtung über die verzögerte Jupitermondfinsternis auch als **Doppler-Effekt** verstehen? Führen Sie das quantitativ durch.

●● 9.3.2 Fizeau-Versuch

Projektieren Sie einen Versuch zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach **Fizeau**. Beachten Sie den Umstand, dass man eine Scheibe aus Stahl höchstens bis zu einer Umfangsgeschwindigkeit von 100 m/s

rotieren lassen sollte. Nehmen Sie an, Sie hätten einen Lichtstrahl bis auf 1 mm Durchmesser fokussiert. Wie lang muss der Lichtweg sein, wenn der durch eine Zahnücke gegangene Strahl auf dem Rückweg gerade auf einen Zahn stoßen soll? *Fizeau* benutzte einen Spiegel in 8,6 km Abstand. Kann man mit weniger auskommen? Welche Genauigkeit für c kann man erreichen?

●● 9.3.3 Foucault-Versuch

Schätzen Sie die Genauigkeit einer c -Messung nach der Drehspiegelmethode von *Foucault*, wobei die ganze Messanordnung in einem großen Saal aufgebaut ist. Reicht die Genauigkeit zur Direktbestimmung der Brechzahl von Luft? Man erreicht Spiegeldrehzahlen von ca. 1 000 Hz. Warum nicht mehr? Wie könnte man die in Abschn. 9.3.3 angegebene Genauigkeit für c erreichen?

● 9.3.4 Ändert sich λ oder ν ?

Im Wasser läuft das Licht langsamer als in der Luft. Liegt das an einer Abnahme der Wellenlänge oder der Frequenz? Auch wenn man taucht, sieht man die Wasserpflanzen grün (falls sie nicht zu weit entfernt oder zu tief unten sind). Welche Welleneigenschaft übersetzen Auge und Gehirn also in Farbe: λ oder ν ?

●● 9.3.5 Widerspruch?

Licht fällt von unten schräg auf die Seeoberfläche und wird demnach totalreflektiert. An der Seeoberfläche entstehen aber doch auch Elementarwellen, die sich in die Luft ausbreiten. Ist das nicht ein Widerspruch?

●● 9.3.6 c -Messung

In dem Versuchsaufbau (Abb. 9.83) spiegelt man das Licht einer **Leuchtdiode (LED)** zurück auf eine **Photodiode (PD)**. Das Licht der LED hat einen mit 50 MHz voll durchmodulierten Sinusverlauf. Dieses Signal wird auf die horizontalen Platten eines Oszilloskops gelegt, ein Signal, das dem PD-Strom proportional ist, auf die vertikalen Platten. Dreht man

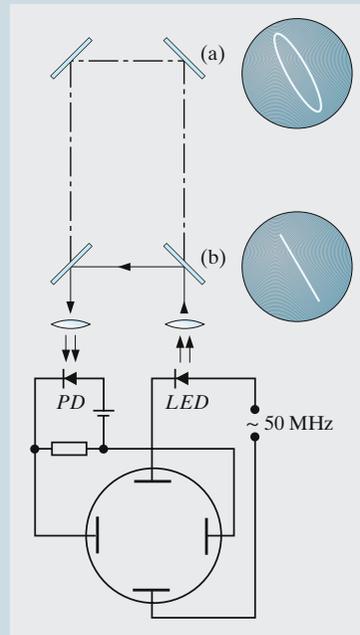


Abb. 9.83. Messung der Lichtgeschwindigkeit. Elektronik stark vereinfacht

am Phasenschieber, kann man auf dem Schirm eine schräge Linie (b) erhalten. Verändert man nun den Abstand l nur um 15 cm, öffnet sich diese Linie zur Ellipse (a). Wieso? Genauso öffnet sich die Ellipse, wenn man l konstant lässt, aber in den einen Arm des Lichtweges ein wassergefülltes Rohr von 90 cm Länge stellt oder einen Glasstab von 60 cm Länge. Wieso?

●● 9.4.1 Glasfenster

Wie ändert ein planparalleles Glasfenster die Brennweite einer Sammellinse, wenn es sich innerhalb der Brennweite befindet?

●● 9.5.1 Hätte Newton sich gefreut?

Obwohl Licht und Elektronen rein geometrisch dem gleichen Brechungsgesetz gehorchen, bestehen physikalisch erhebliche Unterschiede. Man betrachte besonders die Geschwin-

digkeit in Abhängigkeit von der Brechzahl.

●● 9.5.2 Lichtkrümmung

Leiten Sie das Krümmungsmaß eines Lichtstrahles in einem Medium mit stetig ortsabhängiger Brechzahl rein geometrisch-optisch her. Vermeiden Sie zunächst den Fall, dass der Strahl senkrecht zum Gradienten von n läuft (warum?); stellen Sie diesen Fall durch Grenzübergang von endlichen Winkeln aus her.

● 9.5.3 Bahnkrümmung

Ein Elektron fliegt durch einen Raum mit ortsabhängigem Potential. Wie groß ist die Krümmung seiner Bahn? (Hier ist am einfachsten der Fall $v \perp \text{grad } U$).

●● 9.5.4 Fata Morgana

Im Sommer scheint die Straße in einer gewissen Entfernung häufig nass zu sein. Erklären Sie den Effekt. Hat er etwas mit der **Fata Morgana** in der Wüste zu tun? Warum tritt er meist in der warmen Jahreszeit auf? Was kann man aus der Entfernung der „Pfütze“ quantitativ schließen?

●● 9.5.5 Atmosphärische Refraktion

„Wenn der untere Rand der untergehenden Sonne gerade den Horizont zu berühren scheint, ist geometrisch die Sonne schon vollkommen untergegangen.“ Stimmt das? (Wohlgemerkt: Es handelt sich nicht um die Laufzeit des Lichtes zwischen Sonne und Erde). Um wie viel wird der Tag durch diesen Effekt verlängert? Könnte man sich eine Planetenatmosphäre vorstellen, die so ist, dass die Sonne gar nicht untergeht? Diskutieren Sie die Sichtverhältnisse auf der Venus (Atmosphärendruck am Boden ca. 90 bar (CO_2), Skalenhöhe ca. 13 km) (a) unter Berücksichtigung der undurchsichtigen Wolkenschicht in ca. 20 km Höhe, (b) wenn diese Wolkenschicht nicht da wäre. Wie viel „Sonnenatmosphäre“ (etwa atomarer Wasserstoff bei 6 000 K) würde notwendig sein, um die zwei Bogen Sekunden Ablenkung herbeizuführen,

die nach Einsteins Gravitationstheorie am Sonnenrand zu erwarten sind (vgl. Abschn. 12.10.2)? Wie genau muss man also die Dichte über der Chromosphäre kennen, um die Messungen entsprechend korrigieren zu können?

●● 9.5.6 Elektronenspiegel

Kann man nach dem Prinzip von Abb. 9.72 einen ebenen oder konvexen **Elektronenspiegel** herstellen?

●●● 9.5.7 Lange Linse

Kommt Ihnen (9.31) nicht auch merkwürdig vor? Die Ablenkung eines

Elektrons soll nur vom Feld auf der Achse abhängen, obwohl doch gerade dort gar keine Ablenkung erfolgt. Bedenken Sie aber, dass die Feldverteilung *längs* der Achse auch irgendwie die Feldverteilung *quer* zur Achse mitbestimmt. Wie nämlich? Die Ablenkung soll nur vom Integral über B^2 abhängen, nicht von der Verteilung des Feldes. Jetzt zeigen Sie, ob Sie Bewegungsgleichungen aufstellen können und sich auch nicht zu früh verleiten lassen, sie lösen zu wollen. In der Näherung, die die geometrische Optik ziemlich durchgehend benutzt (was besagt sie hier?),

stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten des Elektrons auf und setzen, bevor Sie sie zu lösen versuchen (ginge das denn überhaupt?), eine in die andere ein. Wir gehen ja davon aus, dass ein ursprünglich achsparalleles Elektronenbündel durch die Linse in einem Punkt vereinigt wird. Wie muss also v_r von r abhängen? Suchen Sie etwas, das unabhängig von r ist, aber dabei natürlich von z abhängt, und formen Sie die Bewegungsgleichung um, sodass sie nur diese Größe enthält. Dann wird sie wirklich lösbar, sagen wir, in zwei Schritten.

Wellenoptik

■ Inhalt

10.1	Interferenz und Beugung	519
10.2	Polarisation des Lichts	543
10.3	Absorption, Dispersion und Streuung des Lichts	555

▼ Einleitung

Was ist Licht? *Newton* war kein so einseitiger Verfechter der Korpuskularvorstellung, der *Huygens* Wellentheorie dank seiner Autorität so lange unterdrückt hätte, wie man oft hört. Vielmehr kombinierte er in ziemlich moderner Weise Teilchen und Wellen, um z. B. die verschiedenen Brechzahlen der Farben in seinem Prisma oder „seine“ Ringe zu erklären: Lichtteilchen verschiedener Art sollten Wellen im Äther auslösen, und diese sollten die Teilchen verschieden stark beschleunigen – die langen roten stärker als die kurzen blauen. Er hielt nur eine endgültige Entscheidung für verfrüht. Sie fiel erst 150 Jahre später durch *Fresnel* und *Young*.



„... habe ich die Dimensionen der Lichtquelle so weit wie möglich reduziert, und dennoch habe ich beobachtet, dass die Schatten nie scharf abgegrenzt waren, wie sie es sein müssten, wenn sich das Licht ausschließlich in der ursprünglichen Richtung fortpflanzte. Man sieht, dass es sich in den Schatten hinein ausbreitet, und es ist schwer, den Punkt, wo es haltmacht, festzulegen. Ich habe Licht bis mitten im Schatten eines 2 cm breiten Maßstabs gesehen ...“

Augustin Fresnel, *Théorie de la lumière*

10.1 Interferenz und Beugung

Dass Licht eine Welle ist, hat man erst viel später erkannt als beim Schall. Schuld daran war erstens die viel kleinere Wellenlänge. Der Schall geht ohne weiteres „um die Ecke“, Licht tut dies nur bei winzigen Öffnungen. Zweitens macht die mangelnde Kohärenz der üblichen Lichtquellen Interferenzerscheinungen selten und schwer beobachtbar. Bei einer Schallquelle, z. B. in Musikinstrumenten, schwingen alle Teile i. Allg. mit gleicher Frequenz und in gleicher Phase, was von allen Lichtquellen nur beim Laser der Fall ist. Die typischen Welleneigenschaften des Lichts spielen daher im Alltagsleben keine so offensichtliche Rolle wie z. B. bei den Wasserwellen, und viele Ergebnisse der Interferenzoptik schlagen der Alltagsintuition geradezu ins Gesicht.

× Beispiel ...

Ein Kind stellt sich hinter einen Baum und ruft „Such mich!“ Warum hört man das Kind, sieht es aber nicht?

Für die fast 1 m langen Schallwellen ist der Baum kein Hindernis, wohl aber für die knapp $1 \mu\text{m}$ langen Lichtwellen.

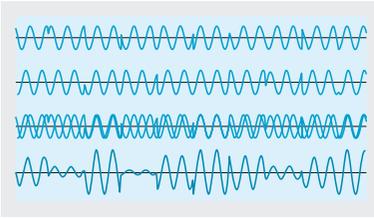


Abb. 10.1. Im Licht eines thermischen Strahlers (z. B. einer Glühlampe) stecken viele rasch und unregelmäßig aufeinander folgende Wellenzüge. Überlagerungen solcher unabhängiger Vorgänge ergibt kein klares Interferenzfeld (weder durchweg hell noch durchweg dunkel: *untere Kurve*)

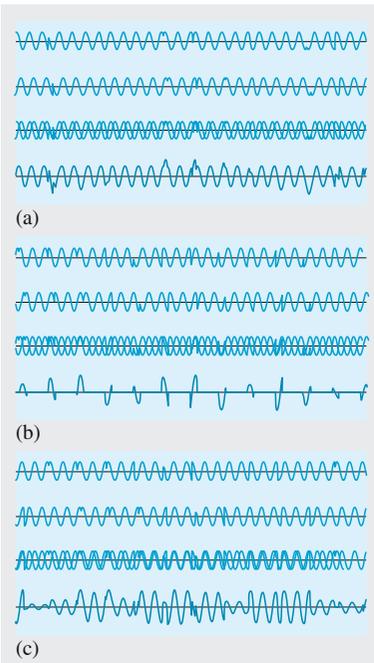


Abb. 10.2. Zwei Teilbündel aus demselben Wellenzug interferieren konstruktiv (a) oder destruktiv (b), je nach dem Gangunterschied. Bei etwas größerem Gangunterschied (c), größer als die mittlere Länge der Wellenzüge ohne Phasensprung, geht aber die Kohärenz, d. h. die Interferenzfähigkeit verloren

10.1.1 Kohärenz

Damit zwei oder mehr Lichtwellen geordnete und stationäre Interferenzerscheinungen erzeugen können, müssen sie **kohärent** sein.

Lichtwellen sind kohärent, wenn die Zeitabhängigkeit ihrer elektrischen Felder $E_1(t)$ und $E_2(t)$ bis auf eine Phasenverschiebung τ die gleiche ist: $E_2(T) = \text{const} \cdot E_1(t + \tau)$.

Diese Definition gilt selbstverständlich für alle Wellen und sogar für die Wellenfunktionen der Quantenphysik. Bei rein harmonischen Wellen heißt das, dass die Frequenzen übereinstimmen müssen; die Phasen dürfen eine konstante Differenz gegeneinander haben.

Da das spontan emittierte Licht eines heißen Körpers von einzelnen, voneinander unabhängigen Atomen ausgestrahlt wird, ist es ausgeschlossen, dass zwei verschiedene Lichtquellen zufällig genau die gleiche Schwingung ausführen, also kohärente Wellenzüge ausstrahlen. Wellenzüge, die zur Interferenz gebracht werden sollen, müssen i. Allg. aus der gleichen Lichtquelle stammen (man beachte, dass das Huygens-Fresnel-Prinzip schon die Ausbreitung *eines* Wellenzuges als Interferenz mit sich selbst beschreibt). Infolge Spiegelung, Brechung, Streuung oder Beugung können solche Wellenzüge aus der gleichen Quelle aber, *bevor* sie sich überlagern, verschiedene Lichtwege zurückgelegt haben, sodass zwischen ihnen **Gangunterschiede** bestehen. Im Fall der Streuung ist zu beachten, dass sie selbst kohärent sein muss, d. h. dass zwischen Auftreffen und Wiederaussendung des Lichts kein Prozess eingeschaltet ist, der die Schwingungsform verändert.

Auch wenn man einen Wellenzug teilt und mit sich selbst interferieren lassen will, darf der Gangunterschied zwischen den Teilbündeln eine gewisse **Kohärenzlänge** L nicht überschreiten. Sie ist günstigstenfalls so groß wie die mittlere Länge des von einem einzelnen Atom ausgesandten Wellenzuges: $L = c\tau$ (τ : diese Verzögerungszeit wird auch **Kohärenzzeit** genannt; hier: mittlere Dauer des Emissionsaktes). Wenn der Gangunterschied größer ist als L , d. h. der Laufzeitunterschied größer als τ , sind an den beiden Wellenzügen ganz verschiedene Atome beteiligt, die voneinander nichts wissen und deren Emissionen keinerlei feste Phasenbeziehungen haben. τ ist für isolierte Atome etwa 10^{-8} s, bei größerer Dichte und Temperatur der Lichtquelle i. Allg. kürzer (vgl. Abschn. 13.3.2), also L höchstens einige Meter.

Der gedämpfte Wellenzug mit der Abklingzeit τ , den ein Atom emittiert, kann keiner ganz scharfen Spektrallinie entsprechen, sondern deren Breite ist $\Delta\omega \approx \tau^{-1}$. Benutzt man einen noch breiteren Ausschnitt aus dem Spektrum (Breite $\Delta\omega$), dann verringern sich Kohärenzzeit und -länge noch weiter auf $\tau \approx 1/\Delta\omega$, $L \approx c\tau \approx c/\Delta\omega$. Weil sich die Kohärenz entlang der Propagationsrichtung der Lichtwelle auswirkt, spricht man von **longitudinaler Kohärenz**.

Mit zu ausgedehnten Lichtquellen darf man auch nicht arbeiten, um Interferenz zu erzeugen. Ihre zulässige Ausdehnung b steht mit dem Öffnungswinkel σ des benutzten Bündels im Zusammenhang $b < \lambda/(4\sigma)$. Der

Winkel σ darf nicht größer sein als die Breite eines Beugungsstreifens, der entstände, wenn man die Lichtquelle als beugendes Hindernis oder Loch benutzte (Abschn. 10.1.4). Sonst mischen sich die verschiedenen Beugungsordnungen oder, anders ausgedrückt, die Beiträge der einzelnen Teile der Lichtquelle und zerstören die **transversale Kohärenz**.

Bei der **erzwungenen** oder **stimulierten Emission** ist die Lage anders. Hier veranlasst eine auffallende Lichtwelle geeigneter Frequenz angeregte Atome, synchron mit dem einfallenden Lichtfeld zu schwingen und gespeicherte Energie abstrahlen. Dann besteht eine feste Phasenbeziehung zwischen auslösender und emittierter Welle und somit auch zwischen den Emissionen der einzelnen Teile des erzwungen emittierenden Mediums. Laserlicht wird durch stimulierte Emission erzeugt und ist daher viel kohärenter als spontan emittiertes Licht. Die Kohärenzlänge kann viele km betragen. Interferenz- und Beugungsexperimente lassen sich daher mit Laserlicht leicht vorführen.

10.1.2 Die Grundkonstruktion der Interferenzoptik

Wir betrachten zwei kohärente punktförmige Lichtquellen A, B im Abstand d voneinander. Man kann sie auf verschiedene Arten herstellen: *Thomas Young* führte das berühmte **Doppelspalt-Experiment** mit zwei Löchern oder Schlitzen in einer Blende ein. In *Augustin Fresnels* Konstruktion werden die beiden äquivalenten Lichtquellen (Abb. 10.3) mit einem Winkelspiegel oder einem Biprisma (Abb. 10.9) erzeugt.

Berge beider Teilwellen überlagern sich, d. h. Helligkeit herrscht an allen Stellen P , die von den Lichtquellen A und B gleich weit entfernt oder um ein ganzzahliges Vielfaches einer Wellenlänge verschieden weit entfernt sind: $PA - PB = m\lambda, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Alle solche Punkte mit gegebenem m liegen auf einer Hyperbel mit den Brennpunkten A und B . Bei der Hyperbel ist ja die Differenz der Abstände von den Brennpunkten konstant gleich der doppelten Halbachse a (s. Beispiel Seite 520):

$$PA - PB = m\lambda = \pm 2a. \tag{10.1}$$

Man sieht diese Hyperbelmuster sehr schön, wenn man zwei sehr exakt auf Glasplatten oder Transparentfolie gezeichnete Scharen äquidistant konzentrischer Kreise übereinander legt und ihre Mittelpunkte leicht gegeneinander verschiebt (Abb. 10.5, 10.6). Räumlich gesehen verstärken sich die Teilwellen auf einer Schar konfokaler Rotationshyperboloide.

In der Praxis ist der Abstand d immer sehr klein gegen den Abstand zum Schirm, wo man das Interferenzbild auffängt. Wenn also P sehr weit entfernt ist, geht die Hyperbel in ihre Asymptote über. Aus dem Dreieck ABQ (Abb. 10.4), das dann rechtwinklig wird, liest man als Bedingung für die Richtung φ der **Interferenzmaxima** ab

$$\boxed{\sin \varphi = \frac{m\lambda}{d}}. \tag{10.2}$$

Vielfach handelt es sich um kleine Winkel φ . Dann kann man noch mehr vereinfachen:

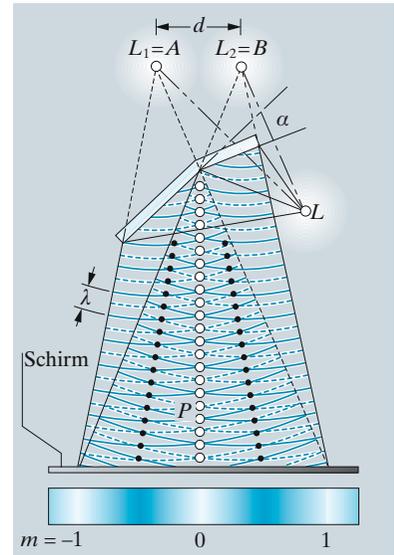


Abb. 10.3. Erzeugung kohärenter Lichtbündel mit dem Fresnel-Doppelspiegel. (Der Winkel α zwischen den Spiegeln weicht im Experiment nur um wenige Minuten von 180° ab)

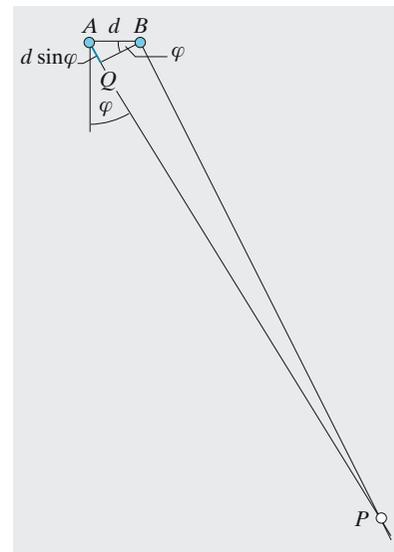


Abb. 10.4. Zwei kohärente Wellen, die von A bzw. B ausgehen, haben einen Gangunterschied $g = d \sin \varphi$, wenn sie sich in der Richtung φ wieder vereinigen. Bei $g = m\lambda, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ herrscht Helligkeit, bei $g = (m + 1/2)\lambda$ Dunkelheit

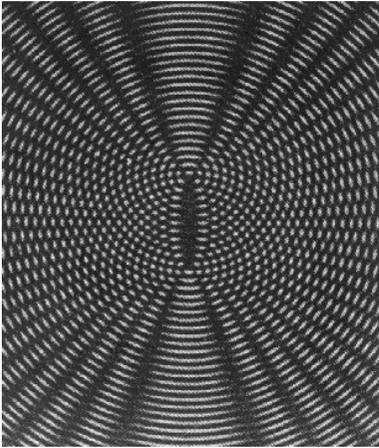


Abb. 10.5. Interferenz der Wellenfelder zweier Punktquellen; hier dargestellt als „Moiré-Muster“ durch Überlagerung zweier Glasplatten mit je einem System schwarz gezeichneter konzentrischer Kreise

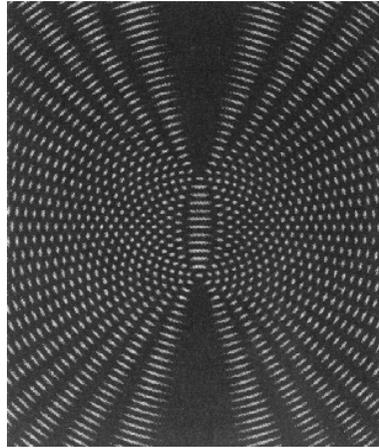


Abb. 10.6. Gegenüber Abb. 10.5 ist der Abstand der Wellenzentren um eine halbe Wellenlänge erhöht. Ergebnis: Das Interferenzmuster kehrt sich um. Verschiebung um eine ganze Wellenlänge erzeugt ein Maximum mehr oder weniger

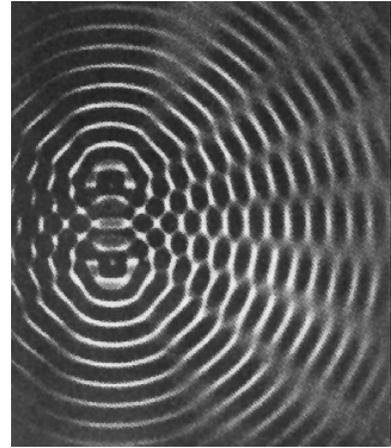


Abb. 10.7. Bei Wasserwellen sind die Interferenzmuster nicht ganz so deutlich wie beim Moiré-Verfahren mit seiner Rechteckwelle von Hell und Dunkel. Man bedenke, dass bei der Wasserwelle die Linsenwirkung der Wellenkämme unvollkommen bleiben muss

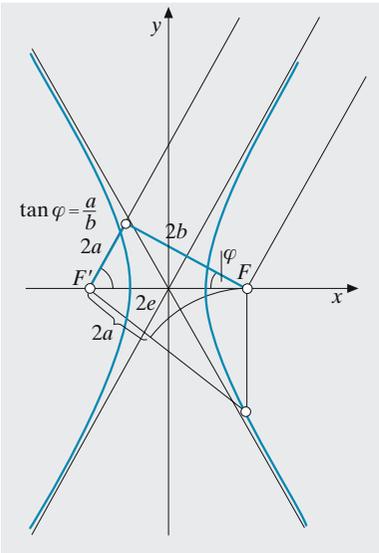


Abb. 10.8. Setzt man kohärente Lichtquellen in die beiden Brennpunkte F, F' , dann gibt jede Hyperbel die Orte gleichen Gangunterschiedes an

$$\varphi \approx \frac{m\lambda}{d}. \tag{10.3}$$

Interferenzminima mit völliger Dunkelheit entstehen, wo ein Berg der einen Welle auf ein Tal der anderen trifft, d. h. wo der Wegunterschied ein halbzahliges Vielfaches von λ ist:

$$\sin \varphi = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d} \quad \text{bzw.} \quad \varphi \approx \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}. \tag{10.4}$$

Offenbar hängt die Richtung φ bei gegebenem d von der Wellenlänge ab. Die roten Maxima (mit $\lambda \approx 800$ nm) liegen fast beim doppelten φ wie die violetten ($\lambda \approx 400$ nm). Wenn die Quellen weißes Licht aussenden, sind (abgesehen vom nullten Maximum in der Mittelebene) alle Maxima farbig, außen rot, innen violett. Das Rot des ersten Maximums fällt fast auf das Violett des zweiten. Bei den höheren Maxima wird die Überdeckung noch stärker.

✕ Beispiel...

Zur Geometrie der Interferenzhyperbeln. Folien für Moiré-Muster kann man unter www.gerthsen.de erhalten. Abbildungen 10.5–7 nach R. W. Pohl, aus H.-U. Harten: Physik für Mediziner, 4. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1980).

Die Lichtquellen (Abstand $d = 2e$) liegen in den Brennpunkten F, F' der Hyperbeln

$$(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1,$$



wobei $2a = m\lambda$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) den Gangunterschied für konstruktive Interferenz (helle Streifen) bezeichnet und $e^2 = a^2 + b^2$ die Exzentrizität angibt. Bei großen Abständen ($x, y \gg e$) können die Hyperbeln durch ihre Asymptoten $y = \pm(b/a)x$ ersetzt werden, die sich für $b \gg a$ eng an die y -Achse schmiegen. Dann gilt $e \sim b$ und man findet für kleine Winkel φ ein Ergebnis in Übereinstimmung mit (10.3):

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{a}{\sqrt{e^2 - a^2}} \approx \frac{2a}{2e} = \frac{m\lambda}{d}.$$

Die hellen Interferenzstreifen bilden mit der y -Achse den Winkel φ . Man kann zeigen (Aufgabe 10.1.1), dass der Abstand der virtuellen Lichtquellen $d = 2/\alpha$ beträgt für einen fresnelschen Winkelspiegel mit dem kleinen Winkel α und dem Abstand der Lichtquelle l . In der Praxis beträgt z. B. $\alpha = 10'$, und für die gelbe D -Linie des Natriumdampfes bei $\lambda = 590$ nm erwartet man auf einem Schirm in der Entfernung von $y = 2m$ Interferenzstreifen im Abstand von $\Delta x = y\lambda/2 = 2$ mm.

x Beispiel ...

Das fresnelsche Biprisma. Die virtuellen Lichtquellen des youngschen Doppelspalt-Experimentes kann man auch mit dem fresnelschen Biprisma erzeugen (Abb. 10.9). Hier ist $\gamma = b/s'$, $\beta = b/s$, $\gamma = 2(n - 1)\alpha - \beta$ (vgl. Abschn. 9.1.5, alle Winkel klein), also gilt

$$\gamma = \frac{2(n - 1)\alpha s}{s + s'}.$$

Die virtuellen Lichtquellen haben den Abstand $d = \gamma(s + s')$ und der Streifenabstand beträgt am Schirm

$$\Delta x = (s + s') \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{\gamma}.$$

Mit einem Biprisma wurden auch erstmals Elektronenstrahl-Interferenzen beobachtet (vgl. Abschn. 13.2.2).

10.1.3 Gitter

Jetzt betrachten wir viele (N) kohärente Lichtquellen. Jede soll vom Nachbarn den Abstand d haben. Der Abstand l des Schirms sei groß gegen die Länge Nd des ganzen Gitters. Zwischen zwei Wellen, die aus Nachbarquellen kommen, herrscht der Gangunterschied $d \sin \varphi$, also die Phasendifferenz

$$\delta = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi. \tag{10.5}$$

Die Amplituden der Einzelwellen (sie mögen den Betrag A' haben) addieren wir am besten im Zeigerdiagramm. Wir erhalten einen Polygonzug aus Amplitudenzeigern der Länge A' , wobei jeder Zeiger gegen den vor-

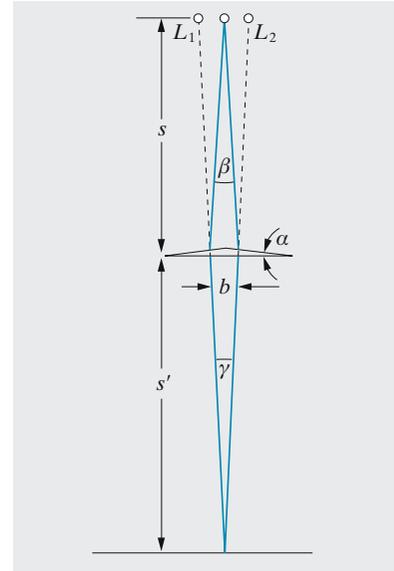


Abb. 10.9. Das Fresnel-Biprisma vereinigt zwei Teilbündel, die infolge ihres sehr geringen Gangunterschieds kohärent sind, auf dem Schirm

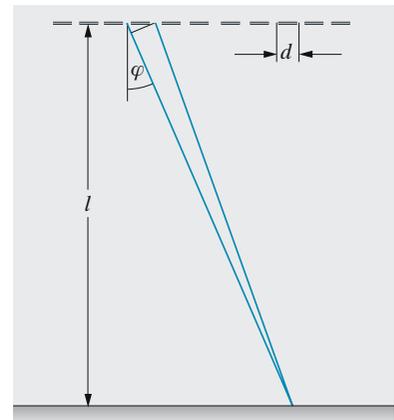


Abb. 10.10. Beugungsgitter. Wenn Teilwellen aus benachbarten Spalten den Gangunterschied $(k + 1/2)\lambda$ haben, herrscht Dunkelheit – aber nicht nur dann

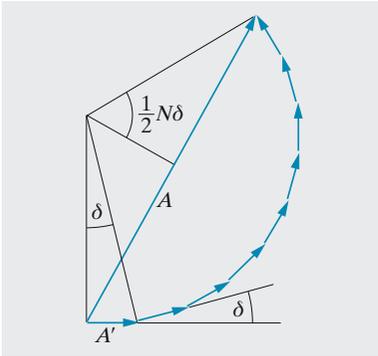


Abb. 10.11. Überlagerung vieler gleich starker Wellen mit der Phasenverschiebung δ zwischen je zweien, z. B. der Teilwellen aus den Spalten eines Beugungsgitters

Abb. 10.12a–c. Amplituden (*dünn*) und Intensitäten (*dick*) des monochromatischen Lichts hinter einer Reihe sehr feiner äquidistanter Spalte in Abhängigkeit von der Richtung α . Auf der Abszisse ist der Phasenunterschied $\varphi = 2\lambda^{-1}d \sin \alpha$ aufgetragen. (a) 2 Spalte, (b) 5 Spalte, (c) 10 Spalte

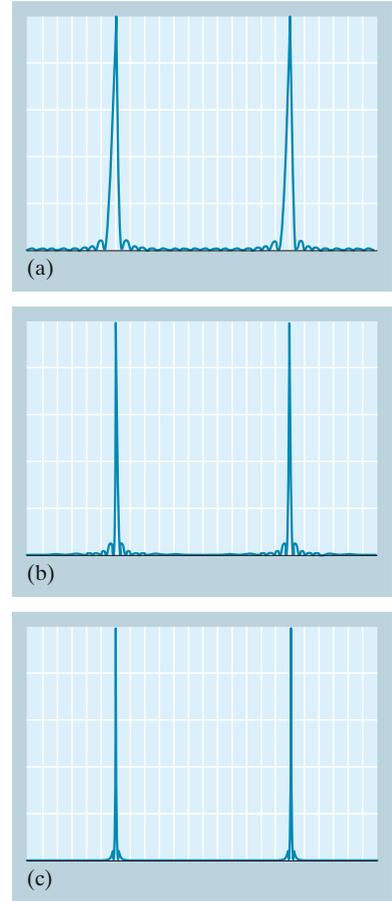
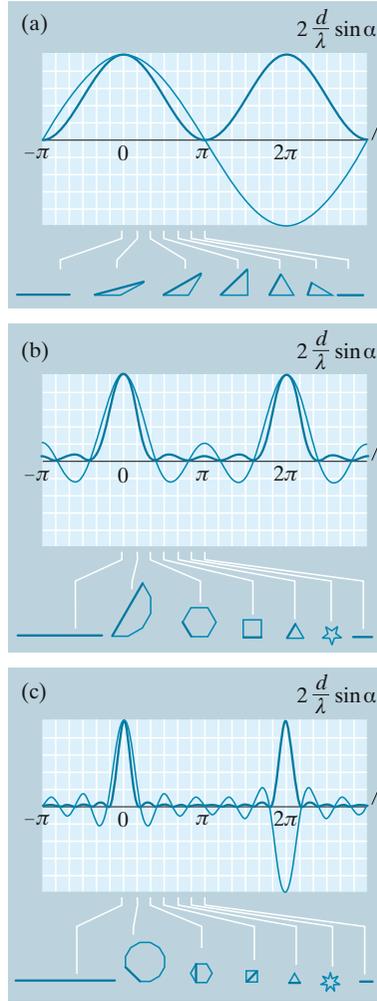


Abb. 10.13. Intensitätsverteilung hinter einem Beugungsgitter aus (a) 20, (b) 50, (c) 100 Spalten

hergehenden um den Phasenwinkel δ verdreht ist. Die Gesamtamplitude ist die Länge der Sehne des Polygonzuges A .

Bei $\delta = 0$ ist der Polygonzug gestreckt: $A = NA'$, ebenso bei Phasenwinkeln $\delta = m \cdot 2\pi$, also bei $d \sin \varphi = m\lambda$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Das ist unsere alte Maximumsbedingung (10.2). Was passiert zwischen den Maxima, d. h. wie lang ist die Sehne des Polygonzuges? Dieser ist eingeschrieben in einen Kreis, dessen Radius r sich ergibt als

$$r = \frac{A'}{2 \sin(\delta/2)} \quad (10.6)$$

Der ganze Polygonzug umspannt den Phasenwinkel $N\delta$, seine Sehne ist

$$A = 2r \sin \frac{N\delta}{2} = A' \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} = A' \frac{\sin(\pi Nd\lambda^{-1} \sin \varphi)}{\sin(\pi d\lambda^{-1} \sin \varphi)} \quad (10.7)$$

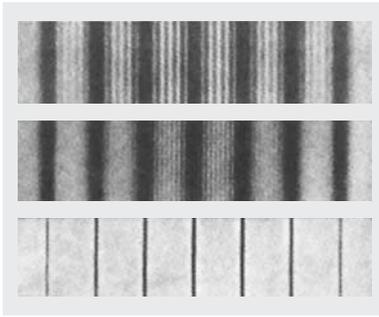


Abb. 10.14. Beugung eines monochromatischen Parallelbündels an Gittern mit 6, 10 und 250 Spalten (photographisches Negativ nach R. W. Pohl). Das Gitter mit den meisten Spalten erzeugt die wenigsten Linien, denn die Zwischenmaxima sind praktisch unterdrückt. Das Beugungsbild ist eine Art Fourier-Transformierte der Gitterstruktur. (Aus H.-U. Harten: *Physik für Mediziner*, 4. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1980))

Bei $\delta = m2\pi$, also $\sin \varphi = m\lambda/d$, ergibt die Regel von *de l'Hospital* $A = NA'$, wie erwartet. Zwischen zwei solchen Maxima verschwindet der Zähler $(N - 1)$ -mal: Es gibt $N - 1$ Dunkelheiten, nicht nur eine wie bei zwei Lichtquellen. Die Maxima sind N -mal schärfer als bei zwei Quellen, denn sie reichen nur beiderseits bis zur benachbarten Dunkelheit. Das Gitter macht umso schärfere Spektrallinien, je mehr Striche es hat. Abbildungen 10.12 und 10.13 zeigen die Amplitudenverteilung $A(\varphi)$ und die Intensitätsverteilung $I(\varphi) \sim A^2(\varphi)$.

10.1.4 Spalt- und Lochblende

Einen Spalt der endlichen Breite D , beleuchtet durch ein Parallelbündel, können wir auffassen als ein Gitter aus unendlich vielen, unendlich dichten Spalten, deren Breite d demnach so gegen Null gehen muss, dass $Nd = D$ bleibt. In (10.7) geht somit auch δ gegen Null, und daher ist sicher $\sin(\delta/2) = \delta/2$. Wir drücken alles durch D statt durch $d = D/N$ aus und benutzen (10.5):

$$A = NA' \frac{\sin(\pi D \lambda^{-1} \sin \varphi)}{\pi D \lambda^{-1} \sin \varphi} \quad (10.8)$$

In dieser Verteilung (Abb. 10.16) nehmen die Beugungsmaxima sehr schnell an Höhe ab, im Gegensatz zum Gitter. Mathematisch kommt dies vom Fortlassen des Sinus im Nenner von (10.8): Da $d = 0$ ist, wandern die Hauptmaxima unendlich weit auswärts. Was wir sehen, sind die immer kleiner werdenden Nebenmaxima, von denen es wegen $N = \infty$ beliebig viele gibt. Beleuchtet man mit weißem Licht, werden die Beugungsstreifen bunt.

Das Beugungsbild einer Kreislochblende ist natürlich ebenfalls symmetrisch um die Mittelachse. Es lässt sich nicht mehr mit elementaren Funktionen berechnen, ähnelt aber dem Beugungsbild des Spaltes, wobei man die Koordinate x auf dem Schirm durch den Abstand von der Mittelachse ersetzen muss. Die Intensität der Nebenmaxima fällt noch schneller ab als beim Spalt, denn die ungefähr gleiche Strahlungsleistung muss sich ja auf immer größere Ringflächen verteilen (Abb. 10.16). Auch die Abstände der Maxima liegen etwas anders, nämlich

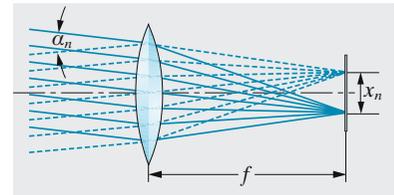


Abb. 10.15. Die Linse bildet die Parallelbündel, die zwei Beugungsmaxima entsprechen, auf einen Schirm in der Brennebene ab. Der Winkel α_n zwischen den Richtungen der Bündel übersetzt sich so in den Abstand $x_n = f\alpha_n$ der Beugungsstreifen

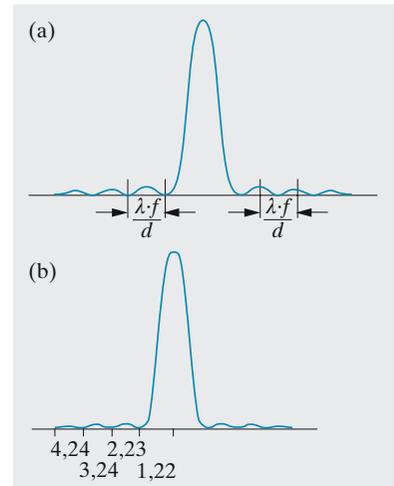


Abb. 10.16. Intensitätsverteilung der Fraunhofer-Beugungsbilder (a) eines Spaltes der Breite d ; (b) eines Kreisloches vom Radius r ; die Zahlen geben die Radien der dunklen Ringe in der Einheit $\lambda f/(2r)$

$$\sin \varphi_m = \frac{k_m \lambda}{r}, \quad k_1 = 0,61; \quad k_2 = 1,12; \quad k_3 = 1,62; \dots \quad (10.9)$$

Die Zahlen k_m hängen mit den Nullstellen der **Bessel-Funktion** zusammen. r ist der Radius des Loches.

× Beispiel ...

In der **Fovea centralis** des Menschauges sind die **Zäpfchen** etwa $5 \mu\text{m}$ voneinander entfernt. Ist das Zufall oder konstruktive Anpassung an die optischen Eigenschaften des Auges?

Die Pupille des menschlichen Auges mit einem mittleren Radius $r \approx 2 \text{ mm}$ erzeugt ebenfalls auf der 24 mm dahinter liegenden Netzhaut ein Beugungsscheibchen. Im Augapfel herrscht die Brechzahl $1,33$, also wird die Wellenlänge dort nur $\frac{3}{4}$ so groß wie draußen. Gelbes Licht ($\lambda = 600 \text{ nm}$ in Luft) erzeugt einen Beugungskegel mit dem Öffnungswinkel $2k_1 \lambda / r = 1,22 \lambda / r = 2,7 \cdot 10^{-4} = 0,9'$. Der Scheibchenradius von $6 \mu\text{m}$ entspricht dem mittleren Abstand zweier Netzhautrezeptoren (Zäpfchen). Die Rasterung der Netzhaut ist also gerade so weit getrieben, dass das **Auflösungsvermögen des Auges** voll ausgenutzt wird.

10.1.5 Auflösungsvermögen optischer Geräte

Teleskope. Jede Linse, begrenzt durch ihren Rand oder ihre Fassung, wirkt als beugende Öffnung und entwirft auch von einem unendlich entfernten Punkt (z. B. einem Stern) keinen scharfen Bildpunkt, sondern ein **Beugungsbild** gemäß Abb. 10.16b. Selbst wenn man von dessen Hauptmaximum redet, erhält man ein Beugungsscheibchen vom Winkeldurchmesser $1,22 \lambda / r$. Zwei nahe beieinander stehende Sterne lassen sich im Fernrohr nur trennen, wenn ihre Beugungsscheibchen sich nicht überdecken. Der Sehwinkel zwischen den beiden Sternen muss also größer sein als λ / r . Das Auflösungsvermögen eines Fernrohrs wird umso besser, je kleiner λ und je größer die Objektivöffnung r ist. Radioteleskope arbeiten mit sehr großem λ und müssen daher auch riesige r haben. Die Auflösung optischer Fernrohre erreichen und übertreffen sie erst durch **Langbasis-Interferometrie** (engl. (Very) Long Baseline Interferometry (V)LBI), d. h. Kopplung zweier sehr entfernter Teleskope, deren Abstand dann die Rolle von r übernimmt.

Mikroskope. Beim Mikroskop ist das Licht, das durchs Objektiv tritt, natürlich nicht parallel. Betrachtet man als Objekt nur einen hellen Punkt, hat das Bündel den Öffnungswinkel φ mit $\sin \varphi = r / f$ (r : Radius der Objektivblende, f : Abstand Objekt–Objektiv \approx Brennweite des Objektivs). Verglichen damit ist der Strahlengang hinter dem Objektiv fast parallel, denn der Tubus ist sehr lang, verglichen mit f . Die Situation ist also genau umgekehrt wie beim Fernrohr. Umkehrung des Strahlenganges ändert die optischen Verhältnisse nicht. Unser leuchtender Objektpunkt erzeugt in der Bildebene des Objektivs ein Beugungsscheibchen, das einem Kegel vom Öffnungswinkel $1,22 \lambda / r$ entspricht. Ein anderer leuchtender Objektpunkt muss mindestens um diesen Winkel, d. h. in der Objektebene um

den Abstand $x_{\min} = 1,22 f \lambda / r$ davon entfernt sein, damit die Scheibchen nicht verschmelzen.

Die numerische Apertur

$$NA \approx \sin \varphi \simeq r/f \quad (10.10)$$

kennzeichnet das Auflösungsvermögen eines Objektivs mit $x_{\min} \approx \lambda/NA$.

Ein Mikroskop löst umso besser auf, je kleiner λ und je größer φ ist. Um die Vergrößerung kurzbrennweitiger Objektive auszunutzen, bringt man zwischen Objekt und Objektiv ein brechendes Medium (Immersionöl), das die Wellenlänge auf λ/n verringert. Dann ist

$$x_{\min} = \frac{\lambda}{n \sin \varphi}, \quad (10.10')$$

die numerische Apertur vergrößert sich auf $NA = n \sin \varphi$.

Abbes Theorie. Ein Objekt, das wesentlich kleiner ist als die Wellenlänge, beeinflusst die Wellenausbreitung nur dadurch, dass von ihm eine kugelförmige Huygens-Sekundärwelle als **Streuquelle** ausgeht. Diese Streuquelle ist in ihrer Intensität abhängig von der Größe des Objekts, hat aber immer Kugelform, unabhängig von der Form des sehr kleinen Objekts. Dementsprechend kann diese Welle auch keine Information über die Form des Objekts enthalten. Man kann nur feststellen, dass etwas Streuendes da ist, aber nicht, wie es aussieht. Im schrägen Lichtbündel sieht man zwar Staubteilchen tanzen (Sonnenstäubchen), erkennt aber nicht ihre Form. Im **Ultramikroskop** (*Zsigmondy* und *Siedentopf*) nutzt man dies zur Zählung von Teilchen aus.

Formen werden erst bei Abmessungen auflösbar, die von der Größenordnung λ oder größer sind. Genauere Auskünfte gibt eine Überlegung, die in etwas anderer Form *Ernst Abbe* angestellt hat. Man betrachte z. B. ein Objekt, das aus zwei leuchtenden Punkten mit einem Abstand d besteht, z. B. zwei feinen Löchern in einer undurchsichtigen Folie. Es gilt zunächst nur zu entscheiden, ob es sich um einen oder zwei helle Punkte handelt. Das Objekt werde von unten durch eine ebene Welle (ein paralleles Bündel) beleuchtet. Von *einem* sehr kleinen Loch geht dann eine Kugelwelle aus. Die beiden kohärenten Kugelwellen, die von *zwei* Löchern ausgehen, bilden ein Beugungsmuster mit dem Maximum 0. Ordnung in der Mitte, umgeben von einem ersten Minimum, das annähernd einen Kegel mit dem Öffnungswinkel φ bildet, wobei $\sin \varphi = \lambda/d$ ist. Wenn nur das Innere dieses Kegels, d. h. das 0. Maximum ins Objektiv fällt, ist dieses Lichtsignal zum Verwechseln ähnlich dem entsprechenden Ausschnitt der von *einem* Loch ausgehenden Kugelwelle. Dieser Teil der Welle lässt daher keine Rückschlüsse darauf zu, ob er von einem oder von zwei Löchern ausgeht. Erst wenn mindestens auch das 1. Minimum vom Objektiv erfasst wird, ist eine solche Unterscheidung möglich. Der Objektivdurchmesser muss also, vom Objekt aus gesehen, unter einem Sehwinkel 2φ erscheinen, wo-

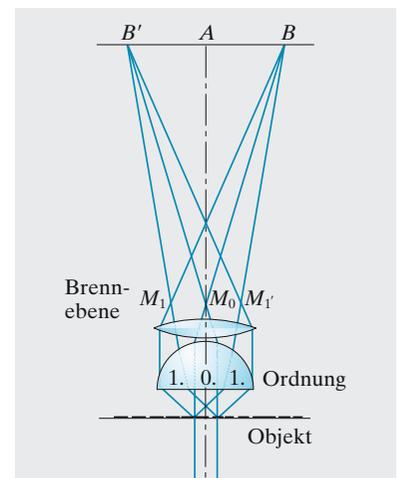


Abb. 10.17. Zum Auflösungsvermögen eines Mikroskops nach Abbe

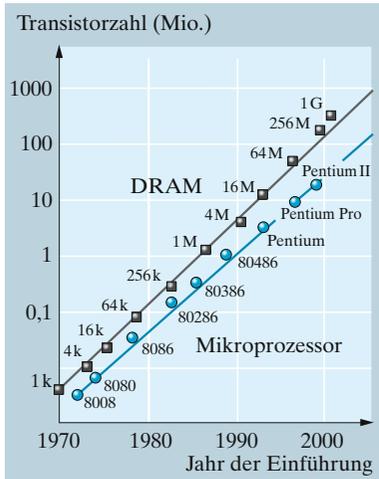


Abb. 10.18. Mooresches Gesetz (1968) von der Verdopplung der Transistoren auf einem Chip alle 1,5 Jahre. Die Größe der Speicherchips (DRAM, Dynamic Random Access Memory) ist hier in Bit aufgetragen, also 1 M = 1 Megabit

bei $\sin \varphi = \lambda/d$. Der kleinste Abstand, den zwei Objekte haben dürfen, damit sie im Mikroskop noch getrennt erscheinen, ist also wieder

$$d = \frac{\lambda}{\sin \varphi} = \frac{\lambda}{NA}. \quad (10.10'')$$

Einzelheiten, die größer sind als die Grenze d , senden mehr als nur das 0. Maximum und 1. Minimum ins Objektiv. Sie sind daher mit mehr Details zu erkennen, ähnlich wie man eine Funktion mit umso mehr Details synthetisieren kann, je mehr von ihren Fourier-Komponenten man berücksichtigt.

x Beispiel ...

Die Auflösungsgrenze der Mikroskopie wurde durch Objektivkonstruktion und die Verwendung von Strahlen kürzerer Wellenlänge bis an die theoretisch mögliche Beugungsgrenze hinausgeschoben und liegt bei der Lichtmikroskopie bei etwa $0,2 \mu\text{m}$. Die **optische Lithographie** kann man als Umkehrung der Mikroskopie betrachten, mit ihrer Hilfe werden heute mikroelektronische Schaltungen und andere Objekte der Mikro- und Nanotechnologie hergestellt. Die heutigen Formen der **Lithographie** sind Nachfolger des Steindruckverfahrens gleichen Namens, das Alois Senefelder (1771–1834) vor mehr als 200 Jahren erfunden hat.

Gordon E. Moore hat 1968 das nach ihm benannte **mooresche Gesetz** (Abb. 10.18) formuliert, nach dem sich die Anzahl der Transistoren auf einem Prozessor alle 1,5 Jahre verdoppeln sollte. Die Entwicklung der Mikroelektronik vollzieht sich tatsächlich seit mehr als 30 Jahren mit bemerkenswerter Stetigkeit, die wesentlich auf die Entwicklung der optischen Lithographie zurückzuführen ist. Höhere Auflösung ermöglicht höhere Strukturdichte, und diese kann durch Verwendung immer kürzerer Wellenlängen erzielt werden. Bis vor wenigen Jahren wurden die Masken mit der Struktur von einer so genannten i-line-Optik bei 365 nm , einer Wellenlänge der Quecksilberdampf Lampe, projiziert. Inzwischen ist das Licht des KrF-Lasers (248 nm) Stand der Technik, und die nächste Wellenlänge (ArF-Laser, 198 nm) wird bereits eingeführt. Das immer kurzwelligere UV-Licht stellt wachsende technologische Herausforderungen, weil neuartige optische Materialien entwickelt werden müssen, um überhaupt Linsen und Spiegel bauen zu können. Gegenwärtig wird die Grenze dieser technologischen Entwicklung bei 100 nm Strukturgröße vermutet, die etwa 2007 erreicht werden soll. In Abb. 10.19 wird die Herstellung eines mikroelektronischen Schaltkreises in wenigen Prozessschritten vorgestellt.

10.1.6 Auflösungsvermögen des Spektrographen

Wie wir schon wissen, erzeugt ein Gitter umso schärfere Hauptmaxima, je mehr Striche es hat (Abb. 10.12, 10.13). Die dazwischenliegenden Nebenmaxima verschwinden schließlich fast ganz. Das Maximum der Ordnung m liegt dort, wo Zähler und Nenner von (10.7) verschwinden:

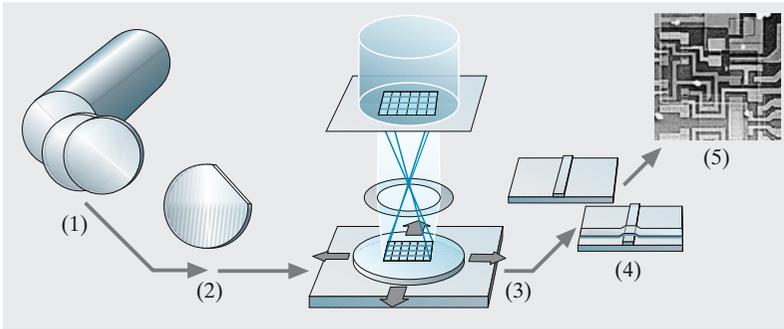


Abb. 10.19. Herstellung mikroelektronischer Schaltkreise. (1) Von einem Silizium-Einkristall werden dünne Scheiben („Wafer“) heruntergeschnitten. (2) Die Wafer werden atomar eben poliert und mit einem dünnen Film („Resist“) beschichtet. (3) Der Wafer wird auf einem „Wafer Stepper“ schrittweise mehrfach mit dem Bild der Strukturmaske belichtet. (4) Die Struktur (Leiterbahnen, Transistoren, ...) wird durch chemische Prozessschritte präpariert. Die Schritte (3) und (4) werden bei komplexen Schaltungen 20–30-mal wiederholt. (5) Der Wafer wird in die fertigen Schaltkreise zerschnitten, mit Zuleitungen versehen und in ein geeignetes Gehäuse mit Anschlüssen verpackt

$\pi d \lambda^{-1} \sin \varphi = m \pi$, also $\varphi_m \approx m \lambda / d$; die Minima liegen dort, wo nur der Zähler verschwindet, also im Abstand $\Delta \varphi \approx \lambda / (Nd)$. Die Minima, die unser Maximum beiderseits begrenzen, sind also nur um $\Delta \varphi = \lambda / (Nd)$ entfernt.

All dies betrifft monochromatisches Licht der Wellenlänge λ . Wenn wir außerdem noch Licht der Wellenlänge $\lambda + \Delta \lambda$ einstrahlen, liegt dessen Maximum der Ordnung m unter dem Winkel $m(\lambda + \Delta \lambda) / d$, d. h. um $m \Delta \lambda / d$ vom Maximum des Lichts mit λ entfernt. Die Spektrallinien lassen sich trennen, falls das zweite Maximum jenseits des ersten Minimums der ersten Linie liegt, d. h. wenn $m \Delta \lambda / d \geq \lambda / (Nd)$. Anders gesprochen muss ihr Abstand größer sein als ihre Halbwertsbreite, deren Winkeldurchmesser ebenfalls mit $\Delta \varphi_{1/2} = \lambda / (Nd)$ gemessen wird, Damit definieren wir das

Auflösungsvermögen des Gitters

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} \leq m N . \tag{10.11}$$

Es hängt merkwürdigerweise nicht von der Gitterkonstante d ab (je kleiner d , desto weiter wird allerdings das Spektrum gespreizt), sondern es wächst nur mit der Strichzahl N und der Ordnung m des benutzten Maximums (Abb. 10.21).

Es gibt Gitter mit mehr als 100 000 Strichen; bei Verwendung in der 3. Ordnung ist das Auflösungsvermögen 300 000, d. h. Wellen um 600 nm können noch getrennt ausgemessen werden, wenn sich ihre Wellenlängen um nur $\Delta \lambda = \lambda / (mN) = 2 \cdot 10^{-3}$ nm unterscheiden. Um

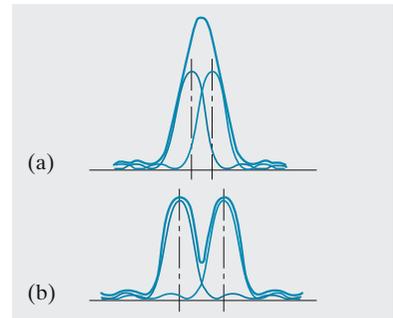


Abb. 10.20a,b. Bedingung für die Trennung von sich überlappenden Spektrallinien: Der Abstand der Maxima muss größer sein als die Halbwertsbreite

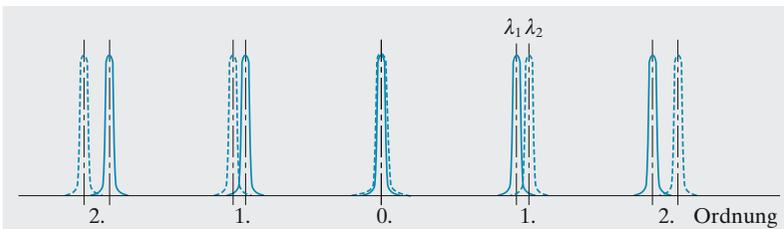


Abb. 10.21. Je größer die Beugungsordnung, desto stärker spreizt ein Gitter das Spektrum

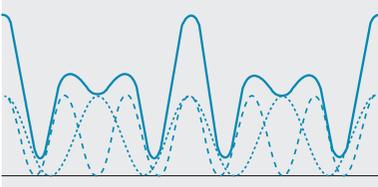


Abb. 10.22. Das Beugungsbild zweier Spalte ist zur Wellenlängenmessung ungeeignet. Die gestrichelten Kurven geben das Beugungsbild für zwei verschiedene Wellenlängen an, die durchgezogene Kurve deren Summe

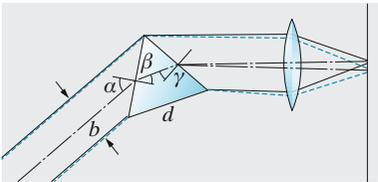


Abb. 10.23. Der Prismenspektrograph erzeugt auch bei günstigster Anordnung ein Beugungsbild des Spaltes (der hier sehr weit entfernt zu denken ist). Die Breite des Prismas bestimmt die Breite dieses Beugungsbildes und damit die Trennbarkeit der Spaltbilder für verschiedene Wellenlängen, d. h. das spektrale Auflösungsvermögen

diese Auflösung zu erzielen, muss das Gitter im Experiment natürlich vollständig ausgeleuchtet werden!

Das Auflösungsvermögen des Gitters lässt sich auch mit dieser einfachen Überlegung begründen: Zwei Teilwellen, die von den äußersten, um Nd voneinander entfernten Gitterstrichen in einem Maximum m -ter Ordnung zusammenlaufen, haben den Gangunterschied $g = Nd \sin \varphi_m$. Da dieses Maximum in der Richtung $\sin \varphi_m = m\lambda/d$ liegt, heißt das $g = Nm\lambda$. Für zwei Spektrallinien mit λ bzw. $\lambda + \Delta\lambda$ sind diese Gangunterschiede um $\Delta g = Nm \Delta\lambda$ verschieden. Die Gangunterschiede müssen um ungefähr eine Wellenlänge verschieden sein: $\Delta g = Nm \Delta\lambda \approx \lambda$, damit die beiden Linien trennbar sind. Die Beugung am Gitter ist auch ein Beispiel für **Vielfachinterferenz**.

Das lässt sich auf das Prisma übertragen (Abb. 10.23). Bei symmetrischem Durchgang hat das Licht an der Basis des Prismas mit der Breite d und der Brechzahl n den Lichtweg nd zurückzulegen. Für zwei Spektrallinien mit λ bzw. $\lambda + \Delta\lambda$ unterscheiden sich die Lichtwege um

$$d \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda .$$

Das muss etwa gleich λ sein, damit die Linien trennbar sind.

Das Auflösungsvermögen des Prismas,

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = d \frac{dn}{d\lambda} \tag{10.12}$$

ist einfach gleich der Basisbreite d mal der Dispersion $dn/d\lambda$ des Glases.

Man kann das auch anders einsehen. Jede Spektrallinie ist ein Bild des Eingangsspalts im Licht der jeweiligen Farbe. Selbst wenn dieser Spalt sehr eng ist, kann sein Bild nicht beliebig scharf werden: Die Breite $b = a \cos \alpha$ des Prismas, in Richtung des abgelenkten Lichtbündels gesehen (Abb. 10.23), wirkt als begrenzende Öffnung und erzeugt ein Beugungsbild, das – vom Prisma aus gesehen – den Winkel λ/b aufspannt. Zwei Spektrallinien mit λ bzw. $\lambda + \Delta\lambda$ müssen um mindestens diesen Winkel λ/b divergieren, damit sie trennbar sind. Bei symmetrischem Durchgang ist $\beta = \gamma/2$ (γ : Basiswinkel) und natürlich $\sin \alpha = n \sin \beta$. Der Ablenkwinkel $\varphi = 2\alpha - 2\beta$ ändert sich bei einer λ -Änderung von $\Delta\lambda$, also einer n -Änderung von $\Delta n = \Delta\lambda \, dn/d\lambda$ um

$$\Delta\varphi = 2 \Delta\alpha = 2 \frac{\sin(\gamma/2)}{\cos \alpha} \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda$$

(aus $\cos \alpha \, d\alpha = dn \, \sin(\gamma/2)$). Mit $b = a \cos \alpha$ und $d/2 = a \sin(\gamma/2)$ finden wir die Bedingung

$$\frac{\lambda}{a \cos \alpha} \approx 2 \frac{\sin(\gamma/2)}{\cos \alpha} \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda , \quad \text{also wieder} \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = d \frac{dn}{d\lambda} .$$

Da Dispersion immer mit Absorption verbunden ist, nutzt es nichts, die Glasdicke immer weiter zu steigern: Man würde zu viel Intensität verlieren. Im Gelben ist die Dispersion von Flintglas nach Abb. 9.22 etwa $dn/d\lambda =$

$0,01/100 \text{ nm} = 10^3 \text{ cm}^{-1}$. Mit $d = 10 \text{ cm}$ Glasdicke erreicht man also ein theoretisches Auflösungsvermögen $\lambda/\Delta\lambda \approx 10^4$. Das gelbe Na D-Dublett (589,0 und 589,6 nm) lässt sich noch trennen.

Anstelle von lichtdurchlässigen Gittern verwendet man häufig **Reflexionsgitter** (Spiegelgitter), die durch äquidistante Ritzung von spiegelnden Metallflächen erzeugt werden (Abb. 10.24). AB sei die Richtung der auf das Gitter fallenden Strahlen, die mit der Normalen den Winkel α bilden. BC ist die Richtung der ungebeugten reflektierten Strahlen. Unter dem Winkel β gegen die Normale in der Richtung BD gebeugte Strahlen, die von benachbarten Spalten B und B' kommen, haben den Gangunterschied $EB - FB'$:

$$EB - FB' = d \sin \alpha - d \sin \beta .$$

Sie werden sich also verstärken, wenn

$$m\lambda = d(\sin \alpha - \sin \beta) \tag{10.13}$$

oder wenn der einfallende und gebeugte Strahl auf derselben Seite der Normalen liegen:

$$m\lambda = d(\sin \alpha + \sin \beta) . \tag{10.14}$$

Vielstrahlinterferenzen des **Stufengitters** entstehen auch an einem treppenartigen Stoß spiegelnder Platten der Dicke d . Solche Treppen findet man auch auf den Flügeln der schönsten Tagfalter. Die Stufenhöhe ist von der Größenordnung λ , denn hier sollen ja satte Farben aus dem breiten Spektrum des Tageslichts erzeugt werden und keine hohe Auflösung eines engen Bereichs in höherer Ordnung. Auch die praktisch unendlich vielen Atomschichten in Kristallgittern wirken, allerdings nur für Röntgenlicht, als Stufengitter, das einen sehr scharfen Reflex nur dann liefert, wenn die Interferenzbedingung (*Bragg-Bedingung*, Abschn. 16.3.2) erfüllt ist. Das Treppchen- oder **Echelette-Gitter** wirkt im Sichtbaren genauso: Während ein übliches Strichgitter die Intensität auf sehr viele Ordnungen verteilt, kann man sie hier auf die Ordnung konzentrieren, die in Richtung der normalen Reflexion der Treppenstufen liegt.

Viele Schichten der Dicke $\lambda/(2n)$, die abwechselnd die Brechzahlen n_1 und n_2 haben, wirken als Stufengitter, denn jede Grenzschicht reflektiert phasenrichtig den Bruchteil $[(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)]^2$ des senkrecht einfallenden Lichts. Alle zusammen wirken als Spiegel. Manche Mollusken haben Hohlspiegel dieser Art als bilderzeugende Elemente in ihren Augen. Man hat sogar Strukturen gefunden, die wie eine **Schmid-Platte** den sphärischen Fehler zu korrigieren scheinen.

Zur Vermeidung der Absorption des langwelligeren infraroten oder sehr kurzwelligeren ultravioletten Lichts in Glas- oder Quarzlinse, die bei Plangittern zur Abbildung, d. h. zur Erzeugung des Spektrums in ihrer Brennebene dienen, verwendet man **Konkavgitter**. Das sind Gitter, die auf hochglanzpolierte metallische Hohlspiegel geritzt sind. Ihre Aufstellung erfolgt im **Rowland-Kreis** (Abb. 10.25). Spalt S und Gitter G befinden sich auf einem Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Krümmungsradius des Hohlspiegels ist. Man kann zeigen, dass dann die scharfen Beugungsspektren der verschiedenen Ordnungen ebenfalls auf diesem Kreis liegen, auf dem man zur Aufnahme der Spektren photographische Platten anbringt.

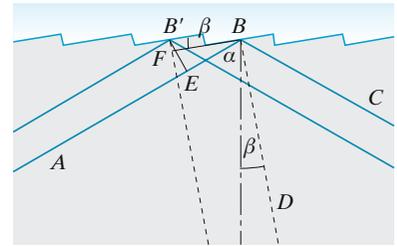


Abb. 10.24. Das Reflexionsgitter (Gitterkonstante $d = B'B$)

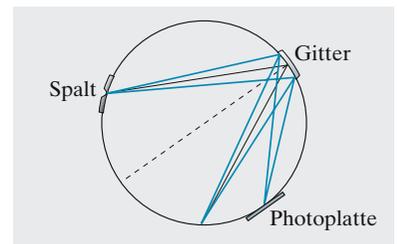


Abb. 10.25. Aufstellung eines Konkavgitters im „Rowland-Kreis“

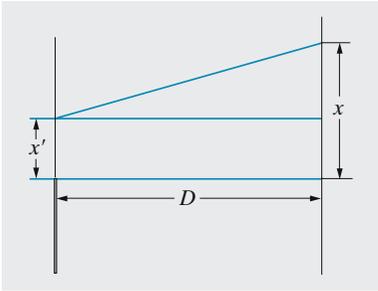


Abb. 10.26. Bezeichnungweise für die Koordinaten in der Beugungsebene und am Schirm

10.1.7 Fraunhofer-Beugung

Beim engen Spalt und Loch, beim Gitter haben wir so getan, als sei nicht nur die Lichtquelle, sondern auch der Schirm unendlich weit entfernt. Das sind die Voraussetzungen der **Fraunhofer-Beugung**.

Die Amplitude an einer Stelle x des Schirms (Abb. 10.26) erhalten wir durch phasengerechte Summation aller Teilwellen, die von den verschiedenen Stellen x' in der beugenden Ebene ausgehen. Der Lichtweg von x' bis x ist nach Pythagoras $s = \sqrt{D^2 + (x - x')^2}$. Interessant ist nur ein schmaler Bereich $x - x' \ll D$, denn das Beugungsbild ist viel schmaler als D . Für $x - x' \ll D$ können wir nähern

$$s \approx D + \frac{(x - x')^2}{2D} = D + \frac{x^2}{2D} - \frac{xx'}{D} + \frac{x'^2}{2D}. \quad (10.15)$$

Beim engen Spalt war außerdem $x' \ll x$ (Spalt klein gegen Beugungsbild), und daher konnte man noch weiter nähern $s \approx D + x^2/(2D) - xx'/D$. Lichtwege und Phasen hingen linear von x' ab.

Die Abhängigkeit von den Koordinaten des Schirms ist für alle Teilwellen gleich und verursacht daher keine Beugungserscheinungen. Im Zeigerdiagramm entstehen Kurven, die konstanter Krümmung entsprechen, z. B. den Kreisformen aus Abb. 10.11 und 10.12.

Wenn das beugende Objekt aber immer größer wird, dann kann auch der hier vernachlässigte Beitrag zu wahrnehmbaren Interferenzen führen, wenn nämlich die Fraunhofer-Bedingung, die wir hier auch als

$$x'^2/2D \ll \lambda \quad (10.16)$$

ausdrücken können, verletzt wird. Dabei wird der Grenzfall der **Fresnel-Beugung** erreicht, der in Abschn. 10.1.10 näher erläutert wird.

Eine genauere Theorie der Beugung zumindest für achsnahe Strahlen zeigt, dass das Beugungsbild im Fraunhofer-Grenzfall der Fourier-Transformierten des beugenden Objekts entspricht. Wenn wir skalierte Schirm-Koordinaten mit $k_x = -2\pi x/(\lambda D)$ und $k_y = -2\pi y/(\lambda D)$ einführen, dann berechnet man die Intensitätsverteilung eines beugenden Objektes aus $[T(k_x, k_y)]^2$, wobei das Fourier-Integral nach

$$T(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \tau(x', y') e^{i(k_x x' + k_y y')} \quad (10.17)$$

berechnet wird. Hier bezeichnet $\tau(x', y')$ die i. Allg. komplexe Transmissionsfunktion des beugenden Objekts. Dieser Zusammenhang ist die Grundlage der **Fourier-Optik**, mit deren Hilfe die Amplitudenverteilungen optischer Wellenfelder gezielt manipuliert werden können.

10.1.8 Fresnel-Linsen

Warum geht das Licht nicht um die Ecke? Huygens' Sekundärwellen tun das doch, sie breiten sich allseitig aus. Abbildung 4.33 gibt eine anschauliche Antwort: Nur parallel zu einer existierenden Wellenfront bauen alle

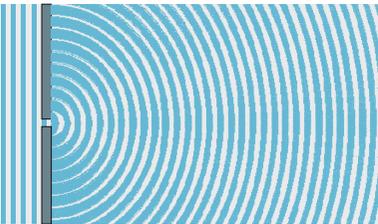


Abb. 10.27. Von einem Spalt, der schmäler ist als die Wellenlänge, geht eine ziemlich einheitliche Huygens-Kugelwelle aus

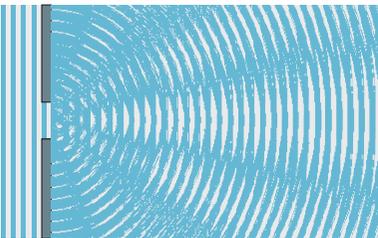


Abb. 10.28. Bei breiterem Spalt überlagern sich die Huygens-Wellen zu Beugungsmaxima und -minima, umso mehr, je breiter der Spalt ist

Sekundärwellen zusammen eine neue auf. *A. J. Fresnel* verfolgte die Frage tiefer und erfand dabei viele nützliche Dinge, z. B. die Holographie.

Warum geht das Licht der Lampe *A* nach *B* auf geradem Weg (Abb. 10.29) und lässt sich abdecken, wenn man in diesen Weg ein Hindernis stellt? Auch der Punkt *C* wird doch von der direkten Welle erreicht, und *C* strahlt seinerseits Huygens-Kugelwellen aus; erreichen diese *B* nicht? Doch, sagt *Fresnel*, aber Wellen von *D* z. B. tun dies auch, und alle diese Teilwellen interferieren sich weg bis auf die direkte. Die Wellen über *C* und über *D* löschen sich aus, wenn ihr Gangunterschied $AC + CB - (AD + DB) = \lambda/2$ ist, vorausgesetzt, diese Wellen haben gleiche Intensität, d. h. sie stammen von gleich großen Flächenstücken um *C* bzw. *D*. Man lege eine Ebene durch *C*, senkrecht zu *AB* und unterteile sie in Zonen, sodass Licht, das von verschiedenen Zonen kommt, in *B* mit dem Gangunterschied λ eintrifft. Diese Zonen sind Ringe; der Radius *r* des Ringes Nummer *m* bestimmt sich geometrisch so:

$$AC + CB - AB = \sqrt{a^2 + r^2} + \sqrt{b^2 + r^2} - a - b = m\lambda .$$

Da $\lambda \ll a, b$, sind auch die Ringe klein, $r \ll a, b$, man kann nähern

$$\sqrt{a^2 + r^2} \approx a(1 + r^2/(2a^2))$$

und erhält für den *m*-ten Ring

$$r_m^2 = 2m\lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^{-1} . \tag{10.18}$$

a, b, λ sind gegeben, also nimmt die Fläche πr^2 beim Zufügen jedes neuen Ringes in gleichen Schritten zu: Alle Ringe haben die gleiche Fläche. Die Wellen von der äußeren Hälfte jedes Ringes löschen, in *B* angekommen, die Wellen von der inneren Hälfte des nächsten Ringes aus, denn beide haben gleiche Amplitude (stammen von gleichen Flächen), und ihr Gangunterschied ist $\lambda/2$. Insgesamt bleibt nur die innere Hälfte des innersten Ringes: Das Licht ist effektiv geradlinig von *A* nach *B* gegangen.

Setzt man tatsächlich einen undurchlässigen Schirm anstelle der gedachten Ebene, mit einem zentralen Loch, das die halbe innerste Zone frei lässt, dann ist es in *B* genauso hell wie ohne Schirm; sonst ist es natürlich überall dunkel: Prinzip der **Lochkamera**. Lässt man jetzt z. B. die innere Hälfte von jeder Zone offen, dann ist es in *B* sogar viel heller als ohne Schirm, denn die Teilwellen interferieren alle konstruktiv. Der Schirm sammelt das Licht, er wirkt als *Fresnel-Linse*. Dass sie wirklich die Abbildungseigenschaft einer Linse hat, sieht man, wenn man (10.18) mit der Abbildungsgleichung $1/f = 1/a + 1/b$ vergleicht. *a* ist ja die Gegenstands- und *b* die Bildweite, also spielt $r_m^2/(2m\lambda)$ die Rolle der Brennweite *f*. Sie ist allerdings stark von λ abhängig, also hat die Fresnel-Linse eine erhebliche chromatische Aberration.

Die dunklen Ringe auf einer Fresnel-Linse (meist als Rippen ausgebildet) sind schwer genügend exakt zu zeichnen. Photographisch kann man sie heute sehr leicht herstellen. Wir setzen die Lichtquelle, die zunächst exakt punktförmig sei, also kohärente Kugelwellen aussende, vor eine Photoplatte. Außerdem strahlen wir ein Parallelbündel ein, das kohärent

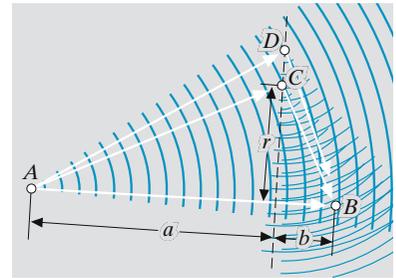


Abb. 10.29. Licht, das auf verschiedenen Wegen von *A* nach *B* gelangt (direkt oder über *C* oder *D*), interferiert konstruktiv, wenn wie bei *C* die Phasen übereinstimmen. Dicht daneben (bei *D*) ist dies aber schon nicht mehr der Fall. Ein Bild entsteht nur, wenn Linse, Spiegel o. Ä. dafür sorgen, dass alle Lichtwege Phasengleichheit ergeben

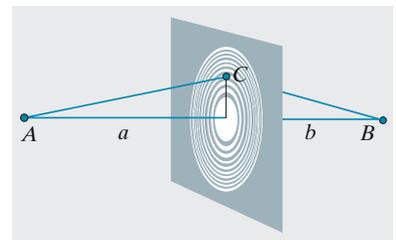


Abb. 10.30. Fresnels Zonenplatte erzeugt in *B* ein Bild von *A*, wenn die Lichtwege durch benachbarte durchlässige Ringe sich gerade um λ unterscheiden

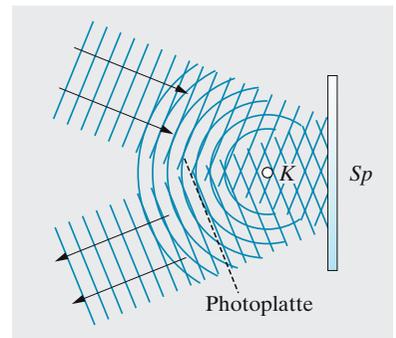


Abb. 10.31. Auf der Photoplatte erzeugt die Interferenz zwischen reflektierter und an *K* gestreuter Welle ein Muster, das als Fresnel-Zonenplatte dienen kann

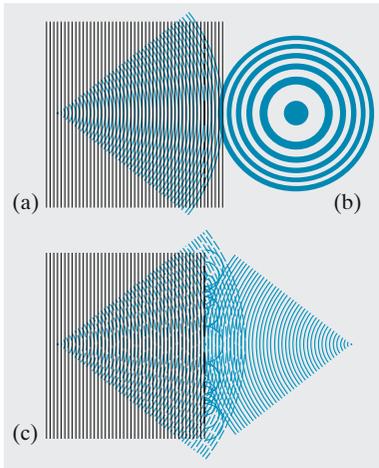


Abb. 10.32a–c. Holographie. Dargestellt ist das einfachste Verfahren (Geradausverfahren nach *Gabor*) für das einfachste Objekt, einen streuenden Punkt. (a) Aufnahme: Die Objektwelle, d. h. die vom Streuzentrum ausgehende Kugelwelle, und die Referenzwelle, hier der ungestreute Teil der ebenen Laserwelle, interferieren auf dem Film und schwärzen ihn dort am meisten, wo beide Wellen gleiche Phase haben. (b) Das Hologramm (Negativ) des streuenden Punktes ist ein Interferenzmuster, das mit dem Objekt keine erkennbare Ähnlichkeit hat. (c) Rekonstruktion des holographischen Bildes: Auf das Hologramm, jetzt als Positivkopie, fällt eine ebene Laserwelle gleicher Frequenz, die Rekonstruktionswelle. Die Huygens-Elementarwellen, die durch die hier übertrieben hervorgehobenen hellen (im Negativ dunklen) Spalten des Hologramms treten, formieren sich dahinter zu Kugelwellen (Tangentialflächen an die Elementarwellen). Eine dieser Kugelwellen (*durchgezogen*) konvergiert und läuft auf das reelle Bild zusammen, eine andere (*gestrichelt*) divergiert und scheint vom virtuellen Bild herzukommen. Dieses sitzt da, wo das Objekt war; das reelle liegt gegenüber und ist „pseudoskopisch“ (vorn und hinten sind vertauscht). Der Übersicht zuliebe sind nur die Elementarwellen gezeichnet, die je eine bestimmte Kugelwelle berühren, und auch dies nur für die hellsten Punkte jedes „Spaltes“. Vergleichen Sie mit dem Beugungsgitter mit seinen äquidistanten Spalten, wo sich die Elementarwellen nicht zu Kugeln, sondern zu ebenen Wellen formieren. Auch beim Hologramm gibt es noch mehr Kugelwellen und damit Bilder höherer Ordnung

zu dieser Kugelwelle schwingt. Am einfachsten nimmt man Laserlicht; die Streuwelle von einem kleinen Hindernis dient dann als Kugelwelle. Überall, wo die Kugelwelle gegenphasig zur ebenen Welle schwingt, herrscht Dunkelheit, das Negativ bleibt hell; wo beide Wellen gleichphasig schwingen, wird die Platte geschwärzt. Zwischen diesen Extremen erfolgt ein gleitender Übergang. Das Negativ wird zur Fresnel-Linse mit Helligkeitsabstufung. Wenn wir sie wieder an den alten Platz stellen, aber kein Parallellicht einstrahlen, macht die Platte das Licht der Lampe parallel. Jetzt nehmen wir die Lampe weg und lassen von der anderen Seite ein kohärentes Parallelbündel einfallen. Wegen der Umkehrbarkeit der Lichtwege vereinigt die Platte dieses Licht im Brennpunkt, wo vorher die Lampe war, erzeugt also ein Bild der Lampe. Die Fresnel-Platte ist ein *Hologramm* der Punktquelle.

10.1.9 Holographie

Herkömmliche Bilder sind nur höchst unvollkommene Darstellungen von Objekten. Ein Bild auf Leinwand, Papier oder Film ist nur zweidimensional und eigentlich nur auf Grund erfahrungsmäßiger Anhaltspunkte deutbar. Ein reelles Bild im Sinn der geometrischen Optik ist zwar echt dreidimensional (man kann herumgehen und es von fast allen Seiten betrachten), aber es ist sehr lichtschwach, weil nur ein sehr kleiner Teil des vom Objekt ausgehenden Lichts verwendet wird, und weil von diesem Licht wieder noch viel weniger ins Auge gelangt (durch Streuung an Staubteilchen in der Luft o. Ä.). Sowie man das Bild heller macht, indem man es auf einem festen Projektionsschirm auffängt, verliert man wieder die Räumlichkeit. Kniffe wie Stereoprojektion können den Anschein der Räumlichkeit nur für eine Blickrichtung, die der Aufnahmekamera, einigermaßen wiederherstellen.

Die **Holographie** erzeugt echt dreidimensionale, im Raum stehende Bilder des Objekts, die sehr viel lichtstärker sind als ein reelles herkömmliches Bild – allerdings zur Zeit noch auf sehr aufwändige Weise. Alle optische Information über das Objekt ist in einer von ihm ausgehenden Wellenfront enthalten, und zwar als Verteilung von Amplitude und Phase über diese Wellenfront. Bei farbigen Objekten kommt das Spektrum dazu, in manchen Fällen noch die Polarisation. Außer auf die übliche Weise kann man diese Struktur der Wellenfront auch festhalten, indem man sie mit einer **Referenzwelle** (oft einem Parallelbündel) interferieren lässt und die Interferenzfigur als *Hologramm* photographisch aufzeichnet. Wenn das Objekt klein gegen die Wellenlänge ist (Abb. 10.32), sieht diese Interferenzfigur genauso aus wie eine Fresnel-Zonenplatte. Für komplizierte Objekte besteht sie aus einem Gewirr heller und dunkler Streifen, die keinerlei Ähnlichkeit mit dem herkömmlichen Bild des Objekts haben. Da die entscheidenden Feinheiten einer solchen Interferenzfigur so klein wie λ sein können, braucht man ein extrem feinkörniges Filmmaterial für die Hologrammaufzeichnung. Damit das Licht von den verschiedenen Teilen des Objekts noch interferenzfähig ist, kommt praktisch nur Laserlicht zur Objektbeleuchtung und als Referenzlicht in Betracht. Hochmonochromatische thermische Strahlung genügend hoher Kohärenz wäre zu lichtschwach.

Durchstrahlt man später das Hologramm mit einer **Rekonstruktionswelle**, die meist identische Geometrie hat wie die Referenzwelle, dann beugt das gitterähnliche Streifensystem auf dem Hologramm dieses Licht so, als ob es von dem aufgenommenen Objekt herkäme. Man sieht entweder ein virtuelles Bild hinter dem Hologramm stehen, genau dort wo das Objekt war, oder ein reelles seitenverkehrtes Bild vor dem Hologramm, als ob das Objekt an der Hologrammebene gespiegelt würde. Dieses Bild ist echt räumlich und verhält sich auch parallaxtisch gegen Änderungen des Beobachterstandpunktes, genau wie das reale Objekt. Es ist überhaupt durch keinen visuellen Test von ihm zu unterscheiden.

Man kann ein Hologramm auch mit Ultrarot- oder Ultraviolettlicht aufnehmen. Um es dann mit sichtbarem Licht zu rekonstruieren, muss man es vorher im Verhältnis der Wellenlängen photographisch verkleinern bzw. vergrößern. Auf dem gleichen Film lassen sich mehrere Hologramme überlagern, z. B. vom gleichen Objekt zu verschiedenen Zeiten. Die Hologramm-Interferometrie zeigt dann winzige Veränderungen, die inzwischen eingetreten sind. Beim Vergleich verschiedener Objekte kann man nur die Merkmale hervortreten lassen, die beiden gemeinsam sind. Auf dieser Basis hat man assoziative Speicher Matrizen gebaut, die viel raumsparender sind als die konventionellen Speicher für Computer. Auch Farbhologramme erzeugt man durch Mehrfachbelichtung mit verschiedenen Wellenlängen. Unter bestimmten Bedingungen wirkt dann das Hologramm als Spektralfilter, sodass man mit weißem Licht farbige Bilder rekonstruieren kann. Mit Mikrowellen und Ultraschall ist ebenfalls Holographie möglich.

10.1.10 Fresnel-Beugung

Wir stellen eine Platte mit scharfem geraden Rand senkrecht zum Einfall eines Parallellichtbündels. Auf einem Schirm im Abstand D dahinter entsteht ein Beugungsbild aus einer Reihe von hellen und dunklen Streifen (Abb. 10.33). Es bestehen aber wesentliche Unterschiede zur Beugung an einem engen Spalt:

- Die Figur ist völlig unsymmetrisch zur geometrischen Schattengrenze: Streifen sind nur da, wo Licht sein sollte; im „Schatten“ wird es gleichmäßig immer dunkler.
- Die Streifen sind nicht äquidistant wie beim Spalt, sondern werden zum Hellen hin immer dichter.
- In den Minima wird es nirgends vollständig dunkel, außer natürlich tief hinter der Platte.
- Die Intensität der Maxima nimmt nach außen langsamer ab als bei den Nebenmaxima des Spaltbildes.

Es ist offensichtlich, dass an der Kante die Fraunhofer-Bedingung (10.16) immer verletzt ist.

Die Phase hängt nun *quadratisch* von x' ab. Gegen die direkte Welle ist die Teilwelle, die von x' nach x läuft (Bezeichnungen aus Abb. 10.26), phasenverschoben um

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(s - D) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(x - x')^2}{2D} . \tag{10.19}$$

Unter unserer Voraussetzung $x - x' \ll D$ haben alle Teilwellen, die von verschiedenen x' kommen, praktisch den gleichen Weg zu laufen und damit die gleiche Amplitude. Im Zeigerdiagramm sind die Teilpfeile also noch gleich lang, aber der Winkel zwischen Nachbarpfeilen ist nicht mehr konstant wie bei der Fraunhofer-Beugung, sondern nimmt mit der Entfernung von der Stelle $x = x'$ linear zu (Ableitung der quadratischen Abhängigkeit (10.19)). Es entsteht eine Doppelspirale mit ständig zunehmender Krümmung, die **Cornu-Spirale**, die sich in zwei Grenzpunkten zusammenschließt (Abb. 10.34). Ein Auto, dessen Lenkrad immer gleichmäßig gedreht wird, beschreibt ein Stück dieser Kurve. Eine Hälfte der Doppelspirale enthält die Zeiger mit $x' < x$, die andere die Zeiger mit $x' > x$.

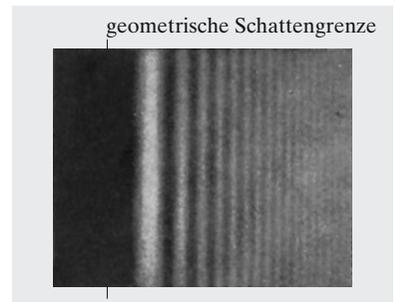


Abb. 10.33. Die Beugungsstreifen in der Nähe der Schattengrenze eines scharfkantigen, mit monochromatischem Licht beleuchteten Schirms. (Aus R. W. Pohl: *Einführung in die Physik*, 3. Band, Optik und Atomphysik, 13. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

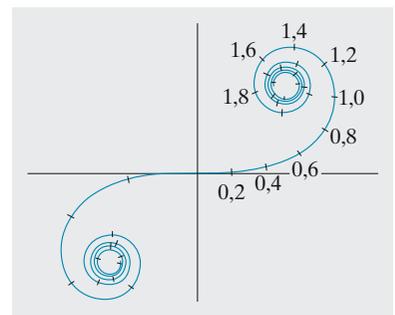


Abb. 10.34. Die Cornu-Spirale, eine Kurve mit gleichmäßig zunehmender Krümmung, beschreibt die Fresnel-Beugung an einer Kante

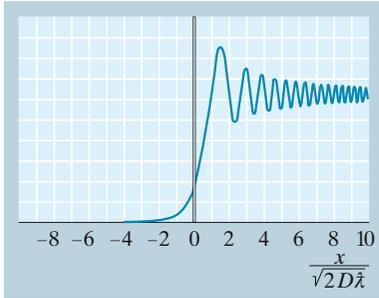


Abb. 10.35. Die Intensität hinter einer Platte fällt in der Schattenregion gleichmäßig ab, aber im Hellraum vollführt sie noch ziemlich fern von der Schattengrenze Schwankungen

Liegt x im geometrischen Hellbereich ($x > 0$), dann ist die $x' > x$ -Hälfte voll ausgebildet, die $x' < x$ -Hälfte nur zum Teil, nämlich bis $x' = 0$. Wenn x im Schattenraum liegt, ist es umgekehrt.

Aus der Cornu-Spirale kann man die Helligkeitsverteilung (und auch die Phasen) in der Beugungsfigur ablesen. Die Gesamtamplitude an der Stelle x ergibt sich als Summe aller Zeiger von $x' = 0$ bis $x' = \infty$, also als Pfeil, der von dem Spiralenpunkt mit $x' = 0$ zum oberen Konvergenzpunkt führt. Bei $x = 0$, wo die geometrische Schattengrenze läge, ist $x' = 0$ in der Mitte der Spirale, also ist dieser Pfeil genau halb so lang wie für einen Ort weit im Hellen ($x^2 \gg \lambda D$), wo $x' = 0$ fast im unteren Konvergenzpunkt liegt. An der geometrischen Schattengrenze ist es $\frac{1}{4}$ so hell wie ohne Platte (Intensität \sim Amplitude²). Je tiefer wir in den geometrischen Schatten ($x < 0$) eindringen, desto weiter verschiebt sich $x' = 0$ auf den oberen Ast der Spirale. Dabei nähern wir uns monoton dem oberen Konvergenzpunkt: Die Amplitude wird monoton kleiner, deshalb gibt es hinter der Platte keine Streifen. Im geometrischen Hellbereich dagegen ($x > 0$) läuft $x' = 0$ auf dem unteren Ast um, der Summenpfeil wird abwechselnd länger und kürzer, ohne je Null zu werden, und dieser Wechsel erfolgt immer schneller: Man erhält enger werdende Streifen ohne Dunkelheit dazwischen.

Hinter einem breiten Steg ergibt sich ein Schattenstreifen, der beiderseits von Beugungsstreifen umrandet ist. Wenn aber der Steg schmal genug ist (dünner Draht), greifen die Streifen auch in den Schattenraum hinein, und ganz in der Mitte herrscht Helligkeit. Welcher dieser beiden Fälle vorliegt, hängt davon ab, ob der Endpunkt, bis zu dem die Cornu-Spirale ausgebildet ist, außerhalb oder tief innerhalb des „Schnörkels“ liegt, d. h. ob der Drahtdurchmesser d groß oder klein gegen $\sqrt{D\lambda}$ ist. Entsprechend ist es in der Mitte des Schattens hinter einer sehr kleinen Kreisscheibe immer hell (**Poisson-Fleck**), unabhängig von Scheibendurchmesser d und Abstand D , sofern noch $d \ll \sqrt{D\lambda}$ gilt. Hinter einer Platte mit Kreisloch ist es dagegen auf der Achse bald hell, bald dunkel, je nach dem Abstand D .

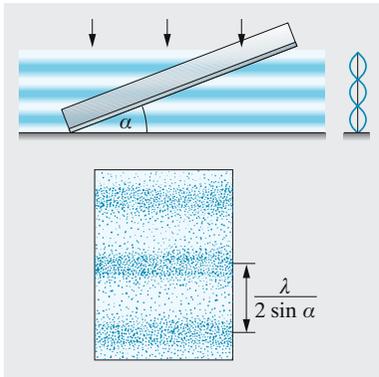


Abb. 10.36. Die Erzeugung von stehenden Lichtwellen in einer photographischen Schicht nach Wiener. Das untere Teilbild zeigt die Anordnung der geschwärzten Streifen an der Plattenkante, die den Spiegel berührt

10.1.11 Stehende Lichtwellen

In Abb. 7.103 wurden stehende elektromagnetische Wellen bei senkrechtem Auftreffen auf einen Spiegel erzeugt. Das gleiche kann man nach Wiener auch mit Licht beobachten (Abb. 10.36).

Eine nur etwa $\lambda/30$ dicke photographische Schicht wird unter einem sehr kleinen Neigungswinkel α auf einen sehr planen und gut reflektierenden Metallspiegel gelegt, der von oben mit parallelem, monochromatischem Licht beleuchtet wird. Nach der Entwicklung zeigen sich auf der Schicht in Abständen $\frac{1}{2}\lambda/\sin\alpha$ geschwärzte Streifen, von denen der dem Spiegel am nächsten gelegene im Abstand $\lambda/4$ vom Spiegel entstanden ist.

Da die elektrische Welle am (optisch dichteren) Metall mit dem Phasensprung π reflektiert wird, überlagert sie sich mit der einfallenden zu einer stehenden Welle, die an der Metalloberfläche einen Knoten hat. Das muss auch schon deswegen so sein, weil die transversale elektrische Feldstärke stetig auf den Wert 0 im Metall übergehen muss. In einer stehenden

Welle sind E und H zwar zeitlich in Phase, ebenso wie bei einer fortschreitenden Welle. Räumlich aber sind sie es bei einer stehenden Welle nicht, sondern die H -Linienbündel füllen die Zwischenräume zwischen den E -Linienbündeln, es besteht eine $\pi/2$ -Phasendifferenz zwischen E und H . H hat also einen Bauch an der Metalloberfläche (was übrigens bedeutet, dass H ohne Phasensprung reflektiert wird).

Dass die Schwärzung der E -Welle folgt, beweist, dass das elektrische Feld für die photochemischen Prozesse verantwortlich ist.

10.1.12 Interferenzfarben

Jeder kennt die schillernden Farbenspiele in **Seifenblasen**, Ölschichten auf der nassen Straße, Anlaufschichten auf blanken Gegenständen, feinen Sprüngen in Glas oder Kristallen. Weniger erwünscht sind die **Newton-Ringe** auf glasgerahmten Dias. Alle diese Farben entstehen durch Interferenz der Wellen, die an der Vorder- und Rückseite einer annähernd planparallelen Schicht reflektiert werden. Unter dem Ölfleck muss die Straße nass sein, damit die Ölhaut eine glatte Wasser- und keine raue Asphaltrückfläche hat.

Eine ebene Welle falle aus einem Medium der Brechzahl n_1 unter dem Winkel α auf eine Schicht der Dicke d und der Brechzahl n_2 . Ein Teil wird vorn reflektiert, ein Teil erst hinten. Natürlich wiederholt sich das Spiel öfter: Es gibt eigentlich unendlich viele Wellen $1''$, $2''$, $3''$, \dots . Hier betrachten wir nur die Interferenz zwischen $1''$ und $2''$. Die übrigen spielen eine Rolle, wenn es um feinere Intensitätsfragen geht wie in Abschn. 10.1.13 und 10.2.6.

Der Gangunterschied, mit dem $1''$ und $2''$ sich auf einem sehr weit entfernten Schirm oder im Auge vereinigen, ist nach Abb. 10.38 gleich $2BC$, also

$$g = 2dn_2 \cos \beta. \quad (10.20)$$

Nach *Fermat* ist ja die Laufzeit des Lichts zwischen A und B dieselbe wie zwischen A' und B' (Abschn. 4.3.3). Hierzu kommt noch der Phasensprung π bei der Reflexion an der oberen Grenzfläche, falls $n_2 > n_1$, jedenfalls am dichteren Medium (Abschn. 4.2.5 und 10.2.5). Insgesamt kommen die Wellen $1''$ und $2''$ mit einer Phasendifferenz $\delta = 2\pi s/\lambda + \pi$ an. Wenn

$$\delta = (2m + 1)\pi, \quad \text{d. h.} \quad s = m\lambda \quad (10.21)$$

ist, schwächen diese Wellen einander. (Die übrigen Wellen $3''$, $4''$, \dots ändern daran nichts, denn sie sind mit $2''$ in Phase: Sie werden ja zweimal, viermal \dots öfter am dünneren bzw. dichteren Medium reflektiert.) Speziell tritt die Schwächung für sehr dünne Schichten ($d \ll \lambda/2$) ein, und zwar für alle Wellenlängen: Wo die Seifenblase sehr dünn und kurz vor dem Platzen ist, erscheint sie ganz dunkel. Schon hieran sieht man, dass irgendwo der Phasensprung π eingetreten ist. Bei Schichten mit $d \approx \lambda$ werden nur bestimmte Wellenlängen geschwächt, nämlich $\lambda_m = s/m$. Wenn nur eine davon ins Sichtbare fällt, nämlich die erste, $\lambda = s$, erscheint die Schicht in

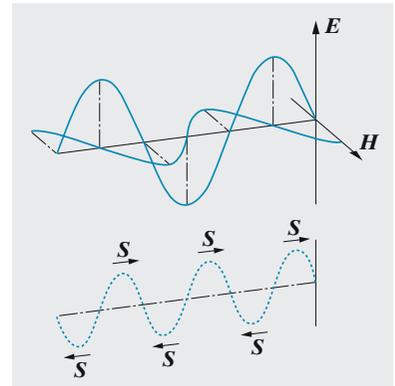


Abb. 10.37. Oben: Stehende Lichtwelle vor einem Spiegel. Unten: Energieströmung im Strahlungsfeld

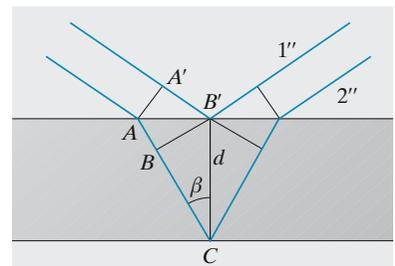


Abb. 10.38. Zwischen den an der vorderen und hinteren Grenzfläche einer planparallelen Platte reflektierten Wellen herrscht der Gangunterschied $2nd \cos \beta$. Dazu kommt noch ein Phasensprung π , wenn hinter der Platte wieder ein dünneres Medium folgt

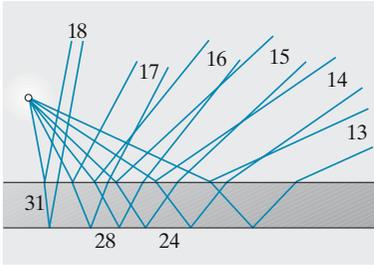


Abb. 10.39. Interferenzen gleicher Neigung an einer Platte mit der Brechzahl $n = 1,3$ und der Dicke $d = 7\lambda$. Dargestellt sind die Strahlen, die konstruktiv interferieren. Die Zahlen geben die Vielfachen von λ im Gangunterschied

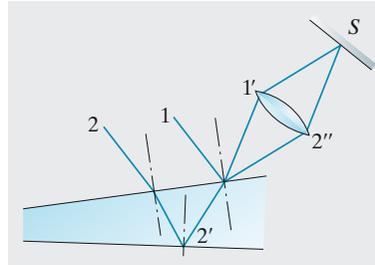


Abb. 10.40. Interferenzen an keilförmigen Schichten. 1 und 2 sind kohärente Strahlen aus einer Lichtquelle wie in Abb. 10.39

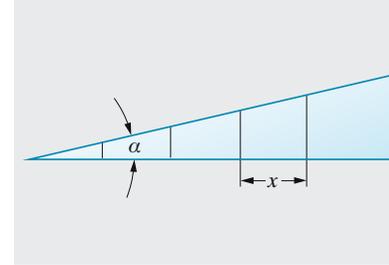


Abb. 10.41. Breite der Interferenzstreifen an keilförmigen Schichten

der Komplementärfarbe dazu. Sie hängt wegen (10.20) vom Einfallswinkel ab, die Schicht schillert. Farbige Ringe markieren die Stellen gleichen Einfallswinkels α bei einer Schicht, die mit einem divergierenden Lichtbündel beleuchtet wird (**Interferenzen gleicher Neigung**, Abb. 10.39). Bei dicken Schichten liegen mehrere Ordnungen (λ_m mit verschiedenen m -Werten) im Sichtbaren, die Farben sind nicht mehr so leuchtend (dafür ist aber die spektrale Auflösung höher).

Im durchfallenden Licht sind die Spektralbereiche, die bei der Reflexion geschwächt werden, entsprechend stärker vertreten, die Farben sind komplementär zu den reflektierten. Da aber die Reflexion normalerweise nur wenige Prozent ausmacht, ist dieser Unterschied nicht groß: Im durchgehenden Licht sind die Farben weniger brillant als bei der Reflexion.

Wenn die Schicht nicht überall gleich dick ist, ergeben sich farbige Streifen (**Interferenzen gleicher Dicke**). Bei einer keilförmigen Schicht haben sie konstanten Abstand. *Newton* untersuchte sie an einer flachen Konvexlinse, die auf einem ebenen Spiegel lag (Abb. 10.42). Die Luftspalt Dicke nimmt ungefähr quadratisch mit dem Abstand vom Zentrum zu, daher folgen die Farbringe immer dichter aufeinander. *Newton* erkannte daraus, dass seine Lichtteilchen doch periodische „fits“ haben müssen, während *Huygens* etwa gleichzeitig zwar die Wellentheorie vertrat, aber nur in Form von einzelnen Stößen ohne jede Periodizität. Erst *Young* und *Fresnel* brachten Wellen und Periodizität zusammen und verwarfen dabei die Teilchen, die erst *Einstein* wieder zu Ehren brachte. Soviel kann man aus den Newton-Ringen auf Dias lernen, die entstehen, wo der gewölbte Film die Glasplatte des Rahmens berührt.

Viele der herrlichen Farben auf Schmetterlingsflügeln, Vogelfedern und den Schuppen tropischer Fische beruhen auf einem anderen Interferenzprinzip, dem des Stufengitters, das wir in Abschn. 10.1.6 schon besprochen haben.

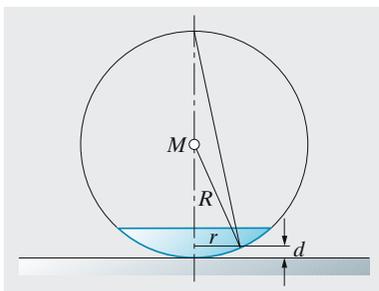


Abb. 10.42. Entstehung der Newton-Ringe

10.1.13 Interferometrie

Weil optische Interferenzen wegen der kurzen Wellenlänge schon auf kleinste Längenänderungen reagieren, sind Interferometer wichtige Instru-

Tabelle 10.1. Interferometer-Grundtypen

	Wellenfront-Strahlteiler	Amplituden-Strahlteiler
Kohärenztyp	transversal	longitudinal
Zweistrahl-Interferometer	Youngs Doppelspalt	Michelson-Interferometer
Vielstrahl-Interferometer	Optisches Gitter	Fabry-Pérot-Interferometer

mente der Präzisionsmesstechnik geworden. Zahlreiche Varianten werden für verschiedene Anwendungen genutzt, aber alle lassen sich auf wenige einfache Grundtypen zurückführen, die in Tabelle 10.1 zusammengestellt sind. Ein zentrales Element jedes Interferometers ist der Strahlteiler, der die interferenzfähigen Teilstrahlen erzeugt. Im Doppelspalt wird die Wellenfront geteilt, am teildurchlässigen Spiegel vom Michelson- oder Fabry-Pérot-Interferometer die Amplitude.

Vielstrahl-Interferometer. Die planparallele Platte ist die Grundlage vieler interessanter Geräte. Dabei muss man aber auch die übrigen, mehrfach reflektierten Wellen berücksichtigen. Zwischen zwei solchen Teilwellen, z. B. 2'' und 3'' in Abb. 10.43, herrscht immer die gleiche Phasendifferenz δ . Sie ergibt sich aus einem Gangunterschied s als $2\pi s/\lambda$, zuzüglich evtl. Phasensprünge bei Reflexionen an dichteren Medien. Insofern ist die Lage wie bei einem Gitter mit sehr vielen (unendlich vielen) Spalten, nur schwächen der Hin- und Rückgang durch die Platte und besonders die Verluste bei der Reflexion die Amplitude jedes Mal um einen konstanten Faktor ϱ . Im **Zeigerdiagramm** ist also jeder Zeiger gegen den vorhergehenden nicht nur um den Winkel δ verdreht, sondern auch um den Faktor ϱ verkürzt. Der Polygonzug der Zeiger schmiegt sich nicht an einen Kreis, sondern an eine (logarithmische) Spirale an, die sich schließlich in einem Punkt P zusammenschnürt.

Wir suchen die resultierende Amplitude a , den Zeiger, der vom Anfangspunkt nach P führt. Dazu brauchen wir nur die Amplitudenzeiger der beiden ersten Teilbündel mit den Längen a' und $\varrho a'$ zu zeichnen. Die resultierende a bildet einen gewissen Winkel mit a' . Was käme heraus, wenn wir das erste Bündel (a') wegließen? Eine neue Resultierende, die im gleichen Längen- und Winkelverhältnis zu $\varrho a'$ steht wie a zu a' , die also die Länge ϱa hat und als Restsumme natürlich zum gleichen Punkt P führt. Aus dem sich so schließenden Dreieck lesen wir nach dem Cosinussatz ab $a^2 + \varrho^2 a^2 - 2\varrho a^2 \cos \delta = a'^2$,

$$a^2 = \frac{a'^2}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos \delta} \tag{10.22}$$

(Formel von *Airy*).

Für $\varrho = 1$ (Verlustfreiheit) geht dies offenbar in die Gitterformel mit $N = \infty$ über (vgl. a^2 in (10.22) und r^2 nach (10.6) mit $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$): Monochromatische Beleuchtung liefert eine unendliche Reihe gleich intensiver unendlich scharfer Linien im Winkelabstand $\delta = 2\pi$ mit völliger Dunkelheit dazwischen. Wenn ϱ sehr nahe bei 1 liegt, ist das auch noch fast so; die Linien haben dann eine gewisse geringe

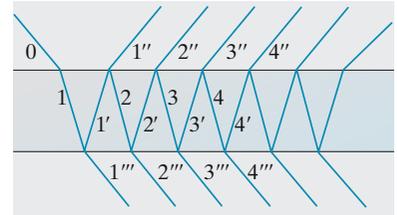


Abb. 10.43. Vielfachinterferenz an einer planparallelen Platte (ähnlich einem Fabry-Pérot-Interferometer)

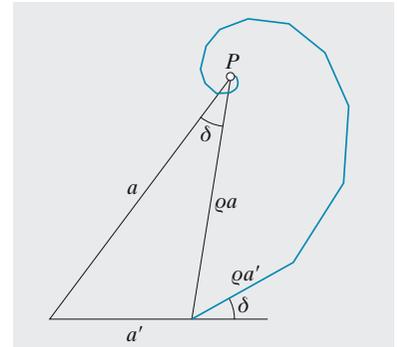


Abb. 10.44. Auch die Interferenz unendlich vieler Wellen führt zu einer Spirale (einer logarithmischen) im Zeigerdiagramm

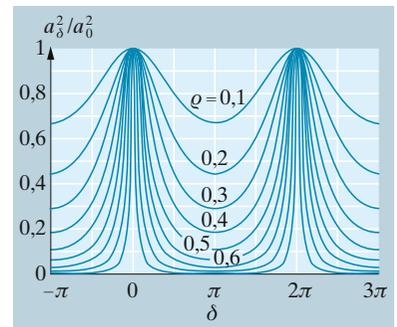


Abb. 10.45. Intensität der Vielstrahlinterferenz an einer planparallelen Platte der Dicke d als Funktion des Phasenwinkels δ , der sich als $2\pi\lambda^{-1}2dn_2 \cos \beta$ ergibt (vgl. Abb. 10.38). Die Kurven für verschiedenen Reflexionsgrad ϱ sind so normiert, dass bei $\delta = 0$ immer die gleiche Intensität herauskommt

www.

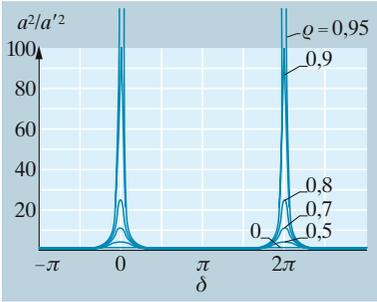


Abb. 10.46. Hier sind die Kurven für verschiedene ρ so normiert, dass die einfallende Intensität bei allen gleich ist

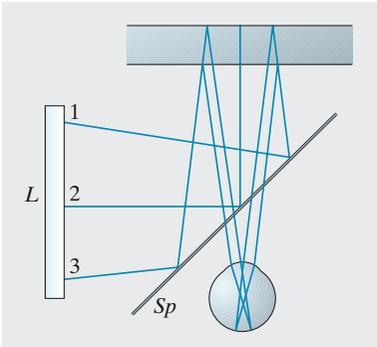


Abb. 10.47. Licht von der ausgedehnten Quelle L fällt über einen halbdurchlässigen Spiegel auf eine planparallele Platte. Das Auge sondert hieraus ein konvergentes Bündel aus und sieht farbige Ringe konstanter Neigung (Haidinger-Ringe) um die Bündelachse

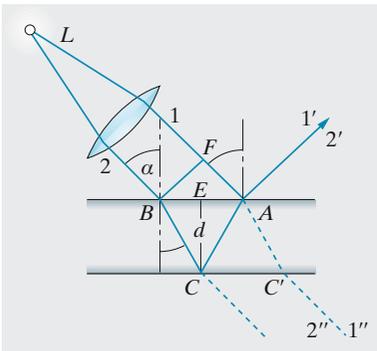


Abb. 10.48. Interferenzen an planparallelen Platten

Breite, und zwischen ihnen ist es viel dunkler, wenn auch nicht mehr ganz dunkel. (Bei $\delta = m2\pi$ liegen Maxima der Funktion (10.22) mit der Höhe $a'^2/(1-\rho)^2$ und der Breite $1-\rho$, bei $\delta = (2m+1)\pi$ Minima mit der Höhe $a'^2/4$.) Bei $\rho \ll 1$ schließlich kann man ρ^2 im Nenner von (10.22) weglassen und nähern $a^2 \approx a'^2 (1 - 2\rho \cos \delta)$. Das ist ein uninteressanter Verlauf. Wir setzen also in der Folge $\rho \approx 1$ voraus, was scharfe Maxima garantiert.

Ein Phasenwinkel-Abstand 2π zwischen den Maxima bedeutet einen Abstand $\Delta g = \lambda$ im Gangunterschied. Wir können nun die Wellenlänge ändern bzw. Licht einstrahlen, das viele λ -Werte enthält, ohne den Winkel α zu ändern. Dann werden nach (10.20) nur die λ in merklicher Intensität durchgelassen, für die $g = m\lambda$ oder $\lambda = 2dn_2 \cos \beta/m$ gilt, bei senkrechtem Einfall auf eine Luftplatte also $\lambda = 2d/m$. So kommen wir zum **Interferenzfilter**. Damit es im Sichtbaren (λ -Faktor 2) nur *eine* Wellenlänge durchlässt, muss $m = 1$ oder 2 sein: Der Luftspalt muss eine oder zwei der gewünschten Wellenlängen dick sein. Damit der durchgelassene Bereich sehr scharf wird, muss ρ nahe an 1 liegen. Das erreicht man durch halbdurchlässige Bedampfung der Glasplatten, zwischen denen der exakt planparallele Luftspalt sitzt.

Oder wir verwenden monochromatisches Licht, lassen es aber nicht als exaktes Parallelbündel auftreffen, sondern z. B. als divergierendes Bündel aus einer Punktquelle. Dann beruht die g -Änderung auf der Änderung des Einfallswinkels α . Orte konstanter Winkel α sind Kegelmäntel. Man sieht also eine Folge scharfer heller Kreisringe, getrennt durch fast dunkle Gebiete.

Das **Fabry-Pérot-Interferometer** besteht aus zwei Glasplatten mit einem exakt planparallelen Luftspalt der Dicke d dazwischen. Das durchgehende Licht enthält viele Wellen, die 0-, 2-, 4-, ...-mal an den Innenseiten der Platten reflektiert worden sind (damit die Reflexe an den Außenseiten der Platten nicht stören, macht man diese Platten leicht keilförmig). Der Schwächungsfaktor ρ ist, abgesehen von der Absorption im Glas und den Transmissionsverlusten an den Außenflächen, gleich dem Quadrat des Reflexionsfaktors R an den Innenflächen. Damit die Interferenzen scharf werden, dürfen nach (10.22) ρ und R nur wenig kleiner sein als 1. Ein Fabry-Pérot-Interferometer zeigt für eine monochromatische Laserlinie periodische Transmissionslinien als Funktion der Länge (vgl. Abschn. 9.3.3).

Man erreicht die höchste Auflösung durch Bedampfen mit Silber, Aluminium oder dielektrischen Schichten, bis nur noch wenig Licht durchgelassen wird. Durch die ganze Anordnung treten dann wie beim Interferenzfilter nur noch sehr enge Spektralbereiche um $\delta = m2\pi$. Hier ist $\delta = 2d2\pi/\lambda$ (Luft, fast senkrechter Einfall, zwei Reflexionen am dichteren Medium mit Gesamtphasensprung 2π), also werden die Wellenlängen $\lambda_m = 2d/m$ durchgelassen. Bei $d \gg \lambda$ wird die Ordnung m sehr groß. Diese Maxima haben die Breite $\Delta\delta = 1 - \rho$. Eine äußerst geringe Dickenänderung $\Delta d = (1 - \rho)d/(2\pi m) = (1 - \rho)\lambda/(4\pi)$ führt uns vom Maximum der Airy-Kurve herunter: Der Luftspalt wird undurchlässig. Eine entsprechende λ -Änderung um $\Delta\lambda = (1 - \rho)\lambda/(2\pi m)$ liefert dasselbe. Der erste Effekt wird zur Messung winziger Dickenänderungen ausgenutzt,

der zweite ergibt ein riesiges spektrales Auflösungsvermögen

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2\pi m}{1 - \varrho} = \frac{4\pi d}{(1 - \varrho)\lambda}. \quad (10.23)$$

Die Sache hat aber einen Haken: Benachbarte Durchlässigkeitsordnungen einer bestimmten Wellenlänge liegen im δ -Abstand 2π . Zwei *verschiedene* Wellenlängen müssen in ihren δ -Werten gleicher Ordnung einander näher liegen als 2π , sonst vermischen sich die Linien und die Ordnungen:

$$\Delta\delta = \frac{4\pi d \Delta\lambda}{\lambda^2} < 2\pi, \quad \text{d. h.} \quad \Delta\lambda < \frac{\lambda^2}{2d} = \frac{\lambda}{m}.$$

Dieser **Dispersionsbereich** λ/m ist bei hoher Ordnung m , also hoher Auflösung, nur sehr klein, man kann nur einen engen Spektralbereich analysieren, der aus einem anderen Spektrometer kommt. Diese Vorzerlegung kann auch durch ein anderes Interferometer mit engerem Luftspalt erfolgen (**Duplex- und Multiplex-Interferometrie**). Bei der Analyse der Feinstruktur von Spektrallinien erreicht man heute Auflösungen bis 10^{11} . Noch höhere Auflösungen werden in der **Laserspektroskopie** erzielt. Dabei wird nicht das empfangene Licht nach Wellenlängen analysiert, sondern von vornherein ein extrem monochromatischer, durchstimmbarer Laser als spektroskopische Lichtquelle verwendet.

Verwendet man statt des Luftspalts eine Schicht mit der Brechzahl n , dann ist der Gangunterschied $2nd$ auch durch geringe n -Änderungen zu beeinflussen. Intensive Laserstrahlen ändern n und öffnen bzw. schließen damit quer dazu den Durchgang für einen anderen Strahl, ebenso wie die Gitterspannung den Anodenstrom einer Röhre oder die Basisspannung den Kollektorstrom eines Transistors steuert. So entsteht das Grundelement für einen superschnellen Computer der Zukunft.

Lummer und *Gehrcke* benutzten zur Mehrfachreflexion keinen Luftspalt, sondern eine planparallele Glasplatte (Abb. 10.49). Ihre Flächen brauchen nicht versilbert zu werden: Wenn der Reflexionswinkel dicht unter dem der Totalreflexion liegt, ist nach (10.27) die Reflexion ebenfalls fast vollständig. Allerdings kann man so wegen der begrenzten Plattenlänge nicht allzu viele (N) Teilwellen erhalten und muss die Airy-Formel ($N = \infty$) etwas modifizieren.

Zweistrahl-Interferometer. In vielen Interferometern wird eine Welle in zwei Teilwellen geteilt, mit einem teildurchlässigen Spiegel, häufig, aber nicht notwendig, unter 90° . Auf dem Schirm, wo die Teilbündel wieder zusammentreffen, gibt Helligkeit oder Dunkelheit den Gangunterschied der Teilwellen an. Man kann so winzige Längenunterschiede der beiden Wege oder Brechzahlunterschiede der eingeschobenen Medien bestimmen. Wie beim Doppelspalt können wir die Eigenschaften des **Michelson-Interferometers** (Abb. 10.50) durch Betrachtung von zwei Teilstrahlen verstehen, die von zwei Spiegeln Sp 1, 2 reflektiert und am Strahlteiler ST wieder überlagert werden. Gangunterschied und Phasendifferenz δ hängen ab von der Laufzeitdifferenz der beiden Wege d_1 und d_2 ,

$$\delta = 4\pi(d_1 - d_2)/\lambda.$$

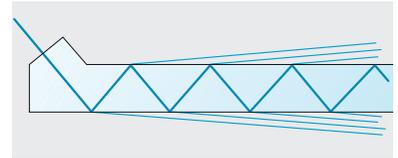


Abb. 10.49. **Lummer-Gehrcke-Platte.** Da der innere Einfallswinkel fast gleich dem Totalreflexionswinkel ist, liegt der Reflexionsfaktor ϱ sehr nahe bei 1. Der Lichteintritt wird durch das aufgekittete Prisma erleichtert

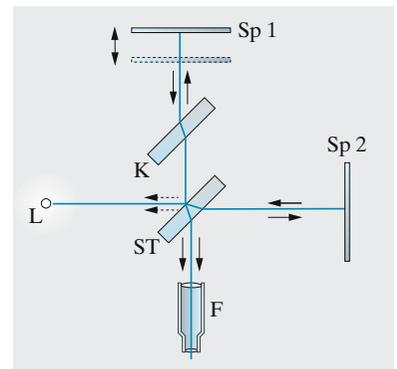


Abb. 10.50. Das Interferometer von Michelson



Abb. 10.51. Gravitationswellendetektor GEO600 bei Hannover (s. Abschn. 12.10.3). Der Blick erstreckt sich vom Strahlteiler des Michelson-Interferometers über die 600 m langen Arme (Mit freundlicher Erlaubnis von K. Danzmann, Universität Hannover)

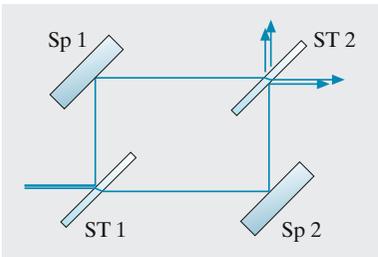


Abb. 10.52. Mach-Zehnder-Interferometer mit zwei Strahlteilern (ST 1, 2) und zwei Spiegeln (Sp 1, 2)

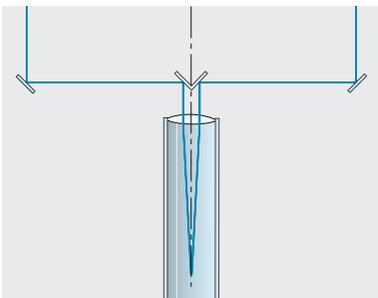


Abb. 10.53. Michelsons Interferometer zur Messung von Fixsternradien

Man beobachtet die Interferenzen des Interferometers in zwei Ausgängen, deren Intensitäten sich mit der Wellenlängenänderung im Gegenteil ändern:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 + \cos(4\pi(d_1 - d_2)/\lambda)) \quad \text{und}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 (1 - \cos(4\pi(d_1 - d_2)/\lambda)).$$

Diese Beziehung gilt nur bei perfekter (longitudinaler) Kohärenz. Bei exakt gleichen Wegen $d_1 = d_2$ gilt das für alle Farben, dort können wir also sogar mit einer gewöhnlichen Glühbirne **Weißlicht-Interferometrie** betreiben. Aber: Nur einer der Lichtstrahlen läuft durch den Strahlteiler, und dessen Dispersion verursacht eine stark wellenlängenabhängige (chromatische) Weglängendifferenz. Eine zusätzliche Glasplatte gleicher Dicke (K) kompensiert dieses Problem.

Mit dem Michelson-Interferometer kann man die Kohärenzlänge andererseits ausmessen, indem man die Weglängendifferenz immer größer macht und den abnehmenden Kontrast der Transmission (die so genannte **Visibilität**) beobachtet. Bei einer Spektrallampe muss man einige Zentimeter, bei einem Laser aber schnell viele Meter Weglängendifferenz herstellen. Solche Interferometer sind immer noch praktikabel, wenn man in einem Arm eine optische Faser verwendet, von der man leicht viele Kilometer aufspulen kann. Gigantische **Gravitationswellen-Interferometer** vom Typ des Michelson-Interferometers mit bis zu 4 km Armlänge (Abb. 10.51) werden derzeit an mehreren Stellen der Erde gebaut. Gravitationswellen verursachen winzigste Längenänderungen, die so detektiert werden sollen. Und es gibt sogar Pläne, im interplanetaren Welt- raum schon in naher Zukunft ein Interferometer zu installieren, in welchem der Strahlteiler mit der Lichtquelle und die beiden Spiegel auf je einem Raumschiff ein Interferometer mit 5 Mio. km Armlänge bilden!

Das Michelson-Interferometer besitzt zahlreiche Variationen, die je nach ihren Vorteilen für bestimmte Anwendungen eingesetzt werden. Konzeptionell besonders wichtig ist das **Mach-Zehnder-Interferometer**, weil es Spiegel auch mit streifendem Einfall verwenden lässt (vgl. Abschn. 13.2.5), die sich z. B. für Neutronenstrahlen realisieren lassen.

Selbst die größte Fernrohröffnung reicht nicht aus, um Fixsterne als Scheibchen aufzulösen. *Michelson* vergrößerte die Öffnung wenigstens in einer Richtung, indem er zwei 45° -Spiegel auf einem Arm der Länge L montierte und ihr Licht mit zwei anderen Spiegeln ins Fernrohr lenkte. So entsteht zwar kein Bild des Sterns mit entsprechender Auflösung, sondern ein Beugungsmuster ähnlich wie bei zwei Spalten im Abstand L . Seine Form zeigt, ob das Licht aus streng einheitlicher Richtung kommt oder aus einem Winkelbereich $\Delta\alpha$, dem Schinkel, unter dem das Sternscheibchen uns erscheinen würde: $\Delta\alpha = 2R/a$ (R : Sternradius, a : Sternabstand). Die entsprechende Verbreiterung muss größer sein als die Winkelbreite $\lambda/(2L)$ des Beugungsmaximums. So konnte man einige rote Riesensterne wie α Orionis (Beteigeuze) und α Scorpionis (Antares) direkt vermessen. Ihr Radius ist größer als der der Erdbahn. Anstelle der Sonne würden diese Sterne bis über die Marsbahn reichen. Man wusste übrigens schon vorher aus den Strahlungsgesetzen, dass diese kühlen, aber

sehr hellen Sterne sehr groß sein müssen. Auf ähnliche Weise steigert man heute die Auflösung von Radioteleskopen, indem man zwei oder mehrere weit entfernte Antennen durch Funk und Computer koppelt (**Langbasis-Interferometrie**). Selbst die größte Schüsselantenne ergibt mit $\lambda \approx 10$ cm allein nur eine Winkelauflösung $\lambda/d \approx 10^{-3}$, zwei Antennen mit dem Erddurchmesser als Basis dagegen 10^{-8} , verglichen mit einem optischen 5 m-Reflektor mit 10^{-7} .

10.2 Polarisation des Lichts

Durch einen Kalkspatkristall erscheinen Schriftzeichen doppelt. Newton schloss daraus, seine Lichtteilchen müssten auch seitliche Richtungseigenschaften haben. Leider hörte er nicht auf *Hooke*, der meinte, *Huygens'* Wellen seien vielleicht nicht longitudinal, sondern transversal. Erst als *Etienne Malus* 1808 das Palais du Luxembourg durch einen Kalkspatkristall betrachtete und feststellte, dass die Reflexe der Abendsonne in den Fenstern dunkler wurden, wenn er den Kristall drehte, kam die Sache wieder in Bewegung.

10.2.1 Lineare und elliptische Polarisation

Elektromagnetische Wellen sind transversal, d. h. der elektrische und der magnetische Feldvektor stehen immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (Abschn. 7.4.3). Aber schon lange bevor *Maxwell* das Licht unter die elektromagnetischen Wellen einordnete, erkannten *Fresnel*, *Malus* und *Arago* seinen transversalen Charakter daraus, dass es sich polarisieren lässt.

Licht, in dem das elektrische Feld immer nur in einer Richtung (oder der Gegenrichtung dazu) steht, heißt *linear polarisiert*. Die Richtung des elektrischen Vektors heißt Polarisationsrichtung. Die zu dieser Richtung senkrechte Ebene, in der die Ausbreitungsrichtung und der Magnetfeldvektor liegen, wird manchmal irreführenderweise Polarisationsebene genannt. In dem Licht, das z. B. Temperaturstrahler (glühende Körper) aussenden, sind alle Polarisationsrichtungen gleichmäßig und ungeordnet vertreten. Der Emissionsakt eines einzelnen Atoms ergibt zwar i. Allg. polarisiertes Licht, aber in der Temperaturstrahlung überlagern sich sehr viele solche Einzelakte in völlig ungeordneter Weise. Solches Licht heißt natürliches oder unpolarisiertes Licht.

Schwingt die elektrische Feldstärke so, dass die Spitze des Feldvektors auf einer Ellipse um die Ausbreitungsrichtung umläuft, so ist das Licht *elliptisch polarisiert*. Ein wichtiger Sonderfall ist das *zirkular polarisierte* Licht, bei dem die Feldstärke im Kreis umläuft (Abschn. 4.1.1a). Eine elliptisch oder zirkular polarisierte Welle kann man in zwei zueinander senkrecht schwingende linear polarisierte Wellen mit der Phasendifferenz zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zerlegen. Bei einer zirkularen Welle ist diese Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$, und die Amplituden der Teilwellen sind einander gleich. Bei der Phasendifferenz 0 entartet die Ellipse zur Geraden: Auch lineare Schwingungen lassen sich in zwei zueinander senkrechte Komponenten entsprechender Amplituden aufspalten (vgl. Abschn. 10.2.9).

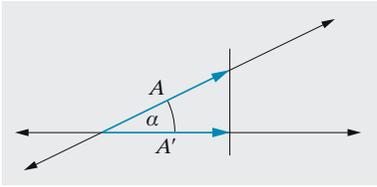


Abb. 10.54. Zur Bestimmung der Intensität des durch einen „Analysator“ hindurchgelassenen polarisierten Lichts

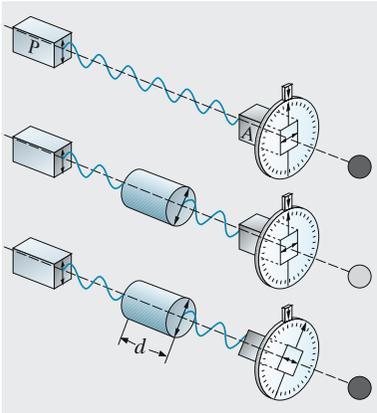


Abb. 10.55. Der Polarisationsapparat. *Oberes Bild:* Einstellung auf gekreuzte Polarisatoren. *Mittleres Bild:* Aufhellung des Gesichtsfeldes durch Einführung einer drehenden Substanz. *Unteres Bild:* Messung des Drehwinkels durch Drehung des Analysators bis zu erneuter Auslöschung

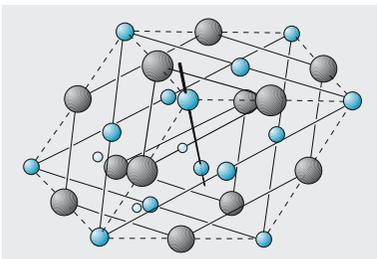


Abb. 10.56. Raumgitter des Kalkspats CaCO_3 . ● C, ● Ca, ○ O. Die O-Atome sind nur um eines der Ca eingezeichnet

10.2.2 Polarisationsapparate

Kristalle oder Filter, die aus natürlichem Licht polarisiertes machen, heißen **Polarisatoren**. Dieselbe Vorrichtung kann auch als **Analysator** dienen, mit dem man die Polarisation und ihre Schwingungsrichtung nachweist. Ein linearer Polarisator lässt nur Licht einer bestimmten Schwingungsebene durch. Die durchgelassene Amplitude sei A . Ein anderer Polarisator, der gegen den ersten um den Winkel α verdreht ist, lässt von A wieder nur die Komponente $A' = A \cos \alpha$ durch, die in seine Durchlassebene fällt. Die entsprechenden Intensitäten sind proportional zu A'^2 :

$$I' = I \cos^2 \alpha .$$

Drehung erlaubt präzise Intensitätsänderungen, z. B. in Photometern. Gekreuzte Polarisatoren ($\alpha = 90^\circ$) lassen kein Licht durch, außer wenn sich auf dem Lichtweg zwischen ihnen Vorgänge abspielen, die den Polarisationszustand oder seine Schwingungsebene ändern.

Im **Polarisationsapparat** (Abb. 10.55) tritt unpolarisiertes Licht in den Polarisator P ein. Zunächst stellt man den Analysator senkrecht dazu, was man an der Dunkelheit des Gesichtsfeldes im Beobachtungsfernrohr erkennt. Bringt man einen „optisch aktiven“ Stoff, der die Polarisationsrichtung dreht, in den Lichtweg, wird das Gesichtsfeld heller, und man muss den Analysator um den Drehwinkel α nachstellen, um wieder Dunkelheit zu erreichen. Daraus ergibt sich eine der raschesten Analysemethoden zum Nachweis wichtiger Substanzen, z. B. der verschiedenen Zucker (vgl. Abschn. 10.2.9).

10.2.3 Polarisation durch Doppelbrechung

Die bisher behandelten optischen Gesetze, z. B. das Brechungsgesetz von *Snellius*, gelten nur in Medien, in denen die Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen gleich ist, d. h. in **optisch isotropen** Medien. Gase, die meisten homogenen Flüssigkeiten, feste Körper, sofern sie amorph sind (Glas) oder dem regulären (kubischen) Kristallsystem angehören (Steinsalz, Diamant), sind optisch isotrop. Auch sie verlieren i. Allg. diese Isotropie, wenn sie elektrischen oder magnetischen Feldern oder elastischen Deformationen ausgesetzt sind oder wenn sie faserigen oder geschichteten Feinbau besitzen. Ein solcher Feinbau ist selbst bei Flüssigkeiten möglich, z. B. stellt er sich bei Lösungen von Kettenmolekülen von selbst ein, wenn sie strömen (Strömungsdoppelbrechung).

Die meisten Kristalle sind nicht nur optisch, sondern auch in anderen Eigenschaften **anisotrop**, z. B. sind Wärme- und elektrische Leitfähigkeit, Dielektrizitätskonstante, elastische Eigenschaften in den einzelnen Kristallrichtungen verschieden. Aus dem atomaren Bau ist dies leicht zu verstehen. Das klassische Beispiel eines anisotropen Kristalls, der Kalkspat (CaCO_3), ist aufgebaut wie Abb. 10.56 zeigt. Man erkennt leicht, dass um die eingezeichnete Achse eine hohe Symmetrie herrscht (drei- bzw. sechseckige Anordnung der Ca- bzw. CO_3 -Gruppen). Für keine der anderen Kristallrichtungen ist dies in gleichem Maße der Fall, sie haben höchstens zweizählige Symmetrie. In einem kubischen Kristall dagegen

gibt es mehrere gleichwertige Achsen mit hoher Symmetrie. Die Achse hoher Symmetrie beim Kalkspat heißt **kristallographische Hauptachse**. Man beachte, dass Kristallachsen Richtungen im Kristall darstellen und nicht physisch durch die Ecken eines Spaltstückes gegeben sind. Für den Kristall sind die Winkel, nicht die Kantenlängen charakteristisch. Die übliche Wuchs- und Spaltform des Kalkspats, das Rhomboeder, hat als Flächen Parallelelogramme, mit je zwei gegenüberliegenden Winkeln zu 102° bzw. 78° . Die Hauptachse geht durch eine Ecke, in der drei 102° -Winkel zusammenstoßen, und liegt symmetrisch zu den dort zusammenlaufenden drei Kanten (Abb. 10.56, 10.57).

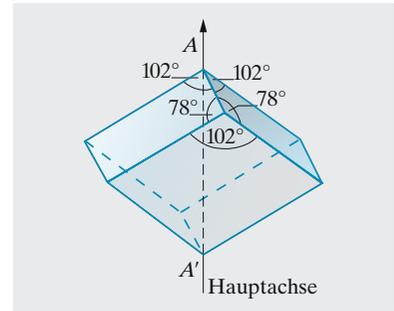


Abb. 10.57. Kalkspatrhomboeder. Diese Ansicht entsteht aus Abb. 10.56, indem man die Hauptachse aufrichtet und den Kristall um fast 180° um diese Achse dreht

Alle genannten physikalischen Eigenschaften, einschließlich der Lichtgeschwindigkeit (genauer: der Lichtgeschwindigkeiten, s. u.), sind isotrop in jeder Ebene, die senkrecht zur Hauptachse liegt (z. B. in der angeschliffenen Ebene von Abb. 10.58). Die Lichtgeschwindigkeit ist also in allen Richtungen senkrecht zur Hauptachse oder optischen Achse gleich. Aber in diesen Richtungen, wie überhaupt in allen Richtungen, die nicht mit der Hauptachse zusammenfallen, ist die Geschwindigkeit des Lichts abhängig von seiner Polarisationsrichtung. In Richtung der optischen Achsen hat die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Polarisationsrichtung den Wert c_o , den man als Hauptlichtgeschwindigkeit des Kristalls bezeichnet. Senkrecht zur optischen Achse läuft polarisiertes Licht ebenfalls mit c_o , wenn sein magnetischer Vektor in Richtung der optischen Achse, also der elektrische senkrecht dazu steht. Licht mit dieser Polarisationsrichtung heißt **ordentliches Licht**. Licht der anderen Polarisationsrichtung (außerordentliches Licht) läuft im Kalkspat schneller, mit $c_{ao} = 1,116 c_o$. Für die dazwischenliegenden Einfallrichtungen gilt für ordentliches Licht immer c_o , **außerordentliches Licht** hat eine Geschwindigkeit zwischen c_o und c_{ao} . Die Wellenflächen ordentlichen Lichts, das von einem Punkt ausgeht, sind also Kugeln, die des außerordentlichen abgeplattete Rotationsellipsoide, deren Rotationsachse in der optischen Achse liegt. Kristalle, die sich so verhalten, heißen **einachsigenegativ**. Quarz dagegen ist einachsigen-positiv, dort hat außerordentliches Licht verlängerte Rotationsellipsoide als Wellenflächen (Abb. 10.60).

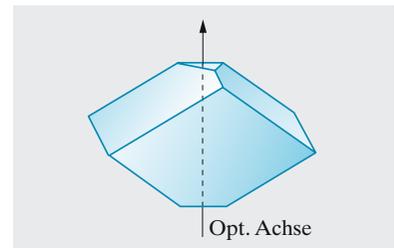


Abb. 10.58. Zur Definition des optisch einachsigen Kristalls. Optische und kristallographische Achse fallen zusammen

Unpolarisiertes Licht falle senkrecht auf eine Rhomboederfläche, also schief zur optischen Achse (Abb. 10.61). Für die beiden Polari-

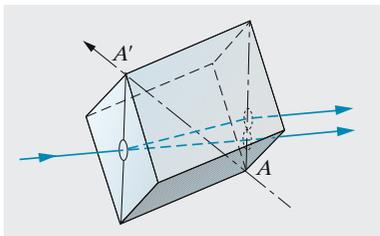


Abb. 10.59. Doppelbrechung im Kalkspat. Die Ebene durch den einfallenden Strahl und die Achse AA' ist der „Hauptschnitt“ des Strahls

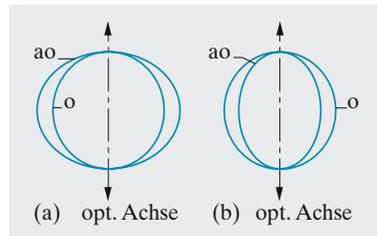


Abb. 10.60. Wellenflächen im einachsigen-negativen (a) und einachsigen-positiven Kristall (b)

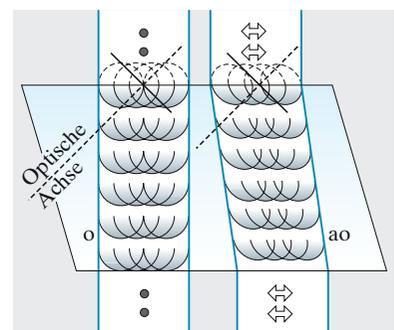


Abb. 10.61. Doppelbrechung. Der ordentliche Strahl (o) ist senkrecht zur optischen Achse polarisiert (●). Der außerordentliche Strahl (ao) hat auch parallele Komponenten (↔). Dadurch werden die Huygens-Wellen elliptisch verformt

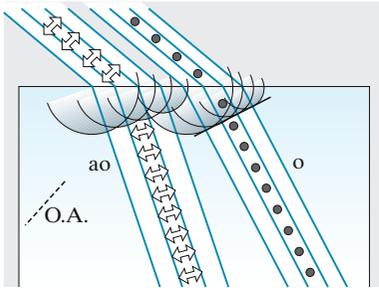


Abb. 10.62. Hier liegt die optische Achse (O.A.) senkrecht zur Einfallsebene. Dann breiten sich beide Huygenswellen kreisförmig, aber mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus. Ordentlicher (o) und außerordentlicher Strahl (ao) werden unterschiedlich stark gebrochen

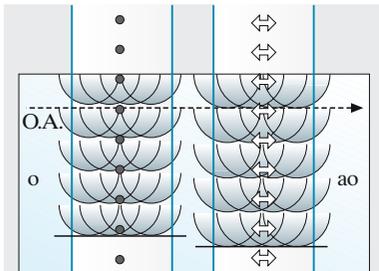


Abb. 10.63. Hier fällt Licht senkrecht auf die Platte, die optische Achse liegt parallel zur Schnittenebene. Zwischen ordentlichem (o) und außerordentlichem Strahl (ao) tritt ein Gangunterschied auf (vgl. Abb. 10.68)

sationsrichtungen sieht die Konstruktion der Huygens-Elementarwellen, die von jedem Punkt des lichterfüllten Kristalls ausgehen, verschieden aus: Für das ordentliche Licht gelten die üblichen Kugelwellen, für das außerordentliche Ellipsoidwellen, deren Achse (optische Achse) schief zur Trennfläche steht. Die tatsächlichen Wellenflächen ergeben sich als Tangentenebenen der Elementarwellen. Während also die Lichterregung in Abb. 10.61 für ordentliches Licht senkrecht zur Trennfläche von A nach A_1 wandert, schreitet sie für außerordentliches eine größere Strecke AA_2 in schiefer Richtung fort. Der außerordentliche Strahl ist also trotz seines senkrechten Einfalls gebrochen worden und trennt sich vom ordentlichen. Aus der gegenüberliegenden Rhomboederfläche treten beide Strahlen parallel gegeneinander verschoben aus.

× Beispiel . . .

Ein enges unpolarisiertes Lichtbündel fällt senkrecht auf eine Kalkspat-Rhomboederfläche. Der Kristall wird dabei langsam um die Richtung des Lichtbündels gedreht. Was sieht man an der gegenüberliegenden parallelen Rhomboederfläche? Wie sind die Polarisationsrichtungen, und wie ändern sie sich beim Drehen?

An der Rückfläche treten zwei Bündel aus, das ordentliche und das außerordentliche. Bei der Drehung behält das ordentliche Bündel, das bei senkrechtem Einfall nach *Snellius* gerade durchgeht, seine Lage bei, das außerordentliche wandert mit dem Hauptschnitt mit, dreht sich also um das ordentliche. Der elektrische Vektor des ordentlichen Lichts schwingt immer senkrecht zum Hauptschnitt, der des außerordentlichen in dessen Ebene. Beide Schwingungsrichtungen drehen sich also mit dem Hauptschnitt mit.

Bei schiefem Einfall auf die Grenzfläche folgt das ordentliche Licht dem Snellius-Gesetz, das außerordentliche nicht: Es wird immer *mehr* von der optischen Achse weggebrochen, als das Brechungsgesetz vorschreibt, es sei denn, der Einfall erfolge senkrecht zur optischen Achse oder in deren Richtung (Abb. 10.62).

Für spätere Anwendungen betrachten wir den senkrechten Durchgang von Licht durch eine planparallele Platte, die parallel zur optischen Achse aus dem Kristall herausgeschnitten ist. Die Schnitte der Elementarwellenflächen des außerordentlichen Lichts mit der Zeichenebene in Abb. 10.63 sind hier Ellipsen, deren große Achsen auf der Plattenebene senkrecht stehen.

Daher tritt keine Aufspaltung in ordentliches und außerordentliches Licht ein, keines von beiden wird gebrochen. Aber die Welle des außerordentlichen Lichts eilt infolge ihrer größeren Geschwindigkeit der des ordentlichen Lichts voraus. Nachdem beide die Kristallplatte verlassen haben, besteht zwischen ihnen ein Gangunterschied. Auf die Plattendicke d entfallen d/λ_o Wellenlängen des ordentlichen, d/λ_{ao} des außerordentlichen Lichts. Nach dem Austritt eilt der außerordentliche dem ordentlichen

Strahl um

$$d \left(\frac{1}{\lambda_o} - \frac{1}{\lambda_{ao}} \right) = \frac{d}{\lambda_{vac}} (n_o - n_{ao}) \quad (10.24)$$

Wellenlängen voraus.

Um linear polarisiertes Licht außerhalb des Kristalls zu erhalten, muss man entweder das ordentliche oder das außerordentliche Licht aus dem Strahlengang entfernen. Dies gelingt z. B. mit dem **Nicol-Prisma** (kurz „Nicol“ genannt). Ein länglicher Kalkspat-Einkristall mit glattgeschliffenen natürlichen Spaltflächen (Abb. 10.64a; optische Achse in Bildebene senkrecht zur Längsrichtung) wird diagonal zersägt und mit einer dünnen Kittschicht wieder zusammengesetzt. Die Brechzahl des Kittes muss etwas kleiner sein als die des Kalkspats für den ordentlichen Strahl (1,66). Dieser fällt bei *B* unter einem Winkel auf, der größer ist als der Grenzwinkel der Totalreflexion, wird daher in Richtung auf die geschwärzte Wand reflektiert und dort absorbiert. Infolge seiner geringeren Brechung fällt der außerordentliche Strahl bei *A* unter einem kleineren Einfallswinkel auf die Kittschicht auf. Wählt man den Kitt so, dass seine Brechzahl nahezu gleich der des außerordentlichen Strahls ist, so tritt dieser durch die Schicht fast ohne Reflexionsverluste hindurch. Die Schwingungsebene dieses außerordentlichen Lichts ist die Zeichenebene der Abb. 10.64a. In Abb. 10.64b ist das Prisma in seiner Längsrichtung gesehen dargestellt. Der eingezeichnete Pfeil gibt die Schwingungsrichtung des außerordentlichen Lichts, also auch die Schwingungsrichtung des aus dem Nicol-Prisma austretenden polarisierten Lichts an. Die Ebene durch diese Richtung und die Ausbreitungsrichtung des Lichts, die Schwingungsebene des polarisierten Lichts, heißt auch **Schwingungsebene des Prismas**.

Außer den einachsigen Kristallen gibt es doppelbrechende Kristalle, welche zwei Richtungen enthalten, in denen nur *eine* Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts vorkommt. Sie enthalten also zwei optische Achsen, man bezeichnet sie daher als **zweiachsige Kristalle** (zu ihnen gehören z. B. Aragonit, eine andere Kristallform des CaCO_3 , und Glimmer). Bei den zweiachsigen Kristallen gehorcht keiner der beiden Strahlen dem Snellius-Gesetz, d. h. beide Strahlen verhalten sich außerordentlich.

Dichroismus. Einachsige Kristalle, die das ordentliche und das außerordentliche Licht verschieden stark schwächen, bezeichnet man als *dichroitisch*. Eine parallel zur optischen Achse geschnittene Turmalinplatte absorbiert den ordentlichen Strahl schon in einer Dicke von 1 mm fast vollständig. Sie lässt aber den außerordentlichen Strahl mit nur geringer Schwächung hindurch, sodass sie ohne weiteres als Polarisator verwendet werden kann.

Polarisationsfilter, d. h. Folien, in die submikroskopische dichroitische oder nadelförmige Kristalle parallel zueinander eingelagert sind, spielen heute eine größere Rolle als die „klassischen“ Polarisatoren.

10.2.4 Polarisation durch Reflexion und Brechung

Von einer Glasplatte (nicht metallisiert, also kein Spiegel!) wird unpolarisiertes Licht unter einem Winkel von $56,5^\circ$ reflektiert und fällt auf eine

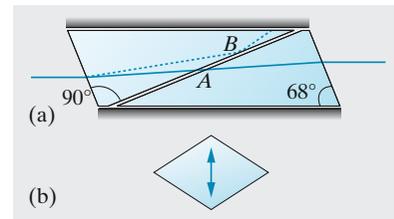


Abb. 10.64a,b. Das Nicol-Prisma

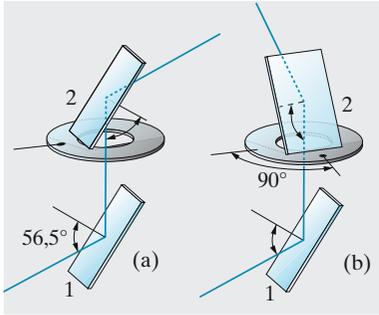


Abb. 10.65a,b. Nachweis der Polarisierung des Lichts durch Reflexion

parallel zur ersten stehende zweite Glasplatte (Abb. 10.65a). Nun dreht man die Platte 2 um eine Achse, die dem an Platte 1 reflektierten Licht parallel ist. Man stellt fest, dass dabei der zweimal reflektierte Strahl allmählich dunkler wird und nach einer 90°-Drehung völlig ausgelöscht ist. Bei 180°, wo die beiden Einfallsebenen wieder zusammenfallen, ist die Intensität die gleiche wie in der Stellung *a*, bei 270° herrscht wieder Auslöschung.

Die Erscheinung erklärt sich dadurch, dass das an der Platte 1 reflektierte Licht vollständig polarisiert ist, und zwar in der Richtung, die auf der Einfallsebene senkrecht steht. Sein elektrischer Vektor schwingt also parallel zur Glasplatte. In der Stellung *a* kann die Platte 2 dieses polarisierte Licht reflektieren, weil die Reflexionsbedingungen wegen der Identität der Einfallsebenen die gleichen sind. In der Stellung *b* (90°) kann die Platte 2 nichts reflektieren, weil das auf sie auftreffende Licht keine Komponente in der in Frage kommenden Richtung hat (der elektrische Vektor schwingt in die Platte hinein). Den Einfallswinkel (für Glas 56,5°), unter dem das reflektierte Licht vollständig polarisiert wird, nennt man **Brewster-Winkel** oder **Polarisationswinkel**. Ist der Einfallswinkel etwas größer oder kleiner, so nimmt bei einer Drehung aus der Stellung *a* in *b* die Intensität nicht auf Null, wohl aber auf ein Minimum ab. Das an Platte 1 reflektierte Licht enthält dann noch eine Komponente, die in der Einfallsebene von Platte 1 schwingt und die an Platte 2 auch in der Stellung *b* noch reflektiert werden kann.

Die reflektierte Welle entsteht nach dem Huygens-Fresnel-Prinzip als Überlagerung aller Elementarwellen, deren Ausgangspunkte die vom einfallenden Licht getroffenen Punkte der Oberfläche sind. Physikalisch sind für eine elektromagnetische Welle diese „Punkte der Oberfläche“ Ladungen in einer Schicht bestimmter Dicke nahe der Oberfläche, die vom elektrischen Feld der einfallenden Welle zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Diese Schwingungen erfolgen natürlich in Richtung des anregenden elektrischen Feldes. Bedenkt man, dass eine linear schwingende Ladung (Hertz-Dipol) in ihrer Schwingungsrichtung nicht emittiert (Abschn. 7.4.6), so ergibt sich, dass keine reflektierte Welle zustande kommt, wenn ihre Richtung in Schwingungsrichtung der Dipole stünde. Das ist beim Einfall einer Welle, die in der Einfallsebene polarisiert ist, genau dann der Fall, wenn der gebrochene und der reflektierte Strahl aufeinander senkrecht stehen würden. Dann ist nach Abb. 10.66 $\beta_p = 90^\circ - \alpha_p$, also $\sin \beta_p = \cos \alpha_p$. Aus dem Brechungsgesetz $\sin \alpha_p / \sin \beta_p = n$ wird in diesem Fall

$$\tan \alpha_p = n. \quad (10.25)$$

Das ist das **Brewster-Gesetz** für den Einfallswinkel, bei dem ein in der Einfallsebene polarisierter Strahl nicht reflektiert wird. Liegt die Polarisationsrichtung senkrecht zur Einfallsebene (parallel zur Oberfläche), so ergibt sich keine solche Emissionsschwierigkeit. War das einfallende Licht unpolarisiert, so wird unter dem Brewster-Winkel nur diese Polarisationsrichtung reflektiert.

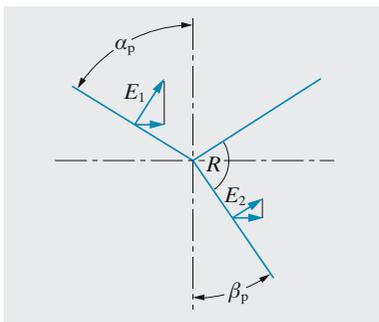


Abb. 10.66. Bedingung für die Erzeugung von vollständig polarisiertem Licht durch Reflexion (Brewster-Gesetz)

10.2.5 Intensitätsverhältnisse bei Reflexion und Brechung

Wenn Licht so auf die Grenzfläche zwischen zwei durchsichtigen Medien fällt, dass reflektierter und gebrochener Strahl aufeinander senkrecht stehen, enthält die

reflektierte Welle keinen parallel zur Einfallsebene polarisierten Anteil (*Brewster*). Was geschieht aber bei anderen Einfallswinkeln? Wie viel Licht wird reflektiert bzw. gebrochen, in Abhängigkeit von Einfallswinkel und Polarisationsrichtung? Die elektromagnetische Lichttheorie beantwortet diese Fragen, wobei das Brewster-Gesetz als Spezialfall mit herauskommt, und braucht dazu nur folgende Tatsachen (Abschn. 7.4.3):

- Die Intensität einer Lichtwelle ist proportional $\sqrt{\epsilon} E^2$, wo E der Betrag des elektrischen Feldvektors ist. An der Grenzfläche ist keine Energiesenke, d. h. alle Energie, die auffällt, wird entweder reflektiert oder durchgelassen. Wir bezeichnen die einfallende, reflektierte und gebrochene Welle mit den Indizes e, r, g , die Dielektrizitätskonstanten der beiden Medien mit ϵ bzw. ϵ' . Die Stetigkeitsbedingung des Energiestroms an der Grenzfläche betrifft seine Komponente senkrecht zu dieser:

$$\sqrt{\epsilon} (E_e^2 - E_r^2) \cos \alpha = \sqrt{\epsilon'} E_g^2 \cos \beta \tag{10.26}$$

(der reflektierte Energiestrom hat das --Zeichen, denn seine Richtung ist entgegengesetzt der einfallenden).

- An der Grenzfläche sitzen keine Ladungen (durchsichtige Medien sind i. Allg. Isolatoren). Also ist die Parallelkomponente des Feldes E an der Grenzfläche stetig (Abschn. 6.1.4d).
- Brechzahl und Dielektrizitätskonstante hängen nach der Maxwell-Relation zusammen:

$$n = \sqrt{\epsilon} .$$

Wir betrachten zuerst eine Welle, die senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist (E senkrecht zur Einfallsebene). Dann ergeben sich die Bedingungen

Parallelkomponente von E stetig: $E_e + E_r = E_g$

Energiestrom senkenfrei: $(E_e^2 - E_r^2) \sqrt{\epsilon} \cos \alpha = E_g^2 \sqrt{\epsilon'} \cos \beta .$

Division der zweiten Gleichung durch die erste liefert $(E_e - E_r) \sqrt{\epsilon} \cos \alpha = E_g \sqrt{\epsilon'} \cos \beta$. Nach der Maxwell-Relation $\sqrt{\epsilon'/\epsilon} = n'/n = \sin \alpha / \sin \beta$ bedeutet das $(E_e - E_r) \sin \beta \cos \alpha = E_g \sin \alpha \cos \beta$. Zusammen mit $E_e + E_r = E_g$ erhält man daraus

$$E_r = E_e \frac{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta} = -E_e \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} . \tag{10.27}$$

Für die gebrochene Welle bleibt übrig

$$E_g = E_e \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} . \tag{10.28}$$

Wenn $\alpha > \beta$, d. h. beim Auftreffen auf ein dichteres Medium, hat die reflektierte Amplitude E_r das entgegengesetzte Vorzeichen wie die einfallende: Phasensprung um π bei der Reflexion. Bei der Reflexion am dünneren Medium ($\alpha < \beta$) kehrt der $\sin(\alpha - \beta)$ sein Vorzeichen um, und E_r und E_e sind gleichgerichtet: Kein Phasensprung. Der reflektierte Intensitätsanteil ergibt sich durch Quadrieren von E_r/E_e . Bei fast senkrechtem Einfall, wo man die \cos der Winkel durch 1 ersetzen kann, ist

$$E_r = -E_e \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = -E_e \frac{n' - n}{n' + n} . \tag{10.29}$$

Der reflektierte Intensitätsanteil $[(n' - n)/(n' + n)]^2$ ist für Luft–Glas 0,04, für Luft–Wasser 0,02.

Wenn die Welle parallel zur Einfallsebene polarisiert ist, zählen in der Stetigkeitsbedingung für E nur die Komponenten parallel zur Grenzfläche:

$$(E_e + E_r) \cos \alpha = E_g \cos \beta .$$

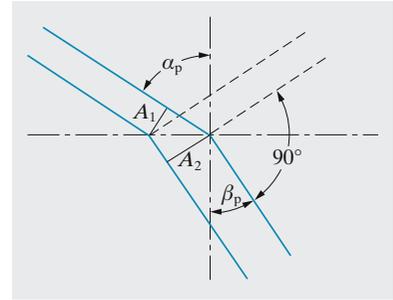


Abb. 10.67. Benutzung des Energie-satzes zur Berechnung des Brewster-Winkels

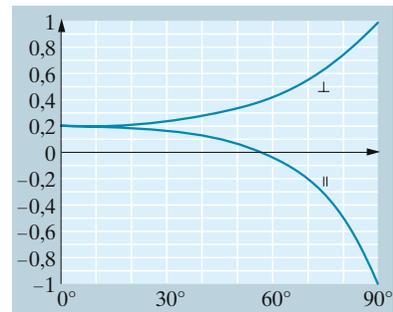


Abb. 10.68. An einer ebenen Grenzfläche Luft–Glas wird Licht reflektiert, das senkrecht bzw. parallel zur Einfallsebene polarisiert ist. Dargestellt ist die Abhängigkeit der reflektierten Amplitude vom Winkel gegen das Einfallslot

Die Stetigkeitsbedingung für den Energiestrom heißt wieder

$$(E_e^2 - E_r^2)\sqrt{\varepsilon} \cos \alpha = E_g^2\sqrt{\varepsilon'} \cos \beta.$$

Wir rechnen genau wie oben und erhalten

$$E_r = E_e \frac{\sin \beta \cos \beta - \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta}.$$

Mittels der trigonometrischen Beziehung $\sin(\alpha \pm \beta) \cos(\alpha \mp \beta) = \sin \alpha \cos \alpha \pm \sin \beta \cos \beta$ kann man das umwandeln in

$$E_r = -E_e \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}. \quad (10.30)$$

Für die durchgehende Welle bleibt die Amplitude

$$E_g = E_e \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \quad (10.31)$$

übrig. Bei $\alpha + \beta = 90^\circ$, d. h. wenn reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht aufeinander stehen, erhält man aus (10.30) $E_r = 0$, entsprechend dem Brewster-Gesetz, denn der Nenner wird ∞ . Bei fast senkrechtem Einfall ergibt sich wieder $E_r = -E_e(n' - n)/(n' + n)$: Bei senkrechtem Einfall unterscheiden sich die beiden Polarisationsrichtungen nicht im Reflexionsgrad.

Eigentlich gibt es ja noch eine dritte Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche, nämlich für die Normalkomponente von \mathbf{D} (oder von $\varepsilon \mathbf{E}$). Sie liefert zusammen mit den anderen Bedingungen $\sin \alpha / \sin \beta = \sqrt{\varepsilon' / \varepsilon}$, was wir bereits benutzt haben, denn nach der Maxwell-Relation ist $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Die Beziehungen (10.27)–(10.31) hat *Fresnel* schon 1822 ohne Kenntnis und Benutzung des elektromagnetischen Charakters des Lichts auf sehr viel kompliziertere Weise abgeleitet.

10.2.6 Reflexminderung

Beim senkrechten Übergang Luft–Glas werden etwa 4% des Lichts reflektiert. In einem Linsensystem aus N Linsen passiert das $2N$ -mal, und dieser Lichtverlust kann sehr erheblich werden, abgesehen von den inneren störenden Reflexionen. In modernen Systemen sind daher alle Grenzflächen Luft–Glas **vergütet**, sodass an ihnen fast nichts mehr reflektiert, sondern alles durchgelassen wird. Das gelingt (exakt allerdings nur für eine Wellenlänge und senkrechten Einfall), indem man eine Schicht der Dicke $d = \lambda / (4n)$ mit der Brechzahl $n = \sqrt{n_{\text{Glas}}}$ aufdampft.

Warum man $d = \lambda / (4n)$ nimmt, ist klar: Zwischen den an der Ober- und der Unterseite der Schicht reflektierten Wellen muss ein optischer Gangunterschied $\lambda / (2n)$ bestehen, damit sie sich durch Interferenz schwächen. Da beide Reflexionen am dichteren Medium erfolgen, treten bei beiden Phasensprünge auf, die $\lambda / (2n)$ entsprechen, und heben sich weg. Der Gangunterschied stammt allein vom Hin- und Rückweg durch die $\lambda / (4n)$ -Schicht. Warum aber $n = \sqrt{n_{\text{Glas}}}$?

An der Interferenz wirkt nicht nur die Welle mit, die einmal durch die Schicht hin- und zurückgegangen ist, sondern auch alle, die das zwei-, drei-, ... mal getan haben. Der Gangunterschied zwischen *ihnen* ist jeweils λ / n , nämlich $\lambda / (2n)$ bei der Reflexion unten, nichts bei der Reflexion oben, $\lambda / (2n)$ beim Hin- und Hergang. Alle diese Wellen addieren also ihre Amplituden. Wenn bei der Reflexion Luft–Schicht die Amplitude um den Faktor R , bei der Reflexion Schicht–Glas um R' geschwächt wird, und eine Welle mit der Amplitude 1 einfällt, erhalten wir unter Beachtung des Vorzeichens (Amplitudenumkehr bei der Reflexion am dichteren Medium) die in Abb. 10.69 angegebenen Amplituden. In der Reihe $2', 3', 4', \dots$ haben die Wellen jeweils eine Reflexion oben und eine unten mehr erlitten als der Vorgänger, werden also je um den Faktor RR' schwächer. Ihre Summe ergibt sich aus der geometrischen

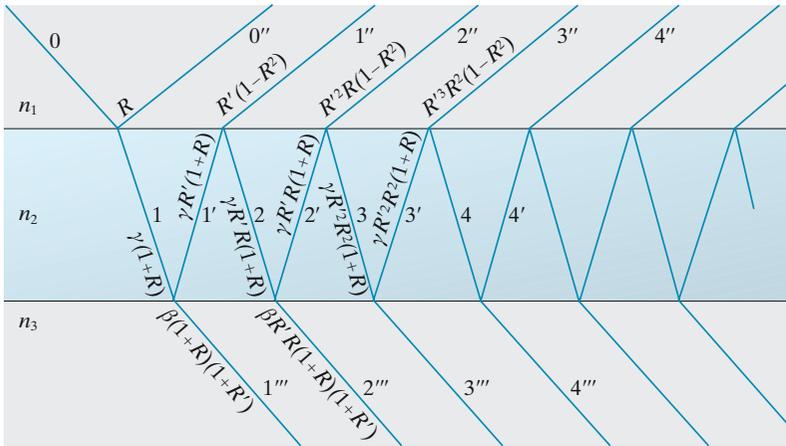


Abb. 10.69. Amplituden der verschiedenen reflektierten und gebrochenen Wellen an einer planparallelen Schicht. Die Faktoren $\gamma = \sqrt{n_1/n_2}$ und $\beta = \sqrt{n_1/n_3}$ folgen aus der Energiebilanz (Abschn. 10.2.5):
 $E_g = E_e 2\sqrt{n_1 n_2} / (n_1 + n_2)$,
 $E_r = E_e (n_2 - n_1) / (n_2 + n_1) = R E_e$,
 also $E_g = \sqrt{n_1/n_2} E_e (1 + R)$. Prüfen Sie auch, ob die Amplituden von $1'''$, $2'''$, $3'''$, ... zusammen 1 ergeben, d. h. ob alles Licht durchgeht

Reihe oder aus (10.22) mit $\delta = 2\pi$ als $-R'(1 - R^2)/(1 - RR')$. Diese Summe soll gleich $-R$ sein, was offenbar bei $R = R'$ zutrifft. Beide Grenzflächen müssen gleich gut reflektieren oder nach (10.29): $(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2) = (n_2 - n_3)/(n_2 + n_3)$. Dies ist genau für $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ erfüllt (man kürze links durch $\sqrt{n_1}$, rechts durch $\sqrt{n_3}$).

Wenn man die Bedingung $d = \lambda/(4n_2)$ für die Mitte des Sichtbaren (gelbgrün) erfüllt, stimmt sie weder im Blauen noch im Roten genau. Daher schimmern vergütete Kameraobjektive purpurn. Im Prinzip kann man mehrere Vergütungsschichten für verschiedene λ übereinander dampfen und damit auch noch diesen Effekt weitgehend unterbinden.

10.2.7 Interferenzen im parallelen linear polarisierten Licht

Durch eine Platte aus einem doppelbrechenden Kristall, die parallel zur optischen Achse geschnitten ist, sieht man senkrecht zur Schnittebene nicht doppelt: Natürliches unpolarisiertes Licht wird zwar in einen ordentlichen und einen außerordentlichen Strahl aufgespalten – der ordentliche schwingt senkrecht, der außerordentliche parallel zur optischen Achse –, deren Ausbreitungsrichtungen unterscheiden sich aber nicht. Wegen der Verschiedenheit der Brechungsindizes zeigen aber beide Strahlen nach dem Austritt aus der Platte einen Gangunterschied, der nach (10.24), in Wellenlängen gemessen,

$$z = \frac{d}{\lambda_{\text{vac}}} (n_o - n_{ao}) \tag{10.32}$$

beträgt. Er ist proportional zur Plattendicke d .

Lässt man statt natürliches Lichts linear polarisiertes auffallen, so bleibt dieses (bis auf geringe Reflexions- und Absorptionsverluste) in seiner Intensität und Schwingungsrichtung unverändert, wenn es in der o-o- oder ao-ao-Richtung der Kristallplatte schwingt (Normalstellung). Bringt man die Platte in Normalstellung zwischen gekreuzte Nicols, so bleibt es dahinter dunkel. Dreht man aber die Platte zwischen den Nicols um den Winkel α (Abb. 10.70), so enthält das aus ihr austretende Licht einen ordentlichen und einen außerordentlichen Anteil. Wenn vorn die Amplitude A auftrifft,

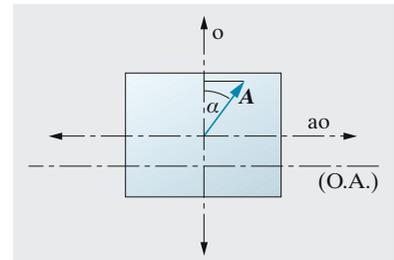


Abb. 10.70. Senkrechte Durchstrahlung einer doppelbrechenden Platte, die parallel zur optischen Achse (O.A.) geschnitten ist. Strahlrichtung senkrecht zur Zeichenebene

so erscheint (abgesehen von Reflexion und Brechung) hinten $A \cos \alpha$ als ordentliche, $A \sin \alpha$ als außerordentliche Amplitude. Für $\alpha = 45^\circ$ (*Diagonalstellung*) sind beide Amplituden, also auch beide Intensitäten, einander gleich.

Praktisch besonders wichtig ist der Fall, dass diese beiden Komponenten einen Gangunterschied $\lambda/4$ haben. Kristallscheibchen, die das leisten (**Viertelwellenplättchen**), müssen nach (10.24) die Dicke

$$d_{\lambda/4} = \frac{\lambda_{\text{vac}}}{4} \frac{1}{n_o - n_{a0}} \quad (10.33)$$

haben. Im Kalkspat ist für Natriumlicht $n_o = 1,6584$, $n_{a0} = 1,4864$ und daher $d_{\lambda/4} = 0,856 \cdot 10^{-6}$ m. So dünne Schichten sind aber kaum herstellbar. Wegen des viel geringeren Unterschiedes zwischen den Hauptbrechzahlen bei Gips oder Glimmer, bei denen infolge ihrer Zweiachsigkeit die Zusammenhänge etwas verwickelter sind, verwendet man daher im Allgemeinen diese Substanzen als Viertelwellenplättchen. Beim Glimmer braucht man dazu eine Dicke von $3 \cdot 10^{-5}$ m.

Zwei linear polarisierte Wellen gleicher Intensität, aber mit einem Gangunterschied von $\lambda/4$, also einer Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$, wie sie aus einem Viertelwellenplättchen kommen, setzen sich zu einer **zirkularen Welle** zusammen, d. h. einer Welle, in der die Feldvektoren an jedem Ort im Kreis schwingen (Abschn. 4.1.1a). Nun kann der Analysator das Licht in keiner Stellung auslöschen. In jeder beliebigen Lage lässt er eine linear polarisierte Welle mit gleicher Amplitude durch, die Helligkeit ist von der Analysatorstellung unabhängig. Ändert man die Dicke so, dass die Gangunterschiede $3\lambda/4$, $5\lambda/4$, \dots , $(2m+1)\lambda/4$ betragen, so bleibt die resultierende Welle zirkular polarisiert; es wechselt nur der Umlaufsinn. Bei Gangunterschieden von $\lambda/2$, d. h. Phasenunterschieden π , die bei Plättchen auftreten, die doppelt so dick wie $\lambda/4$ -Plättchen sind, setzen sich die beiden Wellen aber wieder zu linear polarisierten Wellen zusammen. Sie schwingen in einer Ebene, die zur Schwingungsebene des auffallenden Lichts senkrecht steht. Sie werden also ausgelöscht, wenn die Nicols parallel stehen. Dasselbe geschieht für Gangunterschiede $3\lambda/2$, $5\lambda/2$, \dots . Ist aber der Gangunterschied λ , 2λ , 3λ usw., so bleibt bei Parallelstellung der Nicols das Gesichtsfeld hell; um Auslöschung zu erhalten, müssen die Nicols gekreuzt werden.

Optisch isotrope Körper, die zwischen gekreuzte Polarisatoren gebracht werden, heben die Auslöschung des Lichts nicht auf, doppelbrechende Körper bewirken aber fast immer eine Aufhellung, welche bei Verwendung von weißem Licht mit einer Färbung verbunden ist. Die Doppelbrechung ist nicht nur eine Eigenschaft kristallisierter Stoffe, sondern tritt an allen Stoffen auf, die einem einseitig gerichteten Zug unterworfen sind oder eine geschichtete oder Faserstruktur besitzen. Auch in strömenden Flüssigkeiten wird sie beobachtet. Diese *Form-* bzw. **Strömungsdoppelbrechung** kommt bei vielen pflanzlichen oder tierischen Stoffen vor. Das Studium der Doppelbrechung im polarisierten Licht ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung des Spannungszustandes oder zur Ermittlung von Strukturen, die im Mikroskop sonst keinen genügenden Kontrast zeigen (**Polarisationsmikroskopie**).



Abb. 10.71. Interferenzbild einer senkrecht zur optischen Achse geschnittenen Kalkspatplatte

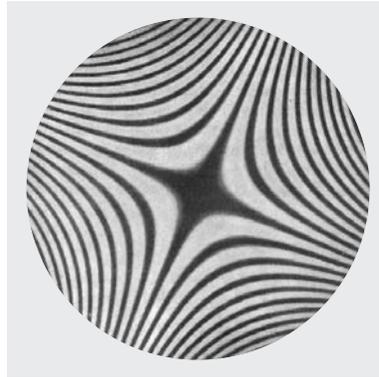


Abb. 10.72. Interferenzbild einer parallel zur optischen Achse geschnittenen Kalkspatplatte

10.2.8 Interferenzen im konvergenten polarisierten Licht

Paralleles oder schwach divergentes polarisiertes Licht werde durch eine kurzbrennweitige Linse $f \approx 2$ cm zu einem stark konvergenten Bündel zusammengefasst; in die Brennebene werde eine senkrecht zur optischen Achse geschnittene, planparallele doppelbrechende Platte gestellt (Abb. 10.73). Die divergent von der Platte ausgehenden Strahlen werden wieder durch eine Linse von kurzer Brennweite konvergent oder parallel gemacht und gelangen unter Zwischenschaltung eines Analysators in das Auge des Beobachters; oder es wird mit einem Objektiv auf einer Projektionsfläche ein Bild der Interferenzfigur entworfen, wie es für Kalkspat, der senkrecht zur Achse geschnitten ist, in Abb. 10.71 dargestellt ist. Wenn man mit gekreuzten Nicols beobachtet, ist die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel. In den Richtungen der Schwingungsebenen der Nicols beobachtet man von der Mitte ausgehend ein dunkles Kreuz, dessen Arme sich nach außen verbreitern. Die dazwischenliegenden Sektoren sind mit konzentrischen hellen und dunklen Ringen erfüllt, welche nach außen hin immer enger aufeinander folgen. In weißem Licht beobachtet man nur wenige, aber farbige Ringe.

Bringt man eine parallel zur optischen Achse geschnittene Kalkspatplatte in Diagonalstellung in das konvergente polarisierte Licht zwischen gekreuzte Nicols, so besteht die Interferenzfigur aus zwei gegeneinander um 90° gedrehten Scharen von Hyperbeln (Abb. 10.72).

10.2.9 Drehung der Polarisationssebene

Bringt man zwischen gekreuzte Nicols eine planparallele Quarzplatte, die senkrecht zu einer bestimmten wieder als optische Achse bezeichneten Kristallrichtung geschnitten ist, so hellt sich das Gesichtsfeld auf. Bei einfarbigem Licht ist Dunkelheit wieder zu erreichen, indem man den Analysator um einen bestimmten Winkel α dreht. Der Quarz hat also die Polarisationssebene des Lichts um diesen Winkel α gedreht (allgemeiner und genauer um $\alpha + m\pi$, wo $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ sein könnte). Man nennt dies **optische Aktivität**. Das Experiment gibt Proportionalität des Drehwinkels α mit der Dicke des Quarzes:

$$\alpha = \gamma d \quad (10.34)$$

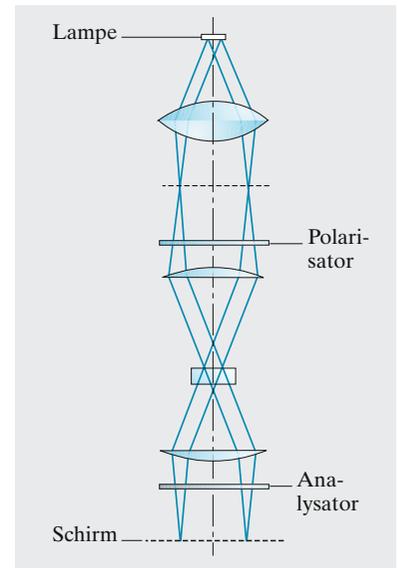


Abb. 10.73. Anordnung zur Erzeugung von Interferenzen im konvergenten polarisierten Licht

Tabelle 10.2. Rotationsdispersion des Quarzes

λ/nm	Spezifische Drehung γ ($^\circ/\text{mm}$)
275	121,1
373	58,86
436	41,55
509	29,72
656	17,32
1 040	6,69
1 770	2,28
2 140	1,55

γ heißt spezifische Drehung. Für das gelbe Natriumlicht beträgt γ bei 20°C $21,728^\circ/\text{mm}$. Die Entscheidung, ob $m = 0, 1, 2, \dots$ ist, gibt ein Versuch mit verschiedenen dicken Kristallen, bei denen die beobachteten Drehwinkel den Dicken proportional sein müssen.

Es gibt rechts- und linksdrehende Quarze. Erstere drehen die Polarisationssebene im Uhrzeigersinn, wenn man dem Licht entgegenblickt, die anderen entgegen dem Uhrzeigersinn. Die Drehung ist von der Farbe stark abhängig; sie ist umso größer, je kurzwelliger das Licht ist (**Rotationsdispersion**, Abschn. 10.3.2 und Tabelle 10.2).

Daraus folgt, dass weißes Licht durch keine Stellung des Analysators völlig ausgelöscht werden kann. Auslöschung kann nur für *eine* der im weißen Licht enthaltenen Farben erfolgen; benachbarte Wellenlängen werden geschwächt. Eine Farbe, deren Schwingungsebene mit der des Analysators übereinstimmt, wird ungeschwächt hindurchgelassen. Dreht man den Analysator, so ändert sich der Farbton dauernd. Beim *rechtsdrehenden* Stoff folgen die Farben in der Reihenfolge von rötlichen über gelbliche, grünliche, violette Farbtöne, und es erfolgt ein Farbumschlag vom Violett zum Rot, wenn man, bei der Blickrichtung dem Licht entgegen, den Analysator im Uhrzeigersinn dreht. Beim linksdrehenden Stoff muss die Drehrichtung dem Uhrzeiger entgegengerichtet sein, um die gleiche Farbenfolge zu erhalten.

Außer dem Quarz drehen noch andere Kristalle, wie Zinnober (etwa 20-mal so stark für gelbes Licht), Natriumchlorat usw. Das Drehvermögen ist an die Kristallform gebunden, und es verschwindet im Allgemeinen in der Schmelze oder Lösung.

Andere Stoffe drehen auch im flüssigen oder gelösten Zustand, weil ihre Asymmetrie schon im Molekül steckt. Besonders wichtig sind organische Verbindungen mit asymmetrischen C-Atomen, d. h. C-Atomen mit vier verschiedenen Substituenten am Bindungstetraeder. Der Drehwinkel einer Lösung solcher *optisch aktiven* Stoffe ist proportional zur Konzentration der Lösung. So kann man z. B. den Zuckergehalt von Getränken oder auch von Harn bequem und schnell messen, auch wenn andere Stoffe mitgelöst sind (**Saccharimetrie**). Die einzelnen Zuckerarten drehen aber verschieden: Traubenzucker (Glucose) rechts, Fruchtzucker (Fructose) stärker links, die Verbindung beider zu Rohrzucker (Saccharose) dreht trotzdem rechts, was bei der Aufspaltung (**Invertierung**) in eine Linksdrehung übergeht.

Die Drehung kommt so zustande: Die Überlagerung von zwei entgegengerichteten zirkularen Schwingungen *gleicher Frequenz* gibt eine lineare Schwingung (Abschn. 4.1.1a). Umgekehrt kann man sich eine ebene, linear polarisierte Welle in zwei zirkular polarisierte Wellen zerlegt denken, die sich mit der gleichen Frequenz und Phasengeschwindigkeit ausbreiten (Abb. 10.74). Die Drehung der Polarisationssebene lässt sich beschreiben als Aufspaltung einer linear polarisierten eintretenden Welle in zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen mit gleicher Frequenz, aber verschiedener Phasengeschwindigkeit. Die rechtsdrehende Welle möge eine größere Geschwindigkeit haben als die linksdrehende. Wenn der Vektor A_L der linksdrehenden Welle nach mehreren Umläufen wieder die Anfangslage erreicht hat, hat sich der Vektor A_R der rechts-

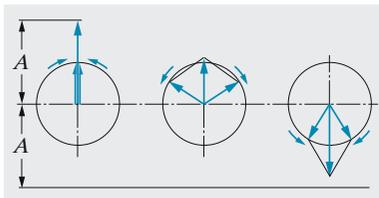


Abb. 10.74. Überlagerung zweier zirkularer Schwingungen zu einer linearen Schwingung

drehenden am gleichen Ort schon darüber hinaus gedreht (Abb. 10.75). Die Resultierende liegt nun in einer Ebene, die den Winkel zwischen A_L und A_R halbiert. Um diesen Winkel $\psi/2$ hat sich also die Schwingungsrichtung der linear polarisierten Welle gedreht. So schraubt sich die linear polarisierte Welle auf einer Schraubenfläche durch die drehende Substanz hindurch. Der Winkel wächst mit jeder Schwingung, und daher muss der Drehwinkel der Schichtdicke proportional sein.

Unter dem Einfluss eines parallel zur Strahlrichtung orientierten Magnetfeldes zeigen manche Substanzen optische Aktivität (Abschn. 10.3.4).

Digitalanzeigen von Uhren, Taschenrechnern, Videokameras, Mini-TV, Laptops benutzen **LCDs (liquid crystal display)**. **Flüssigkristalle** fließen wie Öl, aber ihre stab- oder plattenförmigen Moleküle besetzen geordnete Lagen. In der häufigsten LCD-Bauart liegt zwischen um 90° verdrehten Polarisationsfolien eine **nematische** Schicht, deren Stabmoleküle nahe diesen Folien durch besondere Vorbehandlung jeweils parallel zur Polarisationsebene ausgerichtet werden. Dazwischen ändert sich die Einstellung mit der Tiefe stetig wendeltreppenartig. In gleicher Weise dreht sich bei geeigneter Schichtdicke auch die Polarisationsebene, das Licht geht durch beide Folien zum darunterliegenden Spiegel und wieder zurück: Die Schicht sieht hell aus, bis man ein schwaches elektrisches Feld anlegt, das die Moleküle überwiegend parallel orientiert. Dann kommt kein Licht durch die gekreuzten Polarisatoren: Der Feldbereich wird dunkel. Der Stromverbrauch ist minimal.

10.2.10 Der elektrooptische Effekt (Kerr-Effekt)

Gewisse Gase und Flüssigkeiten (nicht die einatomigen) werden doppelbrechend, wenn man senkrecht zur Richtung des Lichtstrahls ein elektrisches Feld anlegt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle hängt dann davon ab, wie ihre Polarisationsrichtung zur Feldrichtung steht. Die Deutung ist die folgende: Im äußeren elektrischen Feld werden die Moleküle wenigstens teilweise orientiert, besonders wenn sie ein großes Dipolmoment haben. Die zur Dispersion führende Wechselwirkung der einfallenden Lichtwelle mit den Molekülen ist dann verschieden, je nachdem, ob ihr elektrischer Vektor parallel oder senkrecht zur Orientierungsrichtung liegt. Ein ähnlicher Effekt ergibt sich, wenn die Polarisierbarkeit der Moleküle nicht in allen Richtungen die gleiche, sondern anisotrop ist.

Ein Gefäß mit einer elektrooptisch aktiven Flüssigkeit (z. B. Nitrobenzol), durch das man einen Lichtstrahl so schicken kann, dass er ein elektrisches Feld senkrecht durchsetzt, heißt **Kerr-Zelle**. Zwischen gekreuzten Polarisatoren angebracht, erlaubt sie, mittels einer Wechselspannung einen Lichtstrahl im Rhythmus der Feldänderungen zu unterbrechen (s. die Anwendungen in Abschn. 9.3.2).

10.3 Absorption, Dispersion und Streuung des Lichts

Dem Licht kann auf seinem Weg viel mehr passieren als nur Reflexion, Brechung, Beugung: In Materie wird es je nach seiner Frequenz mehr oder weniger stark verschluckt, in enger Beziehung zur Brechzahl bei die-

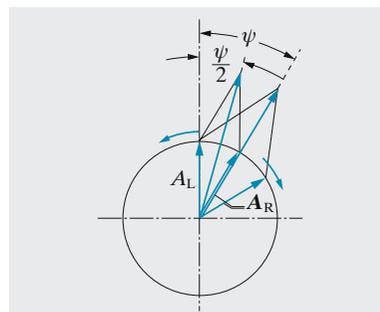


Abb. 10.75. Drehung der Polarisationssebene einer linear polarisierten Welle als Folge verschiedener Phasengeschwindigkeiten der zirkular polarisierten Wellen, aus denen sie zusammensetzbar ist

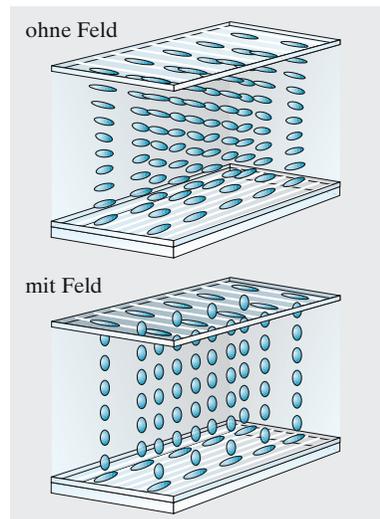


Abb. 10.76. Anordnung der nematischen Moleküle in einem LCD ohne (oben) und mit Feld (unten)

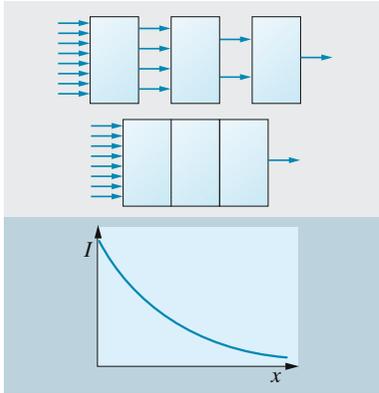


Abb. 10.77. Das Absorptionsgesetz. Jede Platte verzehrt den gleichen Bruchteil des auf sie auffallenden Lichts. Das gilt für getrennte (*oben*) ebenso wie für vereinigte Platten (*Mitte*). *Unten*: Resultierende Intensitätsverteilung

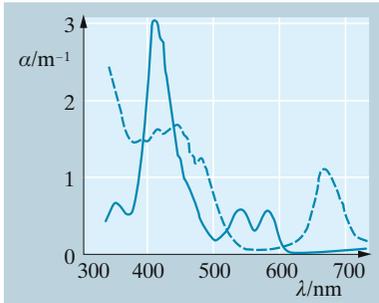


Abb. 10.78. Absorptionsspektren von zwei der für uns wichtigsten Substanzen: (---) Chlorophyll, (—) Hämoglobin (genauer: Chlorophyll a, Oxyhämoglobin vom Menschen). Dass Blätter grün und Blut rot (in sehr dünner Schicht gelb) sind, lässt sich daraus sofort ablesen. *Ob* und *warum* aber die Absorptionsmaxima so liegen müssen, ist beim Chlorophyll nur zum Teil und beim Hämoglobin so gut wie gar nicht bekannt (Abschn. 11.3.4)

ser Frequenz. Außerdem wird es gestreut: Von sehr kleinen Hindernissen geht eine Kugelwelle aus, bei größeren muss man alle diese Kugelwellen überlagern, woraus man wieder Reflexion und Brechung herleiten könnte.

10.3.1 Absorption

Beim Durchgang durch Materie wird Strahlung mehr oder weniger geschwächt und wandelt sich dabei in andere Energieformen, besonders in Wärme um (im Gegensatz zur Streuung, bei der die Strahlung nur ihre Ausbreitungsrichtung ändert, aber Strahlung bleibt). Innerhalb einer sehr kleinen Schichtdicke dx wird jede Strahlungsintensität I um den gleichen Bruchteil geschwächt:

$$dI = -\alpha I dx . \quad (10.35)$$

Der **Absorptionskoeffizient** α ist eine Stoffkonstante und hat offenbar die Dimension m^{-1} . Durch Integration ergibt sich der Intensitätsverlust in einer größeren Schichtdicke x :

$$I(x) = I(0) e^{-\alpha x} \quad (\text{Lambert-Beer-Bouguer-Gesetz}) . \quad (10.36)$$

Handelt es sich um gelöste Stoffe in einem praktisch durchsichtigen Lösungsmittel (*Wasser*), so ist ihr Beitrag zur Absorption proportional der Konzentration c in g/l, mol/l o. Ä.:

$$\alpha = \varepsilon c .$$

ε heißt entsprechend der g/l- oder molare **Extinktionskoeffizient**. Ein anderer häufig benutzter Begriff ist:

Transmissionsgrad einer Schicht: Bruchteil durchgelassenen Lichts:

$$e^{-\alpha x} .$$

Gleichung (10.36) gilt zunächst nur für monochromatisches Licht. Man muss aber immer mit einem Spektralbereich arbeiten, in dem um $\Delta\alpha$ unterschiedliche α -Werte gelten. Wenn die Schichtdicke größer wird als $1/\Delta\alpha$, kommen die Bereiche mit kleinem α immer mehr zur Geltung, und die Transmission wird größer als dem mittleren α entspräche. Eine vollständige Theorie der Absorption ist schwierig. Der Absorptionskoeffizient α ist eine meist sehr komplizierte Funktion der Frequenz. Das **Absorptionspektrum** $\alpha(\nu)$ ist eines der wichtigsten Mittel zur Charakterisierung von Substanzen, besonders in der organischen Chemie. Man unterscheidet vereinfachend linienhafte und kontinuierliche Absorption. Beide beruhen auf der Verschiebung von Ladungen, bei der die elektromagnetische Welle Leistung in Form joulescher Wärme investieren muss. Bei der linienhaften Absorption handelt es sich um gebundene Ladungen, die in erzwungene Schwingungen versetzt werden (Abschn. 10.3.3), bei der kontinuierlichen Absorption um quasifreie Ladungen, z. B. die Elektronen der Metalle, die für deren starke Absorption sämtlicher elektromagnetischer Wellen verantwortlich sind.

In einem Stoff mit der Leitfähigkeit σ erzeugt das elektrische Feld E eine Stromdichte $j = \sigma E$. Im m^3 wird somit eine Joule-Leistung $jE = \sigma E^2$ freigesetzt, natürlich auf Kosten des Energiestromes der Welle oder der Intensität. Diese Intensität (Energie/ $\text{m}^2 \text{s}$) ist $I = n\epsilon_0 c E^2$ (Abschn. 7.4.4). Auf einer Wegstrecke dx nimmt die Intensität ab um den Betrag der Joule-Leistung in einem Quader von 1 m^2 Querschnitt und der Dicke dx :

$$dI = -\sigma E^2 dx = -\frac{\sigma}{n\epsilon_0 c} I dx. \quad (10.37)$$

Vergleich mit (10.35) liefert

$$\boxed{\alpha = \frac{\sigma}{n\epsilon_0 c}}. \quad (10.38)$$

10.3.2 Dispersion

Die Erscheinung, dass verschiedene Farben des sichtbaren Spektrums (oder allgemeiner Wellen mit verschiedener Frequenz bzw. Wellenlänge) verschieden stark gebrochen werden, heißt **Dispersion**. Die Brechzahlen für blaues und rotes Licht unterscheiden sich normalerweise nur um weniger als 0,03.

Wenn die Brechzahl stetig vom roten bis zum violetten Ende des Spektrums ansteigt, spricht man von **normaler Dispersion**. Sie liegt für die meisten durchsichtigen Stoffe vor.

Seltener und schwerer zu beobachten ist der Fall, dass die Brechzahl für kurzwelliges Licht kleiner ist als für langwelliges: **Anomale Dispersion**. Dieses Verhalten ist die Regel in Spektralbereichen starker Absorption. Innerhalb einer ausgesprochenen Absorptionslinie ist dieser Abfall von n mit abnehmender Wellenlänge sehr steil und geht oft bis zu n -Werten, die kleiner als 1 sind. Eine solche Substanz ist z. B. festes Fuchsin, bei dem im Bereich von 600 bis 450 nm statt des Anstieges ein Abfall der Brechzahl beobachtet wird.

Wenn man die Untersuchung auf das ultrarote bzw. das ultraviolette Licht ausdehnt, so findet man bei allen Stoffen Gebiete mit Absorption und anomaler Dispersion. Harte Röntgenstrahlung zeigt zwar normale Dispersion, aber mit $n < 1$. Funk- und Radarwellen haben ebenfalls ein eigenartiges Dispersionsverhalten, besonders in Gebieten, wo es freie Elektronen gibt (Ionosphäre).

Alle diese Eigenschaften der Dispersionskurve eines Stoffes lassen sich elektronentheoretisch in großen Zügen verstehen. Dass die Brechzahl sich mit der Farbe ändert, bedeutet, dass die Phasengeschwindigkeit der Lichtwellen von ihrer Frequenz abhängt. Wenn die **Maxwell-Relation** (Abschn. 7.4.3) zwischen Brechzahl und Dielektrizitätskonstante

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon} \quad (10.39)$$

allgemeine Gültigkeit beanspruchen darf (was nicht uneingeschränkt zutrifft), bedeutet das, dass sich das gesamte Dispersionsverhalten durch eine Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante ϵ ausdrücken lässt.

10.3.3 Atomistische Deutung der Dispersion

Die Dielektrizitätskonstante war bisher nur für statische Felder definiert. Um diesen Begriff auf die hochfrequenten Wechselfelder einer elektromagnetischen Welle auszudehnen, benutzen wir die Argumentation von Abschn. 6.2.2. Dort war die **dielektrische Polarisation** P von Materie in einem elektrischen Feld der Feldstärke E dargestellt worden als

$$P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E . \quad (10.40)$$

Wir kümmern uns nun genauer um das Zustandekommen dieser Polarisation. Das Feld E übt auf jede Ladung e in einem Atom eine Kraft eE aus, die sie verschiebt, sodass aus jedem Atom ein Dipol wird. Die elektrischen Momente dieser Dipole addieren sich so, dass jede makroskopische Volumeneinheit das Dipolmoment P hat. Handelt es sich um ein Wechselfeld E , so erregt es die Ladungen zu erzwungenen Schwingungen. Wir wissen aus Abschn. 4.1.3, dass in diesem Fall zwar die in (10.40) vorausgesetzte Proportionalität zwischen der Auslenkung x , die P bestimmt, und der Kraft oder dem Feld E noch für jede einzelne Frequenz gilt, dass aber Resonanzerscheinungen zu beachten sind. Die Auslenkung erfolgt durchaus nicht immer in Phase mit dem Feld, und sie hängt stark von der Frequenz ab. Die Dispersionskurve erweist sich einfach als Umzeichnung der **Resonanzkurve**, wobei jeder Resonanz, d. h. jeder Eigenschwingungsmöglichkeit der Ladungen im durchstrahlten Stoff, eine Absorptionslinie entspricht.

Dieses Bild lässt sich quantitativ am einfachsten durchdenken, wenn der Auslenkung quasielastische Kräfte entgegenstehen, d. h. Kräfte F , die der Entfernung x von der Ruhelage proportional sind: $F = Dx$. Aus ganz allgemeinen mathematischen Gründen ist jede solche Rückstellkraft quasielastisch, falls die Auslenkung hinreichend klein ist. Einmal angestoßen und dann sich selbst überlassen, wird ein solches System Schwingungen mit einer Eigenfrequenz ω_0 ausführen; diese Eigenfrequenz kann allerdings bei starker Dämpfung erheblich gegen den Wert $\sqrt{D/m}$ verstimmt sein (Abschn. 4.1.3).

Ein solches System setzen wir nun einem harmonisch veränderlichen elektrischen Feld $E = E_0 \cos(\omega t)$, also einer Kraft $F = eE_0 \cos(\omega t)$ aus. Mit der Frequenz ω dieser Kraft bleiben wir zunächst weit unterhalb der Resonanzfrequenz ω_0 . Die Auslenkung kann einer so langsamen Feldänderung ohne weiteres folgen (quasistatischer Fall, Abb. 10.79), die Phasenverschiebung ist Null. Fahren wir mit der Feldfrequenz allmählich an ω_0 heran, so hinkt die Auslenkung mehr und mehr nach, bei $\omega = \omega_0$ z. B. um genau $\frac{\pi}{2}$. An dieser Stelle ist also die *Geschwindigkeit* der Ladungen, d. h. der Strom, in Phase mit dem Feld. Die Amplitude der Auslenkung ist in dieser Gegend maximal. Bei sehr hoher Anregungsfrequenz $\omega \gg \omega_0$ schließlich ist die *Beschleunigung* der Ladungen in Phase mit dem Feld, d. h. die Auslenkung hinkt um π nach (quasistatischer Fall).

Aus diesem Phasenverhalten von Geschwindigkeit der Ladungen und Stromdichte j relativ zum anregenden Feld E ergibt sich bereits das Absorptionsverhalten. Das schwingende System entnimmt dem Feld Leistung als Joule-Wärme Ej . Wenn E und j sich um $\frac{\pi}{2}$ in der Phase unterscheiden

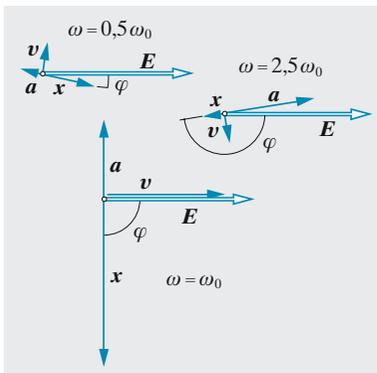


Abb. 10.79. Zeigerdiagramm der elektrischen Feldstärke und der Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung einer elastisch gebundenen Ladung für drei verschiedene Feldfrequenzen

(bei $\omega \gg \omega_0$ und $\omega \ll \omega_0$), nimmt das System in jeder zweiten Viertelperiode Energie auf, aber in der nächsten Viertelperiode schon gibt es ebenso viel Energie wieder her. Die Leistungsaufnahme des schwingenden Systems, d. h. die Absorption, ist maximal, wenn E und j in Phase sind, zumal dann auch j bei gegebenem E maximal ist. Das ist bei $\omega = \omega_0$ der Fall.

Das Verhalten der **Brechzahl** gewinnt man nach (10.40) und der Maxwell-Relation (10.39) aus dem der Polarisation P . Im quasistatischen Bereich $\omega \ll \omega_0$ kann die Auslenkung der Ladungen dem Feld folgen. Die Dipolmomente stehen in Feldrichtung, und aus (10.40) ergibt sich ein normaler Wert $\varepsilon > 1$ der Dielektrizitätskonstante. Im quasifreien Bereich $\omega \gg \omega_0$ dagegen stehen in jedem Augenblick die Dipolmomente entgegengesetzt zur Feldrichtung. Im Rahmen von (10.40) ist das durch $\varepsilon < 1$ zu beschreiben. Die Maxwell-Relation folgert daraus, dass auch die Brechzahl kleiner als 1 ist. Der Übergang zwischen $n > 1$ und $n < 1$ erfolgt ziemlich rasch in der Umgebung der Resonanzfrequenz. Diese kennzeichnet also nicht nur das Gebiet der Absorption, sondern auch der anomalen Dispersion: n nimmt mit steigender Frequenz ab. Im quasifreien Gebiet ist zwar $n < 1$, aber die Abweichung von 1 wird mit steigender Frequenz immer kleiner, denn die Auslenkung und damit die Polarisation nehmen wie ω^{-2} ab (Abb. 10.80).

Nun ist noch zu beachten, dass die betrachtete Resonanz sicher nicht die einzige ist: Jeder Stoff hat mehrere Resonanzfrequenzen, deren höchste erst im Röntgengebiet liegen. Die Beiträge aller dieser Resonanzen zur Auslenkung der Ladungen, d. h. zur Polarisation und damit zu ε überlagern sich. Das quasifreie Gebiet einer Resonanz ist schon das quasistatische der nächsten. Da die Auslenkung selbst im fernen quasistatischen Gebiet endlich bleibt, im quasifreien dagegen wie ω^{-2} gegen Null geht, kommt es nur selten zur Ausbildung eines breiten Spektralbereiches mit $n < 1$. Nur oberhalb der *letzten* Resonanz, also oberhalb der härtesten Röntgenabsorption, ist $n < 1$ die Regel.

Einfach gestaltet sich die quantitative Theorie der Dispersion bei Stoffen sehr geringer Dichte, das sind Gase bei nicht zu hohem Druck. Hier rührt die Polarisation der Moleküle praktisch nur von dem Feld der Lichtwelle her, während die gegenseitige Beeinflussung der polarisierten Moleküle, die das so genannte „innere Feld“ erzeugen, vernachlässigt werden kann. Bei den Ionenkristallen muss auch der Einfluss der Eigenfrequenz der Ionen berücksichtigt werden.

Die Polarisation der Volumeneinheit ist

$$P = N \sum e_i x_i ,$$

wobei N die Atomzahldichte, $e_i x_i$ das durch die Verschiebung der Ladung e_i um x_i aus ihrer Gleichgewichtslage erzeugte Dipolmoment und $\sum e_i x_i$ das gesamte Moment des Atoms ist.

Vernachlässigt man die Dämpfung, so folgt aus Abb. 10.79:

$$P = N \sum_i \frac{e_i e_i E}{\sqrt{m_i^2 (\omega_{i0}^2 - \omega^2)^2}} = N \sum_i \frac{e_i^2}{m_i (\omega_{i0}^2 - \omega^2)} E , \quad (10.41)$$

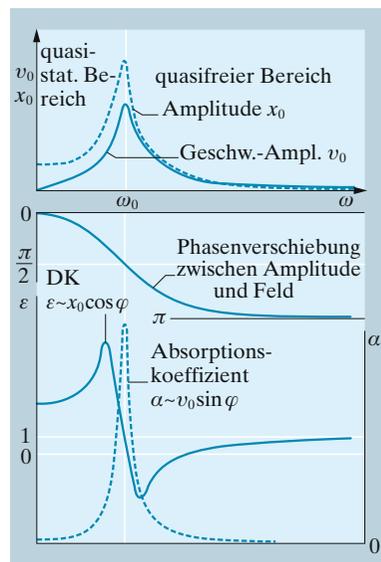


Abb. 10.80. Absorptions- und Dispersionskurve (*unten*) sind nur Umzeichnungen der Resonanzkurven für Amplitude und Phase des harmonischen Oszillators

wo m_i die Masse des i -ten Teilchens und ω_{i_0} seine Eigenfrequenz ist. Fasst man nun die Teilchen gleicher Ladung, Masse und gleicher Eigenfrequenz (e_α , m_α und ω_α) in den Atomen in Gruppen zu je z_α Teilchen zusammen (z. B. Elektronen gleicher Frequenz), so kann man statt (10.41) schreiben:

$$P = N \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2 z_{\alpha}}{m_{\alpha}(\omega_{\alpha}^2 - \omega^2)} E. \quad (10.42)$$

Zusammen mit (6.47) erhält man die Dispersionsformel:

$$(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 = N \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2 z_{\alpha}}{m_{\alpha}(\omega_{\alpha}^2 - \omega^2)}$$

oder, da $n^2 = \varepsilon$, vgl. (10.39)

$$\boxed{n^2 = 1 + \frac{1}{\varepsilon_0} N \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2 z_{\alpha}}{m_{\alpha}(\omega_{\alpha}^2 - \omega^2)}}. \quad (10.43)$$

Sie wird in vielen wesentlichen Zügen durch die Erfahrung bestätigt, besonders wenn man noch die Dämpfung einbezieht.

Die Erfahrung lehrt, dass die Dispersion auch für nicht gasförmige Körper außerhalb der Absorptionsstreifen durch eine zu (10.43) analoge Gleichung

$$n^2 = A_0 + \sum_{\alpha} \frac{A_{\alpha} \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{\alpha}^2} \quad (10.44)$$

gut beschrieben wird. Hier bedeuten λ_{α} die Wellenlängen der Absorptionsgebiete. Bei durchsichtigen Stoffen kommt man im Allgemeinen mit der Annahme von zwei Absorptionsgebieten aus, von denen eines im Ultraroten, das andere im Ultravioletten liegt. Sie entsprechen den Eigenfrequenzen von Ionen und Elektronen (Abschn. 17.2.3).

Beide haben ähnliche Anzahldichten N und Federkonstanten $D \approx m\omega_0^2$; sie sind ja durch die gleichen Felder aneinander gekoppelt. D ist im Wesentlichen die Ableitung einer Coulombkraft: $D \approx e^2/(8\pi\varepsilon_0 r^3)$. In kondensierter Materie sind die Teilchen dicht gepackt: $N \approx 1/(8r^3)$. Der Faktor $Ne^2/(\varepsilon_0 D)$ in (10.43) ist also etwas kleiner als 1. Zwischen den beiden Absorptionsbereichen, also bei $\sqrt{D/m_i} \ll \omega \ll \sqrt{D/m_e}$, liefert (10.43)

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 D} \left(1 + \frac{m_e \omega^2}{D} - \frac{D}{m_i \omega^2} \right).$$

In der Klammer überwiegt die 1: n liegt zwischen 1 und 2. Die Dispersion folgt aus den beiden anderen Gliedern, überwiegend dem elektronischen: $dn/d\omega \approx m_e \omega/D$ oder $dn/d\lambda \approx -\lambda_0^2/\lambda^3$: Die Dispersion ist normal und steigt mit Annäherung an die Resonanz sehr steil an. Vergleich mit Abb. 9.20 ergibt auch quantitativ recht gute Übereinstimmung.

Eigentlich ist es inkonsequent, das Medium einerseits als Kontinuum aufzufassen, andererseits seine Eigenschaften (hier ε und n) aus dem Verhalten seiner Einzelteilchen abzuleiten. Atomistisch geschlossener ist folgendes Bild: Zwischen zwei Netzebenen läuft die Lichtwelle mit c , wie im Vakuum. In jeder Netzebene erregt sie die Teilchen zu Schwingungen; die von diesen Antennen ausgehenden

Sekundärwellen interferieren mit der Primärwelle und werfen ihre Phase jedes Mal ein Stück zurück. Insgesamt läuft die Welle also langsamer als c . Da die Teilchen fern der Resonanzfrequenz ω_0 in Phase (oder bei $\omega \gg \omega_0$ in Gegenphase) zum E der Primärwelle schwingen, bringt diese Interferenz keine Schwächung. Nur nahe der Resonanz ist das anders.

10.3.4 Deutung des Faraday-Effektes

In Abschn. 10.2.9 wurde kurz folgendes Experiment erwähnt, das für *Faraday* ein entscheidender Beweis für die elektromagnetische Natur des Lichts war: Man bringt eine Substanz, die normalerweise nicht optisch aktiv ist (die Polarisationssebene nicht dreht), zwischen gekreuzte Polarisatoren, sodass kein Licht durch dieses System treten kann. Legt man nun ein Magnetfeld parallel zur Richtung des Lichtstrahles, so tritt Aufhellung ein, die erst beim Nachdrehen des Analysators um einen Winkel α wieder verschwindet. α erweist sich als proportional zur durchstrahlten Schichtdicke l und zur Magnetfeldstärke B :

$$\alpha = V l B . \quad (10.45)$$

V , die **Verdet-Konstante**, ist von Stoff zu Stoff etwas verschieden. Vor allem aber ist V von der Wellenlänge abhängig, und zwar

$$V = V' \lambda \frac{dn}{d\lambda} .$$

Der **Faraday-Effekt** ist also am stärksten in der Nähe von Absorptionslinien. Sein Vorzeichen hängt davon ab, ob die Dispersion normal oder anomal ist. Bei normaler Dispersion erfolgt Rechtsdrehung (Blickrichtung entgegen der Strahlrichtung und dem Magnetfeld; bei Umkehrung der Magnetfeldrichtung kehrt sich natürlich das Vorzeichen der Aktivität um).

Die atomistische Deutung geht davon aus, dass die schwingenden Ladungen, auf die es bei der Dispersion ankommt, in einem Magnetfeld zusätzlich eine Präzessionsbewegung ausführen müssen. Die Frequenz dieser Präzession ergibt sich ziemlich allgemein als die **Larmor-Frequenz**

$$\omega' = \frac{e}{m} B ,$$

wenn e und m Ladung und Masse der schwingenden Teilchen sind (Abschn. 8.2.2). Relativ zu diesen präzedierenden Ladungen haben rechts- und linkszirkular polarisierte Wellen verschiedene Frequenzen. Ein Beobachter, der mit einer solchen Ladung mitpräzedierte, würde für rechts- und linkszirkular polarisierte Wellen andere Frequenzen messen als ein ruhender Beobachter (Rotations-Doppler-Effekt); und zwar würde er die Frequenz der einen um ω' vermehrt, die der anderen um ω' vermindert finden. Dies gilt z. B. für die Rechts- und Linkskomponente der gleichen Lichtwelle der Frequenz ω : Relativ zu den Ladungen, worauf es bei der Dispersion ankommt, hat die eine die Frequenz $\omega + \omega'$, die andere $\omega - \omega'$. Brechzahlen und Phasengeschwindigkeiten der beiden Teilwellen sind entsprechend verschieden, was nach Abschn. 10.2.9 optische Aktivität bedeutet.

Wenn diese Erklärung ganz allgemein zuträfe, müsste die Verdet-Konstante außer durch $dn/d\lambda$ lediglich durch e/m für das Elektron bestimmt sein:

$$V = \frac{e \lambda}{m 2c} \frac{dn}{d\lambda}, \quad (10.46)$$

e/m müsste sich hieraus direkt ablesen lassen. Dies ist für viele Spektralbereiche auch richtig (z. B. Wasserstoff und Steinsalz im Sichtbaren), nämlich in der Nachbarschaft von Spektrallinien mit normalem **Zeeman-Effekt** (Abschn. 14.3.4), der sich aus dieser Vorstellung zwanglos mitergibt. In der Nähe von Linien mit anomalem Zeeman-Effekt hat auch die Verdet-Konstante etwas andere Werte.

10.3.5 Warum ist der Himmel blau?

Kein Mensch wundert sich darüber, dass bei Tage der Himmel auch in solchen Richtungen hell erscheint, aus denen kein direktes Sonnenlicht in das Auge des Beobachters gelangen kann. Dass dies die Anwesenheit der Luftmoleküle voraussetzt, ergibt sich aus der absoluten Schwärze auch des Tageshimmels für die Astronauten, die Sterne dicht neben der Sonne sehen, und schon aus dem viel dunkelvioletteren Himmel über Himalaya-Gipfeln. Das blaue Himmelslicht ist Streustrahlung der Luftmoleküle. Es ist polarisiert, und zwar überwiegend senkrecht zu der Ebene, die durch die Sonne, den Beobachter und seine Blickrichtung festgelegt ist. Hält man ein Polarisationsfilter mit seiner Schwingungsrichtung parallel zu dieser Ebene, dann erscheint der Himmel dunkler, und zwar fast schwarz, wenn man einen Punkt 90° von der Sonne entfernt betrachtet.

✘ Beispiel . . .

Warum sehen ferne Berge blau aus?

Von dem Licht, das die Berge selbst reflektieren, wird das Rote weniger gestreut als das Blaue. Wenn es um ihr eigenes Licht ginge, wären also die fernen Berge rötlich wie die Abendsonne. Die Berge sind aber fast immer so dunkel, dass das blaue Streulicht der vorgelagerten Luftschicht ausreicht, um den blauen Schein der Luftperspektive darüberzulagern.

Die Luft enthält zwei Arten von Streuzentren: Die Luftmoleküle und gröbere Verunreinigungen wie Wassertröpfchen und Staubteilchen. Die einen sind viel kleiner als die Lichtwellenlänge λ , die anderen etwa gleich groß oder größer als λ . Dementsprechend sind die Streumechanismen sehr verschieden. Beide Teilchen streuen die auftreffende Welle, weil diese die Elektronen hin- und herschüttelt. Im Molekül entsteht so ein punktförmiges Dipolmoment p , das mit dem ω der Welle schwingt, im größeren Teilchen sind es viele Dipole. Wir bleiben zunächst beim Molekül. Hier trennen sich die positiven und negativen Ladungen so weit, dass sie das E -Feld der Welle zwischen sich durch ihr Gegenfeld ganz oder fast vernichten. Dazu muss beiderseits des Molekülquerschnitts A eine Ladung $\pm Q$ sitzen, sodass $E = Q/(\epsilon_0 A)$, und zwar im Abstand etwa eines Molekül-

durchmessers d . Das Dipolmoment ist also $p = Qd \approx \varepsilon_0 A d E \approx \varepsilon_0 V E$. Der Faktor $p/E \approx \varepsilon_0 V$, die Polarisierbarkeit, ist durch das Molekülvolumen V gegeben.

Wenn diese molekulare Antenne mit ω schwingt, strahlt sie nach H . Hertz eine Leistung $P = \omega^4 p^2 / (6\pi\varepsilon_0 c^3) = \omega^4 \varepsilon_0 V^2 E^2 / (6\pi c^3)$ ab (vgl. (7.71)), eine Leistung, die sie natürlich der einfallenden Welle entnimmt. Diese hat die Intensität $I = c\varepsilon_0 E^2$ (vgl. (7.66)). Das Molekül fängt also die Leistung P ab und strahlt sie fast allseitig wieder ab, die auf den

Streuquerschnitt

$$\sigma = \frac{P}{I} \approx \frac{\omega^4 V^2}{6\pi c^4} \quad (10.47)$$

fällt. Dieser Querschnitt ist wegen ω^4 für violettes Licht 16-mal größer als für rotes. Blau wird viel stärker gestreut als Rot.

Wie stark werden aber beide gestreut? Wir bestimmen die Eindringtiefe (mittlere freie Weglänge) des Lichts mit der Wellenlänge λ . Sie beträgt $l = 1/(n\sigma) = 6\pi c^4 / (nV^2 \omega^4) = 6\pi \lambda^4 / (nV^2)$ (vgl. (5.30); n : Moleküldichte, $\lambda\omega = c$). Das Molekülvolumen V schätzen wir aus der Dichte der flüssigen Luft (etwa gleich der des Wassers), wo die Moleküle fast dichtgepackt liegen. Es folgt $1/V \approx 800n \approx 2 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$, also

$$l \approx 160 \lambda^4 \quad (\lambda \text{ in } \mu\text{m}, l \text{ in km}), \quad (10.48)$$

d. h. 4 km für Violett (400 nm), 65 km für Rot (800 nm), 20 km für Gelb (600 nm). Bei steilem Sonnenstand werden nur Violett und Blau fast weggestreut, bei Sonnenauf- und -untergang, wenn der Weg durch die 8 km der dichten Atmosphäre über 300 km lang ist, kommt nur das Rot geschwächt durch. Eine viel dichtere Atmosphäre als unsere streut Licht aller Wellenlängen. Auf der Venus sähe man auch ohne die Wolkenschicht die Sonne nur trübrotlich am weißen Himmel hängen.

Jedenfalls geht aber durch die atmosphärische Streuung nur etwa die Hälfte des Streulichts verloren, die wieder in den Außenraum zurückgestreut wird und von dort aus gesehen die Erde auch blau schimmern lässt. Der andere Teil kommt dem Planeten als diffuses Himmelslicht zugute. Fern von jeder Absorption schwingt ja das molekulare Dipolmoment p in Phase mit dem Wellenfeld E und verzehrt keine durch $jE \sim \dot{p}E$ gegebene Wirkleistung, wie es das in der Absorption täte. Der geringe Anteil, der wirklich absorbiert wird (Abschn. 11.3.3), bleibt in der Atmosphäre stecken und erwärmt sie; dadurch erreicht sie allerdings nur Stratosphärentemperatur, außer in der Ionosphäre und der Ozonschicht, wo noch stärker absorbiertes UV vorhanden ist.

Dieser Streumechanismus, die **Rayleigh-Streuung**, gilt nur für Teilchen, die klein gegen λ sind. Sehr viel größere Teilchen reflektieren einfach mit ihrer Oberfläche (was man als Zusammenwirken sehr vieler Huygens-Streuzentren darstellen kann). Für Teilchen mit Größen um λ gilt ein Übergangsfall, die **Mie-Streuung**. In beiden Fällen $d \gtrsim \lambda$ hängt der Streuquerschnitt nicht oder nur schwach von der Frequenz ab. Das Streulicht wird weiß und „verwässert“ das Blau des klaren Himmels. Stark mit Wasser verdünnte Milch sieht von der Seite bläulich aus, das durchfallende

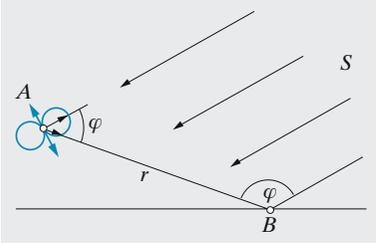


Abb. 10.81. In einem Luftmolekül A erregt der in der Ebene SAB polarisierte Anteil des Sonnenlichts eine Dipolschwingung. Die Amplitude, die dem Beobachter B zugestrahlt wird, ist proportional zu $\cos \varphi/r$, die Intensität $I \sim \cos^2 \varphi/r^2$. Für die Polarisationsrichtung senkrecht zu SAB gilt $I \sim 1/r^2$, denn hier schwingt der Dipol senkrecht zu AB

Licht ist rötlich: Die Fettkügelchen in der Emulsion sind nicht viel größer als λ , es gilt noch die Mie-Streuung.

Sonnenlicht ist unpolarisiert, die molekularen Dipole können in allen Richtungen senkrecht zum Einfall schwingen. Wir betrachten ein Molekül, das für den Beobachter B in der Richtung φ schwebt, von der Richtung zur Sonne aus gerechnet (Abb. 10.81). Sein Dipol schwingt senkrecht zur Richtung AS , und zwar gleich häufig in der Ebene SAB (Dipol 1) und senkrecht dazu (Dipol 2). Ein Dipol strahlt maximal senkrecht zu seiner Schwingungsrichtung, gar nicht in dieser Richtung. Der Dipol 2 strahlt also in Richtung auf B mit maximaler Stärke (1), Dipol 1 strahlt nur mit der Stärke $\cos^2 \varphi$. Die Gesamthelligkeit des Himmels ändert sich mit φ wie $1 + \cos^2 \varphi$. Um 90° von der Sonne entfernt ist er am dunkelsten. Dem Auge fällt dieser geringe Unterschied kaum auf, besonders weil das Blendlicht der direkten Sonne und das immer blässere Blau gegen den Horizont ihn verdecken. Durch ein Polarisationsfilter sieht man das aber sehr gut.

Anishaltige Liköre wie Ouzo oder Pastis werden trüb, wenn man Wasser dazutut: Im konzentrierten Alkohol sind die ätherischen Öle gelöst, bei geringerer Konzentration ballen sie sich zu viel stärker reflektierenden Emulsionströpfchen zusammen. Dabei sind es doch jetzt aber weniger Moleküle pro cm^3 , und mehr als mitschwingen können ihre Dipole doch jetzt auch nicht. Wieso streuen gelöste Einzelmoleküle viel weniger, und im reinen Öl übrigens so gut wie gar nicht, sondern erst, wenn sie Emulsionströpfchen bilden? Eine Wasserschicht von 6 m Dicke enthält ebenso viele Moleküle pro m^2 wie die ganze Erdatmosphäre; warum sieht ein See von 6 m Tiefe nie so blau aus wie der Himmel? Warum sind viele Kristalle völlig durchsichtig, warum reflektiert Kalk weiß, eine Eichelhäherfeder, ein „Pfaueauge“, ein Libellenkörper blau, violett oder grün?

Vögel und Insekten machen ihr intensives Blau-Grün meist nicht durch Farbstoffe, sondern durch **Stufengitter** mit Stufen der Höhe d , halb so hoch wie die „gewünschte“ Wellenlänge, bei deren Reflexion der konstruktive Gangunterschied $\lambda = 2d$ entsteht (s. Abb. zum Ausblick Kap. 10). Auch Wellen mit $\lambda = d$, allgemein mit $\lambda = 2d/k$ werden voll reflektiert, alle anderen Reflexe an verschiedenen Stufen des Gitters interferieren sich weg. Das Schichtgitter eines Kristalls hat $d \approx 10^{-10}$ m, konstruktive Interferenz ist also für kein sichtbares λ möglich, erst für Röntgenwellen, wo *Laue* und *Bragg* sie ausnutzten. Sichtbarem Licht bleibt, wenn es nicht absorbiert wird, nichts übrig, als durch ein solches reguläres Gitter glatt durchzugehen. Streuung gibt es nur an *Gitterfehlern*. Eine Flüssigkeit enthält mehr davon als ein Kristall, ein Gas noch viel mehr.

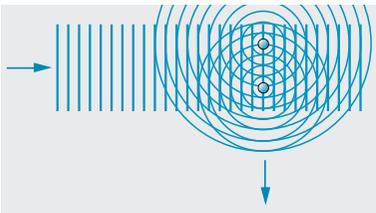


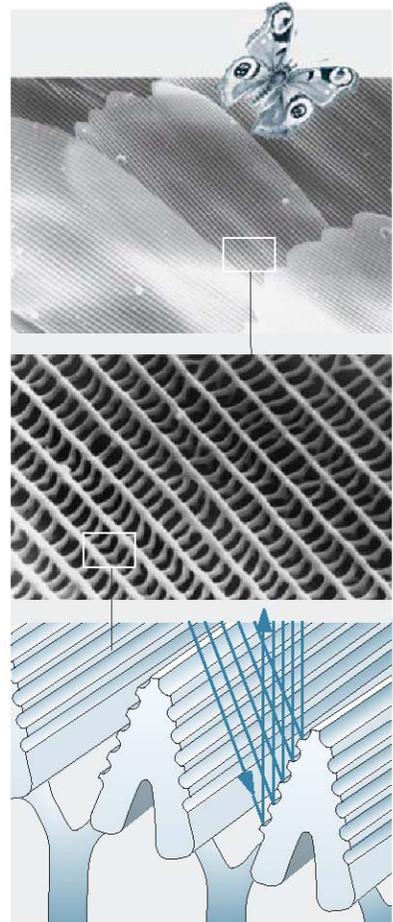
Abb. 10.82. Ein geordnetes System atomarer Streuzentren streut sichtbares Licht praktisch nicht, denn für jeden Sekundärstrahler gibt es einen anderen, so dass beider Sekundärwellen sich weginterferieren (bei Röntgenlicht ist das für einzelne Richtungen nicht der Fall). Im Gas ist ein solcher Partner nicht immer vorhanden. Nur infolge von Dichteschwankungen ist der Himmel hell, nämlich blau

Wir beobachten das gestreute Licht z. B. senkrecht zum einfallenden monochromatischen Licht (Abb. 10.82; für beliebige Winkel vgl. Abschn. 17.1.3). Zu jedem Molekül A ist ein Molekül B vorhanden, das um $\lambda/2$ weiter vom Beobachter entfernt ist als A . Beider Streubeiträge interferieren einander also weg. Dies gilt (mit anderen Molekülen A und B) für alle λ und auch alle Streuwinkel φ , bis auf $\varphi = 0$, die Richtung des direkten Bündels, den einzigen Winkel, für den die Interferenz immer konstruktiv ist. Also dürfte es kein Streulicht geben. (Für ein ideales Gitter folgt dies auch aus der Bragg-Bedingung, vgl. Abschn. 17.1.3 und 16.3.2, die bei großem λ für keine Richtung erfüllbar ist.)

Der Himmel ist nur deshalb hell, weil in einem Gas im Gegensatz zu Festkörper und Flüssigkeit *nicht immer* ein Molekül im Abstand $\lambda/2$ vorhanden ist. Genauer gesagt: Zwar entfallen auch im Gas auf eine solche Strecke sehr viele Moleküle, aber ihre Dichte schwankt völlig unregelmäßig. Wir betrachten zwei gleich große Luftvolumina, die in einem solchen Abstand liegen, dass sich bei exakt gleichen Molekülzahlen N darin ihre Streuwellen exakt weginterferieren (Abstand $\lambda/2$ bei $\varphi = 90^\circ$). In Wirklichkeit existiert in jedem Moment ein Unterschied ΔN zwischen den beiden Molekülzahlen, der nach der Poisson-Verteilung (vgl. Abschn. 18.2.3) $\Delta N = \sqrt{N}$ ist. Eines der beiden Volumina gibt also eine um $E = \sqrt{N} E_1$ größere Streufeldstärke her als das andere (E_1 : Streufeld eines Moleküls). Welches der beiden Volumina zurzeit stärker besetzt ist, interessiert für die beobachtete Intensität nicht; wichtig ist nur, dass ein Feldanteil $\sqrt{N} E_1$ nicht weginterferiert wird. Es bleibt also eine Streuintensität $I \sim E^2 = NE_1^2$.

▲ Ausblick

Die Natur weiß seit vielen Millionen Jahren, dass Licht eine Welle ist, und erzeugt herrliche Farben durch Interferenz. Oben sehen Sie eine raster-elektronenmikroskopische Aufnahme aus dem Flügel eines Pfauenauges, unten dasselbe schematisch. Die Treppen auf den Rippen bilden ein Stufengitter von 220 nm Stufenhöhe. Welche Farbe entsteht? Die blau- und grünschillernden Farben auch von Vogelfedern entstehen ähnlich. Viele Mollusken, manche Krebse haben in ihren Augen keine Linsen-, sondern Spiegeloptik. Aber wie spiegelt man ohne Metall? Ihr „tapetum lucidum“ am Augenhintergrund hat viele Schichten abwechselnder Brechzahl.



Die zunehmende Vergrößerung des Flügels eines Pfauenauges (Vanessa Io) im Raster-Elektronenmikroskop zeigt Rippen, die als Stufengitter die schillernden Interferenzfarben erzeugen

✓ Aufgaben ...

● 10.1.1 Fresnel-Spiegel

Zeigen Sie, dass der Abstand der virtuellen Lichtquellen $L_{1,2}$ für kleine Winkel α und den Abstand l der Lichtquelle L vom Spiegel den Wert $2l\alpha$ annimmt.

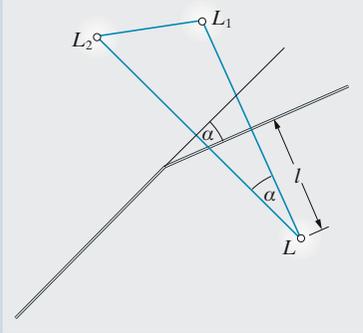


Abb. 10.83. Beim **Fresnel-Doppelspiegel** ist der Abstand der beiden virtuellen Lichtquellen, d. h. der Brennpunkte der Interferenz-Hyperbeln, gleich $2l\alpha$ (vgl. Abb. 10.3)

● 10.1.2 Glasplatte I

Mit einer Linse und einer Glasplatte wollen Sie nach Abb. 10.48 Interferenzen herstellen. Beschreiben Sie genau, was Sie beobachten, wenn Sie den Einfallswinkel α allmählich von 0 auf einen maximalen Wert drehen.

● 10.1.3 Glasplatte II

Man diskutiere die Interferenzen an einer planparallelen Schicht für monochromatisches oder weißes Licht, für paralleles einfallendes Licht, eine punktförmige Lichtquelle oder Licht aus allen Richtungen.

● 10.1.4 Schillernde Ölhaut

Auf eine mit schrägem Parallellicht beleuchtete, mit Wasser gefüllte Wanne spritzt man einen Tropfen Maschinenöl (wie groß ist der Tropfen ungefähr?). Während der Tropfen sich ausbreitet (warum tut er das?), entspinnt sich ein lebhaftes Farbenspiel (wie muss man schauen, um es zu sehen?), das schließlich erlischt.

Warum? Bedeckt das Öl die ganze Wasseroberfläche? Wenn nein, warum nicht? Warum sieht man nicht immer Ringe?

● 10.1.5 Seifenblase

Wie schätzt man die Wandstärke einer Seifenblase?

● 10.1.6 Newton-Ringe in Dias

Wie entstehen sie? Warum fangen sie an zu „kriechen“? Wie vermeidet man sie? Warum werden die **Newton-Ringe** in Hookes Anordnung (Abb. 10.42) nach außen immer matter?

● 10.1.7 Babinet-Prinzip

Babinet bewies auf genial einfache Weise folgenden Satz: Eine Aussparung beliebiger Form in einer undurchsichtigen Wand erzeugt im parallelen Licht genau die gleiche Beugungsfigur wie ein Hindernis, das dieselbe Form hat wie das Loch. Anders ausgedrückt: Ein photographisches Negativ erzeugt das gleiche Beugungsbild wie sein Positiv. Unter Beugungsbild sind hier die Teile des Schirms verstanden, wohin kein *direktes* Licht gelangt. Können Sie den Beweis finden? Entscheidend ist die Tatsache, dass die Öffnungen sich additiv an der Lichterregung im Beugungsbild beteiligen. Sind die beiden Beugungsbilder auch phasenmäßig identisch?

● 10.1.8 Vierersterne

Warum sieht man auf Sternphotographien, die mit dem Fernrohr gemacht werden, besonders die hellen Sterne meist als vierzackige Gebilde? Was müsste man tun, damit der Fixstern so abgebildet wird, wie er eigentlich aussieht, nämlich als Scheibchen? Kann man das technisch erreichen?

● 10.1.9 Auflösungsvermögen

Gegenstände welcher Größe kann man unter den günstigsten Bedingungen (welche sind das?) mit bloßem Auge, mit einem Feldstecher von 50 mm-Öffnung, mit einem 50 cm-Refraktor, mit dem 5 m-Reflektor von Mt. Palomar erkennen (z. B. auf dem

Mond, auf dem Mars in Opposition, auf der Sonne, in Siriusabstand, ca. 10 Lichtjahre, im Andromedanebel, ca. $2 \cdot 10^6$ Lichtjahre)?

●● 10.1.10 Sind wir allein?

Es sind vier Methoden für den direkten Nachweis vorgeschlagen worden, dass ein bestimmter Fixstern Planeten hat: (a) Beobachtung periodischer Positionsänderungen des Fixsterns; (b) Doppler-Effekt im Licht des Fixsterns, der periodische Bewegungen ausführt; (c) direkte Trennung des Lichts eines Planeten von dem des Zentralsterns; (d) indirekte Trennung mittels des Doppler-Effekts. Bis auf welche Entfernung könnte man mit diesen Methoden feststellen, dass die Sonne einen Jupiter hat?

● 10.1.11 Farbverteilung

In einem Prismenspektrum sind Violett und Blau viel breiter als Rot, im Beugungsspektrum ist es umgekehrt. Warum?

●● 10.1.12 Fourier-Spektrometer

In einem Michelson-Spektrometer kann ein Spiegel (z. B. $A'B'$ in Abb. 10.50) durch einen Feintrieb sehr langsam gleichförmig verschoben werden. Das einfallende Lichtbündel ist gut parallel. Anstelle des Fernrohrs in Abb. 10.50 bringt man eine Photozelle an. Wie sieht die zeitliche Aufzeichnung des Photostroms aus? Diskutieren Sie z. B. den Fall monochromatischen Lichts, eines Gemisches zweier Spektrallinien, eines natürlichen, maximal monochromatischen Wärmestrahlers (viele Teilchen, die inkohärent gedämpfte Wellenzüge emittieren). Warum nennt man das Gerät Fourier-Spektrometer oder genauer Fourier-Transformations-Spektrometer? Spielt die Fourier-Transformation bei üblichen Spektrometern keine Rolle? Welche Vorzüge hat das Gerät, besonders im fernen Ultrarot?

● 10.1.13 Intensitätsfragen

Wenn man die Spaltbreite eines Spektrographen verdoppelt, kommt manch-

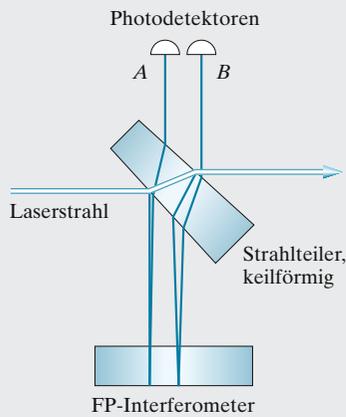


Abb. 10.84.

mal doppelt so viel Licht durch, manchmal aber auch viermal so viel. Wovon hängt das ab?

●● 10.1.14 Farbenlehre

Im Himmel oder wohin Leute wie *Newton* (*N*), *Goethe* (*G*), *Huygens* (*H*) kommen.

G: Also, bester Sir Isaac, ich bleibe dabei: Die Farben sind nicht von vornherein im weißen Licht, sondern sie werden erst durch die farbigen Dinge daraus erzeugt.

N: Jetzt lassen Sie mich erst fertig aufbauen. Das ist nicht meine ursprüngliche Anordnung, weil ich hier kein Prisma auftreiben konnte. Aber hier habe ich eine Schwungfeder vom Erzengel Gabriel, die tut's auch. So. Ist das weißes Licht, das da vorn drauffällt? Gut. Jetzt halten Sie mal Ihr Auge dorthin, Herr Geheimrat. Was sehen Sie?

G: Ein prächtiges Grün.

N: Na, also.

G: Jetzt sagen Sie mir bitte, was ist denn das eigentlich, grünes Licht?

H: (Räuspert sich vernehmlich).

N: Schon gut, Herr Kollege. Ich habe ja inzwischen auch dazugelernt. Also, das Grün, das Sie gesehen haben, ist eine harmonische Welle mit der Wellenlänge $0,5 \mu\text{m}$.

G: Und Sie versichern, dass Sie die $0,5 \mu\text{m}$ nicht irgendwie hineingeschuggelt haben in Ihre Apparatur?
N: Allerdings, das versichere ich.

G: Ha, mein Bester! Jetzt betrachten Sie den Renommieratavismus von Seiner Heiligkeit genauer. Da sind doch periodische feine Seitenstrahlen, viel feiner als bei irdischen Flügelbesitzern, oder nicht?

N: Natürlich. Aber nicht, wie Sie vielleicht denken, in $0,5 \mu\text{m}$ Abstand.

G: Zugegeben. Aber von da, wo Sie mich hingestellt haben, liegt jeder Seitenstrahl um genau $0,5 \mu\text{m}$ weiter entfernt als der benachbarte. Sie haben also eine Periodizität von $0,5 \mu\text{m}$ in Ihrer Apparatur. Kein Wunder, dass entsprechendes Licht herauskommt.

Wer hat recht? Wie wäre die Lage, wenn *Newton* ein Prisma gehabt hätte?

●● 10.1.15 Höfe

Wenn Sonne oder Mond hinter einer sehr dünnen, gleichmäßigen Wolenschicht stehen, sieht man sie oft umgeben von einem farbigen Hof (Kranz, Aureole). Wenn ein Beobachter die Sonne im Rücken hat und sein Schatten auf eine Nebelwand oder eine betaute Wiese fällt, ist der Schatten des Kopfes oft von einem ähnlichen Kranz umgeben (Glorie, Heiligenschein, Brockengepenst). Wie kommt das zustande? Wie ist die Farbenverteilung? Wie groß sind die verantwortlichen Objekte? Kann der Kranz mehrfach sein? Welches ist der Unterschied zum Halo (Aufgabe 9.2.16)?

●● 10.1.16 Facettenauge

Das **Insektenauge** besteht aus vielen Facetten oder Ommatidien, die auf einer Kugelschale angeordnet sind. Ein **Ommatidium** hat keine Linse und bildet nicht ab. Es ist nur ein Lichtleiter, der den von ihm ausgehenden Sehnerv erregt, wenn Licht hinreichend genau in seiner Achsenrichtung einfällt. Das Insekt sieht ein Raster aus hellen und dunklen Flecken, die den Richtungen der einzelnen Ommatidien entsprechen. Sieht es also

umso schärfer, je mehr und kleinere Ommatidien es hat? Oder gibt es irgendwo ein Optimum? Erfüllen ein Fliegen- oder Libellenaugen diese Optimalbedingungen?

●● 10.1.17 Doppelspalt

Gegeben ein Blendschirm mit zwei feinen parallelen Spalten in sehr geringem Abstand. Im Versuch A lässt man 1 s lang Licht durch den Doppelspalt fallen und schließt ihn dann. Im Versuch B bleibt der eine Spalt 1 s offen, dann schließt man ihn und öffnet den anderen ebenso lange. Als Auffangschirm dient beide Mal eine Photoplatte. Wie unterscheiden sich die beiden Aufnahmen?

●● 10.2.1 Unsichtbarer Strahl

Ein polarisiertes Lichtbündel geht durch ein trübes Medium (rauchige Luft, schmutziges Wasser). Sein Verlauf ist deutlich zu erkennen, jedenfalls von der Seite. Genau von oben oder unten sieht man nichts. Wie kommt das und wie liegt die Polarisationsrichtung? Was sieht man bei unpolarisiertem Licht? Hinweis: Ausstrahlungsrichtung des Hertz-Dipols.

●● 10.2.2 Komponentenerlegung

Kann man alle denkbaren elliptischen Schwingungen auch aus zwei zueinander senkrechten linearen Schwingungen mit der Phasendifferenz $\pi/2$ herstellen? Warum wird in Abschn. 10.2.9 die andere im Text erwähnte Aufspaltungsart vorgezogen?

●● 10.2.3 Doppelbild

Aus den Daten von Abb. 10.59 und $c_{\text{ao}} = 1,116 c_0$ berechnen oder konstruieren Sie den Winkel zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl. Wie dick muss der Kristall sein, damit ein Bündel von 2 mm Durchmesser in zwei völlig getrennte Bündel aufgespalten wird? Was sieht man, wenn polarisiertes Licht einfällt?

●● 10.2.4 Wollaston-Prisma

Zwei Dreiecksprismen von rechtwinklig-gleichschenkligen Querschnitt sind aus einem einachsigen Kristall

geschnitten (meist aus Quarz), und zwar so, dass in dem einen die optische Achse im Querschnitt liegt, im anderen senkrecht dazu. Beide werden mit den Hypotenusenflächen zusammengekittet (oft einfach mit einem Tropfen Wasser aneinander geheftet). Was wird aus einem engen unpolarisierten Lichtbündel, das senkrecht auf eine der vier Kathetenflächen fällt? Welche Winkel treten für Kalkspat auf?

● 10.2.5 Brewster-Fenster

Beim Gaslaser sind die Spiegel oft hinter den Abschlussfenstern angebracht. Da das Licht sehr oft hin- und hergespiegelt wird, ergibt auch der kleine Reflexionsverlust an der Glas-Luft-Grenze untragbare Verluste an phasenrichtiger Intensität. Wie groß ist der Verlust bei 100-maligem Durchgang? Kann man ein Glasfenster konstruieren, bei dem selbst bei sehr vielen Durchgängen nur 50% der Lichtintensität verloren geht?

●● 10.2.6 Buntes Zuckerrohr

Ein polarisiertes Lichtbündel fällt in ein Rohr mit schlammigem Wasser, und zwar in Längsrichtung. Was sieht man, wenn man um das Rohr geht? Man schüttet Zucker dazu und sieht bunte Ringe erscheinen. Wie kommt das?

●● 10.2.7 Sechs Effekte

Wie hängen die sechs Begriffe Faraday-Effekt, Kerr-Effekt, optische Aktivität, Doppelbrechung, lineare Polarisation, zirkulare Polarisation logisch zusammen? Erstreckt sich die Korrespondenz auch auf die atomistische Deutung?

● 10.3.1 Dunkle Fenster

Warum kann man bei Tage aus einiger Entfernung nicht sehen, was hinter den

geschlossenen Fenstern eines Hauses vorgeht? Wie stellt man solche Fenster in einer naturalistischen Zeichnung dar? Unter welchen Umständen kann man ein Fenster als Spiegel benutzen? Alles möglichst quantitativ: Tageszeit, Beleuchtungsart usw. berücksichtigen.

● 10.3.2 Schichtspiegel

Wie viel Licht kommt durch einen Stapel aus N Glasplatten? Ergibt sich ein Spiegelbild, und wie sieht es aus? Spielt die Qualität der Platten, der Druck, mit dem sie zusammengepresst werden, evtl. Befeuchtung eine Rolle? Bestehen Unterschiede gegenüber einem ebenso dicken Glasblock?

●● 10.3.3 Verteilungsfehler

Sie wollen die Menge einer absorbierenden Substanz in einem mikroskopischen Objekt photometrisch messen. Sie kennen die Dicke des Objekts und den molaren Extinktionskoeffizienten im benutzten Spektralbereich und wissen, dass andere Substanzen, die dort absorbieren, nicht vorhanden sind. Sie messen den gesamten Strahlungsfluss vor und hinter dem Objekt. Die zu messende Substanz kann aber ungleichmäßig im Objekt verteilt sein, z. B. auch in submikroskopischem Maßstab, sodass man sie für homogen verteilt hält. Welchen Fehler in der Mengenbestimmung kann dieser Verteilungseffekt bringen? Vergleichen Sie z. B. eine wirklich homogene Verteilung mit einer, bei der die Hälfte der Fläche die doppelte Konzentration enthält, die andere Hälfte gar nichts. Ist das der maximal mögliche Fehler? Über- oder unterschätzt man die Menge immer, wenn man gleichmäßige Verteilung annimmt, oder kann das Vorzeichen des Fehlers je nach den Umständen verschieden sein? Geben Sie den

Fehler in der Näherung sehr schwacher Absorption und auch für starke Absorption. Tatsächlich ist ja jede Substanz grundsätzlich inhomogen, nämlich molekular verteilt. Bringt das auch einen Verteilungsfehler?

●● 10.3.4 Widerspruch zu Einstein?

Widerspricht nicht $n < 1$ der speziellen Relativitätstheorie?

● 10.3.5 Blaue Augen

Säugetiere besitzen kein blaues Pigment. Wie kann es trotzdem blauäugige Menschen geben?

● 10.3.6 Dunkles Bier

Hat dunkles Bier dunkleren Schaum als helles? Warum sind Milch, Salz, Zucker, Schnee, Papier weiß?

● 10.3.7 Weiße Milch

Wann sieht ein feindisperser Stoff weiß aus, wann blau, wann rot? Beispiele: Voll- und Magermilch.

● 10.3.8 Heller oder dunkler Rauch

Rauch von einem frischen Holzfeuer sieht vor dunklem Hintergrund weiß, vor hellem dunkelgrau aus. Wenn nur noch Holzkohlenglut da ist, sieht die dünne Rauchsäule vor dem dunklen Wald bläulich, vor dem hellen Himmel rötlich braun aus. Warum?

● 10.3.9 Blaue Schatten

Schatten auf Schnee sehen manchmal bläulich aus. Wann, warum?

● 10.3.10 Bunter Hauch

Man hauche eine Glasscheibe an und betrachte durch sie eine Lampe. Was sieht man? Warum?

● 10.3.11 Gelbfilter

Warum fotografiert man Wolken mit einem Gelbfilter?

Strahlungsfelder

■ Inhalt

11.1	Das Strahlungsfeld	569
11.2	Strahlungsgesetze	573
11.3	Die Welt der Farben	582

▼ Einleitung

Die meisten **Lichtquellen** unserer Umgebung sind Wärmestrahler, wie wir alle von der Glühbirne wissen. Sie geben ein kontinuierliches Spektrum von elektromagnetischen Wellen ab, die wir in ihrer Gesamtheit als **Strahlungsfeld** bezeichnen. Das physikalische Verständnis der Lichtquellen hat um 1900 herum eine außerordentlich wichtige Rolle bei der Geburt der **Quantenphysik** gespielt und steht daher am Schnittpunkt von *klassischer Physik* und moderner *mikroskopischer Physik*.

Die physikalische Behandlung des Strahlungsfeldes stützt sich auf die bekannten Begriffe Energie, Intensität und andere. Unser Auge nimmt aber aus dem elektromagnetischen Spektrum nur den winzig kleinen Ausschnitt des sichtbaren Lichts wahr, das gerade eine Oktave ausmacht. Parallel zu den physikalischen Größen gibt es deshalb die Größen der **Photometrie**, die die physiologischen Eindrücke besser wiedergeben. Dieser Standpunkt ist natürlich für die praktische Beleuchtungstechnik der wichtigere.



„Insofern ist für den richtigen Theoretiker nichts interessanter als eine Tatsache, die mit einer bisher allgemein anerkannten Theorie in Widerspruch steht; denn hier setzt seine eigentliche Arbeit ein.“

Max Planck, Neue Bahnen der physikalischen Erkenntnis, 1922

11.1 Das Strahlungsfeld

Was die teilweise etwas unanschaulichen Größen bedeuten, die ein Strahlungsfeld beschreiben, versteht man am besten in Analogie mit anderen Feldern. Parallel dazu gibt es entsprechende photometrische Größen für das vom menschlichen Auge wahrgenommene Licht.

11.1.1 Strahlungsgrößen

In einem **Strahlungsfeld**, wie es um jede Strahlungsquelle herrscht, strömt Energie. Wie das Strömungsfeld durch die Strömungsgeschwindigkeit $v(\mathbf{r})$ gegeben ist, das elektrische Feld durch die Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, das Wärmeleitungs-feld durch die Wärmestromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, so ist das Strahlungsfeld gegeben durch die räumliche Verteilung der Stromdichte dieser Energie, der **Strahlungsstromdichte** oder **Intensität** $\mathbf{D}(\mathbf{r})$. Ein Flächenstück dA , z. B. ein Stück Ihrer Buchseite, empfängt in diesem Strahlungsfeld die Bestrahlungsleistung $dP = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = D \cos \vartheta dA$ (ϑ : Winkel zwischen Flächennormale und \mathbf{D} -Richtung). An dieser Stelle und bei dieser Ein-stellrichtung herrscht also eine **Bestrahlungsstärke** (Leistung/Fläche)

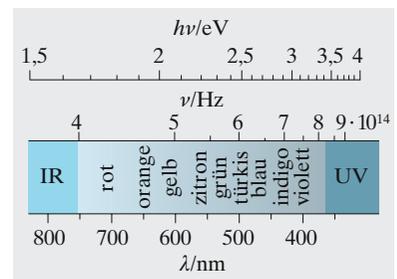


Abb. 11.1. Spektrum des sichtbaren Lichts mit Wellenlängen, Frequenzen und Photonenenergien. UV: Ultraviolett; IR: Infrarot

Abb. 11.2. Wellenlänge, Frequenz, Energie, Quellen und Bezeichnung elektromagnetischer Strahlung

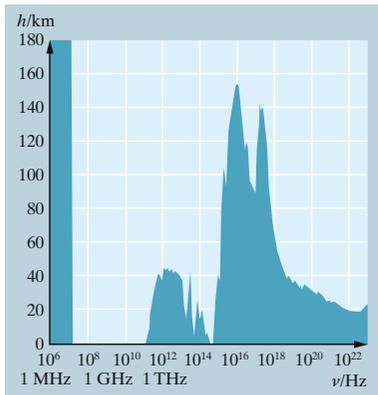


Abb. 11.3. Absorption der Erdatmosphäre. Der Absorptionskoeffizient der Luft sagt wegen der Änderung der Dichte und in großer Höhe auch der Zusammensetzung wenig aus, speziell wenn er größer ist als die Skalenhöhe. Deshalb ist die Höhe aufgetragen, bis zu der die Hälfte der extraterrestrischen Strahlung in die Atmosphäre vordringt. Man sieht unsere beiden Fenster zum All: Das schmale (eine Oktave) im Sichtbaren, und das viel breitere Radiofenster (13 Oktaven)

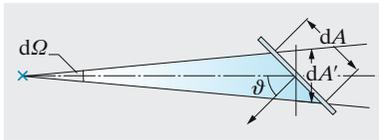


Abb. 11.4. Beleuchtungsstärke einer zum einfallenden Licht geneigten Fläche. $d\Omega$ bedeutet einen räumlichen Winkel

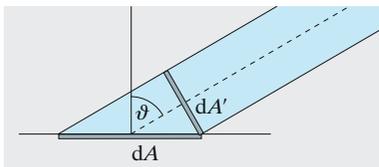
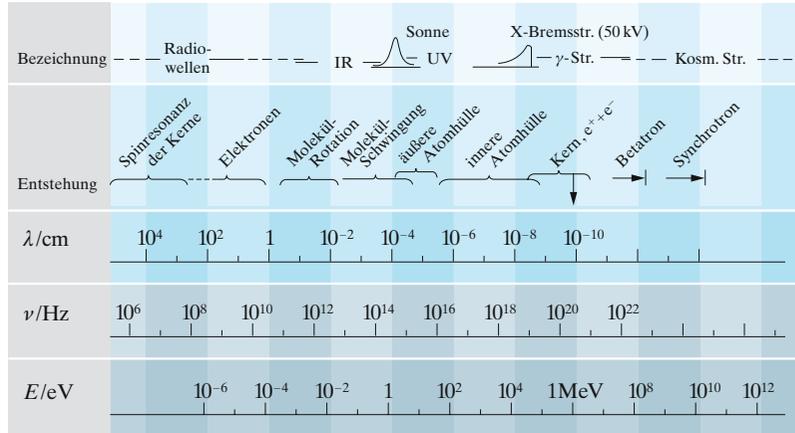


Abb. 11.5. Unabhängigkeit der Leuchtdichte von der Beobachtungsrichtung



$E = D \cos \vartheta$. Über einen endlichen Zeitraum erhält unsere Fläche die **Bestrahlung** $\int E dt$. Die Leistung auf eine endliche Fläche erhält man durch das Flächenintegral $P = \iint \mathbf{D} dA = \iint E dA$, das auch **Strahlungsfluss** ϕ heißt, in Analogie zum elektrischen Fluss oder dem Volumenstrom. Durch eine geschlossene Fläche fließt so viel Strahlungsleistung, wie die eingeschlossenen Quellen abgeben, falls im eingeschlossenen Raum keine Energie durch Absorption verloren geht.

Strahlungsquellen haben aber meist nicht die angenehmen Symmetrieeigenschaften der elektrischen Quellen, der Ladungen. Punkt- oder Kugelquellen sind technisch meist nur unvollkommen realisiert. Nur die Sonne strahlt nach allen Seiten gleich stark: $D = P/(4\pi r^2)$. Sonst ist D nicht nur von r abhängig, sondern auch vom Winkel. Wenn in den Raumwinkel $d\Omega$ der Leistungsanteil $dP = J d\Omega$ abgegeben wird, heißt $J = dP/d\Omega$ die **Strahlungsstärke** der Quelle. Zu dieser Strahlung in bestimmter Richtung tragen die einzelnen Oberflächenelemente der ausgedehnten Quelle in verschiedenem Maß bei. Ein Flächenstück dA der Quelle strahlt im Ganzen $dP = R dA$ ab. $R = dP/dA$ heißt seine **spezifische Ausstrahlung**. Auch diese ist wieder über den Raumwinkel verteilt: In den Bereich $d\Omega$ fällt der Leistungsanteil $d^2P = B dA d\Omega$, wo $B = d^2P/(dA d\Omega)$ **Strahlungsdichte** heißt.

× Beispiel...

Welchen Strahlungsstrom und welche Strahlungsstärke gibt die Sonne ab? Welche Intensität und welche Strahlungsstärke herrschen außerhalb der Erdatmosphäre?

Intensität in Erdnähe $D_E = 1,4 \text{ kW/m}^2$, am Sonnenrand $D_S = D_E r_{ES}^2 / R_S^2 = 7 \cdot 10^4 \text{ kW/m}^2$. Strahlungsfluss $\Phi = D_E 4\pi r_{ES}^2 = 2,8 \cdot 10^{23} \text{ kW}$. Strahlungsstärke $J \approx \Phi / (2\pi) = 5,5 \cdot 10^{22} \text{ kW/sterad}$, unabhängig vom Abstand; J gilt nur ungefähr, weil die Sonne kein exakter Lambert-Strahler ist.

Eine mattweiße Fläche (Papier, Leinwand, Leuchtstoffschicht), ebenso ein heißer schwarzer Körper oder eine kleine Öffnung in einem strah-

lungserfüllten Hohlraum sind in guter Näherung **Lambert-Strahler**, d. h. sie haben eine richtungsunabhängige Strahlungsdichte. Bewegen Sie den Kopf so abwärts, dass Sie Ihr Buch mehr von der Seite sehen. Erscheint das Papier noch ebenso hellweiß wie vorher? Dann ist es ein Lambert-Strahler. Aber aus dem Winkel ϑ gegen das Lot betrachtet, scheint das Papier nur noch den Raumwinkel $\Omega_0 \cos \vartheta$ zu erfüllen, nicht mehr $\Omega_0 \approx A/r^2$ wie bei senkrechter Betrachtung. Aus dem verkürzten Raumwinkelbereich kommt pro Winkeleinheit offenbar gleich viel Licht, also von der ganzen Papierfläche nur die Strahlungsstärke

$$J = J_0 \cos \vartheta \quad (\text{Lambert Gesetz}) \quad (11.1)$$

Trägt man die Strahlungsstärken, die ein Lambertsches Flächenelement in die verschiedenen Richtungen wirft, als entsprechend lange Pfeile auf, dann liegen deren Spitzen auf einer Kugel, die das Flächenelement tangiert. Die Charakteristik von nichtlambertschen Flächen ist dagegen meist in Normalrichtung verlängert. Bei einer Projektionsleinwand ist das erwünscht, weil dort die Zuschauer sitzen. Auch die Sonnenoberfläche oder eine Röntgenantikathode haben eine verlängerte Charakteristik: Der Rand der Sonnenscheibe sieht etwas dunkler aus als die Mitte.

11.1.2 Photometrische Größen

Die Photometrie interessiert sich nicht für die physikalischen Eigenschaften des Strahlungsfeldes allgemein, sondern nur für den Teil davon, den unser Auge wahrnimmt. Die Beziehung zwischen den physikalischen und den physiologischen Größen stiftet die **spektrale Empfindlichkeitskurve des Auges** (Abb. 11.7; man beachte aber, dass diese Kurve für das Dunkelsehen etwas anders liegt). Das Auge ist demnach erstaunlicherweise für Karminrot (750 nm) 10 000mal weniger empfindlich als für Zitronengelb (550 nm). Wie eine bestimmte physikalische Strahlungsmenge physiologisch bewertet wird, hängt also entscheidend von ihrer spektralen Zusammensetzung ab. Eine Fläche von 1 m^2 z. B., auf die 1 Watt monochromatischen gelbgrünen Lichts (genauer von 550 nm) auftrifft, wird als **Beleuchtungsstärke** von 680 Lux empfunden, die gleiche Bestrahlungsstärke im Roten (750 nm) nur als etwa 0,1 Lux.

Jede der physikalischen Strahlungsgrößen hat ihr physiologisches Gegenstück (s. Tabelle 11.1). Alle diese physiologisch-photometrischen Größen lassen sich auf eine neu einzuführende Grundgröße, die neue Kerze oder **Candela (cd)** zurückführen. Sie ist definiert als der **Lichtstrom** pro Raumwinkeleinheit, der von $\frac{1}{60} \text{ cm}^2$ eines schwarzen Körpers bei 2 042 K, der Schmelztemperatur des Platins, ausgeht. Früher benutzte man auch die **Hefner-Kerze (HK)**. Sie ist operationell definiert durch eine offene Amylacetat-Flamme unter vorgeschriebenen Brennbedingungen. Es ist $1 \text{ HK} = 0,9 \text{ cd}$.

11.1.3 Photometrie und Strahlungsmessung

Um die Lichtstärke oder Strahlstärke zu messen, die eine Lichtquelle in einer bestimmten Richtung aussendet, stellt man meist eine matte Fläche dorthin und misst die Beleuchtungs- oder Bestrahlungsstärke, die sie

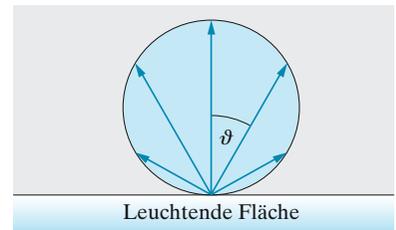


Abb. 11.6. Lichtstärke einer Fläche nach dem Lambertschen Kosinusgesetz

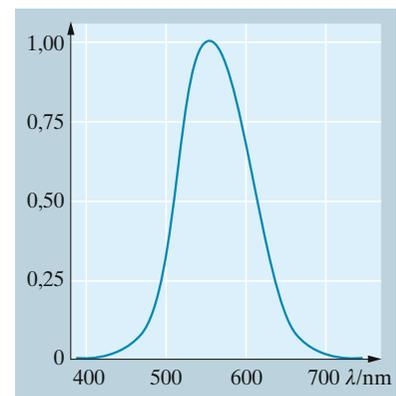


Abb. 11.7. Spektrale Empfindlichkeit des menschlichen Auges im helladaptierten Zustand

Tabelle 11.1. Strahlungsfeldgrößen und photometrische Größen

Physikalisch: Strahlung			Physiologisch: Licht		
Größe	Symbol	Einheit	Größe	Symbol	Einheit
Strahlungsenergie	E	J	Lichtmenge	Q	Lumensek. = lm s
Strahlungsfluss	Φ	W	Lichtstrom	Φ	Lumen = lm
Spezifische Ausstrahlung	R	W m^{-2}	Spezifische Lichtausstrahlung	R	lm m^{-2}
Strahlungsstärke	$J = d\Phi/d\Omega$	W sterad^{-1}	Lichtstärke	$I = d\Phi/d\Omega$	Phot = lm cm^{-2}
Strahlungsdichte	$B = \frac{dJ}{dA \cos \vartheta}$	$\text{W m}^{-2} \text{ sterad}^{-1}$	Leuchtdichte	$B = \frac{dI}{dA \cos \vartheta}$	Candela = cd = lm sterad^{-1} cd m^{-2}
Intensität	$D = d\Phi/dA_{\perp}$	W m^{-2}	Intensität	$D = d\Phi/dA_{\perp}$	Lux = $\text{lx} = \text{lm m}^{-2}$
Strahlungsflussdichte			Lichtstromdichte		
Bestrahlungsstärke	$E = D \cos \vartheta$	W m^{-2}	Beleuchtungsstärke	$E = D \cos \vartheta$	lx
Bestrahlung	$\int E dt$	J m^{-2}	Beleuchtung	$\int E dt$	lx s

empfängt. Als Empfänger dient im visuellen Photometer das Auge, im Strahlungsmesser ein photoelektrischer, thermoelektrischer oder photochemischer Empfänger (**Photozelle**, **Photowiderstand** oder **Multiplifier**; **Thermoelement**; Film; vgl. auch Abschn. 11.3.2). Unser Auge ist ein sehr schlechter Absolutmesser, kann aber die Beleuchtungsstärken zweier benachbarter kleiner Felder sehr genau vergleichen, wenn auf beide Licht gleicher Farbe fällt. Beim **Fettfleckphotometer** nach *R. Bunsen* wird ein Papier mit Fettfleck von der einen Seite durch die Normallichtquelle (Abb. 11.8, hier eine Hefner-Lampe, Lichtstärke $I_0 = 0,9 \text{ cd}$), von der anderen durch die zu messende Lichtstärke I beleuchtet. Die Abstände r_1 und r_2 stellt man so ein, dass der Fettfleck unsichtbar wird. Dann sind die Beleuchtungsstärken beiderseits gleich: Das Licht, das am Fettfleck nicht reflektiert wird, sondern durchgeht, wird genau durch das Licht kompensiert, das von der anderen Seite durchkommt. Daraus ergibt sich für die zu messende **Lichtstärke I**

$$\frac{I}{r_2^2} = \frac{I_0}{r_1^2} \quad \text{d. h.} \quad I = I_0 \frac{r_2^2}{r_1^2}. \quad (11.2)$$

Außer durch die Entfernung r kann man das Licht auch durch Blenden, rotierende Sektoren, Graufilter oder Polarisationsfilter schwächen. Papier und Fettfleck reflektieren nicht beide mit gleicher, z. B. lambertscher Charakteristik. Diesen Nachteil vermeidet der **Lummer-Brodhun-Würfel** (Abb. 11.9). Zwei Glasprismen sind auf der Hälfte ihrer Berührungsfäche so verkittet, dass Licht ungeschwächt durchgeht. Auf der anderen Hälfte ist die Trennfuge so angeschliffen, dass Totalreflexion eintritt. So sieht der Beobachter zwei Felder, beleuchtet durch je eine der zu vergleichenden Lichtquellen.

Vor die beiden Lichtquellen kann man **Polarisationsfilter** setzen, die senkrecht zueinanderstehen, und beobachtet dann durch einen drehbaren Analysator. Stellt man seine Schwingungsebene parallel zu der des Lichts auf dem rechten Feld (Amplitude A_1 , Abb. 11.10), dann erscheint das linke Feld ganz dunkel. Beide Felder werden gleichhell bei einem Drehwinkel φ

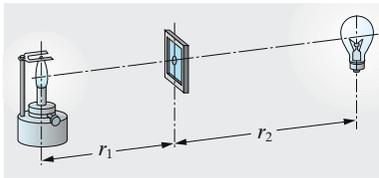
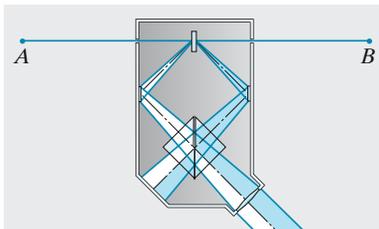


Abb. 11.8. Das Fettfleckphotometer

Abb. 11.9. Der Lummer-Brodhun-Würfel dient zum Vergleich der Lichtstärken der Quellen A und B

gegen diese Stellung, für den $A_1 \cos \varphi = A_2 \sin \varphi$ ist. Daraus ergibt sich das Verhältnis der Beleuchtungsstärken

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \tan^2 \varphi. \quad (11.3)$$

Diese Geräte messen die Lichtstärke oder Strahlstärke, die von der Quelle in Richtung auf die Messfläche ausgeht. Die Integration über alle Richtungen, also die Messung des Licht- oder Strahlungsstroms Φ der Quelle ist mühsam. Die **Ulbricht-Kugel** integriert automatisch. Sie ist innen mattweiß gestrichen (Lambert-Strahler), in der Mitte sitzt die Quelle Q , das Beobachtungsfenster F ist durch einen kleinen Schirm S vor direkter Beleuchtung geschützt (Abb. 11.11). Von den Wänden her fällt eine zu Φ proportionale Beleuchtungsstärke E auf das Fenster, obwohl die Quelle die einzelnen Wandpartien vielleicht ganz verschieden hell beleuchtet (Aufgabe 11.1.8).

11.2 Strahlungsgesetze

1876 stellte sich der frisch gebackene Studiosus Max Planck, damaliger Sitte entsprechend, beim Physik-Professor vor, und der riet ihm ab: In einer so abgeschlossenen Wissenschaft hätte ein intelligenter junger Mensch keine Chance mehr. In der ersten Sitzung des neuen Jahrhunderts der Berliner Akademie trug derselbe Max Planck sein Gesetz vor, das die ganze Naturwissenschaft revolutionieren sollte.

11.2.1 Wärmestrahlung und thermisches Gleichgewicht

Der Inhalt einer **Thermosflasche** bleibt sehr viel länger wärmer (oder kälter) als seine Umgebung, denn das Vakuum zwischen den doppelten Glaswänden unterbindet den Energieaustausch durch Wärmeleitung und durch Konvektion. Außerdem sind diese Glaswände metallisch verspiegelt, wodurch auch der dritte Austauschmechanismus, die Strahlung, weitgehend unterdrückt wird. Der heiße Kaffee strahlt natürlich nicht im Sichtbaren, sondern bei viel kleineren Frequenzen, im fernen Infrarot. Die Verspiegelung ist nur sinnvoll, wenn sie auch in diesem Frequenzbereich reflektiert. Blanke Metallflächen tun dies, weil sie viele quasifreie Elektronen enthalten (Abschn. 17.3.3). Das dünne Elektronengas der Ionosphäre reflektiert alle Frequenzen unterhalb der Ultrakurzwellen, das fast 10^{16} mal dichtere Elektronengas im Metall reflektiert auch noch 10^8 mal kürzere Wellen.

Trotz der Thermosflasche nimmt der Kaffee schließlich die Umgebungstemperatur an, wenn auch viel langsamer als in der Porzellankanne. Täte er das nicht, bliebe er z. B. wärmer, dann könnte man ihn als warmes Reservoir einer Wärmekraftmaschine benutzen, die ein Perpetuum mobile 2. Art darstellen würde. Im thermischen Gleichgewicht ist also die Temperatur überall konstant. Verwechseln Sie nicht das **thermische Gleichgewicht** mit dem stationären Zustand eines Systems, das Wärmequellen enthält: Zwischen Sonne und Erde herrscht im Wesentlichen

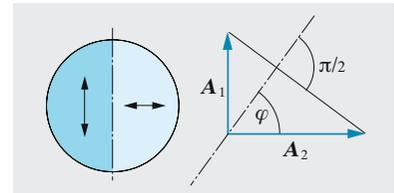


Abb. 11.10. Ein drehbarer Analysator bringt die beiden mit senkrecht zueinander polarisiertem Licht bestrahlten Bildfelder des Lummer-Brodhuns-Würfels auf gleiche Helligkeit

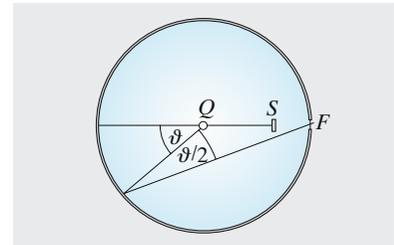


Abb. 11.11. Die Ulbricht-Kugel integriert die Lichtstärke einer Quelle über den ganzen 4π -Raumwinkel

Stationarität, obwohl die Temperaturen sehr verschieden sind, ebenso zwischen der Kaffeekanne, die man auf kleiner Heizplatte gerade warm hält, und ihrer Umgebung.

Strahlt die auf Zimmertemperatur abgekühlte Kaffeekanne gar keine Energie mehr ab? Gegenfrage: Woher sollte sie denn „wissen“, dass sie das jetzt nicht mehr darf? Ob sie es tut, kann doch nur von ihren eigenen Eigenschaften abhängen, nicht von der Umgebung. Thermisches Gleichgewicht mit der Umgebung bedeutet nicht, dass die Kanne nicht mehr strahlt, sondern dass sie von der Umgebung genauso viel Energie empfängt, wie sie an diese abgibt. Das gilt bei Temperaturgleichheit. Ist der Kaffee wärmer, strahlt er mehr als er empfängt, und nur die Differenz führt zur Abkühlung. Bei der Wärmeleitung ist es ja ähnlich: Wir konnten sie erst dann molekular erklären (Abschn. 5.4.6), als wir erkannt hatten, dass der Netto-Wärmestrom die Differenz aus Hin- und Rückstrom ist. Bei der Strahlung ist allerdings die Temperaturabhängigkeit des Energiestroms nicht linear: Heiße Körper strahlen überproportional viel mehr.

Außer von der Temperatur hängt die Strahlungsleistung, die eine Oberfläche abgibt, auch von ihrer Beschaffenheit ab: Material, Farbe, Rauigkeit usw. Wir kommen auf diese Abhängigkeit, wenn wir bedenken, dass die Fläche nicht nur abstrahlt, sondern auch einen Teil der auf sie auftreffenden Strahlung absorbiert. Dieser Bruchteil heißt **Absorptionsgrad** ε der Fläche (nicht zu verwechseln mit dem Absorptionskoeffizienten); komplementär zu ε ist der **Reflexionsgrad** $1 - \varepsilon$. ε hängt sicher noch von der Frequenz der Strahlung ab: $\varepsilon = \varepsilon(\nu)$. Kupferblech reflektiert alle Frequenzen unterhalb der des gelben Lichts, die höheren absorbiert es weitgehend; deswegen sieht es rot aus. Wir betrachten hier zunächst Strahlung einheitlicher Frequenz oder gleicher Spektralzusammensetzung. Eine Fläche, die alle auftreffende Strahlung absorbiert, also $\varepsilon(\nu) = 1$ hat, nennen wir „schwarz für die Frequenz ν “; wenn das für alle Frequenzen gilt, nennen wir die Fläche „schwarz“ (ohne Zusatz).

Nun stellen wir zwei ebene Platten mit verschiedenen Werten von ε einander im Vakuum gegenüber. Beide sollen die gleiche Temperatur haben. Den Raum zwischen ihnen begrenzen wir seitlich durch ideale Spiegel, sodass keine Strahlung entweichen kann. Beide Platten strahlen, die erste gibt die Leistung P_1 ab, die zweite P_2 . Von der Leistung P_1 , die Platte 1 der Platte 2 zusendet, absorbiert diese die Leistung $\varepsilon_2 P_1$. Umgekehrt absorbiert die Platte 1 die Leistung $\varepsilon_1 P_2$. Beide Leistungen müssen gleich sein, sonst flösse trotz anfangs gleicher Temperaturen dauernd ein Energiestrom von einer Platte zur anderen, die Temperaturen würden von selbst verschieden, wir hätten wieder ein Perpetuum mobile 2. Art. Es folgt also

$$P \sim \varepsilon; \quad (11.4)$$

bei gleicher Temperatur ist die abgegebene Strahlungsleistung (die spezifische Ausstrahlung) proportional zum Absorptionsgrad. Das gilt für jede Frequenz. Je besser eine Fläche absorbiert, desto besser strahlt sie auch. Schwarze Flächen (im Folgenden mit dem Index s gekennzeichnet) absorbieren nicht nur am besten, sie strahlen auch am meisten. Speziell kann

man die Ausstrahlung aller Flächen auf eine schwarze beziehen, die ja $\epsilon_s = 1$ hat:

$$P = \epsilon P_s \quad (\text{Strahlungsgesetz von G. Kirchhoff}) \quad (11.5)$$

Selbst beruhte raue Flächen oder schwarzer Samt erfüllen die Bedingung $\epsilon = 1$ nur unvollkommen. Am besten tut dies ein kleines Loch in einem Hohlkörper, z. B. in einem Hohlzylinder aus feuerfestem Material, der elektrisch geheizt wird und mit einem oder mehreren Luftmänteln zur Wärmeisolation umgeben ist (Abb. 11.13). Strahlung, die von außen durch das Loch eintritt, wird im Innern vielfach reflektiert oder gestreut und dabei jedes Mal z. T. absorbiert; der Bruchteil, der aus dem Loch wieder herauskommt, ist daher winzig, ϵ also nahezu 1. Die Strahlung aus dem Loch des geheizten Hohlraums, die erst bei hoher Temperatur dem Auge sichtbar wird, ist also identisch mit der Strahlung einer schwarzen Fläche gleicher Temperatur. Die **schwarze Strahlung** heißt daher auch **Hohlraumstrahlung**.

11.2.2 Das Spektrum der schwarzen Strahlung

In dem Hohlraum Abb. 11.12 oder 11.13 befindet sich Strahlung, von der uns jetzt nicht mehr interessiert, welche Wand sie ursprünglich ausgestrahlt hat. Diese Strahlung ist in ganz bestimmter Weise über die Frequenz verteilt, sie hat ein Spektrum, das wir aufklären wollen. Nennen wir $\rho(\nu, T) d\nu$ die **spektrale Energiedichte**, also die Energie pro m^3 , die auf den Frequenzbereich $(\nu, \nu + d\nu)$ entfällt, wenn der Hohlraum von Wänden der Temperatur T umgeben ist. Damit die Strahlung mit diesen Wänden im Gleichgewicht steht, müssen die Wände ebenso viel Energie emittieren wie sie absorbieren. Die Energie mit der Dichte $\rho(\nu, T) d\nu$ wandert mit der Geschwindigkeit c zur Wand. Dort trifft also die Intensität (Energie $m^{-2} s^{-1}$) $c\rho(\nu, T) d\nu$ auf (vgl. Abb. 5.7 oder 6.72). Die schwarze Wand absorbiert diese ganze Intensität und emittiert nach Kirchhoff $P_s(\nu, T) d\nu$. Die spezifische Ausstrahlung von $1 m^2$ schwarzer Wand ist also bis auf den Faktor c identisch mit der Energiedichte der schwarzen Strahlung:

$$R_s(\nu, T) = c\rho(\nu, T) \quad (11.6)$$

Die Messung dieser Energieverteilung ist besonders im infraroten und ultravioletten Bereich nicht einfach. *Lummer* und *Pringsheim* leisteten hier kurz vor 1900 Pionierarbeit. Abbildung 11.14 zeigt diese Verteilung, über der Wellenlänge aufgetragen. Bei sehr niedrigen und sehr hohen Frequenzen wird sehr wenig ausgestrahlt. Dazwischen liegt ein Maximum, und zwar bei umso höheren Frequenzen, je höher die Temperatur ist. Die vorherrschende Emission liegt für glühendes Metall, selbst für den Glühdraht unserer Lampen noch im Infraroten, wandert erst kurz unterhalb der Sonnentemperatur ins Sichtbare und verschiebt sich bei noch heißeren Sternen ins Blaue. Unsere Netzhaut entspricht mit ihrer Empfindlichkeitskurve ungefähr dem Maximum des Sonnenspektrums. **Glühlampen** reichen nur mit einem schmalen Ausläufer ihres Spektrums ins Sichtbare, ihre Lichtausbeute ist entsprechend gering. **Leuchtstoffröhren**, deren lumineszierende

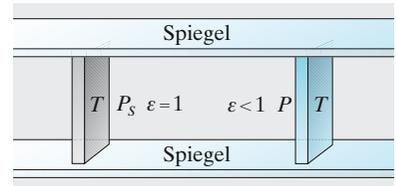


Abb. 11.12. Zum kirchhoffschen Strahlungsgesetz

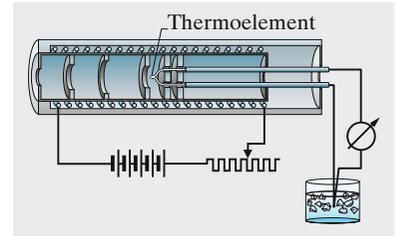


Abb. 11.13. Der Hohlraumstrahler als „schwarzer Körper“

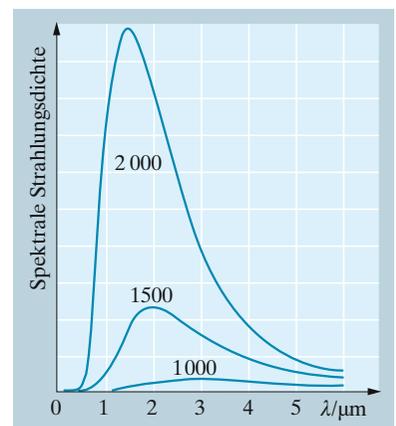


Abb. 11.14. Spektrale Intensitätsverteilung der schwarzen Strahlung, plancksches Strahlungsgesetz; Temperaturangaben in K

Schicht das überwiegend ultraviolette Licht einer Hg-Gasentladung ins Sichtbare schiebt, erreichen eine viel bessere Ausbeute. Auch die Sonnenstrahlung lässt sich nur annähernd als „schwarz“ beschreiben (am besten noch mit $T = 5\,800\text{ K}$). Die äußeren, kühleren Schichten der Sonne absorbieren ja die **Fraunhofer-Linien** heraus und verstärken zum Ausgleich andere Spektralgebiete (Abb. 11.42). Wie viel davon durch unsere Erdatmosphäre dringt und mit welcher spektralen Zusammensetzung, hängt stark von der Wetterlage ab.

Die Fläche unter der $\varrho(\nu)$ -Kurve, also die Gesamtemission über das ganze Spektrum, steigt sehr schnell mit wachsender Temperatur.

✘ Beispiel . . .

Die Albedo von Schnee ist (je nach Frische und Konsistenz) 0,4–0,8, die von Seesand 0,4–0,7. Diskutieren Sie die Schlussfolgerungen für Fotografen, Bräunesuchende und Sonnenbrandempfindliche.

Während z. B. selbst Flusssand eine Albedo von nur 0,15–0,20 hat, also sehr wenig Sonnenlicht zurückstrahlt, ist im Schnee und im Seesand die Gesamteinstrahlung fast verdoppelt. Fotografen machen die Blende um fast eine Nummer zu oder halbieren die Belichtungszeit. Schuld an vielen Sonnenbränden ist aber wohl eher die Tatsache, dass man im Schnee und im Seewind das Sonnenbad hitzemäßig viel länger aushält.

11.2.3 Plancks Strahlungsgesetz

Nachdem alle Versuche zur Erklärung des Spektrums der schwarzen Strahlung aus den bekannten thermodynamischen und elektrodynamischen Gesetzen gescheitert waren, erkannte *Max Planck* 1900, dass man hier eine der klassischen Physik grundsätzlich fremde Annahme einführen muss, nämlich die **Quantenhypothese**. Danach kann ein strahlendes System mit einem Strahlungsfeld nicht beliebige Energieportionen austauschen, sondern nur ganzzahlige Vielfache des **Energiequantums** $h\nu$, wo ν die Frequenz der Strahlung und h eine neue Naturkonstante ist:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (\text{plancksches Wirkungsquant}) \quad (11.7)$$

Die klassische Elektrodynamik kennt keine derartige Beschränkung für den Energieaustausch zwischen einem Ladungssystem und einer elektromagnetischen Welle. Die Quantenhypothese rechtfertigt sich durch ihren Erfolg: Sie liefert exakt die gemessene Energieverteilung $\varrho(\nu, T)$ der schwarzen Strahlung. Wir folgen bei der Ableitung einem Gedankengang von *Einstein* (die ursprüngliche Ableitung von *Planck* setzt etwas mehr statistische Physik voraus).

Die Teilchen der Materie, die mit der Strahlung im Gleichgewicht steht, z. B. die Wände des Hohlraumes, müssen zu allen in Frage kommenden Schwingungsfrequenzen fähig sein; sonst würden ja Lücken im Spektrum der Strahlung auftreten. Wir betrachten eine Gruppe von Teilchen, die Strahlung der Frequenz ν aufnehmen und abgeben können. Da solche Strahlung nach der Quantenhypothese nur in der Mindestmenge $h\nu$

aufgenommen werden kann, müssen die Atome, die gerade einen solchen Absorptionsakt hinter sich haben, eine um $h\nu$ höhere Energie besitzen, um $h\nu$ angeregt sein. Sei n^* die Teilchenzahldichte der angeregten, n_0 die der unangeregten Atome. Im thermischen Gleichgewicht, das uns hier interessiert, ist das Verhältnis der Anzahlen energiereicher und energieärmerer Teilchen durch die Boltzmann-Verteilung gegeben:

$$\frac{n^*}{n_0} = e^{-E/(kT)} = e^{-h\nu/(kT)} . \quad (11.8)$$

Nun stellen wir die verschiedenen Möglichkeiten des Energieaustausches zwischen Teilchen und Strahlung zusammen und geben die Häufigkeit der entsprechenden Ereignisse an:

- Teilchen absorbieren Strahlung vom Betrag $h\nu$; die Häufigkeit solcher Akte ist proportional zur Konzentration unangeregter Teilchen und zur Intensität der Strahlung im entsprechenden Frequenzbereich:

$$\text{Anzahl der Absorptionen}/(\text{m}^3 \text{ s}) = B_Q(\nu, T)n_0 .$$

- Atome emittieren Strahlung vom Betrag $h\nu$; für die Häufigkeit solcher Akte **spontaner Emission** ist die Konzentration angeregter Teilchen maßgebend:

$$\text{Anzahl spontaner Emissionen}/(\text{m}^3 \text{ s}) = An^* .$$

- Es gibt einen dritten Prozess, bei dem die Teilchen ihren Energievorrat $h\nu$ exakt synchron mit dem einfallenden Feld abstrahlen: **Erzwungene** oder **stimulierte Emission**. Dieser Prozess, den *Einstein* ad hoc einführte, um das Planck-Gesetz herauszubringen, spielt bei tieferen Temperaturen im Strahlungsgleichgewicht keine große Rolle, hat sich aber später z. B. als entscheidend für die Nichtgleichgewichtsemission von *Maser* und *Laser* erwiesen (Kap. 15). Die stimulierte Emission ist der direkte Umkehrprozess zur Absorption und hat daher die gleiche kinetische Konstante B :

$$\text{Anzahl erzwungener Emissionen}/(\text{m}^3 \text{ s}) = B_Q(\nu, T)n^* .$$

Die Koeffizienten A und B heißen **Einstein-Koeffizienten**. Im Gleichgewicht müssen die Absorptionen ebenso häufig wie die Emissionen sein:

$$B_Q(\nu, T)n_0 = An^* + B_Q(\nu, T)n^*$$

oder mittels (11.8),

$$B_Q(\nu, T)n_0 = (A + B_Q(\nu, T))n_0 e^{-h\nu/(kT)} .$$

Die Teilchenkonzentration n_0 fällt heraus (es darf darauf ja nicht ankommen). Dann ergibt sich die frequenzabhängige Energiedichte zu

$$\rho(\nu, T) = \frac{Ae^{-h\nu/(kT)}}{B(1 - e^{-h\nu/(kT)})} = \frac{A}{B} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} . \quad (11.9)$$

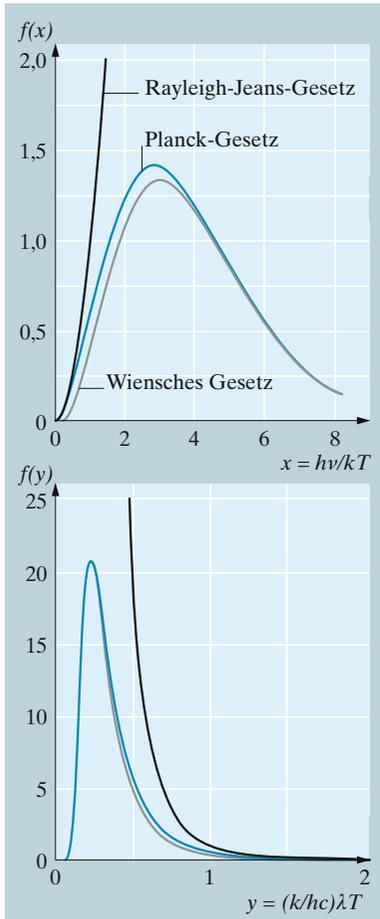


Abb. 11.15. *Oben:* Planck-Spektrum (blau, $f(x) = x^3/(e^x - 1)$, (11.11)) als Funktion der normierten Frequenz ($x = hv/kT$). Die Näherungen des Rayleigh-Jeans- (x^2 , (11.12)) sind schwarz, die des wienschen Strahlungsgesetzes ($x^3 e^{-x}$, (11.13)) grau eingetragen. *Unten:* Planck-Spektrum ($f(y) = y^{-5}/(e^{1/y} - 1)$) mit Rayleigh-Jeans (y^{-4}) und wienscher Näherung ($y^{-5} e^{-1/y}$) als Funktion der normierten Wellenlänge ($y = (k/hc)\lambda T$). Bei der Umrechnung von (11.11) in Wellenlängen ergibt sich der Faktor $y^{-5} \propto \lambda^{-5}$ wegen $dv = (c/v^2) d\lambda$.

Die Konstante A/B ergibt sich in einer etwas komplizierteren Betrachtung, die vom Eigenschwingungsspektrum eines Hohlraumes ausgeht (analog zu den Gitterschwingungen in Abschn. 17.2.1), als

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h v^3}{c^3} : \quad (11.10)$$

Planck-Gesetz

$$\varrho(v, T) dv = \frac{8\pi h v^3}{c^3} \frac{1}{e^{hv/(kT)} - 1} dv. \quad (11.11)$$

Dies beschreibt genau die Kurven von Abb. 11.15. Bei der Umrechnung von (11.11) in Wellenlängen muss man $dv = (c/\lambda^2) d\lambda$ beachten.

Für sehr kleine Frequenzen ($hv \ll kT$) geht diese Formel wegen $e^{hv/(kT)} \approx 1 + hv/(kT)$ über in

$$\varrho(v, T) dv \approx \frac{8\pi v^2}{c^3} kT dv \quad (\text{Rayleigh-Jeans-Gesetz}) . \quad (11.12)$$

Die Kurven $\varrho(v, T)$ als Funktion der Frequenz beginnen also auf der „roten“ Seite als Parabeln. Ginge es so weiter, so würde für große Frequenzen die Energiedichte unendlich werden (**Ultraviolett-Katastrophe**), was schon a priori absurd ist.

Für $hv \gg kT$ dagegen ist $e^{hv/(kT)} \gg 1$, und aus (11.11) wird

$$\varrho(v, T) dv \approx \frac{8\pi h v^3}{c^3} e^{-hv/(kT)} dv \quad (\text{Wiensches Strahlungsgesetz}) . \quad (11.13)$$

Das Wien-Gesetz beschreibt wenigstens die Existenz des Maximums, wird aber für sehr kleine Frequenzen völlig falsch. Beide Gesetze (*Rayleigh-Jeans* und *Wien*) waren schon länger als Teilnäherungen bekannt, bevor sie sich als Grenzfälle des Planck-Gesetzes ergaben.

11.2.4 Lage des Emissionsmaximums; Wiensches Verschiebungsgesetz

Aus dem planckschen Strahlungsgesetz (11.11) ergibt sich leicht, bei welcher Frequenz ν_m das Maximum der schwarzen Strahlungsdichte liegt. Nullsetzen der Ableitung nach ν liefert

$$\nu_m = \frac{2,82 k}{h} T = 5,88 \cdot 10^{10} T \quad (\nu \text{ in Hz, } T \text{ in K}) \quad (11.14)$$

(Wien-Verschiebungsgesetz).

Am Maximum hat die Energiedichte den Wert

$$\varrho(\nu_m, T) dv = \frac{8\pi h \nu_m^3}{c^3} \frac{1}{e^{2,82} - 1} dv = 35,7 \frac{k^3}{c^3 h^2} T^3 dv \quad (11.15)$$

(ϱ in J pro m^3 und Frequenzeinheitsintervall). Dies ist das Maximum der spektralen Energiedichte, über ν aufgetragen. Bei der Auftragung über λ fällt wegen der Umrechnung von (11.11) mit $d\nu = (c/\lambda^2) d\lambda$ das Maximum an eine etwas andere Stelle.

Wenn man weiß, dass die Sonne maximal bei $3,4 \cdot 10^{14}$ Hz emittiert, ergibt sich aus (11.14) sofort die Temperatur ihrer sichtbaren Oberfläche (Photosphäre) zu 5 800 K. Flüssiger Stahl selbst bei 2 000 K hat sein Maximum bei $1,2 \cdot 10^{14}$ Hz, also noch weit im IR. Dass er trotzdem gelbweiß erscheint, liegt an der spektralen Empfindlichkeit unseres Auges (vgl. Abb. 11.7): Das *wahrgenommene* Licht hat sein Maximum tatsächlich im Gelben. Dazu kommt noch ein rein physiologischer Netzhautprozess (Rückzug der farbempfindlichen Zäpfchen aus der Fovea), der jeden hellen Gegenstand weißer erscheinen lässt als er ist. Mit der **spezifischen Lichtausstrahlung** (Tabelle 11.1, Abb. 11.16) wird die physiologische Wahrnehmung quantifiziert.

11.2.5 Gesamtemission des schwarzen Strahlers; Stefan-Boltzmann-Gesetz

Die Gesamtenergiedichte in einem von schwarzer Strahlung erfüllten Hohlraum, über alle Frequenzen integriert, entspricht der Fläche unter der Planck-Kurve (Abb. 11.14). Sie ist bis auf den Faktor c identisch mit der spezifischen Ausstrahlung des schwarzen Körpers, d. h. mit der Energie, die ein m^2 seiner Oberfläche den Halbraum abstrahlt (Abschn. 11.2.2):

$$\begin{aligned}
 R &= c \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \right] \int_0^\infty \varrho(\nu, T) d\nu \\
 &= \frac{c}{4} \int_0^\infty \varrho(\nu, T) d\nu .
 \end{aligned} \tag{11.16}$$

Wie diese Größe von der Temperatur abhängt, sieht man am einfachsten, wenn man zur bequemeren Integration die neue Variable $x = h\nu/(kT)$ einführt:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{c}{4} \int_0^\infty \varrho(\nu, T) d\nu = \frac{2\pi}{c^2} \frac{k^4 T^4}{h^3} \int_0^\infty \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3 \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} d\frac{h\nu}{kT} \\
 &= \frac{2\pi}{c^2} \frac{k^4 T^4}{h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx .
 \end{aligned}$$

Das bestimmte Integral ganz rechts hat den Wert $\pi^4/15 \approx 6,5$. Damit wird

$$R = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{c^2 h^3} T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} T^4 \tag{11.17}$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz,

(R in W/m^2); in einen Halbraum strahlt eine Fläche A mit der Temperatur T die Leistung

$$P = \sigma A T^4$$

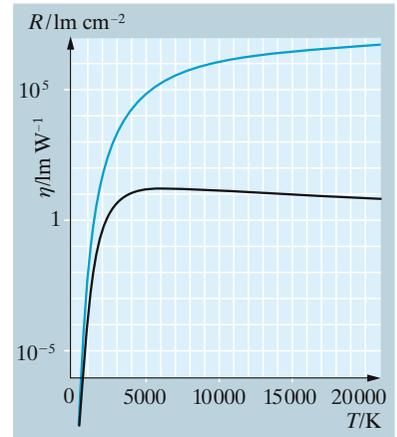


Abb. 11.16. Spezifische Lichtausstrahlung R (—) und Lichtausbeute η in lm pro W emittierter Gesamtstrahlung (—) für einen schwarzen Körper

ab. $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ist die **Stefan-Boltzmann-Konstante**. Diesen T^4 -Anstieg mit der Temperatur kann man auch so verstehen: Die Fläche einer Kurve wie der planckschen ergibt sich angenähert als Höhe · Breite. Die Höhe des Maximums ist nach (11.15) proportional ν_m^3 , also T^3 . Die Breite der Verteilung entspricht nach (11.13), im Energiemaß ausgedrückt, etwa kT .

11.2.6 Der kosmische schwarze Strahler

Ein aufregendes Ergebnis der wissenschaftlichen Erkenntnis des 20. Jahrhunderts sind die Temperaturmessungen des **COBE-Satelliten** (**Cosmic Background Explorer**). Der Satellit hat Spektren der kosmischen Mikrowellen-Hintergrundstrahlung im Radiofrequenzbereich gemessen. Es ist atemberaubend, dass dabei die genauesten Messungen zum Spektrum eines schwarzen Körpers herausgekommen sind (Abb. 11.17)! Die mikroskopischen Gesetze, die Max Planck im Jahr 1900 zur Erklärung der Strahlungseigenschaften schwarzer Körper formuliert, ja „geraten“ hat, erlauben uns am Ende dieses Jahrhunderts neue Einsichten in die Struktur der Welt auf der größten uns bekannten Skala, bis zum Rand des sichtbaren Weltalls.

Begonnen hat die Geschichte dieser Messungen mit Arno Penzias und Robert Wilson, die 1964 beim Test einer Antenne ein „Rauschen“ bemerkten, das sich durch keine Maßnahme beseitigen ließ, auch nicht durch die Entfernung eines unerwünschten Vogelneests in der Antenne. Penzias und Wilson erhielten 1978 den Nobelpreis für Physik für den Nachweis dieses auch **3-Kelvin-Strahlung** genannten kosmischen Mikrowellenfeldes. Sie lieferten damit ein wichtiges Indiz für die **Urknall-Hypothese** (s. Abschn. 12.10.7): Darin wird das Weltall wie ein schwarzer Körper aufgefasst, der anfangs extrem heiß war und nur aus Strahlung bestand. Die Ausdehnung des Weltalls hat zur Trennung von Strahlung und Materie und zu einer sich immer weiter fortsetzenden Abkühlung geführt, die heute bei 3 Kelvin angekommen ist. Die zu dieser Temperatur gehörige Schwarzkörperstrahlung, deren Maximum nach dem wienschen Verschiebungsgesetz (11.14) im Mikrowellenbereich liegt, können wir gewissermaßen als ein „Nachleuchten“ des Urknalls interpretieren.

Die Messungen des COBE-Satelliten waren nun so genau, dass man eine Himmelskarte mit den Temperaturmessungen als Funktion der Blickrichtung auftragen konnte (Abb. 11.18). Dabei haben sich mehrere wichtige Erkenntnisse herausgestellt: Zunächst ist die Hintergrundstrahlung ganz erstaunlich gleichförmig (obere Karte in Abb. 11.18), erst wenn man die Messungen mit hoher Auflösung aufträgt, zeigen sich Abweichungen (mittlere Karte). Dabei fällt als erstes eine dipolare Asymmetrie ins Auge (kalte Regionen auf der einen, warme auf der anderen Seite). Die Dipol-Asymmetrie ist wohlverstanden und eine Folge der Bewegung des Sonnensystems relativ zum kosmischen Mikrowellen-Hintergrund. Man kann sie daher subtrahieren und erhält die untere Karte, auf welcher nun die restlichen Fluktuationen zu sehen sind, die immer noch größer sind als die Messunsicherheiten. Für diese Schwankungen werden zwei Quellen verantwortlich gemacht: In Äquatornähe offenbar die Milch-

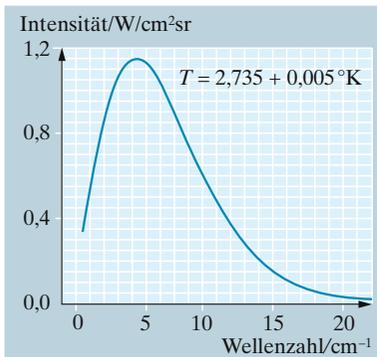


Abb. 11.17. 3-Kelvin-Strahlung oder Spektrum des kosmischen schwarzen Strahlers im Mikrowellenbereich. Die Unsicherheit der Messpunkte vom Spektrometer des COBE-Satelliten ist kleiner als die Strichdicke der Kurve (vgl. Abb. 11.14). (Mit freundlicher Erlaubnis von NASA und STScI)

straße selbst, in allen anderen Regionen aber Fluktuationen, die aus den Tiefen des Kosmos selbst stammen. Es wird vermutet, dass sie Dichtefluktuationen der Materie entsprechen, die dem Universum schon kurz nach dem Urknall aufgeprägt wurden – sie erlauben also einen Blick in die frühesten Zeiten des Kosmos und könnten für die Entstehung von Strukturen des Weltalls, Sternsystemen, Galaxien und noch größeren Einheiten eine wichtige Rolle gespielt haben.

11.2.7 Pyrometrie

Die Strahlungsgesetze bilden die Grundlage für die Temperaturmessungen mit den **Pyrometern**. Sie messen die Strahlung des Körpers, dessen Temperatur bestimmt werden soll, in einem schmalen Wellenlängenbereich des sichtbaren Spektrums (meistens im Roten) nach einem photometrischen Verfahren (Abb. 11.19): Durch eine Linse wird die strahlende Fläche S in einer Ebene abgebildet, in der sich der Faden einer Glühlampe befindet, deren Stromstärke durch die Änderung des Widerstandes R so geregelt werden kann, dass das gekrümmte Stück Kr des Glühfadens auf dem Bild der zu photometrierenden Fläche verschwindet, wenn man Kr durch das Okular unter Zwischenschaltung des Rotfilters F betrachtet. Man eicht das Instrument, indem man die Öffnung eines Hohlraumstrahlers bekannter Temperatur in die Ebene von Kr abbildet und nun die im Amperemeter A gemessenen Ströme den Temperaturen des schwarzen Körpers zuordnet.

Schwarze Temperatur. Im Allgemeinen sind die glühenden Körper, deren Temperatur mit dem Pyrometer gemessen wird, nicht schwarze Strahler, d. h. ihr Absorptionsgrad ε ist kleiner als 1. Dann ist ihre spezifische Ausstrahlung kleiner als die des schwarzen Körpers bei gleicher Temperatur. Ihre wahre Temperatur T ist also höher als die vom Pyrometer angezeigte, die man als ihre *schwarze Temperatur* T' bei der Wellenlänge λ bezeichnet, deren Emission gemessen wird.

Nach dem Kirchhoff-Gesetz ist die spezifische Ausstrahlung des untersuchten Strahlers der Temperatur T

$$R = R_s \varepsilon = \varepsilon \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} e^{-h\nu/(kT)} .$$

(Wir benutzen die wiensche Näherung (11.13), weil die gemessenen Frequenzen für Temperaturstrahler weit rechts vom Maximum liegen.) Diese spezifische Ausstrahlung ist gleich der des schwarzen Vergleichskörpers (Temperatur T'):

$$R = \varepsilon \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} e^{-h\nu/(kT)} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} e^{-h\nu/(kT')} .$$

Durch Logarithmieren erhält man

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} = \frac{k}{h\nu} \ln \varepsilon = \frac{k}{hc} \lambda \ln \varepsilon . \tag{11.18}$$

Für $\varepsilon = 1$ wird $T = T'$, für $\varepsilon < 1$ wird $\ln \varepsilon < 0$, also $T > T'$.

Die **Farbtemperatur** eines Körpers, der sichtbares Licht ausstrahlt, ist die Temperatur des schwarzen Körpers, bei der dieser die gleiche Farbe hat wie der strahlende Körper. **Graue Strahler** sind solche, deren Absorptionsgrad ε von der Wellenlänge unabhängig ist; ihre Farbtemperatur muss mit der wahren Temperatur übereinstimmen.

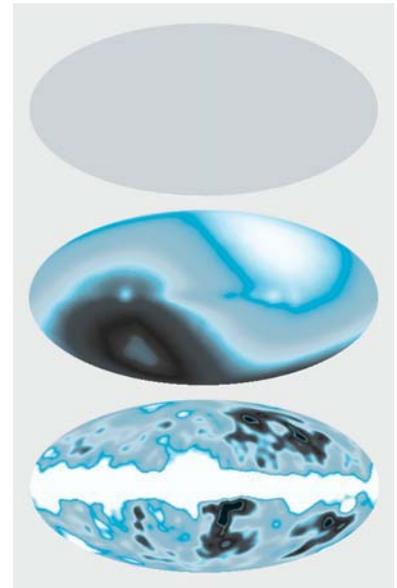


Abb. 11.18. Temperaturverteilung der 3-Kelvin-Strahlung nach Messungen des COBE-Satelliten auf einer Himmelskarte in Falschfarbendarstellung. Der Äquator dieser Projektion entspricht der Ebene der Milchstraße. Blaue Farbtöne entsprechen kälteren, weiße wärmeren Regionen. Im oberen Bild reicht die Skala von 0–4 K, im mittleren nur von 2,724–2,732 K, ist also um einen Faktor 500 gespreizt. Im unteren Bild wurde die Dipolasymmetrie subtrahiert und nur die Restfluktuationen aufgetragen. Der Temperaturunterschied zwischen kalten und warmen Regionen beträgt nur noch 0,0002 K. und ist ungefähr 30mal kleiner als die Dipolasymmetrie. (Mit freundlicher Erlaubnis von NASA und STScI)

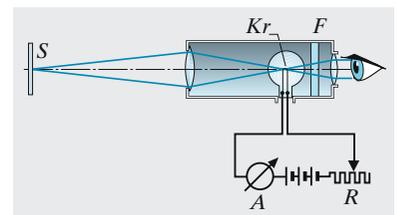


Abb. 11.19. Optisches Pyrometer

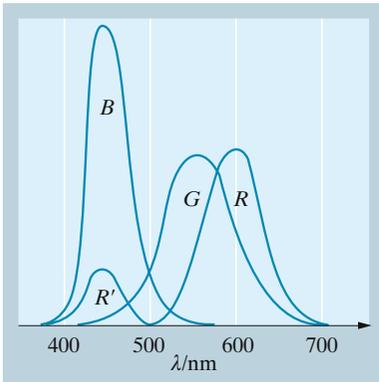


Abb. 11.20. Empfindlichkeitskurven der drei Farbrezeptoren in der Netzhaut des „Standard-Beobachters“. Die Kurven sind so normiert, dass die Gesamtflächen unter allen dreien gleich sind. Daher ist der Beitrag des Blaurezeptors zur gesamten Helligkeitsempfindung übertrieben, und Addition der drei Kurven ergibt nicht die spektrale Hellempfindlichkeitskurve von Abb. 11.7

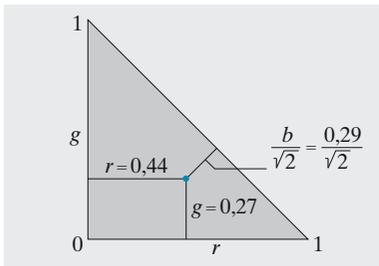


Abb. 11.21. Die relativen Beiträge der drei Farbrezeptoren zum Farbdruck lassen sich als Abstände von den Seiten des Farbdreiecks darstellen. Man beachte den Faktor $\sqrt{2}$ im Abstand von der Hypotenuse. Der dargestellte Punkt entspricht etwa dem Rosa der Heckenrose

11.3 Die Welt der Farben

Was ist Farbe, wie kann man sie quantitativ kennzeichnen? Welche Quellen und Empfänger für elektromagnetische Strahlung auch außerhalb des Sichtbaren gibt es? Wie strahlt die Sonne, und wie setzen Pflanzen die Strahlungsenergie um?

11.3.1 Farbe

Wenn auch die Farbempfindung nichts rein Physikalisches ist, wäre es schade, die Farbe aus der Physik auszuklammern und sich damit in die Welt vor der Kreidezeit zurückzuziehen, als es noch keine Blüten, kaum bunte, bestäubende Insekten und übrigens auch sehr wenig reine Töne gab, denn Singvögel sind Insekten- oder Samenfresser.

Farbphotographie, Farbfernsehen und im gewissen Umfang auch Malerei und Buchdruck kombinieren alle Farbtöne aus drei Grundfarben. Auch das Auge muss mindestens drei Arten von Rezeptoren mit verschiedener spektraler Empfindlichkeit haben, wie *Young* (1807) und *Helmholtz* (1852) erkannten. Abbildung 11.20 zeigt das der **Farbmetrik** oder **Colorimetrie** zugrunde liegende, wenn auch physiologisch noch umstrittene Modell der Blau-, Grün- und Rot-Rezeptoren. Diese Kurven sind nicht direkt aus der Erregung der Rezeptornerven gemessen, sondern aus den Absorptionskurven der in die drei Zäpfchentypen eingelagerten Farbstoffe erschlossen. Licht bestimmter Zusammensetzung, monochromatisch oder nicht, reizt die drei Rezeptoren mit Erregungen B , G bzw. R . Je größer die Summe $B + G + R$, desto heller erscheint das Licht. Trotz verschiedener Helligkeit kann der **Farbton** aber gleich sein. Er wird allein durch die relativen Erregungen b , g , r gegeben (Abb. 11.21), d. h. den Anteil an der Gesamterregung: $b = B/(B + G + R)$ usw. Da nach dieser Definition $b + g + r = 1$, braucht man nur zwei Anteile, meist r und g anzugeben (b ergibt sich als $1 - g - r$), und kann den Farbton durch einen Punkt in der r , g -Ebene eindeutig kennzeichnen. Erregungen können nicht negativ sein. Daher ist in dieser Ebene nur ein Dreieck, begrenzt durch die Katheten $r = 0$ und $g = 0$ sowie die Hypotenuse $b = 0$, zugänglich. Je reiner die Farbe, desto weiter außen liegt sie im **Farbdreieck**. Dessen Schwerpunkt $b = g = r = \frac{1}{3}$ bedeutet gleichmäßige Erregung aller drei Rezeptoren, also Weiß. Selbst reine Spektralfarben (monochromatisches Licht) können aber nicht ganz am Rand des Dreiecks liegen, speziell nicht in den Ecken, denn das würde bedeuten, dass sie einen bzw. zwei Rezeptoren überhaupt nicht erregen. Wie Abb. 11.20 zeigt, scheidet der Blau-Rezeptor ab 550 nm praktisch aus, und die Spektralfarben gelb-orange-rot liegen fast auf der Hypotenuse. Der Rot-Rezeptor spielt aber immer mit (am wenigsten bei 500 nm), und daher entspricht das schönste Grün nur etwa $g = 0,8$, ähnlich für reines Blau oder Rot (Abb. 11.22). Der Spektralfarbenzug schließt sich nicht; der Ansatz dazu, das Abbiegen von der Blau-Ecke, beruht bereits auf einer Anomalie, nämlich dem zweiten, kurzwelligen Buckel der Rot-Erregung. Um den Bogen zu schließen, braucht man die Reihe der Mischfarben zwischen Violett und Rot, die Purpurgerade. Allgemein liegen Mischfarben zweier Farben A und B auf der Verbindungsstrecke AB . Die Abstände AC

und BC geben den Anteil von A bzw. B in C . Geht diese Verbindungslinie durch den Dreiecksschwerpunkt, dann sind A und B komplementär. Ihre Mischung, nicht unbedingt im gleichen Verhältnis, ergibt Weiß.

Hier handelt es sich um **additive Farbmischung**, erzeugt durch Addition des Lichts farbiger Strahler, die nur bestimmte Spektralbereiche emittieren, entweder als Emissionsspektren ihrer atomaren Teilchen, oder weil der Rest herausgefiltert wurde. Die meisten Farben unserer Umgebung entstehen **subtraktiv**, d. h. indem Stoffe gewisse Spektralbereiche selektiv absorbieren und daher in der Komplementärfarbe erscheinen. Subtraktive Mischung von Komplementärfarben ergibt Schwarz, denn die komplementären Absorptionsbereiche lassen gar kein Licht mehr durch.

In der Praxis benutzt man viel den **ostwaldschen Farbkreis**, einen Doppelkegel, dessen Achse die Grauleiter von Idealschwarz bis Idealweiß bildet. Der Kegelrand ist in 24 gesättigte Farben des Spektralzuges und der Purpurgeraden eingeteilt, sodass das Auge ihre Abstufung als gleichmäßig empfindet. Dies entspricht weder gleichen Winkeln im Farbdreieck noch gleichen Wellenlängenunterschieden, sondern einer Zwischenlösung.

Der Farbeindruck hängt stark von der Konsistenz der Unterlage und von der Färbung der Umgebung ab. *Tizian* und *van Gogh*, *Dior* und *Lamborghini* sind auf diese Effekte angewiesen. Neue Farben, die nicht im Farbkreis sind, können auch sie nicht erfinden.

× Beispiel ...

Warum sind bei Nacht alle Katzen grau? Warum neigt man nachts besonders zum Gespenstersehen?

Im Dunkeln arbeiten nur die Stäbchen, die farbumpfindlich sind und hauptsächlich außerhalb der Fovea centralis sitzen. Man sieht daher ungewohnterweise Gegenstände, die von der Seite ins Blickfeld treten, besser als wenn man sie direkt fixiert, was manchmal erschreckend wirken kann.

Beim **Farbfernsehen** mischt man additiv drei Grundfarben, realisiert durch Phosphore, deren Emissionsspektrum etwa dem Empfindlichkeitsspektrum der Netzhautrezeptoren entspricht. Gemäß der Farbmatrik werden ein Hellsignal und ein Farbsignal übertragen, das wieder aus zwei Komponenten besteht. Da das Auge für Farbabstufungen nicht so empfindlich ist wie für Helligkeitsabstufungen, kann die Bandbreite des Farbsignals geringer sein. Das Hellsignal hat ein Spektrum äquidistanter Linien im Abstand der Zeilenfrequenz. In die Lücken zwischen diesen Linien kann man das Farbsignal einbauen. Die drei heute üblichen Systeme (NTSC in USA und Japan, SECAM-West in Frankreich und SECAM-Ost in Osteuropa, PAL im übrigen Westeuropa) unterscheiden sich durch die Art der Modulation. Bei der Aufnahme benutzt man drei Orthikon-Röhren mit entsprechenden Vorsatzfiltern. Das verbreitetste Wiedergabesystem (Dreistrahl-Lochmaskenröhre) hat drei Elektronenkanonen, deren Emission durch die drei Farbsignale gesteuert wird, und dicht vor der Bildschirmschicht eine Lochmaske mit ebenso vielen Löchern, wie es Bildpunkte gibt. Hinter jedem Loch sitzt in jedes Mal gleicher Anordnung

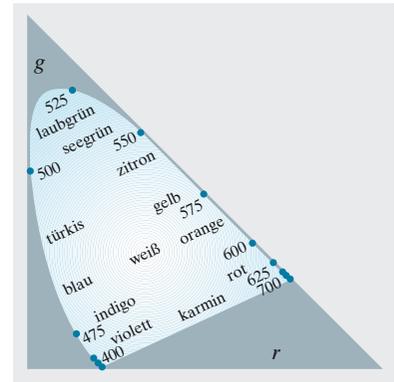


Abb. 11.22. Infolge der Überlappung der drei Rezeptorempfindlichkeiten ist nur der blau dargestellte Bereich, begrenzt von Spektralfarbenzug und Purpurgerade, zugänglich

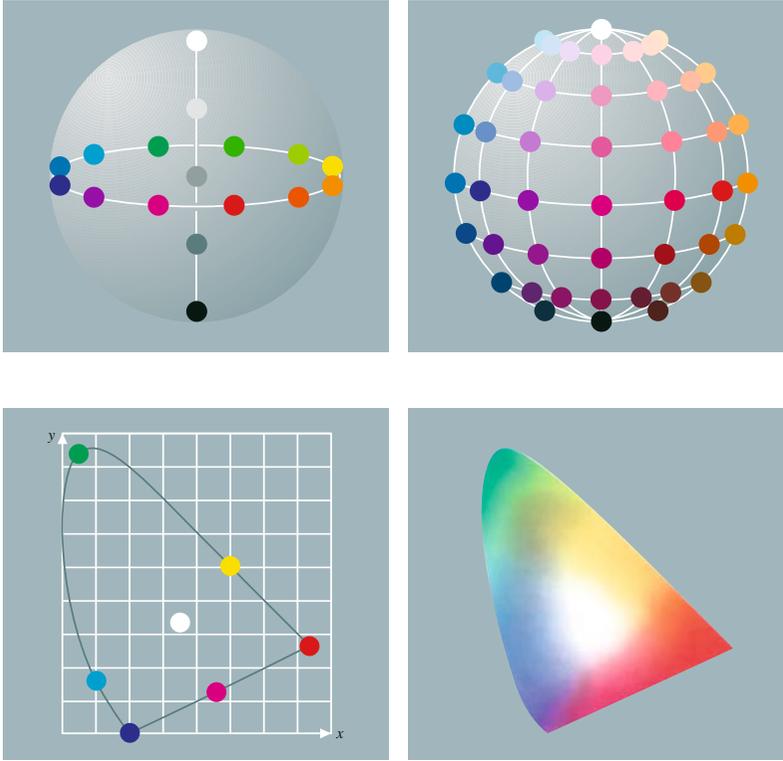


Abb. 11.23a–d. Farbräume.

(a), (b) Im Farbkreis von *Ostwald*, wie schon 100 Jahre vorher in der Farbkugel von *Philipp Otto Runge*, liegen die reinen Buntfarben auf dem Äquator (Komplementärfarben einander gegenüber), die Grautöne auf der Achse, Schwarz und Weiß an den Polen. Eine dreieckige halbe Schnittfläche (nicht gezeigt) enthält dann lauter gleiche Farbtöne mit den Ecken Weiß, Schwarz und Reinbunt.

(c), (d) Das Farbdreieck des CIE-Systems (Commission Internationale d'Éclairage; s. auch Abb. 11.21 und 11.22) ordnet alle durch additive Mischung von Spektralfarben erzeugbaren Farbtöne in einer Ebene mit Weiß im Zentrum. Jede Gerade durch das Zentrum verbindet zwei Komplementärfarben. Die reinen Spektralfarben liegen auf der Außenkurve; das Magenta auf der abschließenden Purpurgeraden kommt im Spektrum nicht vor.

* Die Abbildungen wurden mit freundlicher Genehmigung des Verlages Paul Haupt, Bern gestaltet nach: M. Zwimpfer: *Farbe – Licht, Sehen, Empfinden* (Haupt, Bern 1985); Abbildungsnummern: 9a (376), 9b (379), 9c (405) und 9d (405)

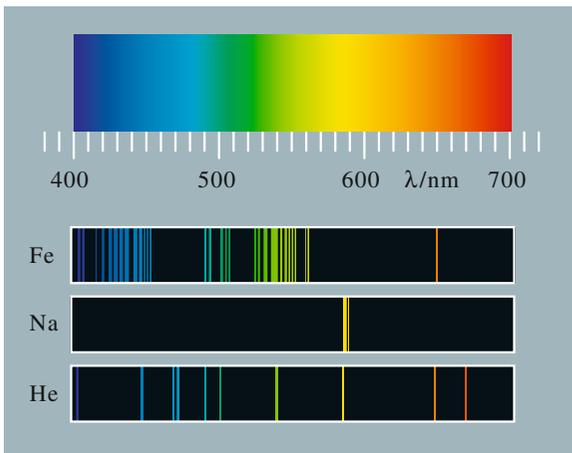


Abb. 11.24. Spektren einiger Elemente. Fe mit seinen vielen $3d$ -Elektronen hat sehr viele Linien, Na mit seinem einen Valenzelektron im Sichtbaren nur die enge Doppellinie bei 589 nm, die auf dem Übergang $3p-3s$ beruht und auch im Sonnenspektrum als D -Absorptionslinie sehr stark hervortritt

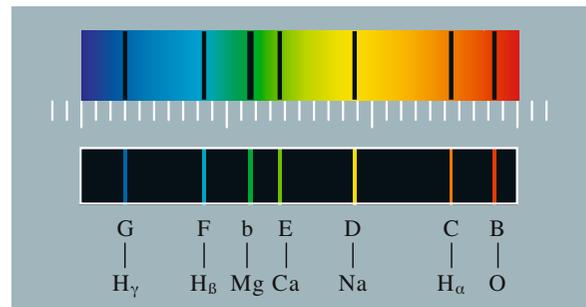


Abb. 11.25. Sonnenspektrum. Aus dem Kontinuum der heißen dichten Photosphärengase absorbieren die kühleren sehr verdünnten Schichten darüber selektiv die Fraunhofer-Linien, die unten als Emissionslinien dargestellt und den erzeugenden Elementen zugeordnet sind. Die B -Linie stammt allerdings vom atomaren O in der irdischen Hochatmosphäre und verschwindet daher bei Messungen vom Satelliten aus

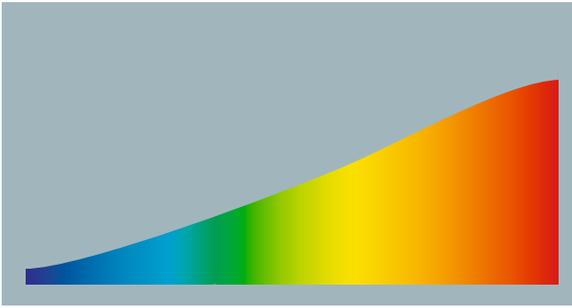


Abb. 11.26. Das Licht der Glühlampe bildet nur einen schmalen Ausläufer des Planck-Spektrums des Glühdrahtes und enthält leider nur knapp 5% von dessen Emissionsleistung

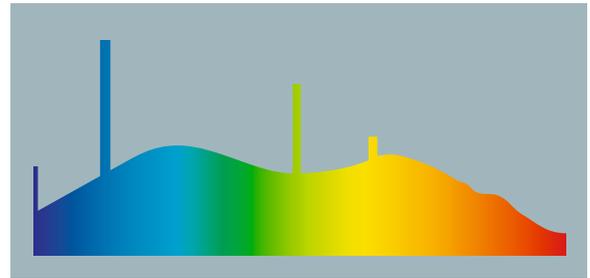


Abb. 11.27. Viel besser sind visueller Wirkungsgrad und Anpassung an das Spektrum des Tageslichts bei der Leuchtstoffröhre. Durch das kontinuierliche Lumineszenzspektrum des Leuchtstoffes auf der Rohrrinnenwand schimmern die diskreten Linien der Hg-Füllung durch

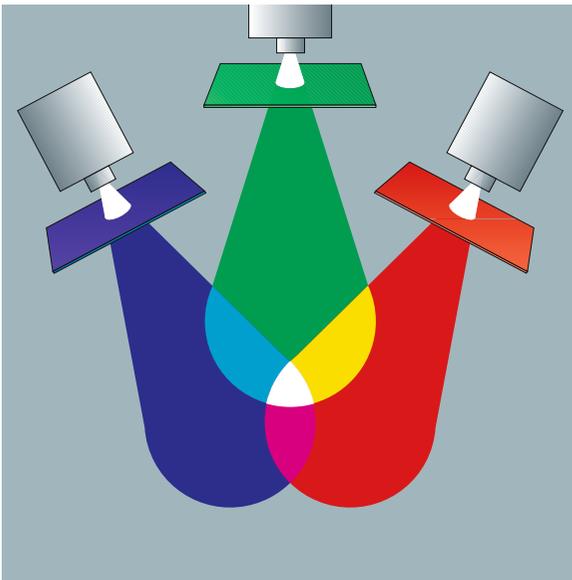
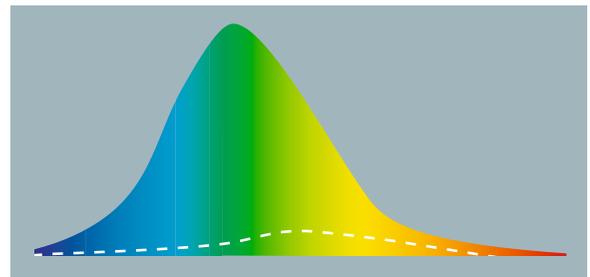


Abb. 11.28. Durch additive Mischung kann man aus den drei Grundfarben alle Farbtöne herstellen (mit verschiedenen Anteilen der Grundfarben, nicht nur mit gleichen wie hier dargestellt). Mischfarben werden hierbei immer heller als ihre Komponenten, bis hin zum reinen Weiß



Abb. 11.29. Subtraktive Mischung der drei Grundfarben (hier mittels durchscheinender Farbschichten) erzeugt auch alle Mischfarben, aber diese werden immer dunkler, bis zum fast reinen Schwarz

Abb. 11.30. Die Netzhaut enthält zwei Arten Lichtrezeptoren: Zäpfchen und Stäbchen. Die Zäpfchen haben für die einzelnen Spektralanteile sehr verschiedene Empfindlichkeiten (*gestrichelte Kurve*, Maximum bei 550 nm; s. auch Abb. 11.7). Sehr viel höher und etwas anders wellenlängenabhängig ist die Empfindlichkeit der Stäbchen (*obere Kurve*, Maximum bei 520 nm); eine Farbempfindung vermitteln sie aber nicht, sondern nur Grau-Eindrücke



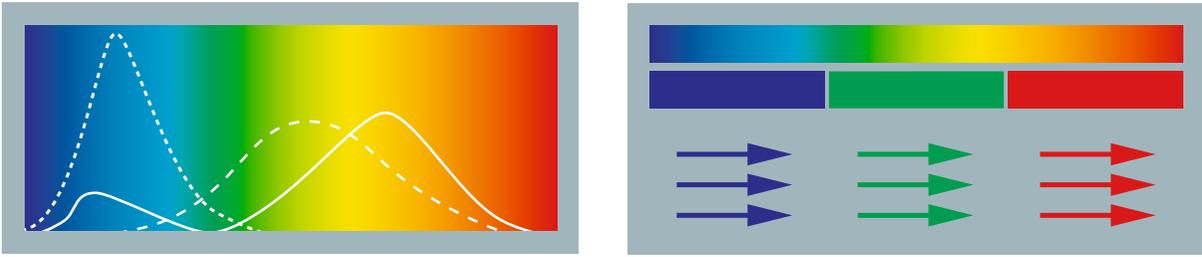


Abb. 11.31. Es gibt drei Zapfentypen für Blau, Grün und Rot (s. auch Abb. 11.20). Aus den Reaktionen von zwei oder drei davon synthetisiert das Gehirn additiv jede Mischfarbe. Bei den meisten Menschen sitzen die grünen Rezeptoren in einem engeren Netzhautbereich als die roten und blauen: Bäume muss man genauer fixieren, den Himmel sieht man immer. Ganz außen sitzen nur noch Stäbchen, immer dünner gesät: Was plötzlich von außen ins Gesichtsfeld tritt, erscheint oft erschreckend grau-schemenhaft

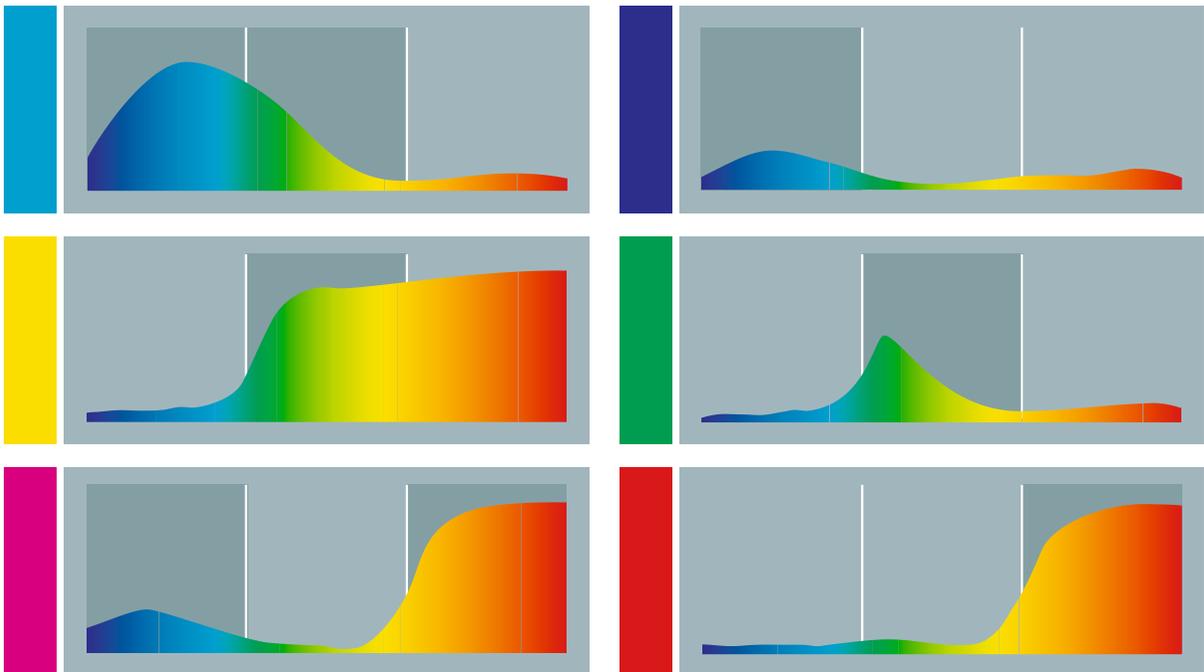


Abb. 11.32. In der Drucktechnik gelten Blau, Gelb und Magenta als Grundfarben (obwohl die letzte keine Spektralfarbe ist). Violett, Grün und Rot entstehen als binäre subtraktive Mischungen. Die Reemissionsspektren *rechts* zeigen, welche Spektralanteile die gefärbten Flächen aus weißem Licht reflektieren. Im Fall Grün ist angedeutet, wie sich das Gelb- und das Blau-Spektrum subtraktiv überlagern. Für alle anderen Mischfarben gilt Entsprechendes

* Die Abbildungen wurden mit freundlicher Genehmigung des Verlags Paul Haupt, Bern gestaltet nach: M. Zwimpfer: Farbe – Licht, Sehen, Empfinden (Haupt, Bern 1985); Abb.-Nr.: 10a (141), 10b (142), 10c (144), 10d (144), 10e (90), 10f (111), 10g (248), 10h (257), 10i (256), 10j (128) und 10k (127)

ein Farbtuplett aus einem rot-, einem grün- und einem blaulumineszierenden Phosphorkorn. Die drei Elektronenstrahlen schneiden sich in der Lochmitte, erregen das Farbtuplett in entsprechender Stärke und springen zum nächsten Loch weiter.

Farbstoffe müssen begrenzte und intensive Absorptionsbereiche im Sichtbaren haben. Die absorbierten Frequenzen entsprechen Übergängen des Systems zwischen seinen verschiedenen Zuständen. Eine schmale Absorptionslinie, z. B. die gelbe Linie in kaltem Na-Dampf, ergibt im durchgehenden Licht ein Blau, das aber durch das Weiß der übrigen paarweise komplementären Farben stark verwässert ist. Der Absorptions- oder Reemissionsbereich eines guten Farbstoffes muss also eine gewisse Breite haben. Unter den anorganischen Stoffen erfüllen die Ionen von Übergangsmetallen mit ihren zahlreichen eng benachbarten Anregungs- und Ionisierungszuständen diese Bedingungen besonders gut. In organischen Molekülen ist der Abstand zwischen Rotations- und Kernschwingungszuständen i. Allg. zu klein, der zwischen Elektronenzuständen zu groß, außer im Fall ausgedehnter Systeme konjugierter Doppelbindungen (**chromophorer Gruppen**). **Auxochrome Gruppen**, besonders solche mit freien Elektronenpaaren wie NH_2 , vertiefen vorhandene Absorption, Antiauxochrome (oft NO_2) zerstören Farbigkeit, **Bathochrome** und **Hypsochrome** verschieben sie zum Blauen bzw. Roten hin. Der organische Chemiker kann heute Farbstoffe gewünschter Eigenschaften „auf dem Reißbrett“ entwerfen.

In den drei verschieden sensibilisierten Emulsionsschichten des **Farbfilms** lagern sich drei verschiedene **Farbkuppler** (relativ einfache Verbindungen mit aktiven ungesättigten Gruppen) um die photochemisch gebildeten Silberkörner. Dazwischengelagerte Filterschichten schneiden besonders das Blau heraus, gegen das alle Schichten, unabhängig von ihrer Sensibilisierung, empfindlich wären. Bei der Entwicklung lagert sich der entsprechende Farbstoff an den Farbkuppler, und das Silber wird entfernt. Beim **Negativfilm** geschieht das direkt über eine Positivkopierung, der **Umkehrfilm** wird zunächst schwarz-weiß-entwickelt, das übrig gebliebene Silberhalogenid wird dann zum farbrichtigen Bild farben-entwickelt. Die Farben der drei Schichten mischen sich natürlich subtraktiv.

11.3.2 Infrarot und Ultraviolett

Wilhelm Herschel, hannoveranischer Regimentsoboist, Kurkapellmeister in Bath und erfolgreichster Liebhaberastronom aller Zeiten, hielt im Jahre 1800 ein Thermometer ins Sonnenspektrum und stellte fest, dass sich die Energie darin ganz anders verteilt als der vom Auge wahrgenommene Helligkeitseindruck. Daher war es keine Überraschung, dass die Energiestrahlung sich jenseits des roten Endes fortsetzt. Im Spektrum einer Lampe steigt die spektrale Intensität sogar weiter an, bis die Absorption des Prismenglases dem ein plötzliches Ende setzt. Von $2,5 \mu\text{m}$ ab dringt die Strahlung der Glühlampe nicht einmal mehr durch die dünne Glaswand. Hier muss man zu offenen Temperaturstrahlern übergehen oder Fenster aus Quarz, Flussspat oder Alkalihalogenidkristallen benutzen.

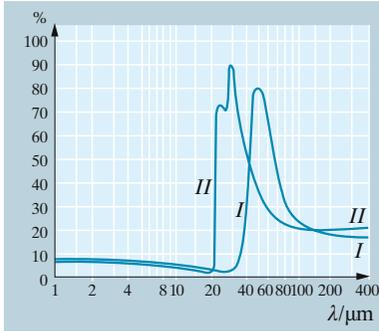


Abb. 11.33. Der Reflexionsgrad von Steinsalz (I) und Flußspat (II) als Funktion der Wellenlänge

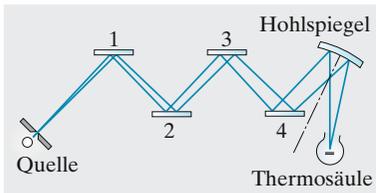


Abb. 11.34. Anordnung zur Erzeugung von Reststrahlen nach Rubens

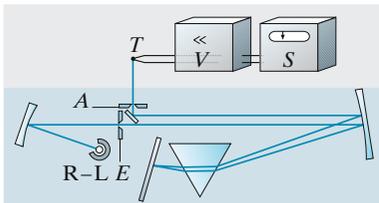


Abb. 11.35. Infrarot-Spektrograph für das „photographische Infrarot“ (bis etwa 1 000 nm). IR-L Infrarot-Lichtquelle, E Eintrittsspalt, A Austrittsspalt, T Thermoelement, V Verstärker, S Schreiber. (Nach W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

Die klassische Elektrodynamik führt die Absorption im Infraroten auf Schwingungen von Ionen zurück, die im Ultravioletten auf Schwingungen von Elektronen. Die Quantentheorie spricht von Übergängen dieser Teilchen zwischen stationären Zuständen, ohne die Größenordnungen der Frequenzen zu ändern. Im amorphen Glas haben die Ionen viel mehr Schwingungsmöglichkeiten als im reinen Kristall, und daher sind **Quarz-** und **Flußspatoptiken** auch für längere Wellen brauchbar (bis etwa 4 μm bzw. 9 μm). Mit den besonders einfach gebauten Alkalihalogeniden kommt man noch weiter: Mit NaCl bis 16 μm , mit KCl (Sylvin) bis 20 μm , mit KBr fast bis 30 μm . 20/16 ist ziemlich genau die Wurzel aus dem Verhältnis der reduzierten Massen $m_1 \cdot m_2 / (m_1 + m_2)$ von KCl und NaCl, wie die Theorie der harmonischen Schwingung voraussagt.

Vereinfacht betrachtet sollte ein System das Licht, das es stark absorbiert, auch stark reflektieren. Beide Vorgänge setzen ja heftiges Mitschwingen geladener Teilchen voraus. In Wirklichkeit liegt der Absorptionsbereich bei höheren Frequenzen als das Reflexionsmaximum, aber das Verhältnis beider Frequenzen ist etwa konstant, d. h. auch die Wellenlänge maximaler Reflexion ist proportional der Wurzel aus der reduzierten Masse der Kristallbausteine. Abbildungen 11.33 und 17.39 zeigen solche engen, fast „metallisch“ reflektierten Spektralbereiche einiger Kristalle. Man nutzt sie nach der **Reststrahlmethode** von Rubens zur Isolierung enger IR-Bereiche aus (Abb. 11.34): Nach vierfacher Reflexion ist vom Licht der Quelle (z. B. eines Auer-Strumpfes) fast nur noch der Anteil mit $\lambda = 51 \mu\text{m}$ und dem Reflexionsgrad $\varrho = 0,81$ vorhanden, nämlich zu $\varrho^4 = 0,43$ der Ausgangsintensität; von dem Anteil mit $\lambda = 43 \mu\text{m}$ ($\varrho = 0,4$) bleiben dagegen nur $\varrho^4 = 0,025$.

Ein anderes raffiniertes Mittel, enge Spektralbereiche im IR, UV oder auch im Sichtbaren auszusondern, ist das **Christiansen-Filter**. Die Brechzahl n hängt ja von der Wellenlänge ab, im IR und UV oft besonders stark, weil eine Resonanz in der Nähe liegt. Man verteilt ein Kristallpulver in einer Flüssigkeit (oder einem anderen Kristall), die im gewünschten Bereich das gleiche n hat, außerhalb aber nicht. Licht, für das die Brechzahlen nicht übereinstimmen, wird an jeder Korngrenze reflektiert und damit aus dem Bündel herausgestreut. Filter für schmale IR-Bänder kann man auch mittels der rechten bzw. der linken Absorptionskante zweier verschiedener Stoffe kombinieren. Universeller sind **Interferenzfilter** (Abschn. 10.1.13). Laser und Maser liefern extrem monochromatische Strahlung. Ins langwellige IR gelangt man auch durch Frequenzvervielfachung elektrisch erzeugter Wellen.

Breitbandiges IR-Licht für Spektrometer wie in Abb. 11.35 erzeugt man in **Temperaturstrahlern** wie Glühlampen in Quarzkolben oder Hochdruck-Gasentladungen, in denen die Emissionslinien durch Stoß- und Doppler-Verbreiterung (Abschn. 13.3.2) zum Kontinuum verschmelzen. Schwarze und graue Strahler liefern bei niederen Temperaturen überhaupt wenig Strahlung, bei hohen wenig im IR. Interessanter sind **Selektivstrahler** wie der **Nernst-Stift** und der **Auer-Strumpf** (Campinglampe). Er ist mit einem Gemisch aus Cerium- und Thoriumoxid getränkt. **Seltene Erden** (Ce) und die homologen **Aktiniden** (Th) haben ja tiefliegende teilbesetzte Elektronenschalen (4f bzw. 5f) und daher auch im festen Zustand ein

linienhaftes oder wenigstens schmalbandiges Spektrum (Abschn. 13.1.1). Eine Gasflamme leuchtet fast nicht, weil sie nicht sehr heiß und nicht schwarz ist (gerade im Sichtbaren keine Absorption, also auch keine Emission). Glühende, unverbrannte Kohleteilchen aus der Kerze beheben den zweiten Mangel, aber heißer wird die Flamme dadurch auch nicht: Die Lichtausbeute bleibt gering. Der Glühstrumpf hat bei Wellenlängen um $5\ \mu\text{m}$, wo er gemäß Flammentemperatur am meisten strahlen müsste, den Absorptions- und Emissionsgrad 0, muss also die ganze aus der Flamme aufgenommene Energie unterhalb $1\ \mu\text{m}$ und oberhalb $10\ \mu\text{m}$ abstrahlen, nimmt dadurch im Sichtbaren eine viel höhere Farbtemperatur an und hat eine Lichtausbeute fast wie die Glühlampe.

Ein **Strahlungsempfänger** verwandelt die Strahlungsleistung P , die auf ihn auftrifft, in eine andere Signalgröße S (z. B. Reizung des Sehnervs, Schwärzung des Films, Elektronenstrom oder äquivalente Spannung in **Photozelle**, **Multiplifier**, **Ikonoskop** usw.). Die Abhängigkeit $S(P)$, die Kennlinie des Empfängers, ist beim Auge logarithmisch (**Weber-Fechner-Gesetz**), beim Film S -förmig, bei elektronischen Empfängern ungefähr linear bis zu einem Sättigungswert, wo sie ebenfalls in eine Waagerechte einbiegt. Von einem guten Strahlungsempfänger verlangt man hohe **Quantenausbeute** in einem möglichst weiten Spektralbereich (Quantenausbeute = Anzahl der emittierten Elektronen oder sonstigen charakteristischen Ereignisse/Anzahl der auftreffenden Photonen). Außerdem verlangt man einen niedrigen Rauschpegel, gute Reproduzierbarkeit und möglichst Linearität der $S(P)$ -Kennlinie in einem möglichst weiten P -Bereich. **Rauschen** ist einmal bedingt durch die quantenhafte Natur der Strahlung: Wenn innerhalb einer bestimmten Messzeit im Mittel N Photonen auftreffen, sind nach *Poisson* Schwankungen um diesen Wert zu erwarten, deren Betrag $\Delta N \approx \sqrt{N}$ ist. Aber nicht überall, wo ein Photon hinfällt, sitzt im Film ein Bromsilberkorn oder wird ein Elektron aus der Oxidschicht der Photozelle ausgelöst. Auch das trägt zum Rauschen bei. In den Widerständen und Drähten elektronischer Geräte treiben thermische Schwankungen Elektronenströme hin und her (**Nyquist-Rauschen**, Abschn. 5.2.8). Das Quadratmittel des Rauschstroms ist $I^2 = \Delta\omega kT/R$, wo $\Delta\omega$ die Breite des von der Schaltung durchgelassenen Frequenzbereichs ist, lässt sich also durch Kühlung stark herabsetzen.

Meist muss das Empfängersignal elektronisch verstärkt werden. Solche Signale zerhackt man gern durch mechanische oder elektrische **Chopper**, die z. B. den Strahlengang periodisch öffnen und sperren. Gleichstromverstärker haben nämlich den Nachteil, dass ihr Nullpunkt driftet und dass damit das Signal „wegschwimmt“. Das Zerhacken setzt natürlich eine *Einstellzeit* des Empfängers voraus, die kürzer ist als die Chopper-Periode. Bei thermischen Empfängern hängt die Einstellzeit vor allem vom Volumen ab. Neben den Empfängern, die die *Strahlungsleistung* verfolgen, gibt es auch integrierende, in denen die *Energie* über längere Zeit akkumuliert und später entwickelt oder „ausgelesen“ wird (Photoemulsion, Kristallphosphore, charge-coupled devices usw., die gleich besprochen werden).

Thermische Empfänger messen direkt oder indirekt die absorbierte Strahlungsenergie. Beim **Thermoelement** oder vielen zur **Thermosäule** (Abb. 11.36) hintereinander geschalteten solchen Elementen wird die eine

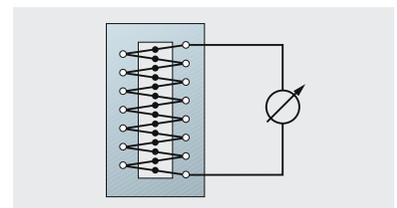


Abb. 11.36. Thermosäule

Sorte Lötstellen erwärmt und die Thermospannung gemessen. Beim **Bolometer** erzeugt die Erwärmung eine Widerstandsänderung. Besonders stark ist diese Änderung natürlich nahe dem Sprungpunkt eines Supraleiters. In einem pneumatischen Empfänger wie der **Golay-Zelle** erwärmt die Strahlung ein Gas, und die entsprechende Durchbiegung einer spiegelnden Membran lenkt ein Hilfs-Lichtbündel messbar ab.

Selektive Empfänger für einen bestimmten Spektralbereich sind meist empfindlicher. **Halbleiterdetektoren**, deren Leitfähigkeit bei Bestrahlung steigt, können direkt als Photowiderstände eingesetzt werden, aber auch im **Bildwandler** und der **IR-Fernsehkamera**, wo an den beleuchteten Stellen die Ladung schneller abgebaut wird. In Photozellen gelangen die ausgelösten Elektronen nicht nur ins Leitungsband, sondern ins Freie; im **Multiplifier** werden sie dann im Feld beschleunigt, prallen auf eine weitere Elektrode und lösen in mehreren Stufen je eine ganze Lawine von Sekundärelektronen aus.

Integrierende Empfänger sind neben der Photoemulsion z. B. Kristalle, in denen Elektronen bei Bestrahlung in höhere Zustände gehoben und dort gespeichert werden, bis sie durch Erhitzen oder UV-Einstrahlung „ausgeglüht“ bzw. „ausgeleuchtet“ werden. Immer wichtiger werden heute dank ihrer hervorragenden Quantenausbeuten und Rauschpegel die **charge-coupled devices (CCD)**. Sie bestehen aus einem Raster von vielen (z. B. 500×500) winzigen „picture elements“ oder „pixels“, meist in einen Si-Kristall geätzt. Ein **Pixel** ist ein Potentialtopf für Leitungselektronen und speichert diese, die durch auftreffende Strahlung ausgelöst worden sind, für längere Zeit. Danach wird das Bild Zeile für Zeile ausgelesen: Man verschiebt die ganze Potentialstruktur der Zeile wie die Eimerkette eines Baggers. Die am Zeilenende abgelieferten Elektronen bedeuten eine Folge von Stromimpulsen, die im Rechner z. B. zur Rekonstruktion des Bildes weiterverarbeitet werden. CCD's haben Quantenausbeuten über 0,7 (Auge oder Photoemulsion höchstens 0,2) in einem weiten Spektralbereich (0,4 bis über $1 \mu\text{m}$), sehr geringes Eigenrauschen (besonders gekühlt) und eine über den Faktor 5 000 lineare Kennlinie. Mit ihrer Hilfe kann man z. B. in der Astronomie fast 100mal schwächere Intensitäten erfassen als mit der Photoplatte.

Ultraviolett. Wenige Monate nach *Herschels* Entdeckung der infraroten Strahlung fand *J.W. Ritter* in München, dass das Sonnenspektrum auch jenseits des violetten Endes weitergeht und dort photochemisch besonders aktiv ist. Es spaltet Moleküle, z. B. die Peptidbindung zwischen Aminosäuren und die Bindung zwischen den Nukleotiden der Nukleinsäuren, tötet daher Bakterien und bei längerer Einwirkung alle lebenden Zellen. Es wandelt Moleküle um, erzeugt z. B. in unserer Haut Vitamin D aus dem Ergosterin, bleicht Farbstoffe aus usw. Alle modernen Feinwaschmittel enthalten „Weißmacher“, die UV-Licht durch Fluoreszenz in sichtbares Licht umwandeln, wodurch unsere Hemden gute Bildwandler für das nahe UV werden und besonders in der Sonne bläulichweiß strahlen.

Die Möglichkeit, Temperaturstrahler als **UV-Quellen** zu benutzen, ist dadurch begrenzt, dass die Planck-Kurve bei $h\nu \gg kT$ viel steiler, nämlich exponentiell abbricht als auf der anderen Seite (Gesetz von *Wien*). Schon

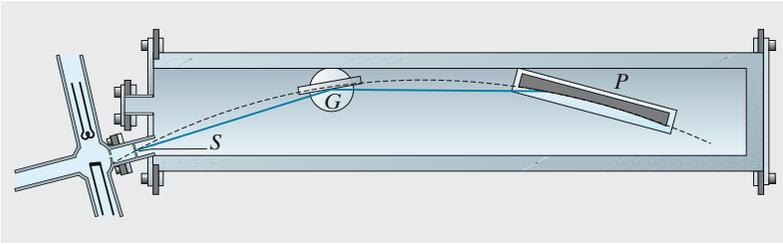


Abb. 11.37. Vakuum-Gitterspektrograph für das äußerste UV und langwelliges Röntgenlicht. S Spalt, G Konkavgitter (auf Spiegelmetall geritzt, effektive Gitterkonstante durch streifende Inzidenz verringert), P Photoplatte; keine Abbildungsoptik, weil es kein Material mit hinreichender Durchlässigkeit und Dispersion gibt. (Nach K. Siegbahn, aus W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

wenige Frequenzeinheiten kT/h jenseits des Maximums wird die Intensität sehr gering. Halogen- und Bogenlampen erreichen 3 000 bzw. 4 000 K, Spezialbögen etwas mehr, also Frequenzen von einigen 10^{14} Hz. Auch das Sonnenspektrum außerhalb der Erdatmosphäre bricht bei $1,5 \cdot 10^{15}$ Hz ab, nicht nur weil die Planck-Kurve für 6 000 K dort so niedrig ist, sondern weil die kühleren Atome der **Chromosphäre**, besonders H und He, aus dieser Kurve noch ein Stück herausnagen (die Lyman-Linien des H liegen von $2,5 \cdot 10^{15}$ Hz an aufwärts). Auf der Erdoberfläche kommt dank der Absorption des **Ozons** jenseits von $0,85 \cdot 10^{15}$ Hz (350 nm) fast nichts mehr an. Weiter kommt man mit **Gasentladungslampen**, z. B. mit **Hg-Hochdrucklampen**, in denen die Einzellinien infolge Druckverbreiterung zu einem Kontinuum verschmelzen, und mit Gasentladungen in H_2 und den Edelgasen. Je leichter diese sind, desto tiefer liegen die Elektronenschalen; mit He kommt man bis $6 \cdot 10^{15}$ Hz (51 nm, Abb. 16.1), so weit, dass es für diese Strahlung schon kein Kolben- oder Fenstermaterial mehr gibt, das sie durchlässt (Abb. 11.37).

Von dort bis zum weichen Röntgen-Licht ($\lambda \approx 0,1$ nm), entsprechend der Grenzfrequenz $\nu = W/h$ von 10 kV-Elektronen, wie sie auch in älteren Fernschröhren laufen, klaffte früher eine große Lücke, in der es keine Quellen kontinuierlicher Strahlung gab. Diese Lücke wird heute auf überraschende Weise durch die **Synchrotronstrahlung** geschlossen. In modernen Beschleunigern laufen ja geladene Teilchen mit Energien, die viel größer sind als ihre Ruhenergie, also mit annähernd c um. Die Bahnen haben, bedingt durch die begrenzte Stärke der ablenkenden Magnetfelder, Abmessungen von der Größenordnung 100 m. Die Umlaufkreisfrequenzen $\omega_0 = c/r$ liegen also im MHz-Bereich. Es ist klar, dass ein solches kreisendes Elektron strahlt. Seltsamerweise tut es das aber nicht im MHz-Bereich (UKW). Schon 1947, als man knapp 100 MeV erreicht hatte, begann der Ringkanal sichtbar zu leuchten, rötlich um 30 MeV, blauweiß sogar bei Tageslicht um 70 MeV. Diese Strahlungsverluste beschränken die Grenzenergie, die man mit einem Betatron erreichen kann, und zwingen zum Übergang auf das Synchrotron-Prinzip.

Die hohen Frequenzen und Intensitäten der Synchrotronstrahlung sind nur relativistisch zu erklären. Ein sehr schnelles Elektron mit der Energie E kann ja Photonen nicht praktisch isotrop abstrahlen wie bei $v \ll c$, sondern nur in Vorwärtsrichtung (Abb. 11.38, Abschn. 15.3.4, 12.8.2) innerhalb eines Kegels vom Öffnungswinkel $2\alpha \approx 2m_0c^2/E$. Der Lichtkegel eines Leuchtturms vom Öffnungswinkel 2α , der sich mit ω_0 dreht, würde in der Zeit $2\alpha/\omega_0$ über den Beobachter hinwegziehen. Hier geht der Lichtkegel aber von einem ebenfalls praktisch mit c bewegten Teilchen aus. Das Teilchen

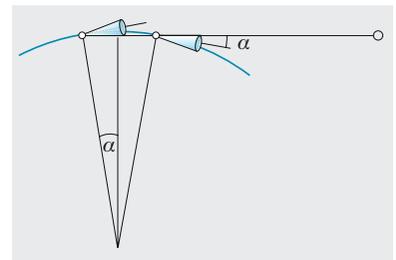


Abb. 11.38. Ein geladenes Teilchen mit ultrarelativistischer Geschwindigkeit strahlt bei der Beschleunigung z. B. auf einer Kreisbahn nicht nach allen Seiten, sondern nur in einen engen Vorwärtskegel mit dem Öffnungswinkel m_0c^2/W . Dieser überstreicht den Beobachter in einer Zeit, die gleich der Laufzeitdifferenz auf dem Bogen 2α bzw. auf seiner Sehne ist. So erklärt sich die hohe Frequenz der Synchrotronstrahlung Photomultiplier

Tabelle 11.2. Hilfsmittel der Spektroskopie (nach W. Finkelburg)

λ	Spektralgebiet	Spektralapparat	Strahlungsempfänger
< 10 nm	γ - und Röntgenstrahlung	Kristallgitter-Spektrograph	Ionisationskammer, Photoplatte, Zählrohr
10–180 nm	Vakuum-Ultraviolett	Vakuum-Konkavgitter ($\lambda > 105$ nm) Flussspat-Spektrograph	Schumann-Photoplatte
180–400 nm	Quarz-Ultraviolett	Quarzspektrograph oder Gitter	Photoplatte
400–700 nm	Sichtbares Gebiet	Glasspektrograph oder Gitter	Photoplatte
700–1 000 nm	Photographisches Infrarot	Glasspektrograph oder Gitter	IR-sensibilisierte Photoplatte
1–5 μm	Kurzwelliges Infrarot	Gitter	Photowiderstand
1–40 μm	Mittleres Infrarot	Kristall-Spektrograph oder Gitter	Thermosäule, Thermoelement, Bolometer, Golay-Zelle
40–400 μm	Langwelliges Infrarot	Echelette-Gitter	
> 400 μm	Mikro- und Radiowellen	Spezielle Hoch- und Höchsthfrequenztechnik	

legt, während der Lichtkegel den Beobachter überstreicht, den Kreisbogen über 2α von der Länge $2\alpha r$ zurück, wozu es $t_1 = 2r\alpha/c$ braucht. Das erste Licht, das den Beobachter erreicht, hat um die Kreissehne $2r \sin \alpha$ weiter zu laufen als das letzte, wozu es $t_2 = 2rc^{-1} \sin \alpha$ braucht. Die Laufzeitdifferenz $t_1 - t_2$ ist die Dauer des Lichtblitzes für den Beobachter:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = rc^{-1}(2\alpha - 2 \sin \alpha) \approx \frac{r\alpha^3}{3c}.$$

Im Lichtimpuls der Dauer Δt herrscht nach *Fourier* die Kreisfrequenz $\omega \approx 1/\Delta t \approx 3c/(r\alpha^3)$ vor. Für ein 5 GeV-Elektron liegt ω fast 10^{12} mal höher als die Umlauf-Kreisfrequenz. Die Lichtblitze wiederholen sich mit der Periode $2\pi r/c$, ihr Fourier-Spektrum hat also die Grundkreisfrequenz $\omega_0 = c/r$, aber die Oberwellen werden bis $\omega = c/(r\alpha^3)$ immer intensiver und bilden praktisch ein dichtes, kontinuierliches Spektrum. In die Hertz-Formel für die Gesamtleistung geht statt $\omega_0 = c/r$ die „Leuchtturm-Frequenz“ $\omega' = c/(r\alpha)$ ein. Man erhält

$$P = \frac{1}{6} \frac{e^2 r^2 \omega'^4}{\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{1}{6} \frac{e^2 c}{\pi \epsilon_0 r^2 \alpha^4}.$$

Bei gegebener Elektronenenergie steigen Frequenz und Leistung der Synchrotronstrahlung also schnell mit abnehmendem Bahnradius. Nun ist bei Ringbeschleunigern r proportional der Energie, da die erreichbaren Magnetfelder auf einige Tesla begrenzt sind. Die Kreisbahnbedingung liefert $p/r = eB$, und wegen $E = pc$ folgt $r = E/(eBc)$. Das großräumige B -Feld um 1 T erfordert bei 100 GeV also $r \approx 300$ m. Lokale Ablenkfelder kann man dank der Supraleitungstechnik mehr als zehnmals größer machen und der Kreisbahn kurze „Schlenker“ (**wigglers**) mit kleinerem r

überlagern. Noch viel stärker sind aber natürlich die Ablenkkfelder atomarer Systeme. Sie dürfen allerdings nicht abrupt bremsen, sondern nur ablenken. Das ist erfüllt, wenn man Elektronen hinreichend parallel zu den Bausteinreihen in einen Einkristall einschießt. Einige von ihnen fliegen dann durch die Kanäle zwischen diesen Bausteinreihen und kommen erstaunlich weit, weil sie nur immer periodisch und relativ schwach seitlich abgelenkt werden. Anstelle der magnetischen Ablenkkraft $eBc \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ N}$ tritt dann die elektrische $Ze^2/(4\pi\epsilon_0 d^2)$, die etwa 1 000mal oder mehr größer ist. Von der Synchrotronstrahlung von **Channeling-Elektronen** verspricht man sich daher Photonenenergien bis weit in den γ -Bereich, vielleicht mit vielen MeV bei sonst unerreichter Intensität.

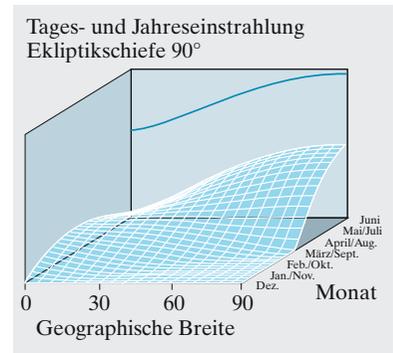
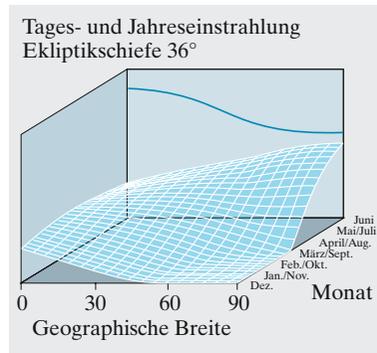
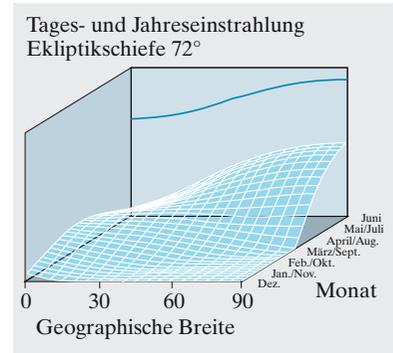
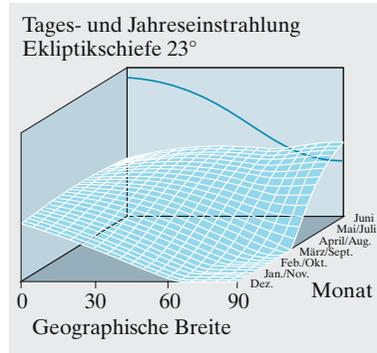
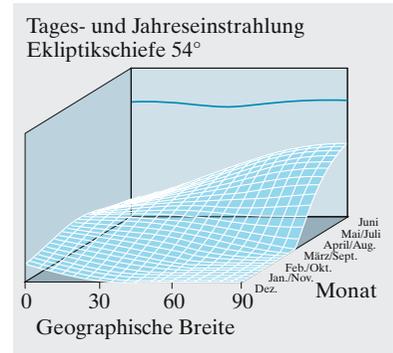
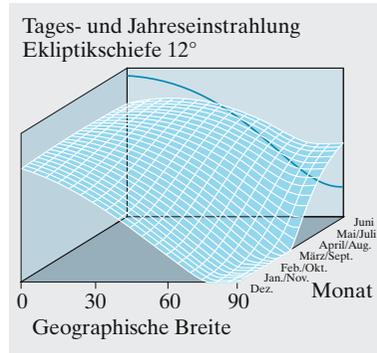
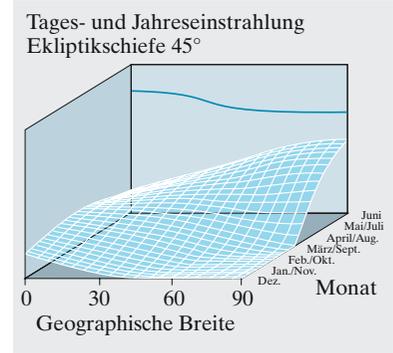
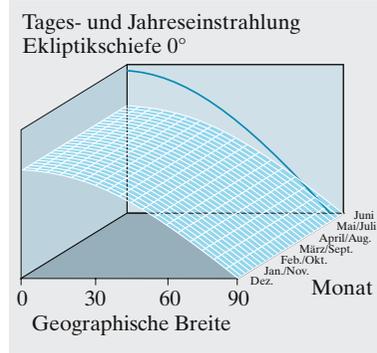
Für ein 5 GeV-Elektron liegt ω etwa 10^{12} mal höher als die Umlauffrequenz, also um 10^{18} Hz, schon im weichen Röntgengebiet. Protonen mit ihrer 2 000mal größeren Masse beginnen dagegen noch nicht einmal in den riesigsten heutigen Anlagen zu leuchten.

In der Radio-, Röntgen- und Gamma-Astronomie gewinnt die Synchrotronstrahlung immer mehr an Bedeutung. **Galaktische Magnetfelder** sind etwa 10^{10} mal kleiner als die im Beschleuniger, für die Umlauffrequenzen gilt dasselbe. Dafür sind die Energien kosmischer Teilchen vielfach höher. In den riesigen Magnetfeldstärken eines **Pulsars** (bis 10^6 T) dagegen können Frequenz und Intensität der Synchrotronstrahlung fast beliebig hoch werden. Für Teilchen, die auf Spiralbahnen in ein **Schwarzes Loch** stürzen, gilt dasselbe.

11.3.3 Die Strahlung der Sonne

Da wir Büchern grundsätzlich nicht trauen, messen wir zuerst die **Solar-konstante**, d. h. die Intensität der **Sonnenstrahlung** in Erdnähe. Allerdings bezieht sich dieser Wert auf die Strahlung außerhalb der Atmosphäre, wir müssen die Verluste in dieser in Kauf nehmen. Eine schwarze Kochplatte von 19 cm Durchmesser wird in strahlender Junimittagssonne bei uns etwa 60°C warm (Messung mit Thermoelement oder Widerstandsthermometer in kleinem seitlichen Loch). Ebenso warm wird sie im Schatten, wenn man ihr elektrisch 27 W zuführt. Damit ergibt sich die Sonnenintensität zu $I = 27 \text{ W}/(\pi \cdot 0,095^2 \text{ m}^2) = 970 \text{ W m}^{-2}$. Vergleich mit der extraterrestrischen Solarkonstante $I_0 = 1\,400 \text{ W m}^{-2}$ zeigt: Selbst die klarste Atmosphäre lässt bei einer für unsere Breite maximalen Sonnenhöhe $\varphi_0 \approx 63^\circ$ nur knapp $0,70 I_0$ durch. Da die effektive Atmosphärendicke $\sim 1/\sin \varphi$ ist, erhalten wir bei der Sonnenhöhe φ noch $I = I_0 \cdot 0,7^{\sin \varphi_0 / \sin \varphi}$. Am Tropenmittag folgt $I = 0,73 I_0$, am Dezembermittag bei uns $I = 0,32 I_0$. Abbildung 11.39 zeigt die Gesamteinstrahlung in Abhängigkeit von geographischer Breite und Jahreszeit für Planeten mit verschiedener Ekliptikschiefe, d. h. verschiedenem Neigungswinkel ε zwischen Rotations- und Bahnebene. Die atmosphärische Absorption ist hier nicht berücksichtigt (Aufgabe 11.3.5). Überrascht es Sie, dass in 24 Stunden im Juni am Nordpol der Erde mehr Energie einfällt als am Äquator, dass auf Uranus ($\varepsilon \approx 90^\circ$) die Pole im ganzen Jahr mehr Energie erhalten als der Äquator, dass bei $\varepsilon = 54^\circ$ in allen Breiten gleich viel Energie einfällt, allerdings verschieden übers Jahr verteilt?

Abb. 11.39. So hängt die Gesamteinstrahlung während 24 Stunden von der geographischen Breite und der Jahreszeit ab. Die Kurve an der Rückwand zeigt die übers Jahr integrierte Einstrahlung als Funktion der Breite. Für Planeten mit verschiedener Achsneigung ε zur Bahnebene sind die Verläufe sehr verschieden. Man erkennt die Polarnacht, die auf Uranus ($\varepsilon \approx 90^\circ$) in allen Breiten eintritt. Trotzdem fällt dort am Pol im Jahr mehr Energie ein als am Äquator. Für die 24 Stunden am Sommeranfang ist das auch auf der Erde der Fall. Bei $\varepsilon \approx 54^\circ$



Mit unserer Kochplatte sollten wir auch gleich das Stefan-Boltzmann-Gesetz prüfen. Führt man ihr die Leistungen 50, 200, 500, 2 000 W zu, dann nimmt sie die Temperatur 97, 217, 350, 595 °C an. Doppeltlogarithmische Auftragung liefert eine schöne Gerade mit der Steigung 4, und aus der Gesamtoberfläche der Platte folgt die Stefan-Boltzmann-Konstante zu $5,9 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. Nachdem wir das bestätigt haben, können wir ausrechnen, wie heiß eine sonnenbestrahlte Fläche wird. Nehmen wir an, sie absorbiert den Bruchteil α der Sonnenstrahlung, emittiert aber nur den Bruchteil β dessen, was eine schwarze Fläche der gleichen Temperatur emittieren würde (α und β können sehr verschieden sein: α bezieht sich auf den sichtbaren, β auf den infraroten Bereich; Glas, Klarsichtfolien, CO₂ absorbieren im Infraroten, haben also $\beta \ll \alpha$). Die Rückstrahlung der Umgebung liegt auch im Infraroten, von ihr nimmt unsere Fläche auch nur den Bruchteil β auf. Der Faktor γ gibt an, ob der Körper nur mit der bestrahlten Seite zurückstrahlt ($\gamma = 1$) oder z. B. als Kugel allseitig ($\gamma = 1/4$). Aus der Energiebilanz $\beta\sigma T^4 = \beta\sigma T_0^4 + \gamma\alpha I$ folgt dann

$$T = \sqrt[4]{T_0^4 + \frac{\gamma\alpha \cdot I}{\beta\sigma}}. \quad (11.19)$$

Wir können jetzt die Temperaturen von rotierenden und nichtrotierenden Planeten mit und ohne Atmosphäre, von allen möglichen besonnten Körpern, von Solarkollektoren wie dem Treibhaus berechnen. Interessant ist der Fall der Erdatmosphäre, soweit sie durch Strahlung geheizt wird und nicht wie die Troposphäre durch Bodenheizung. Wie wir gemessen haben, absorbiert sie etwa 30% der Sonnenstrahlung (keine Absorptionslinien im Sichtbaren), emittiert aber fast „schwarz“ (im IR liegen sehr dichte Linien, also $\beta \approx 1$). So folgt die **Stratosphärentemperatur** von etwa 200 K. Bei dem **trockenadiabatischen T-Gradienten** 1 K/100 m (**feuchtadiabatischer Gradient** etwas geringer) reicht die Bodenheizung bei uns bis in 10 km, am Äquator bis 12 km, am Pol nur bis etwa 4 km Höhe. Dort beginnt die Stratosphäre, die übrigens am Pol etwas wärmer ist (warum wohl?). Die **adiabatisch-indifferente Schichtung** werden wir gleich wieder brauchen, die Gesamtabsorption von 30% auch.

Warum liegt die Solarkonstante gerade um 1 kW m^{-2} ? Die Erde hätte vermutlich kein Leben, wenigstens kein intelligentes, wenn ihre mittlere Temperatur nicht im Bereich des flüssigen Wassers läge, und das setzt nach Stefan-Boltzmann eine Einstrahlung um 1 kW m^{-2} voraus. Wie heiß muss die Sonne sein, damit sie uns so viel Energie zusendet? Dazu genügt es, den scheinbaren Sonnenradius zu messen (mit dem Daumen z. B.). Dieser Radius ist $0,25^\circ = 1/230$, der Erdbahnradius ist 230mal größer als der Sonnenradius, am Sonnenrand herrscht eine 230^2 mal höhere Intensität als bei uns. Nach Stefan-Boltzmann ist die **Photosphäre** also etwa 6 000 K heiß. Sterne mit größerer Leuchtkraft, also heißerer Photosphäre oder größerem Radius, haben, wenn überhaupt, belebte Planeten in größerem Abstand als die Sonne.

Die Sonne strahlt $4 \cdot 10^{26} \text{ W}$ in den Raum, $2 \cdot 10^{17} \text{ W}$ davon allein auf die Erde. Wie hat sie das 10^{10} Jahre lang fast unverändert tun können? Ihre 6 000 K sind zunächst kein naturgegebener Wert; es gibt ja Sterne mit sehr

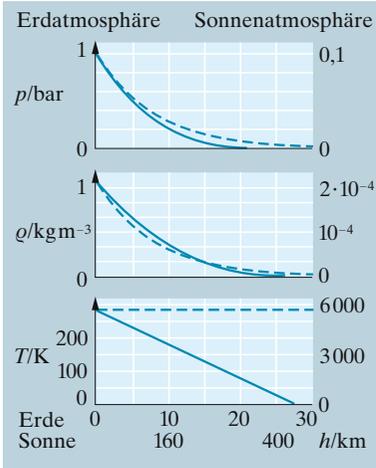


Abb. 11.40. Druck, Dichte und Temperatur in der Erd- und der Sonnenatmosphäre bei adiabatisch indifferenter (—) und isothermer Schichtung (---). Im Fall der Sonne zählt r vom unteren Rand der Photosphäre aus

verschiedenen Oberflächentemperaturen bis weit über 20 000 K. Naturgegeben ist dagegen die Temperatur im Sterninnern. Sie liegt (wenigstens für die **Hauptreihensterne** im **Hertzsprung-Russell-Diagramm**) sehr nahe bei der Grenze von etwa 10^7 K, wo die Fusion von H zu He einsetzt. Warum die Grenze gerade dort liegt, können Sie in Aufgabe 13.5.2 untersuchen. Dass es im Sonneninnern so heiß ist, sieht man allein schon aus ihrer Masse und ihrem Radius: Der thermische Druck muss den Schweredruck aushalten können (Aufgabe 5.2.7).

Jetzt müssen wir noch die 6 000 K am Sonnenrand auf die 10^7 K im Innern zurückführen. Abgesehen von Feinheiten, auf die wir gleich zurückkommen, können wir wie in der Erdatmosphäre eine adiabatisch-indifferente Schichtung annehmen. Sie bringt eine lineare T -Abnahme mit der Höhe: $T = T_0(1 - h/H)$ mit $H = kT_0/[(\gamma - 1)mg]$ (Abb. 11.40). Auf der Erde gilt $\gamma = 7/5$ und $kT_0/(mg) = 8$ km, also $H = 28$ km. In der Sonne ist m um den Faktor 29 kleiner, $\gamma = 5/3$ (einatomiges H), und g ist zu ersetzen durch GM/R^2 , wenigstens für die äußeren Schichten, was 30mal größer ist als g auf der Erde. Der T -Gradient in der Sonne ist also nur wenig größer als auf der Erde, aber H ist viel höher, weil wir von $T_0 = 10^7$ K statt 300 K ausgehen. Es folgt $H \approx 10^6$ km, der Sonnenradius. Bei $h = H$ wäre ja nach unserem Gesetz die Atmosphäre zu Ende. Die Photosphäre, die wir sehen, die uns die Strahlung zusendet und deren Intensität bestimmt, liegt etwas tiefer. Das muss sie auch, denn bei $r = H$ würde ja $T = 0$ herauskommen. Um wie viel tiefer sie liegt, werden wir gleich untersuchen. Vorher überprüfen wir noch unsere Annahme über die Dichte im Sonneninnern, die ja in Aufgabe 5.2.6 benutzt wurde. Dazu integrieren wir $\rho = \rho_0(1 - r/H)^{1/(\gamma-1)}$ über die Kugel (Aufgabe 5.2.11):

$$\begin{aligned} M &= 4\pi\rho_0 \int_0^H r^2 \left(1 - \frac{r}{H}\right)^{3/2} dr \\ &= 4\pi\rho_0 H^3 \int_0^1 z^{3/2} (1 - z)^2 dz. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Der Wert des Integrals ergibt sich zu $16/315$ (s. Aufgabe 20.2.8), also $\rho_0 = \bar{\rho} \cdot 315/48 \approx 10^4$ kg/m³.

Unsere angenäherte Theorie ergibt bei $r = H$ einen scharfen Rand der Sonne. Dort ist das Gas aber so dünn, dass man es von ferne nicht sieht, und so kalt, dass es nicht strahlt. Die sichtbare Sonnenphotosphäre liegt in einer solchen Tiefe unterhalb dieses Randes, dass ihr Licht in den darüberliegenden dünneren Schichten gerade nicht absorbiert wird. Höchstens in einigen engen Spektralbereichen, z. B. den Balmer-Linien des Wasserstoffs, ist die Absorption dieser „**umkehrenden**“ **Schichten** stark genug, um die dunklen **Fraunhofer-Linien** zu erzeugen. Abgesehen davon dringt das Kontinuum der Photosphärenstrahlung gerade durch. Eben hierdurch ist die Lage und damit auch die Temperatur der Photosphäre bestimmt.

Wir müssen also wissen, wie stark ein Gas außerhalb seiner Absorptionslinien absorbiert. Dabei ist wieder der Vergleich mit der Erdatmosphäre interessant. Wir gehen zu unserer Solarkonstantenmessung zurück, wo wir fanden, dass auch die klarste Atmosphäre mindestens etwa 20–30% der Sonnenstrahlung absorbiert, ohne dass sie im Sichtbaren irgendeine

Absorptionslinien hat (allerdings spielt hier auch die Streuung eine Rolle, aber das Streulicht kommt uns ja größtenteils als indirektes Himmelslicht wieder zugute). Diese geringe Absorption ist überraschend, wenn man bedenkt, dass über 1 cm^2 Erdoberfläche 1 kg Luft, d. h. $2 \cdot 10^{25}$ Luftmoleküle schweben, d. h. über einem Molekülquerschnitt von 10^{-15} cm^2 liegen mehr als 10^{10} Moleküle, die einander also 10^{10} mal überdecken. Außerhalb seiner eigentlichen Absorptionsbereiche fängt also ein atomares Teilchen Photonen nur mit weniger als 10^{-10} seines Querschnittes ein, d. h. nicht mit dem Atomquerschnitt, sondern nur mit einem Kernquerschnitt. Liegt dem ein allgemeines Gesetz zugrunde, und verhält sich der Wasserstoff in der Sonne ebenso?

Im klassischen Bild der erzwungenen Schwingungen absorbiert ein Elektron oder ein Ion solche Frequenzen, bei denen die quasielastische Rückstellkraft und die Trägheitskraft einander aufheben (sie haben ja entgegengesetzte Phasen). Dann bleibt nur die Reibungskraft, um die anregende Kraft F auszugleichen. Diese Kraft und die Geschwindigkeit v sind damit phasengleich, und das schwingende Teilchen nimmt die Leistung $P = Fv$ auf. Fern von allen Resonanzfrequenzen schwingt das Teilchen zwar auch etwas mit, aber die anregende Kraft ist entweder in Phase oder in Gegenphase mit der Auslenkung, d. h. um $\pi/2$ gegen v verschoben. Eine Leistungsaufnahme käme überhaupt nicht zustande (reine Blindleistung), wenn das schwingende Teilchen nicht auch strahlte. Ein Teilchen der Ladung e , das mit der Amplitude x_0 und der Kreisfrequenz ω schwingt, strahlt nach $H. \text{ Hertz}$ eine Leistung

$$P = \frac{1}{6} \frac{e^2 x_0^2 \omega^4}{\pi \epsilon_0 c^3} \quad (11.21)$$

ab (vgl. (7.71)).

Ein Elektron schwinde also fern jeder Resonanz im Feld E der Lichtquelle. Man kann es dann als quasifrei betrachten, und seine Bewegungsgleichung lautet $m\ddot{x} = eE$, woraus sich die Amplitude $x_0 = eE/(m\omega^2)$ ergibt. Ein solches Elektron strahlt die Leistung $P = e^4 E^2 / (6\pi m^2 c^3 \epsilon_0)$ ab, die es natürlich nur aus der Lichtwelle entnehmen kann. Dessen Energiedichte ist $\epsilon_0 E^2$, die Energiestromdichte (Intensität) ist $I = \epsilon_0 E^2 c$. Das Elektron absorbiert also alle Energie, die auf einen Querschnitt

$$\sigma_0 = \frac{P}{I} = \frac{1}{6\pi} \frac{e^4}{\epsilon_0 m^2 c^4}$$

fällt. Dies ist der **Thomson-Absorptionsquerschnitt**. Er entspricht einem Radius von $r_0 = e^2 / (4\pi \epsilon_0 m c^2)$, dem **klassischen Elektronenradius**. Eine Ladung e , auf die Oberfläche einer Kugel mit diesem Radius verteilt, hat eine Coulomb-Abstoßungsenergie W , die nach $W = mc^2$ gerade die Ruhmasse des Elektrons ergibt. r_0 ist etwa so groß wie der Nukleonenradius (10^{-15} m), also hat σ_0 den für die Atmosphärenabsorption geschätzten Wert.

Die Photosphäre liegt in einer solchen Tiefe unter dem eigentlichen Sonnenrand $r = H$, dass etwa ebenso viele Elektronen darüber schweben

wie in unserer Atmosphäre. Für atomaren Wasserstoff ergibt das 7mal mehr Atome oder 4mal geringere Flächendichte als in der Erdatmosphäre, d. h. $0,3 \text{ kg/cm}^2$. Integration über die Dichte $\varrho = \varrho_0(1 - r/H)^{3/2}$ zeigt, dass eine Säule von dieser Flächendichte am Sonnenrand etwa eine Dicke $d \approx 200 \text{ km}$ hat. Die Temperatur steigt vom Sonnenrand aus linear an, also ist die Photosphärentemperatur $T_\varphi = T_0 d/H \approx$ einige Tausend Kelvin.

Wenn man das Bild der Sonnenscheibe mit einem Fernrohr projiziert, erscheinen die äußeren Teile der Scheibe deutlich dunkler (**Randverdunkelung**). Wir verstehen dies sofort: Die sichtbare Photosphäre liegt in einer Tiefe, aus der das Licht gerade ohne Absorption zu uns gelangt. Am Rand der Sonnenscheibe muss dieses Licht schräg durch die darüberliegenden Schichten treten, kommt also aus geringerer Tiefe, wo das Gas weniger heiß und weniger leuchtkräftig ist. Die genaue Rechnung reproduziert sehr gut die beobachtete Helligkeitsverteilung.

Wie hängt die Photosphärentemperatur (T_φ) von den übrigen Eigenschaften des Sterns ab? Wie wir wissen, ist $T_\varphi \approx T_0 d/H$, und die Absorptionsbedingung liefert $d\varrho_\varphi\sigma_0/m \approx 1$ (d ist so groß, dass die Absorptionsquerschnitte σ_0 , die Thomson-Querschnitte, gerade anfangen, sich zu überdecken). Bedenkt man noch, dass

$$\varrho_\varphi \approx \varrho_0 \left(\frac{d}{H} \right)^{3/2} \quad \text{und} \quad p_0 = \frac{\varrho_0 k T_0}{m} \approx \frac{G M^2}{H^4}, \quad (11.22)$$

erhält man

$$T_\varphi \approx T_0 \left(\frac{m^2 G}{k T_0 \sigma_0} \right)^{2/5} H^{2/5}. \quad (11.23)$$

Die absolute **Leuchtkraft** L eines Sterns ist proportional zu T_φ^4 und zur Oberfläche, also

$$L = \pi H^2 \sigma T_\varphi^4 \approx \pi \sigma T_0^4 \left(\frac{m^2 G}{k T_0 \sigma_0} \right)^{8/5} H^{18/5}. \quad (11.24)$$

Aus $M \approx k T_0 H / (G m)$ folgt außerdem $H \sim M$, also gilt auch $L \sim M^{3,6}$ (**Masse-Leuchtkraft-Gesetz**, Eddington, 1924).

Es beschreibt sehr gut die Sterne in der Hauptreihe des Hertzsprung-Russel-Diagramms. Die **Riesensterne** außerhalb der Hauptreihe passen nicht ins Schema; sie haben ihren Wasserstoffvorrat weitgehend erschöpft, müssen von der Fusion schwererer Kerne leben und brauchen daher eine höhere Zentraltemperatur T_0 .

Die Photosphärentemperatur eines sehr heißen Sterns liegt ungefähr in der geometrischen Mitte zwischen den Temperaturen im Sterninnern und auf der Erdoberfläche. Die **Bohr-Energie** liegt ebenfalls etwa in der Mitte zwischen den mittleren Energien eines Teilchens im Sterninnern und auf der Erdoberfläche. Sind das Zufälle?

Wie wir wissen, ist die Teilchenenergie im Sterninnern als Grenzenergie der Fusion um etwa den Faktor $m / (m_e 4\alpha^2)$ größer als die Bohr-Energie. Auf der Erde herrscht eine Temperatur T_E im flüssigen Bereich des Wassers, sonst wäre die Erde nicht belebt. **Wasserstoffbrücken**, die die Wasserstruktur zusammenhalten, werden also durch Stöße mit der Energie

kT_E noch nicht gesprengt, wohl aber die wenigen (ca. 10%) zusätzlichen **H-Brücken**, die die Eisstruktur bedingen. Die H-Brückenenergie ist zum großen Teil Delokalisierungsenergie eines Protons, das sich vorher in einem Potentialtopf vom Radius r_B (Bohr-Radius) befand und jetzt deren zwei zur Verfügung hat. Die quantenmechanische Nullpunktsenergie

$$W_E = \frac{h^2}{8mr^2} = \frac{e^4 m_e^2}{8m\varepsilon_0^2 h^2}$$

ist größtenteils weggefallen. Das ergibt die bekannte Größenordnung von 0,2 eV (5 cal/mol) für die H-Brückenenergie. Offensichtlich ist W_E wieder um den Faktor $m/(4\alpha^2 m_e)$ kleiner als die Bohr-Energie. kT_E ist wieder etwa $\frac{1}{10}$ von W_E . Die Photosphärentemperatur eines heißen Sterns entspricht annähernd der Bohr-Energie. Dort sind die H-Atome größtenteils ionisiert, wie man am Spektrum der O- und B-Sterne erkennt. In der Sonne liegt die Zone ionisierten Wasserstoffs weiter innen. Das Wechselspiel von Ionisation und Rekombination in der Sonnenphotosphäre erzeugt die **Granulation** der Sonnenoberfläche und ist die Energiequelle der **Corona**.

11.3.4 Warum sind die Blätter grün?

Vom Energieangebot der Sonne zehren die Pflanzen und deren energetische Schmarotzer, die Tiere und die Menschen. Außer den paar Prozent, die aus Kern- und Gezeitenenergie stammen, verdanken wir ja unser ganzes Energieaufkommen direkt oder indirekt der Sonnenstrahlung (sogar die schweren, spaltbaren Kerne sind in den Sternen, wenn auch nicht in unserer Sonne, aufgebaut worden). Man kann sich fragen, ob die Pflanzen die Sonnenenergie optimal nutzen. 1 ha Zuckerrüben erbringt 60 t Jahresernte an Rüben mit 15% Zuckergehalt, d. h. $0,9 \text{ kg/m}^2$ Zucker. Einschließlich der Kohlenhydrate in Blättern, ausgelagerten Schnitzeln usw. ist das etwa 1 kg/m^2 Jahr. Die Pflanze hat 17 kJ im g Kohlenhydrat investiert, also $1,7 \cdot 10^7 \text{ J/m}^2$ Jahr. Bei effektiver dreistündiger täglicher Sonneneinstrahlung während der fünf Vegetationsmonate ergibt das eine Ausbeute von nur 1%. Viele Pflanzen nützen die Sonnenenergie noch schlechter aus, nur wenige besser. An der Spitze soll die Sumpfhyanthe Eichhornia mit 3–4% liegen.

Chlorophyll absorbiert in einem etwa 40 nm breiten Spektralbereich um 660 nm, also im Roten (deshalb sieht es grün aus). Außerdem hat es noch einen Absorptionspeak im nahen UV, nutzt die hier absorbierte Energie aber noch unvollständiger zur **Photosynthese**. Eine Absorption im Roten scheint energetisch ungünstig, denn man liest immer, die Sonne emittiere maximal im Gelb-Grünen. Wo das Maximum der Sonnenemission liegt, ist aber eine Frage der Auftragung: Über der Wellenlänge aufgetragen, hat die spektrale Intensität tatsächlich ihr Maximum bei 500 nm, über der Frequenz und damit der Energie aufgetragen, aber um 900 nm, unter Berücksichtigung der Absorption des atmosphärischen Wasserdampfes um 700 nm (Abb. 11.41). Welche Auftragung ist einem Absorptionspeak angemessener? Klassisch dargestellt ist der Absorptionspeak ein Resonanzpeak eines schwingungsfähigen Elektrons im Chlorophyllmolekül. An eine solche Elektronenschwingung sind notwen-

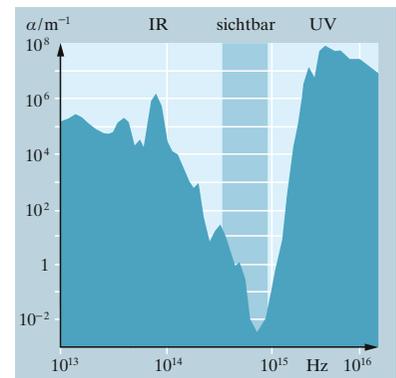


Abb. 11.41. Absorptionskoeffizient des Wassers. Man beachte die logarithmische Auftragung. Das tiefe Minimum im Blauen bedingt die Farbe von Meeren und Seen. Das photosynthetisch wirksame Rot dringt nur etwa 1 m tief ein; unterhalb davon brauchen die Algen zusätzliche Pigmente, um Photonen einzufangen, und sehen bräunlich-rötlich aus. Vor weichem UV ist man dort noch nicht sicher; wenn wir die Ozonschicht weiter abbauen, werden wir auch das Leben im Meer schädigen

digerweise auch Schwingungen von Molekülgruppen, z. B. CH_2 -Gruppen angekoppelt. Man kopple eine leichte Kugel (das Elektron) an eine mehrere tausendmal schwerere (eine CH_2 -Gruppe) mittels einer Feder und hänge das Ganze an einer weiteren gleich starken Feder auf. Lenkt man die kleine Kugel aus, dann gerät auch die große in Schwingungen, allerdings mit einer Frequenz, die um die Wurzel des Massenverhältnisses kleiner ist ($\omega = \sqrt{D/m}$). Diese langsame Schwingung moduliert die schnelle, genau wie die übertragene Tonfrequenz die Trägerfrequenz eines Radiosenders moduliert, und in beiden Fällen entsteht ein Frequenzband, dessen Breite gleich der aufmodulierten Frequenz ist, im Fall des Chlorophylls also gleich der Eigenfrequenz einer Atomgruppe im Molekül. Sie liegt normalerweise im Ultraroten und berechnet sich am einfachsten durch Vergleich mit einer normalen Elektronenfrequenz, z. B. der Rydberg-Frequenz zu

$$\sqrt{\frac{m_e}{m_{\text{CH}_2}}} \cdot \frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^3} \approx 2 \cdot 10^{13} \text{ Hz}, \quad (11.25)$$

was gerade die beobachtete Verbreiterung des Absorptionspeaks von 30–40 nm ergibt. Ein solcher Absorptionspeak, wo immer er im Spektrum liegt, hat also eine gegebene Breite im *Frequenzmaß*. Seine günstigste Lage ist also dort, wo die spektrale Intensität, über der *Frequenz* aufgetragen, maximal ist, d. h. um 700 nm. Man könnte auch vermuten, der Pflanze komme es darauf an, möglichst viele Photonen zu fischen, nicht möglichst viel Energie. Die spektralen Verteilungen des Photonstroms, über λ und über ν aufgetragen, haben aber ihre Maxima weit außerhalb der Chlorophyll-Absorption (Abb. 11.42).

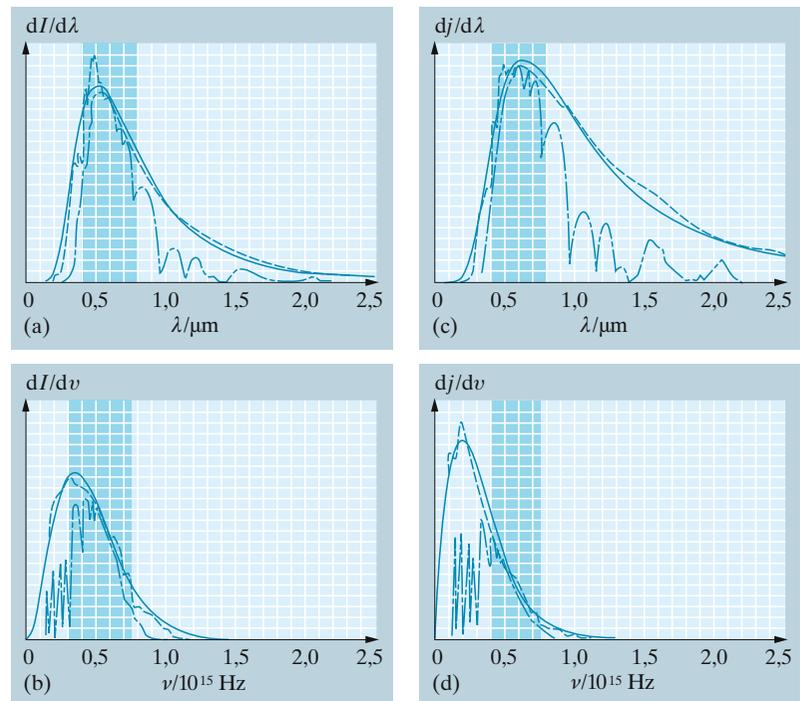


Abb. 11.42a–d. Spektrale Verteilungen der Intensität I und der Photonflussdichte j in Abhängigkeit von Wellenlänge oder Frequenz. (—): Planck-Kurve für $T = 5780 \text{ K}$; (---): Strahlung außerhalb der Erdatmosphäre; die hohe Sonnenatmosphäre hat die Fraunhofer-Linien wegabsorbiert und emittiert dafür bei geringeren Frequenzen; (- · - · -): Strahlung am Erdboden an einem klaren Sommermittag; besonders Ozon absorbiert im UV, Wasserdampf und CO_2 im IR

Könnte das Chlorophyll nicht einen höheren Absorptionspeak haben und dadurch die anfallende Energie besser nutzen? Bei einer Resonanzkurve ist die Gesamtfläche, gebildet aus Breite mal Höhe, ziemlich konstant. Eine Dämpfung vergrößert die Halbwertsbreite, senkt aber entsprechend das Maximum. Quantitativ: Im Resonanzmaximum kompensieren Rückstellkraft Dx und Trägheitskraft $m\ddot{x} = -m\omega^2x$ einander, woraus $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ folgt. Die anregende Kraft F wird allein durch die Reibungskraft γv ausgeglichen: $F = \gamma\omega x$. Der Schwinger nimmt dann die Leistung $P_{\max} = Fv = F^2/\gamma$ auf. Die Breite $\Delta\omega$ des Peaks wird dadurch begrenzt, dass bei $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$ die Reibung ebenso groß wird wie die Summe von Rückstell- und Trägheitskraft: $\gamma\omega x = \pm(D - m\omega^2)x$, woraus sofort folgt $\Delta\omega = \gamma/(2m)$, und somit $P_{\max} \cdot \Delta\omega = F^2/(2m)$. Das Elektron in der Lichtwelle erfährt die Kraft $F = eE$, andererseits ist der Absorptionsquerschnitt σ definiert durch $P = \sigma\varepsilon_0 E^2 c$ (mit $I = \varepsilon_0 E^2 c$ Intensität der Welle). Bei der Peakbreite von 40 nm oder $\Delta\omega \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$ erhält man eine Peakhöhe $\sigma_{\max} = e^2/(2m_0c \Delta\omega) \approx 10^{-20} \text{ m}^2$. Das Chlorophyllmolekül, ebenso wie viele andere Farbstoffe, absorbiert also maximal nur mit *einem* Atomquerschnitt von 1 \AA^2 . Der Absorptionskoeffizient ist $\alpha = n\sigma$ (n : Teilchenzahldichte). Für 1 mol/l ist $n = 6 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$, also ergibt sich die maximale molare Extinktion des Chlorophylls zu $10^7 \text{ m}^{-1} \text{ l mol}^{-1}$. Hiermit kann man leicht angeben, welchen Chlorophyllgehalt ein Blatt von gegebener Dicke haben muss, um die einfallende Strahlung weitgehend auszunutzen (die relative Molekülmasse von Chlorophyll $\text{C}_{55}\text{H}_{72}\text{O}_5\text{N}_4\text{Mg}$ ist 893,5).

Um das Licht besser auszunutzen, könnte man allerdings versuchen, den Absorptionsbereich zu verbreitern. Durch zusätzliche Dämpfung, aber mit *einem* Elektronenübergang und einer gegebenen Anzahl von Pigmentmolekülen, wäre hier allerdings kein Gewinn zu erreichen, denn die Fläche der Absorptionskurve ändert sich dabei nicht. Man könnte nun zwar den Verlust an Höhe durch Vermehrung der Pigmentmoleküle ausgleichen und damit einen größeren Spektralbereich abfischen, aber, wie wir sahen, ist die Breite des Peaks und damit seine Höhe durch die Physik der Elektronenschwingung festgelegt.

Das einzige Mittel ist der Einsatz weiterer Pigmentmoleküle mit anderer Lage des Absorptionspeaks. Viele Pflanzen in beschränkten Lichtverhältnissen (Wald, unter Wasser) benutzen solche **akzessorischen Pigmente**, die dem Chlorophyll ihre zusätzlichen Photonen zuspieren, aber einfacher und weniger kostspielig aufgebaut sein können und daher im Herbst nicht wie das Chlorophyll rechtzeitig aus den Blättern abgezogen werden (**Carotinoide, Phycobiline**). Das sind Ketten aus etwa 20 C-Atomen, konjugiert gebunden, d. h. abwechselnd durch Einfach- und Doppelbindungen – geradlinige Rennbahnen für π -Elektronen, während der Porphyrinring im Chlorophyll ringförmige hat. Ein Elektron, das in einem solchen Potentialgraben eingesperrt ist, absorbiert umso kleinere Frequenzen, je länger der Graben ist (Abschn. 13.7.1). Die Natur wusste das lange vor den theoretischen Chemikern, die heute auch Farbstoffe „maßschneidern“ können.



Der four solaire von Odeillo bei Font Romeu in den östlichen Pyrenäen. 65 nachführbare Planspiegel von je 48 m^2 werfen das Sonnenlicht auf einen Parabolspiegel, in dessen Brennpunkt der Sonnenofen maximal 4000 K erreicht

▲ Ausblick

Die Technik der Strahlungsquellen und -empfänger ist in voller Entwicklung. Sogar für die heimische Beleuchtung kommen alle paar Jahre neue Lampen mit energetischen oder anderen Vorteilen auf den Markt. Grundsätzlicher: Alles, was wir über den Kosmos wissen, haben uns das Licht und seit einiger Zeit auch Radio-, Röntgen-, Gamma- und sogar Neutrinostrahlung vermittelt. Ähnliches gilt für den Mikrokosmos. Wer das Atom verstehen will, muss wissen, wie es Strahlung erzeugt, absorbiert und überhaupt mit ihr wechselwirkt. Die Sonne spendet der Erde mehr als $1\,000$ mal so viel Energie wie die ganze Menschheit verbraucht. Indirekt nutzen wir einen winzigen Bruchteil davon, direkt noch viel weniger. Das Problem liegt in den riesigen Empfängerflächen, weniger im Wirkungsgrad der Photovoltaik: In Kap. 17 werden Sie verstehen, warum der kaum über 20% zu steigern sein wird; er ist nämlich gegeben durch das Verhältnis von Sonnen- zu Erdtemperatur.

✓ Aufgaben ...

www CD

● 11.1.1 Ausrede für Verkehrssünder?

Unser Auge ist für Grün sehr viel empfindlicher als für Rot. Warum sehen eine rote und eine grüne Lampe trotzdem ungefähr gleichhell aus?

● 11.1.2 Abstandsabhängigkeit

Welche photometrischen Größen ändern sich, welche bleiben konstant, (a) wenn man das Licht einer Lichtquelle mit einem Parabolspiegel bündelt, (b) wenn man den Abstand von ihr ändert, (c) wenn man ein Filter davor setzt?

● 11.1.3 Kerzen

Ist es eigentlich richtig, eine Lichtquelle durch eine Lichtstärke (so und so viele „Kerzen“) zu bezeichnen?

●● 11.1.4 Hefner-Kerze

Eine Hefnersche Normallampe strahlt auf 1 cm^2 einer senkrecht gestellten Fläche in 1 m Abstand $9,5 \cdot 10^{-5} \text{ Watt}$ (gemessen mit einem berußten Thermoelement. Die Strahlung der heißen Gase über der Flamme ist ausgeblendet; nur die Flamme allein strahlt). Entwerfen Sie eine Messanordnung, um das nachzuprüfen. Wie eicht man ein Thermometer in W?

Welche Strahlungsleistung und Strahlungsstärke hat die Lampe? Schätzen Sie die mittlere Emissionsdichte der Flamme und ihre Temperatur. Ist die Flamme „schwarz“? Machen Sie Angaben über die Intensitätsverteilung im Raum und über sämtliche photometrischen Größen, die den angegebenen physikalischen entsprechen.

● 11.1.5 Leselampe

Zum Lesen sollte man mindestens 50 Lux haben, für feine Arbeiten (Zeichnen usw.) $1\,000 \text{ Lux}$. Entspricht dem Ihr Arbeitsplatz? Richten Sie Lampenleistung und -geometrie danach ein.

●● 11.1.6 Belichtungszeit

Denken Sie alle Ihre Fotoerfahrungen in Lux, Lumen, Candela, Stilb um.

● 11.1.7 Leuchtstoffröhre

Betrachten Sie eine Leuchtstoffröhre. Auf manche ihrer strahlenden Flächenelemente schauen Sie senkrecht drauf, auf andere fast streifend. Trotzdem sieht die Röhre überall fast gleichhell aus. Wie kommt das, obwohl Sie doch die meisten Teile der Röhre verkürzt sehen (um welchen Faktor?). Sendet also ein Stück der

Rohrwand nach allen Seiten gleich viel Strahlung aus, oder wie ist die Winkelabhängigkeit? Verstehen Sie, wozu man die Leuchtdichte oder die Strahldichte $B = dJ/(dA \cos \vartheta)$ einführt? Wie hängt B bei der Leuchtstoffröhre vom Winkel ab? Welche Fläche bildet die Charakteristik $J(\vartheta)$ dieser Röhre?

● 11.1.8 Ulbricht-Kugel

Warum integriert die Ulbricht-Kugel über die Lichtstärke und misst direkt den Lichtstrom? Beweisen Sie: Der Anteil dE der Beleuchtungsstärke, den das Fenster F von einem Wandstück dA empfängt (Abb. 11.11), ist unabhängig vom Abstand zwischen F und dA .

●●● 11.1.9 Vollmond

Wie viel mehr Licht strahlt der Vollmond der Erde zu als der Halbmond? Vorsicht, die Antwort, die sich aufdrängt, ist falsch.

●● 11.1.10 Echo-Satellit

Ein kugelförmiger Satellit mit spiegelblanker Oberfläche wird auf die Bahn gebracht (z. B. der Satellit Echo aus den 60er Jahren, eine erst oben aufgeblasene metallisierte Ballonhülle

mit 12 m Durchmesser). Wie hell sieht der sonnenbeschienene Satellit von verschiedenen Seiten aus?

● **11.2.1 Leslie-Würfel**

Der **Leslie-Würfel** aus Blech, gefüllt mit heißem Wasser (Abb. 11.43), hat eine blanke (1) und eine berußte Fläche (2). Dicht vor diese Flächen kann man Blechplatten schieben, deren Temperatur mit einem Thermoelement gemessen wird. Von zwei gleichen Blechplatten wird die viel wärmer, die der berußten Würfelfläche gegenübersteht. Mit einer blanken und einer berußten Platte gegenüber den entsprechenden Würfelflächen wird der Temperaturunterschied noch größer. Dreht man den Würfel um 180°, dann verschwindet der Temperaturunterschied. Erklären Sie.

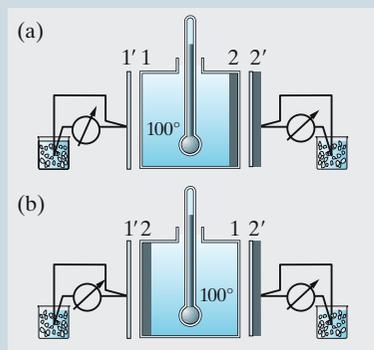


Abb. 11.43.

● **11.2.2 Weinpanscher**

Da steht ein Glas mit Rotwein, daneben eins mit ebenso viel Weißwein. Man schöpft einen Löffel voll aus dem Rotweinglas, entleert ihn ins Weißweinglas, rührt um und schöpft einen Löffel voll von dem Gemisch zurück ins Rotweinglas. Jetzt ist etwas Rotwein im Weißwein und etwas Weißwein im Rotwein. In welchem Glas ist mehr fremdfarbiger Wein? Wie ändert sich die Antwort, wenn man unvollständig oder gar nicht umrührt? Wie ändert sie sich, wenn man den Prozess wiederholt? Was macht es aus, wenn man ein Glas immer umrührt, das andere nicht?

● **11.2.3 Kirchhoff-Gesetz**

Bei unserer Herleitung des **Kirchhoff-Gesetzes** (Abschn. 11.2.1) haben wir nur die Leistungen $\epsilon_2 P_1$ und $\epsilon_1 P_2$ berücksichtigt, die eine Platte aus der Strahlung der anderen absorbiert. Ein Teil wird aber reflektiert und kommt zur Ausgangsplatte zurück. Stört das nicht die Betrachtung?

●● **11.2.4 Strahlungsmaximum**

In welchem Frequenz- bzw. Wellenlängenbereich strahlt ein schwarzer Körper am meisten Energie ab? Wo strahlt er die meisten Photonen ab? Wenden Sie dies, soweit möglich, auf die Sonne an.

●●● **11.2.5 Stefan-Boltzmann-Konstante**

Integrale der Form $\int_0^\infty x^n dx / (e^x - 1)$, wie Sie sie brauchen, um die Gesamtstrahlung eines schwarzen Körpers zu berechnen, könnten Ihnen öfter begegnen. Wenn Sie an die geometrische Reihe denken, stoßen Sie dabei auf **Riemanns Zeta-Funktion** $\zeta(n) = \sum_{x=1}^\infty x^{-n}$, die z.B. in der Zahlentheorie eine große Rolle spielt. Der Wert der Zeta-Funktion lässt sich für einige n , besonders geradzahlig- ganze, auf überraschende Weise aus der Fourier-Zerlegung geeigneter Funktionen finden.

●● **11.2.6 Lampenausbeute**

Welcher Anteil der Gesamtemission eines schwarzen Körpers der Temperatur T fällt in den sichtbaren Bereich? Ist dieser Anteil direkt in Lumen ausdrückbar? Lösen Sie diese Fragen graphisch für einige interessante Temperaturen. Wie groß ist die **Lichtausbeute** (lm/W) der Sonne, einer Glühlampe (bis 3 000 K Faden- temperatur), einer Bogenlampe (bis 7 000 K)? Was ändert sich, wenn der Leuchtkörper grau oder selektiv strahlt?

●● **11.2.7 Sternhelligkeit**

Wie hell sind Sonne, Mond und Sterne? Gehen Sie z.B. aus von der Photosphärentemperatur und rechnen die W/cm^2 und lm/cm^2 aus, die auf der Erde ankommen. Für den

Mond reicht eine einfache geometrische Betrachtung. Seine **Albedo** (refl. Licht/einfall. Licht) ist 0,07, die der Venus 0,61 (warum?). Man beachte die Phasen von Mond und Venus. Betrachten Sie auch Fixsterne und Spiralnebel. Astronomische Skala der scheinbaren Helligkeiten: Die Sonne hat -27 ; 5 Größenklassen entsprechen einem Faktor 100 in der Helligkeit.

●● **11.2.8 Wie viel Sternlein?**

Sterne bis zu welcher Größenklasse könnte das Auge bei maximaler Adaptation sehen?

●● **11.2.9 Nachthimmelleuchten**

Kann der Nachthimmel, auch zwischen den sichtbaren Sternen, völlig dunkel sein? Beachten Sie die nicht sichtbaren Sterne und Galaxien (Olbers-Leuchten), die Auflösungsgrenze des Auges, die Streuung des Sternlichts in der Luft, die Emission interstellarer Materie, das Leuchten der Atmosphäre selbst (Rekombination von Molekülen, die im Tageslicht gespalten wurden, besonders in der Ozonschicht).

●● **11.2.10 Augenempfindlichkeit**

Das dunkeladaptierte menschliche Auge kann etwa 50 Quanten/s im günstigsten Spektralbereich wahrnehmen. Man sieht dann nur mit den Stäbchen, die keine Farbempfindung vermitteln und im Gebiet deutlichsten Sehens, der *Fovea centralis*, am dünnsten gesät sind. Von welcher Temperatur ab kann man einen Körper glühen sehen, und wie?

● **11.2.11 UR-Kamera**

Warum können die **Ultrarotdetektoren** der Spionageflugzeuge so viel mehr leisten als unser Auge oder selbst die Telekamera? Wofür sind sie besonders geeignet?

●● **11.2.12 Wien-Gesetz**

Wie würde die Energieverteilung der schwarzen Strahlung aussehen, wenn es keine **erzwungene Emission** gäbe? Entspricht das einer bekann-

ten Strahlungsformel? Wie sieht man anschaulich, dass es nicht so sein kann?

●● 11.2.13 Erzwungene Emission

Welche Rolle spielt die erzwungene Emission im Vergleich zur spontanen Emission bei verschiedenen Temperaturen und in verschiedenen Spektralbereichen? Folgerungen?

● 11.2.14 Erdschein

Der Neumond ist nicht ganz dunkel, sondern vom Widerschein der Erde beleuchtet. Die Albedo der Erde ist 0,4. Wie hell ist der Neumond?

● 11.2.15 Zinklicht

Wenn man einen verzinkten Eisen draht elektrisch verdampft (Kurzschluss), steigt eine lebhaft blaugrüne Flamme auf. Hat das etwas mit der Tatsache zu tun, dass ZnO im Roten und Gelben viel schwächer absorbiert als im Blauen?

● 11.2.16 Planetentemperatur

Welche Oberflächentemperatur erwartet man auf Grund der Theorie des Strahlungsgleichgewichts für die einzelnen Planeten des Sonnensystems? (Astronomische Daten s. Tabelle 1.2). Welchen Einfluss auf das Ergebnis haben die Rotationsperiode des Planeten, seine Albedo (der Reflexionsgrad einschließlich Atmosphäre), die Existenz und Zusammensetzung der Atmosphäre, speziell eine CO₂- und H₂O-reiche Atmosphäre?

● 11.2.17 Mondscheinfoto

An einem strahlenden Sommermittag belichten Sie Ihren Iso-100-Farbfilm mit Blende 16 und $\frac{1}{60}$ s. Wie würden Sie belichten, um aufzunehmen (a) die Vollmondscheibe mit einem Teleobjektiv, (b) eine vollmondbeschienene Landschaft, (c) die Landschaft bei mondloser, aber sternklarer Nacht?

●● 11.2.18 Schmelzofen

In einem Glasschmelzofen, der ein kleines Fenster hat, erkennt man im kalten Zustand die vielen grauweißen

bis rotbraunen Flecken an der Wand, das Schmelzgut hebt sich deutlich ab. Wenn der Ofen heiß ist, erkennt man praktisch keine Einzelheiten mehr. Wie kommt das? Heißt das, dass die Körper im Innern alle „schwarz“ sind? Würde man Selektivstrahler sehen?

●● 11.2.19 Weltraumkälte

Ist es wahr, „dass die Temperatur des Weltraums 0 K ist“? Hat die Aussage überhaupt einen Sinn ohne Bezug auf einen Probekörper, von dessen Temperatur die Rede ist? Welche Eigenschaften des Probekörpers bestimmen seine Temperatur? Wie hängt die Temperatur vom Ort im Weltall ab? Man betrachte einen schwarzen Körper an einem „typischen Ort“ innerhalb der Galaxis, d. h. etwa gleich weit von den nächstgelegenen Sternen entfernt. Welche Temperatur nimmt er an? (Vernachlässigen Sie zunächst die Existenz der übrigen Galaxien.) Entsprechend für einen „typischen intergalaktischen Ort“ im einsteinischen sphärischen Weltall. Daten: Mittlere Entfernung zwischen Fixsternen in der Galaxis: 7 Lichtjahre; mittlere Entfernung zwischen Galaxien: $5 \cdot 10^6$ Lichtjahre; eine mittlere Galaxis enthält knapp 10^{11} Sterne; mittlere Leuchtkraft der Sterne etwa gleich Leuchtkraft der Sonne.

● 11.2.20 Sherlock-Holmes

Szene: Baker Street, abends. Während Sherlock Holmes (H) seine Violine stimmt, blättert Dr. Watson (W) in einem Lexikon.

W.: „Stellen Sie sich vor, Holmes: Die gesamte Strahlungsemission oder -absorption eines Körpers ist proportional der vierten Potenz seiner absoluten Temperatur!“

H.: „Was ist absolute Temperatur?“

W.: „Der absolute Nullpunkt liegt bei -273°C . 1° absolut als Temperaturdifferenz ist gleich 1°C .“

Holmes streckt den Arm mit ab gespreiztem Daumen vor sich hin in Richtung des Fensters, hinter dem gerade die Sonne untergeht.

Kurze Pause.

H.: „Wenn das so ist, mein lieber Watson, hat die Sonne eine Oberflächentemperatur von etwa 6000° absolut.“

W.: „Ihre astrophysikalischen Kenntnisse überraschen mich, Holmes!“

H.: „Mein Lieber, sie sind gleich Null. Ich weiß nicht einmal, wie weit die Sonne entfernt ist. Reine Kombinationsgabe! Sehen Sie ... (das Gerassel einer Kutsche übertönt Teile des Folgenden): ... mein Arm ist ... mein Daumen ... Sonne etwa viermal ... mal so weit entfernt wie ihr Durchmesser lang ist ... verdünnt auf ein ...stel. Die Erde als Ganzes ist schon lange genug ... ebenso viel wie sie ausstrahlt ... Ihr T^4 -Gesetz ... zel aus Radienverhältnis ... etwa 6000° absolut ... ist das nicht einfach genug?“

Können Sie die Lücken in Holmes' Deduktion ergänzen?

● 11.2.21 Glühlampe

Welchen Einfluss hat die Schmelztemperatur des Glühfadensmaterials auf die Strahlungsleistung einer Glühlampe? Eine Osmium-Wolfram-Legierung schmilzt bei 3400°C und hat einen spezifischen Widerstand von $5 \cdot 10^{-7} \Omega\text{m}$. Schätzen Sie Oberfläche, Länge, Querschnitt des Glühdrahtes für eine 100 Watt-Lampe aus diesem Material. Vergleichen Sie mit der scheinbaren Spannweite des Drahtes. Welcher Anteil der Gesamtstrahlung fällt ins Sichtbare? Welcher Anteil kommt als physiologisch wahrgenommenes Licht zur Geltung (graphische Schätzung)?

● 11.2.22 Superlampe

Angenommen, eine Lichtquelle mit der **Farbtemperatur** 20 000 K kommt auf den Markt. Kaufen Sie sie, warum und wozu: wegen der hohen lm/W -Zahl, zur Projektion von Dias, o. Ä.?

● 11.2.23 Halogenlampe

Atomares Wolfram bildet mit Halogenen Wolframhexahalogenide, die in der Hitze (ab ca. 2000°C) wieder zerfallen. Warum sind **Halogenlampen** so hell?

●● 11.2.24 Beste aller Welten

Unsere Welt ist optisch recht nett eingerichtet: Unser Auge ist am empfindlichsten für Wellen, die die Sonne maximal abstrahlt. Die Atmosphäre lässt gerade diese Wellen besonders gut durch, im Gegensatz zu längeren und kürzeren. Feste und flüssige Objekte beeinflussen aber gerade diese Wellen besonders einschneidend, sodass wir diese Objekte deutlich sehen können (im Gegensatz zu Gasen). Wie weit ist all dies zufällig, wie weit gesetzmäßig? Welche Empfindlichkeitskurve erwarten Sie bei Bewohnern eines Planeten eines heißen O-Sterns (etwa 25 000 K Oberflächentemperatur)?

●● 11.2.25 Sternatmosphäre

Wenn ein Stern i. Allg. weder in sich zusammenbricht noch explodiert, verdankt er das dem Gleichgewicht zwischen Gasdruck und Gravitationsdruck. Man kann dieses Gleichgewicht auf mehrere Arten formulieren: Als Druckgleichheit, aus der Kreisbahnbedingung, aus dem Virialsatz. Zeigen Sie, dass dieses Gleichgewicht stabil ist. Wie regeln sich die Parameter des Sterns (Masse M , Radius R , Temperatur T , mittlerer Teilchenabstand d , Gesamtteilchenzahl N , mittlere Teilchenenergie W) aufeinander ein?

● 11.2.26 Sternentwicklung

Ein Stern verliert ständig Energie durch Abstrahlung. Wird er dadurch kühler? Denken Sie z. B. an einen Satelliten: Wenn er in der Hochatmosphäre gebremst wird, läuft er immer schneller um. Warum? Denken Sie auch ans Bohr-Atom: Je energieärmer, also je enger die Bahn, desto schneller wird sie durchlaufen. Stimmt die Analogie mit dem Stern?

● 11.2.27 Sonnenalter

Wie lange könnte die Sonne ihre Strahlung aufrechterhalten aus chemischer Energie, aus der Gravitationsenergie (Kontraktion)? Ziehen Sie geologisch-paläontologische Konsequenzen. *Charles Darwin* war gegen Ende seines Lebens so beeindruckt

von den Argumenten der damaligen Physik (besonders *Lord Kelvins*), dass er sich gezwungen glaubte, lamarckistische Evolutionsmechanismen anzunehmen, damit die Entwicklung etwas schneller ginge. Er gab seine eigene Grundidee auf, bevor die moderne Physik sie rechtfertigen konnte.

● 11.3.1 Veilchenfarbige Ägäis

Man hat spekuliert, dass UV und UR, wenn wir sie sehen könnten, keinen wesentlich neuen Farbeindruck böten, sondern nur die bekannten auf höherer bzw. tieferer Oktave wiederholten, ähnlich wie bei den Tönen. – dass *Homer* von der „veilchenfarbigen See“ spricht, hat man so gedeutet, dass die alten Griechenaugen weiter ins UV empfindlich gewesen seien. Bestehen physikalische oder physiologische Gründe für diese Annahmen?

● 11.3.2 Farbdreieck

Wie sähe das **Farbdreieck** aus und wie würde sich vermutlich unser Farbeempfinden ändern, wenn die Spektralempfindlichkeiten der drei Rezeptoren nicht überlappten oder der sekundäre kurzwellige Buckel des Rot-Rezeptors fehlte?

● 11.3.3 Crab-Nebel

Die **Supernova** aus dem Jahr 1054 n. Chr. war nach chinesischen Berichten viel heller als Venus, man konnte in ihrem Licht fast so gut sehen wie bei Vollmond. Ihre Explosionswolke, der **Crab-Nebel**, erscheint heute unter 6,5 Bogenminuten Durchmesser. In seinem Spektrum misst man Doppler-Verschiebungen bis zu $\Delta\lambda/\lambda = 0,0043$, die offenbar von der Expansion des Nebels stammen. Kann die Expansion durch Eigengravitation gebremst sein? Wie weit ist der Crab-Nebel von uns entfernt? Vergleichen Sie die absolute Leuchtkraft der Supernova mit der der Sonne. Was würde geschehen, wenn α Centauri (4,3 Lichtjahre entfernt) zur Supernova würde? Stiege die Temperatur auf der Erde merklich? Das Helligkeitsmaximum einer Supernova dauert etwa 10 Tage. Welche Gesamtenergie

strahlt sie während dieser Zeit aus? Vergleichen Sie mit der Fusionsenergie für einen Wasserstoffstern und mit der gravitativen Kontraktionsenergie. Wie weit müsste ein Stern kontrahieren, um dadurch diese Energie aufzubringen?

● 11.3.4 Fixstern-Parallaxe

Einer der Haupteinwände (intelligenter) Kritiker gegen *Copernicus* wie schon 1800 Jahre vorher gegen *Aristarch* war folgender: Wenn sich die Erde auf einem so riesigen Kreis um die Sonne bewegte, müssten sich doch die Fixsterne scheinbar im entgegengesetzten Sinn verschieben, d. h. Parallaxen zeigen. *Copernicus* wie *Aristarch* gaben die einzig sinnvolle Antwort: Die Sterne sind so weit weg, dass ihre Parallaxe unter der Messgrenze liegt (für beide Forscher war diese etwa 5 Bogenminuten; warum?). Wie fern müssen also die Sterne sein? Wie verschob sich diese Schätzung mit der Erfindung und Weiterentwicklung des Fernrohrs? *Newton* zog aus der einfachen Tatsache, dass Saturn so hell ist wie ein Fixstern 1. Größe, völlig unabhängig die Folgerung, die **Fixsternparallaxen** müssten tatsächlich kleiner als 1 Bogensekunde sein. Wie argumentierte *Newton*?

●● 11.3.5 Sonneneinstrahlung

Schätzen Sie die Gesamtenergie, die Orte verschiedener geographischer Breite in verschiedenen Jahreszeiten von der Sonne empfangen, ebenso wie die Gesamtenergie im Lauf eines Jahres in Abhängigkeit von der geographischen Breite. Arbeiten Sie am besten graphisch, denn die auftretenden Integrale sind ziemlich eklig. Ziehen Sie klimatologische Folgerungen.

● 11.3.6 Sonneninneres

Materie im Sonneninneren hat etwa 10^7 K. Bei welcher Wellenlänge liegt ihr Emissionsmaximum? Welche Strahlungsenergie herrscht dort? Wenn ein Klümpchen von 1 cm^3 dieser Materie isoliert und irgendwie durch eine vollkommen durchsichtige Hülle zusammengehalten werden könnte, wie schnell würde es sich relativistisch zerstrahlen? Welchen Druck

würde seine Strahlung in 1 km Abstand ausüben? Warum geht die Zerstrahlung im Sonneninnern nicht so schnell?

●● 11.3.7 Treibhauseffekt

Erklären Sie in Worten, warum es in einem ungeheizten Treibhaus mit Glasdach wärmer ist als draußen. Eine dünne Glasplatte absorbiert Infrarotlicht mit Wellenlängen oberhalb $20\ \mu\text{m}$. Alles andere lässt sie praktisch ungeschwächt durch. Das Treibhausdach stand längere Zeit ganz offen und wird dann wieder zugedeckt. Für die drei Zustände: Offenes Treibhaus – unmittelbar nach dem Zudecken – längere Zeit nach dem Zudecken

stellen Sie schematisch Strahlungsbilanzen auf, indem Sie die Leistungen von Einstrahlung und Rückstrahlung durch entsprechende Anzahlen von Pfeilen darstellen. Welche Temperatur kann das Treibhaus annehmen, wenn die Sonne voll darauf scheint? Die Abdeckplatte eines **Sonnenkollektors** kann 90% der Rückstrahlung absorbieren, aber das Sonnenlicht fast ungeschwächt durchlassen. Wie warm kann es im Innern des Kollektors werden? Warum absorbiert Glas wie die meisten Stoffe im Infraroten, lässt aber sichtbares Licht durch? Wo erwarten Sie noch einen Absorptionsbereich des Glases? Welche Teilchen sind für diese Absorptionen verantwortlich?

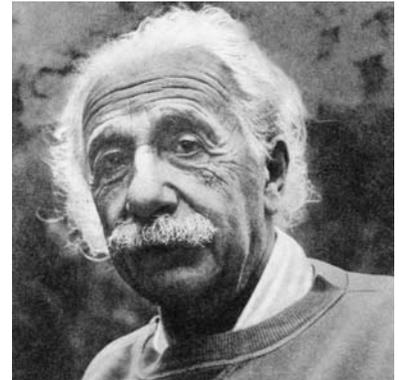
● 11.3.8 Siafu

Die gefürchteten Treiberameisen (Siafu) bauen kein Nest im Boden oder im Holz, sondern formen eines aus ihren eigenen Körpern: Alle nicht zum Jagen benötigten Arbeiterinnen bilden eine Hohlkugel, in der sie die zur Larvenaufzucht nötige konstante Temperatur aufrechterhalten. Worin liegt der Unterschied zum Fall des Tallegalla-Huhns (Aufgabe 5.4.10)? Was müssen die Ameisen machen, wenn es draußen kälter bzw. wärmer wird? Stellen Sie eine Leistungsbilanz auf und entwickeln Sie daraus eine Formel oder ein Diagramm, nach dem sich die Ameisen richten könnten. Die Konvektion sei vernachlässigt.

Relativistische Physik

■ Inhalt

12.1	Maßstäbe und Uhren – Raum und Zeit	607
12.2	Gleichzeitigkeit	616
12.3	Die Lorentz-Transformation	627
12.4	Vierervektoren	628
12.5	Relativistischer Doppler-Effekt	630
12.6	Addition von Geschwindigkeiten	633
12.7	Relativistisches Sehen	634
12.8	Relativistischer Impuls und relativistische Energie	639
12.9	Elektromagnetische Felder und Bewegung	644
12.10	Gravitation und Kosmologie	650



„Das Erstaunlichste an der Welt ist, dass man sie verstehen kann.“

Albert Einstein

▼ Einleitung

Kaum ein Gedankengebäude ist so ausschließlich mit einem Namen verknüpft wie der Einsteins mit der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie. Für die spezielle gab es Vorläufer wie Lorentz, Poincaré, Hasenöhr!; die allgemeine hat bisher noch jeden Test bestanden und scheint allen Alternativansätzen überlegen zu sein. Dabei bekam Albert Einstein 1921 seinen Nobelpreis nicht dafür (trotz der sensationellen Bestätigung bei der totalen Sonnenfinsternis 1919 galt die Sache offenbar immer noch nicht als ganz gesichert), sondern für die Erklärung des Photoeffekts, die wiederum sogar ein Max Planck für „etwas über das Ziel hinausgeschossen“ ansah, wie er noch 1913 in seinem sonst sehr günstigen Gutachten über Einsteins Aufnahme in die Akademie der Wissenschaften schrieb.

Die spezielle Relativitätstheorie markiert aber nicht nur einen Wendepunkt in unserem Verständnis der materiellen Welt, sie hat auch ganz alltägliche Auswirkungen. So würde das Global Positioning System (GPS) ohne unser Verständnis der Relativitätstheorie überhaupt nicht funktionieren. Auch die eindeutige Definition des Meters, mit der die Zeit festgelegt ist, die das Licht braucht, um gerade diese Strecke zurückzulegen, ist eine Konsequenz der speziellen Relativitätstheorie.

12.1 Maßstäbe und Uhren – Raum und Zeit

Wir werden in Raum und Zeit geboren, in jedem Pass stehen Geburtsort und Geburtsdatum der Träger. Das Verständnis für räumliche Zusammenhang ist uns in die Wiege gelegt, wir erfassen schnell die drei Raumrichtungen und wir können Abstände zwischen ruhenden Gegenständen an verschiedenen Orten mit einem Maßstab quantifizieren. Wir können drei

Koordinaten angeben, um den Geburtsort zu bezeichnen: Längengrad, Breitengrad, Höhe über dem Meeresspiegel. Dabei haben wir aber schon ein Bezugssystem festgelegt. Es lässt sich durch seinen Ursprung beschreiben: Den 0° -Meridian in Greenwich, den Äquator und den normierten Meeresspiegel. Das **Ereignis** der Geburt wird aber erst mit der Angabe des Geburtsdatums vollständig. Es ist selbstverständlich, dass wir Ereignisse mit vier Größen, dem Kalenderdatum oder Zeitpunkt und drei Raumkoordinaten beschreiben.

Dabei scheint es uns auch selbstverständlich, die Zeit mit einer Uhr zu messen, unser Lebensrhythmus wird durch die Uhr nur allzu oft unangenehm diktiert. Lehrveranstaltungen in ein und demselben Hörsaal etwa werden durch ihren Beginn und ihre Dauer, die mit der Wanduhr zu messen sind, in eine wohlgeordnete Reihenfolge gebracht.

Schwieriger wird es, wenn wir Gleichzeitigkeit von Ereignissen an verschiedenen Orten feststellen wollen. Sollen zwei Züge in zwei verschiedenen Orten auf einer eingleisigen Strecke in entgegengesetzten Richtungen so abfahren, dass sie gleichzeitig in einem Ausweichbahnhof treffen und damit insbesondere Kollisionen vermeiden, so müssen die Uhren „richtig“ gestellt, sie müssen synchronisiert sein. Wie können wir aber die Synchronisation erreichen? Wir können von einer Normaluhr z. B. per Telefon Nachrichten an zwei entfernte Uhren übermitteln, die aber selbst wieder Übertragungszeit verbrauchen, die womöglich von der Richtung abhängt. Oder wir synchronisieren die Uhren am gleichen Ort und bringen sie dann an die Bahnhöfe. Dann ist aber nicht klar, welchen Einfluss die Bewegung auf die Ganggenauigkeit der Uhren hat.

Das Problem der Gleichzeitigkeit, das schon die Eisenbahner des 19. Jahrhunderts vor ernsthafte technologische Herausforderungen gestellt hat, hat Einstein, zuvor aber auch schon Poincarè zur Beschäftigung mit der Frage der Gleichzeitigkeit und mit der Ganggenauigkeit und der Ausbreitung von Signalen in ruhenden und bewegten Bezugssystemen veranlasst.

12.1.1 Bezugs- oder Inertialsysteme

Gibt es absolute Ruhe?

Zwei Beobachter mögen sich gleichförmig-geradlinig zueinander bewegen; jeder behauptet, er ruhe. Eine Entscheidung könnte durch Experimente gefällt werden. Stellen Sie sich möglichst viele solcher Experimente und ihren Ausgang vor, wie das schon Galilei tat. Er erkannte ebenso wie Newton, dass mindestens alle mechanischen Experimente in beiden Systemen völlig gleich verlaufen müssen. Der Grund ist ganz allgemein: Alle Mechanik ist aus Newtons Axiomen ableitbar (vgl. Abschn. 1.3.4), und diese reden überhaupt nicht von Geschwindigkeit. Von Beschleunigung reden sie, und deshalb ist sehr wohl feststellbar, ob jemand beschleunigt wird. Das zeigt sich durch das Auftreten von Trägheitskräften.

Unbeschleunigte Bezugssysteme, die sich relativ zu einander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, heißen Inertialsysteme. Die **Galileitransformation** gibt an, wie sich die Koordinaten ($\mathbf{r}(t)$, t) eines Körpers

beim Wechsel in ein Bezugssystem ändern, das sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit v bewegt:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t \quad \text{und} \quad t' = t \quad (12.1)$$

Die Zeit $t = t'$ wird dabei als eine absolute Größe angenommen. Ganz offensichtlich folgt daraus sofort die Transformationsvorschrift für Geschwindigkeiten $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}'$, die einfache Addition nämlich:

$$\mathbf{u}' = d/dt' \mathbf{r}' = \mathbf{v} + d/dt \mathbf{r} = \mathbf{v} + \mathbf{u}. \quad (12.2)$$

Wo Geschwindigkeiten eine Rolle spielen, etwa wo Kräfte wie Luftwiderstand oder Reibung davon abhängen, handelt es sich immer um Relativgeschwindigkeiten zwischen zwei Körpern. Ob der Wind „von selbst weht“ oder ob er ein Fahrtwind ist, spielt für die Wechselwirkung mit ihm keine Rolle. Analog ist es beim Doppler-Effekt in der Akustik, wobei allerdings die Relativbewegungen von drei Körpern, der Quelle, des Empfängers und der Luft, zu beachten sind (vgl. Abschn. 4.3.5).

Ob optische und elektromagnetische Experimente ebenso unfähig sind, etwas über die absolute Bewegung des Systems auszusagen, in dem sie sich abspielen, war anfangs nicht so sicher. Dass das Licht sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, war seit den Tagen von O. Roemer bekannt (vgl. Abschn. 9.3.1). Bis 1900 zweifelte aber kaum jemand, dass sich das Licht ähnlich dem Schall in einem materiellen Träger ausbreitet, dem Äther – „wenn Licht Schwingungen darstellt, muss doch etwas da sein, was schwingt“. Dieser Äther musste eine unvorstellbar geringe Dichte haben, dabei aber hochelastisch sein, vor allem aber die ganze Welt mit Ausnahme vielleicht der völlig undurchsichtigen Körper erfüllen. Infolge dieser Allgegenwart würde er aber ein absolut ruhendes System definieren, nämlich dasjenige, in dem er selbst ruht. Absolute Bewegung, also Bewegung gegen den Äther, ließe sich dann durch optische, interferometrische Experimente nachweisen.

12.1.2 Das Michelson-Experiment

Betrachten wir zunächst eine Situation in bewegten Bezugssystemen im Sinne von Galilei, die auf Michelson selbst zurückgeht. Von zwei gleich guten Schwimmern soll der eine (A) quer über den Fluss und zurück, der andere (B) eine gleich lange Strecke L flussaufwärts und wieder zurückschwimmen (Abb. 12.1). Der erste wird gewinnen, und zwar um die Zeitdifferenz

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \frac{1 - \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - (v/c)^2} \simeq \frac{L}{c} \left(\frac{v}{c} \right)^2, \quad (12.3)$$

wenn beide mit der Geschwindigkeit c (relativ zum Wasser!) schwimmen und der Fluss mit v strömt. Die Näherung in (12.3) gilt für $v \ll c$ und lässt den Einfluss des bewegten Bezugssystems leichter erkennen.

✕ Beispiel ...

Um welchen Winkel muss A „vorhalten“, damit er genau gegenüber kommt? Welcher der Schwimmer ist eher am Ausgangspunkt angelangt, und um wie viel?

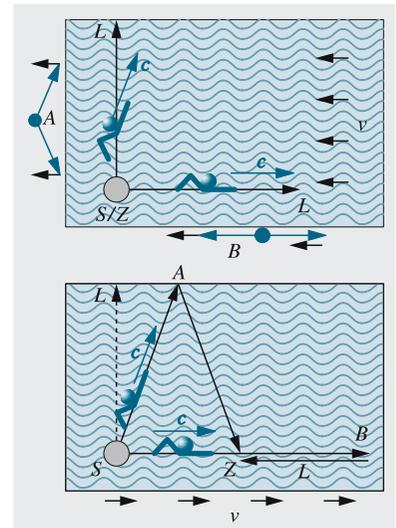


Abb. 12.1. Zwei gleich gute Schwimmer (A, B) legen mit gleicher Geschwindigkeit gleich lange Strecken in einem Fluss zurück. Der eine schwimmt parallel, der andere senkrecht zur Fließgeschwindigkeit $v < c$. Schwimmt der Beobachter auf dem Strom mit (unten), sieht er die Schwimmer unterschiedlich lange Wege zurücklegen, $SAZ < SBZ$

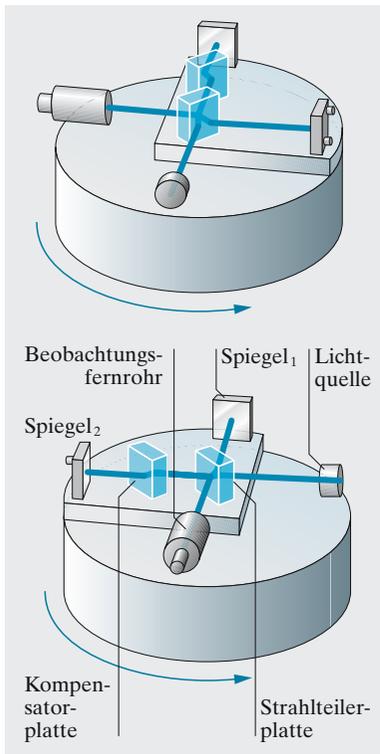


Abb. 12.2. Der Versuch von Michelson und Morley, der die Bewegung der Erde gegen einen ruhenden Äther nachweisen sollte. Das Interferometer hat zwei orthogonale, genau gleich lange Arme. Drehung um 90° vertauscht die Wirkung der angenommenen Bewegung auf die Laufzeitdifferenz. Die Laufzeitänderung wurde als Verschiebung der zu beobachtenden Interferenzfigur erwartet. Sie blieb jedoch aus. Die Kompensatorplatte eliminiert die durch den Strahlteiler verursachte unterschiedliche Dispersion in den beiden Interferometerarmen

Der Fluss soll überall die gleiche Strömungsgeschwindigkeit haben. Schwimmer A hält um φ mit $\sin \varphi = v/c$ vor und braucht $t_A = 2L/(c \cos \varphi) = 2L/(c\sqrt{1 - (v/c)^2})$, Schwimmer B braucht $t_B = L/(c - v) + L/(c + v) = 2Lc/(c^2 - v^2)$, also $t_B/t_A = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Ersetzt man die Schwimmer durch zwei Lichtstrahlen, das Wasser durch den Äther und das Ufer durch die Erde (oder das Labor), so hat man offenbar eine völlige Analogie. Messung der Zeitdifferenz würde die Bestimmung der Geschwindigkeit v gestatten, mit welcher der Äther an der Erde vorbei oder diese durch den Äther streicht. Falls man eine Zeitdifferenz fände, sollte sie auch „Jahreszeiten“ haben, weil die Erde bestimmt z. B. an zwei gegenüberliegenden Punkten ihrer Bahn um die Sonne verschiedene Geschwindigkeiten hat (Unterschied 60 km/s), also müssten z. B. im Sommer und im Winter verschiedene Zeitdifferenzen auftreten.

Zeitdifferenzen der fraglichen Größenordnung sind mit optischen Mitteln völlig sicher messbar, und zwar durch interferometrischen Vergleich der Laufzeiten von zwei genau gleich langen Lichtwegen. Das Experiment verläuft so, dass man einen Lichtstrahl mittels eines halbdurchlässigen Spiegels in zwei kohärente, senkrecht zueinander laufende Strahlen teilt und diese, ganz nach dem Vorbild der beiden Schwimmer (Abb. 12.1), in sich selbst zurückspiegelt und auf einem Punkt des Interferenzschirms wieder vereinigt (Abb. 12.2). Wenn die Lichtgeschwindigkeit durch den unbewegten Äther bestimmt wäre, ergäbe eine Armlänge von 25 m bezogen auf die Geschwindigkeit der Erde relativ zur Sonne gerade einen Gangunterschied von einer halben Wellenlänge grünen Lichts (500 nm) zwischen den beiden Teilstrahlen, der aus anfänglich konstruktiver Interferenz destruktive machte. Dieser Unterschied wäre leicht zu beobachten, aber nichts dergleichen trat ein, es war keine Verschiebung der Interferenzfiguren zu beobachten, weder im Sommer noch im Winter. Dieses negative Ergebnis gehört zu den meistdiskutierten und bestbestätigten (s. Tabelle 12.1) der ganzen Physik. Das für diese Experimente entworfene Zweistrahlinterferometer trägt heute den Namen *Michelson-Interferometer* und hat zahlreiche andere Anwendungen gefunden (s. Abschn. 10.1.13).

Es hat nicht an Versuchen gefehlt, den negativen Ausgang des Michelson-Versuches durch Hypothesen zu erklären. Wenn z. B. die Ausbreitung des Lichts durch die Bewegung seiner Quelle bestimmt wurde (wie dies Newtons Korpuskularhypothese entspräche, die allerdings eigentlich einen Verzicht auf den Äther impliziert), wäre für eine irdische Quelle kein Effekt zu erwarten. Man hat den Michelson-Versuch auch mit Sternlicht ausgeführt, mit dem gleichen negativen Ergebnis. Ein Vorschlag, das negative Ergebnis des Michelson-Versuches zu erklären, heißt **Mitführungshypothese**. Sie lässt sich experimentell überprüfen: Wenn der Äther in der Nähe der Erde durch diese oder durch die Atmosphäre mitgerissen würde, ließe sich natürlich keine Relativbewegung zwischen Labor und Äther nachweisen. Dass die Luft den Äther mitführen könnte, wird durch den Versuch von Fizeau widerlegt. Dabei wird die Lichtgeschwindigkeit in strömenden Flüssigkeiten gemessen. Es zeigt sich (vom Ätherstandpunkt beschrieben), dass die Körper zwar den Äther mitführen,

Tabelle 12.1. Bestimmung der Koeffizienten in Gl. (12.4) aus Michelson-Morley- (MM) und Kennedy-Thorndike-Experimenten (KT). Die $\{A, B\}$ -Werte sind für Michelson & Morley auf die Relativgeschwindigkeit der Erde zur Sonne (30 km/s), ab 1930 auf die Geschwindigkeit des Sonnensystems von 377 km/s oder $v/c = 0,0013$ zur kosmischen Hintergrundstrahlung bezogen.

Zitate: [1] A.A. Michelson, Am. J. Sci. **22**, 120 (1881); [2] A.A. Michelson, E.W. Morley, Am. J. Sci. **34**, 333 (1887); [3] A. Einstein, Ann. Phys. **17**, 891 (1905); [4] G. Joos, Ann. Phys. **7**, 385 (1930); [5] R.J. Kennedy, E.M. Thorndike Phys. Rev. **42**, 400 (1932); [6] A. Brilliet, J.L. Hall, Phys. Rev. Lett. **42**, 549 (1979); [7] D. Hils, J. Hall, Phys. Rev. Lett. **64**, 1697 (1990); [8] C. Braxmaier et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 010401 (2001); [9] H. Müller et al., Phys. Rev. Lett. **91**, 020401 (2003)

	Jahr	Eff. Armlänge (m)	A (KT)	B (MM)
Äthertheorie	–	–	1	1
Michelson [1]	1881	1,2		0,005
Michelson & Morley [2]	1887	11		0,0005
Einsteins Postulate [3]	1905	–	0	0
Joos [4]	1930	21		$3 \cdot 10^{-5}$
Kennedy & Thorndike [5]	1932	0,3	$3 \cdot 10^{-3}$	
Brillet & Hall [6]	1979	34		$5 \cdot 10^{-9}$
Hils & Hall [7]	1990	2000	$7 \cdot 10^{-5}$	
Peters & andere [8]	2001	3000	$2 \cdot 10^{-5}$	
Peters & andere [9]	2003	900		$3 \cdot 10^{-9}$

aber nur unvollständig, und zwar umso besser, je größer ihre Brechzahl ist. Luft mit ihrer Brechzahl nahe 1 bringt keine merkliche Mitführung zustande. Ein anderer Erklärungsversuch stammt von Lorentz und Fitzgerald. Er besagt, dass die erwartete Zeitdifferenz zwischen den Laufzeiten in den beiden Armen des Interferometers genau dadurch kompensiert wird, dass der Arm, der in Richtung des Ätherwindes steht und daher die längere Laufzeit liefern sollte, gerade um einen entsprechenden Betrag verkürzt wird, und zwar infolge seiner Stellung zum Ätherwind. Beim Schwenken des Apparats soll diese Verkürzung demnach auf den anderen Arm übergehen. Das klingt zunächst völlig ad hoc spekuliert, aber Lorentz konnte tatsächlich zeigen, dass sich ein System elektrischer Ladungen unter gewissen Voraussetzungen genau so verhält, nämlich in Bewegungsrichtung um genau den fraglichen Betrag verkürzt. Es war daher nur die recht plausible Annahme nötig, alle Materie besteht letzten Endes aus elektrischen Ladungen, um dieses Verhalten für sämtliche Maßstäbe postulieren zu können. Allerdings wird man dabei eine miss-trauische Verwunderung nicht los, dass die Natur zu so üblen Tricks greifen sollte, um uns die Wahrheit über unseren absoluten Bewegungszustand vorzuenthalten.

Um quantitativ zu erfassen, wie „gut“ die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erfüllt ist, verwendet man „Testtheorien“, die mögliche Abweichungen vom idealisierten Verhalten in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v des Beobachters parametrisieren und messbar machen. In den einfachsten Testtheorien können wir die nach der Äthertheorie erwarteten Änderungen der Lichtgeschwindigkeit für $v \ll c$ in Anlehnung an

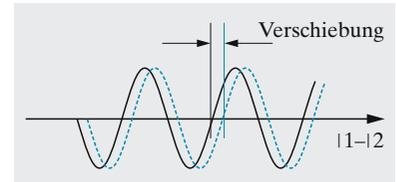


Abb. 12.3. Das Michelson-Morley-Experiment sollte zu einer Verschiebung der Modulation des Interferometersignals führen, ergibt aber ein „Null“-Resultat (s. Tabelle 12.2). Die Genauigkeit der Nullmessung wird durch die Schwankungen des Messsignals bestimmt. Daraus lässt sich eine obere Schranke für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit – die Koeffizienten A und B in (12.4) – ableiten

(12.3) näherungsweise angeben nach

$$\Delta c/c = 1 + A(v/c)^2 + B \cos \theta (v/c)^2. \quad (12.4)$$

Einsteins Postulate fordern, wie wir sehen werden, exakt $A = B = 0$. Weil experimentelle Ergebnisse immer streuen, kann man aber aus Experimenten nur obere Schranken für die Größen $\{A, B\}$ angeben. Beide Koeffizienten beschreiben eine Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung des Beobachters, $B \cos \theta$ charakterisiert darüber hinaus die Abhängigkeit der Lichtausbreitung von der Richtung im Raum, beschreibt die Anisotropie des Raumes. Bei Experimenten vom Typ Michelson-Morley werden Lichtlaufzeiten auf gleich langen Strecken in orthogonalen Raumrichtungen verglichen, so dass Beiträge der absoluten Geschwindigkeit des Beobachters gerade kompensiert werden. Dort wird also gerade der Koeffizient B bestimmt.

Der Einfluss der absoluten Bewegung auf die Lichtgeschwindigkeit, der A -Koeffizient, wurde zunächst getestet, indem das Michelson-Experiment mit Sternenlicht ausgeführt wurde. Später haben **Kennedy und Thorndike** eine Variante des Michelson-Interferometers verwendet, bei der ein Arm sehr viel länger als der andere ist, Abb. 12.4. Wegen der sehr unterschiedlichen Lichtlaufzeiten spielt nun auch die absolute Geschwindigkeit eine Rolle (also A und B), auch wenn sie sich in beiden Armen gleich auswirkte und mit dem Michelson-Morley-Aufbau nicht beobachtbar wäre. Hat das Michelson-Experiment bereits $B = 0$ ergeben, wird mit dem Kennedy-Thorndike-Experiment nur noch der A -Koeffizient getestet. Um Verschiebungen des Interferenzmusters durch Umwelteinflüsse auszuschließen, wurde das Interferometer im ersten Kennedy-Thorndike-Experiment in einem auf $1/1\,000$ Grad stabilisierten Wasserbad ausgeführt.

Man kann das Experiment auch so verstehen, dass ein Arm als Lichtuhr verwendet wird (s. Beispiel), während im anderen die Laufzeit gemessen wird. Heute wird stattdessen eine atomare Schwingung als Uhr verwendet, eine Atomuhr, die mit einem optischen Resonator verglichen wird, der aus zwei Spiegeln in festem Abstand besteht (s. auch Abschn. 15.2.2). In Tabelle 12.1 sind historische und jüngere Messergebnisse zusammengefasst.

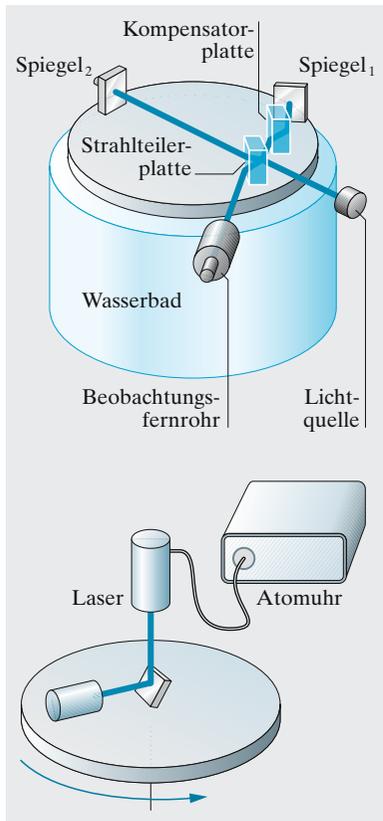


Abb. 12.4. *Oben:* Im ersten Kennedy-Thorndike-Experiment von 1932 betrug der Armlängenunterschied 30 cm. Um das Interferometer stabil zu halten, wurde die Anordnung in einem Wasserbad mit $1/1\,000$ Grad Temperaturkonstanz gehalten.

Unten: Heute wird bei Experimenten zur Konstanz oder Anisotropie der Lichtgeschwindigkeit mit einer Laboruhr (Atomuhr) die Frequenz eines Lasers stabilisiert und dessen Lichtlaufzeit in einem tiefgekühlten optischen Resonator in Abhängigkeit vom Rotationswinkel oder der Erdgeschwindigkeit gemessen, deren Variation durch die Jahreszeiten oder in geringerem Maß durch den Tagesgang verursacht wird

X Beispiel...

Lichtuhren. Ein zwischen zwei Spiegeln mit festem Abstand L hin und herlaufender Lichtstrahl erfüllt alle Anforderungen an eine Uhr mit dem Zeittakt $T = 2L/c$.

Wenn eine bewegte Lichtuhr senkrecht zur Flugrichtung orientiert ist, und das Lichtsignal nach der Zeit T_v seinen Umlauf beendet, sieht der ruhende Beobachter den längeren Weg $(2L_v)^2 = (2L)^2 + (vT_v)^2$. In der bewegten Uhr wird aber wiederum $T_v = 2L_v/c$ gemessen, deshalb muss gelten $T_v = T/(1 - (v/c)^2)^{1/2}$. Dieses Phänomen nennt man **Zeitdilatation**, es wird noch näher in Abschn. 12.2.4 beschrieben.

Ist die Lichtuhr parallel zur Flugrichtung orientiert, dann ist für den ruhenden Beobachter der Hinweg länger, der Rückweg kürzer ▶

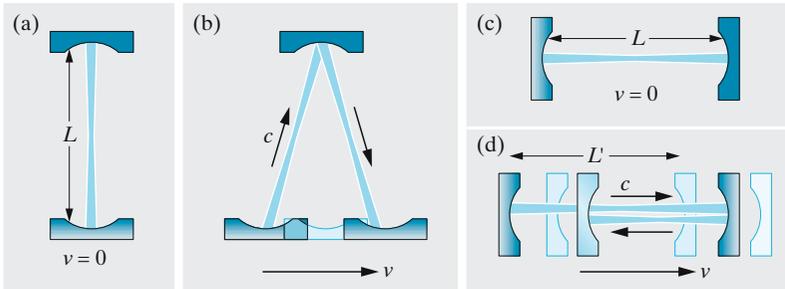


Abb. 12.5a–d. In einer Lichtuhr wird der Zeittakt durch die Umlaufzeit $T = 2L/c$ definiert. Ein bewegter Beobachter (b und d) sieht unterschiedliche Laufwege für die ruhende und die bewegte Lichtuhr

als bei der ruhenden Uhr. Die Laufzeit von links nach rechts beträgt $cT_{v1} = L_v + vT_{v1}$, die von rechts nach links $cT_{v2} = L_v - vT_{v2}$, und die Gesamtlaufzeit beträgt danach für den ruhenden Beobachter $T_v = T_{v1} + T_{v2} = (2L_v/c)/(1 - (v/c)^2)$. Aus der vorangegangenen Überlegung wissen wir, dass die Zeit im ruhenden System nach $T = 2L/c = T_v(1 - (v/c)^2)^{1/2}$ schneller vergeht. Daraus können wir schließen, dass die Länge für den ruhenden Beobachter verkürzt erscheint: $L_v = L(1 - (v/c)^2)^{1/2}$. Die **Längenkontraktion** untersuchen wir noch einmal in Abschn. 12.2.6.

12.1.3 Das Relativitätspostulat

Die fehlgeschlagenen Versuche, mit Hilfe des Michelson-Experiments einen Äther zu identifizieren, haben Poincaré letztlich veranlasst vorzuschlagen, dass es ein Naturgesetz sei, dass man ihn nicht entdecken könne. Man hat Lorentz Hilshypothese auch als den Todesschrei des Äthers bezeichnet. Einstein übernahm sie zwar, aber er baute sie in einen weitaus größeren Rahmen ein, in dem der so widerspruchsvolle Begriff des Äthers ganz verschwand. Die Schwierigkeiten der Äthertheorie waren Einstein natürlich wohl bekannt. Entscheidender war aus seiner Sicht aber die Rolle von bewegten Körpern – also Ladungen und Strömen – in der Elektrodynamik, die mindestens widerspruchsfrei zu den Maxwell-Gleichungen sein sollte. Deshalb lautet der Titel seines berühmten Aufsatzes aus dem Jahr 1905, in dem der die Spezielle Relativitätstheorie vorstellt, „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“.

Wir formulieren den Ausgangspunkt der speziellen Relativitätstheorie nach Einstein in zwei Postulaten, die durch die Experimente z. B. aus Tabelle 12.1, bestens gesichert sind. Das erste **Relativitätspostulat** stellt fest, dass weder durch mechanische noch elektromagnetische noch durch andere Experimente entschieden werden kann, ob ein unbeschleunigter Beobachter in Ruhe ist oder ob er sich bewegt:

1) Es gibt kein physikalisches Verfahren, um absolute Geschwindigkeiten oder Richtungen zu messen.

Als direkte Konsequenz aus diesem Prinzip gibt es im freien Raum auch keinen Punkt, der als Ursprung ausgezeichnet ist. Etwas genauer müssen wir heute formulieren, dass sich diese Forderung auf den leeren Raum, auf

*Einsteins beste Frage:
Was sehe ich, wenn ich neben einem
Lichtstrahl herlaufe?*

das Vakuum bezieht. Und wir wissen, dass der Raum eben nicht leer ist, er ist erfüllt von der 3 K-Hintergrundstrahlung, die ihm eine Temperatur verleiht.

Skizze

Die Wiederkehr des Äthers? Wir wissen heute, dass der Kosmos von der 3 K-Hintergrundstrahlung erfüllt ist, die wir als ein „Nachleuchten“ des Urknalls interpretieren. Dieses Strahlungsfeld bietet in gewisser Weise doch so etwas wie ein bevorzugtes Bezugssystem, denn von der Erde aus betrachtet erscheint die Temperaturstrahlung in der einen Richtung aufgrund des Dopplereffektes etwas kälter, in der anderen etwas wärmer, wie die Messungen des COBE-Satelliten in Abschn. 11.2.6 zeigen. Aus der Dipolasymmetrie in Abb. 11.18 bestimmt man eine Relativgeschwindigkeit des Sonnensystems von $v_{\text{CMB}} = 377 \text{ km/s}$. Ein neuer Äther wird damit allerdings nicht etabliert, denn die Relativitätspostulate (und die noch zu besprechenden Transformationsvorschriften, Abschn. 12.3) gelten für dieses ausgezeichnete wie für alle anderen Bezugssysteme.

Das zweite Relativitätspostulat, das streng genommen aus dem ersten schon folgt, stellt fest:

2) Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle.

Ursprünglich wurde auch dieses Postulat von dem Verlangen nach Widerspruchsfreiheit der mechanischen Bewegung zu den Maxwell-Gleichungen angeregt. Erst später, 1932, wurde dann mit dem Kennedy-Thorndike-Experiment (Abb. 12.4) die alternative Mitföhrhypothese widerlegt und damit auch dieses Postulat mit den quantitativen Experimenten aus Tabelle 12.1 untermauert. Das Michelson-Morley-Experiment verwendet ein Interferometer mit Armen identischer Länge und testet allein die Richtungsabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit, nicht den Einfluss der angenommenen absoluten Geschwindigkeit.

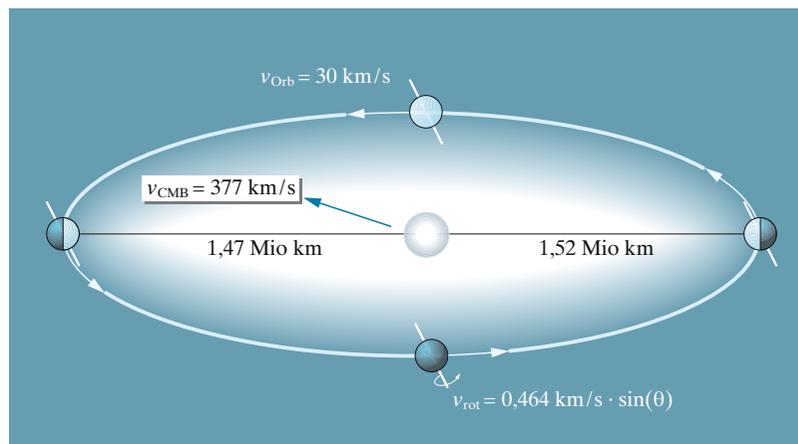


Abb. 12.6. Die 3 K-Hintergrundstrahlung (Cosmic Background, CMB) definiert ein ausgezeichnetes Bezugssystem im Kosmos. Die Graphik zeigt die wichtigsten Geschwindigkeiten von Sonne und Erde relativ zu diesem Inertialsystem

Tabelle 12.2. Raum und Raumzeit

Raum	Raumzeit
Orte, Punkte	Ereignisse, Weltpunkte
Koordinaten (x, y, z)	Koordinaten (ct, x, y, z)
Geometrische Objekte und Kurven	Vorgänge, Weltlinien
Euklidische Geometrie	Minkowski-Geometrie

12.1.4 Die 4. Dimension: Die Zeit

Ausgehend von der Frage, was Gleichzeitigkeit bedeutet, erzwingen die Relativitätspostulate die Aufgabe der Zeit als absolute Größe. Wir werden in Abschn. 12.3 näher untersuchen, wie sich die Zeit, die wir jedem Bezugssystem individuell zuordnen, beim Wechsel des Systems ändert.

In jedem konkreten Bezugssystem messen wir Abstände in der Zeit mit einer darin ruhenden Uhr. Aus dem ersten Relativitätspostulat folgt, dass die Periodendauer der Uhr eine unveränderliche Material- oder Systemgröße ist, dass ihre Ganggenauigkeit – gemessen in ihrem eigenen Bezugssystem – durch die Bewegung ihres Bezugssystems nicht beeinflusst wird. Als Uhren eignen sich im Prinzip alle zeitlich periodischen Vorgänge. Unsere genauesten technischen Uhren sind die Atomuhren (Abschn. 14.9.7), und wir können sogar jede atomare oder molekulare Schwingung als natürliche Uhren auffassen. Wenn wir z. B. Fraunhofer-Linien im Spektrum der Sonne oder anderer Sterne beobachten, gehen wir davon aus, dass ihre Wellenlängen im lokalen Bezugssystem noch immer identisch mit den in irdischen Labors gemessenen Wellenlängen sind. Modifikationen solcher beobachteten Absorptionslinien geben dann Aufschluss etwa über die lokale Bewegung oder Temperatur des Gases.

Zu den Raum-Koordinaten $\{x, y, z\}$ kommt also die Zeit t hinzu, die durch Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit (ct) auf natürliche Weise ebenfalls die Dimensionen einer Länge erhält. Wir werden sie von jetzt an als vierte Dimension eines Raum-Zeit-Kontinuums („Raumzeit“) auffassen, dessen geometrische Eigenschaften allein aus den Prinzipien der Relativität folgen. In Tabelle 12.2 vergleichen wir die Raumzeit mit dem dreidimensionalen Raum, der unseren Sinnen näher liegt.

Weltpunkte und Weltlinien

Die Welt ist keine statische Anordnung von Körpern in der recht willkürlich herausgegriffenen Gegenwart, sondern ein Prozess. Erst durch Einbeziehung aller vergangenen und zukünftigen Zustände ergibt sich ein vollständiges und verständliches Bild. Die Grundeinheit dieses Bildes ist nicht der Körper, sondern das Ereignis, auch Punktereignis oder **Weltpunkt** genannt. Ein Punktereignis ist ein Ereignis, das sich in einem hinreichend kleinen Raum- und Zeitbereich abspielt, es wird durch 4 Koordinaten $E = (ct, x, y, z)$ dargestellt. Was hinreichend klein heißen soll, hängt vom praktischen Standpunkt ab: Die Eruption eines Vulkans ist ein Punktereignis für Geologen, aber bestimmt nicht für die Betroffenen. Eine Folge von Punktereignissen nennt man die **Weltlinie** des Körpers.

Dieses alles ist formal nicht komplizierter als ein graphischer Fahrplan, in welchem Ankunftszeiten t an verschiedenen Orten $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ein-

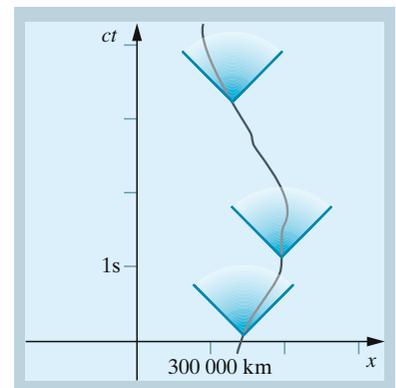


Abb. 12.7. Die Weltlinie eines materiellen Teilchens muss in jedem Weltpunkt innerhalb des Lichtkegels liegen. Deshalb muss ihre Geschwindigkeit $v < c$ betragen

getragen sind; die Zeit als vierte Dimension hat in diesem Bild nichts Mysteriöses. Für die Zeichnung auf dem Papier muss man ohnehin zwei der Raumdimensionen opfern. Eine solche Zeichnung (wohlgemerkt: von mir angelegt; das Relativitätspostulat gibt mir volles Recht zu meinem individuellen Standpunkt) enthält also zunächst meine Weltlinie, etwa bei $x = 0$. Ferner gibt es „Gleichzeitigkeitslinien“, die alle Ereignisse enthalten, die sich gleichzeitig, wenn auch vielleicht anderswo abspielen.

Das räumlich eindimensionale $\{ct, x\}$ -Beispiel in Abb. 12.7 zeigt die Bewegung eines materiellen Teilchens in einer Dimension mit seiner Weltlinie. Von jedem (Welt-)Punkt der Linie gehen Lichtstrahlen in die positive und in die negative x -Richtung aus, die sich im Bezugssystem des ruhenden Beobachters immer mit der Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen. Die Weltlinie muss sich also immer innerhalb des Lichtkegels aufhalten.

„Es ist schwierig, das qualitative Problem der Gleichzeitigkeit von dem quantitativen Problem der Zeitmessung zu trennen: Sei es, dass man sich einer Uhr bedient, sei es, dass man einer Übertragungsgeschwindigkeit, wie der des Lichtes, Rechnung zu tragen hat, da man eine solche Geschwindigkeit nicht messen kann, ohne eine Zeit zu messen. ... Wir haben keine unmittelbare Anschauung für Gleichzeitigkeit, ebensowenig für die Gleichheit zweier Zeitintervalle.“
(H. Poincaré, Rev. Métaphys. Morale, 6 (1898) dt. Übersetzung bei Teubner 1906)

12.2 Gleichzeitigkeit

Poincarés und Einsteins Überlegungen führen zwangsläufig dazu, sich über den Einfluss von Bewegung auf die Zeit- und Längenmessung genauestens Rechenschaft abzulegen. In Abb. 12.8 sind die Weltlinien für einen ruhenden und einen bewegten Beobachter dargestellt, die jeder über eine genau gehende Uhr verfügen aber nicht darin übereinstimmen werden, welche Ereignisse $\{E_1, E_2\}$ gleichzeitig stattfinden.

Wir **definieren die Gleichzeitigkeit** durch eine Messvorschrift, die zur Synchronisation genutzt werden kann: Zum Zeitpunkt T_- für den ruhenden bzw. T'_- für den bewegten Beobachter werden zwei Lichtblitze in entgegengesetzte Richtungen losgeschickt. Sie werden an zwei Spiegeln, die die Ereignisse $\{E_1 = (ct_1, x_1), E_2 = (ct_2, x_2)\}$ bzw. $E'_1, E'_2\}$ definieren, wie Billardbälle an der Bande reflektiert und von den Beobachtern empfangen. Für den ruhenden Beobachter B_0 im oberen Bild, das unserer nicht-relativistischen Intuition nahe ist, entnehmen wir die Definition für die Gleichzeitigkeit: Falls die reflektierten Signale gleichzeitig zum Zeitpunkt T_+ eintreffen, haben die beiden Ereignisse gleichzeitig zum Zeitpunkt

$$t = (T_+ + T_-)/2 \quad (12.5)$$

stattgefunden – im Sinne des Lichtuhren-Beispiels aus Abschn. 12.1.2 haben die Uhren gleich getickt. Durch Dehnen oder Schrumpfen des Quadrats $T_- E_1 T_+ E_2$ stellen wir leicht fest, dass alle Ereignisse auf der horizontalen Linie für den unbewegten Beobachter B_0 gleichzeitig auftreten.

Wenden wir dieselbe Prozedur aber auf Beobachter B_v an, stellen wir fest, dass er ganz andere Ereignisse als gleichzeitig wahrnimmt, nämlich per Definition diejenigen, bei denen die Signale $T'_- \rightarrow E'_1 \rightarrow T'_+$ und $T'_- \rightarrow E'_2 \rightarrow T'_+$ auf seiner Weltlinie zusammenfallen. Und wieder gilt dieser Zusammenhang für alle Ereignisse auf der Diagonalen des Rechtecks $T_- E'_1 T_+ E'_2$! Mit

$$x = (cT_+ - cT_-)/2 \quad (12.6)$$

kann man auch den **räumlichen Abstand** der beiden Ereignisse für den ruhenden Betrachter definieren.

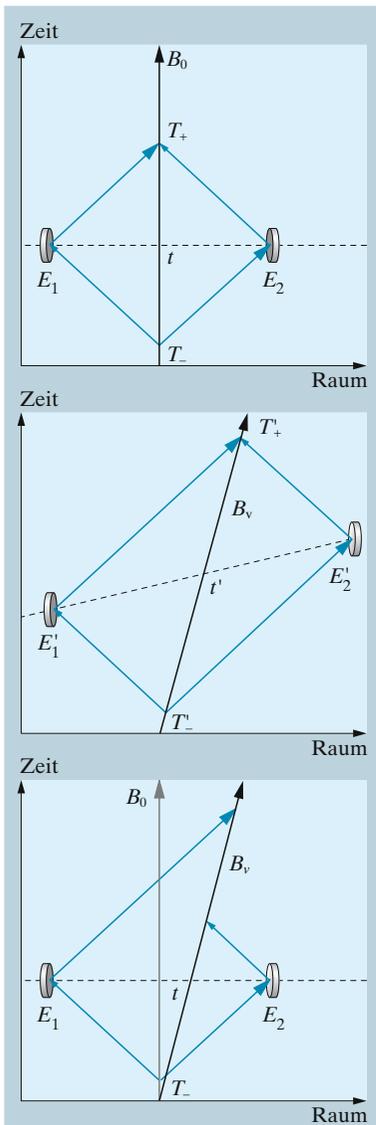


Abb. 12.8. Gleichzeitigkeit für einen ruhenden (*oben*, B_0) und einen bewegten Beobachter (*mitte*, B_v). Gleichzeitige Ereignisse liegen für die jeweiligen Beobachter auf den gestrichelten Linien. Vom Bezugssystem B_v aus betrachtet sind die Ereignisse $\{E_1, E_2\}$ nicht gleichzeitig (*unten*)

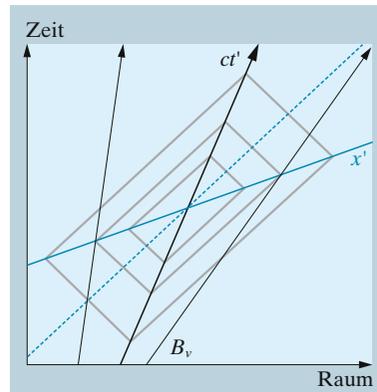


Abb. 12.9. Die Gleichzeitigkeitslinie entspricht der x' -Achse des bewegten Beobachters. Wenn die Weltlinie die Form $(x, y) = (vt, ct)$ hat, dann gilt für die x' -Achse die parametrische Beschreibung $(x, y) = (ct, vt)$

Damit ist klar, dass die **Zeit keine absolute Größe** mehr ist, die vielleicht revolutionärste Erkenntnis von Einstein, denn im Bezugssystem B_0 in Abb. 12.8 sind andere Ereignisse gleichzeitig als im System B_v . Und welche Zeit t' Beobachter B_v auf seiner Uhr abliest, das wird noch zu ermitteln sein. Gleichzeitigkeit, müssen wir erstaunt feststellen, besitzt physikalisch keine invariante Bedeutung: Begeben wir uns in das Bezugssystem B_v , und betrachten von dort das nunmehr bewegte System B_0 , dann finden die ehemals gleichzeitigen Ereignisse $\{E_1, E_2\}$ zu verschiedenen Zeiten statt!

Die geometrische Deutung erlaubt eine schnelle Beantwortung der Frage, wo denn die Orte der Gleichzeitigkeit – die x' -Achse eines beweg-

ten Beobachters – liegen müssen. In Abb. 12.9 ist zu erkennen, dass die Weltlinie B_v gerade eine Diagonale der Konstruktions-Rechtecke ist. Die Rechtecke liegen mit ihrer langen Seite immer parallel zur 45° -Diagonalen des (ct, x) -Koordinatensystems, deshalb muss die andere Diagonale aus der Weltlinie durch Spiegelung an der 45° -Diagonalen hervorgehen. Die Einheiten des neuen Achsensystems (ct', x') sind damit allerdings noch nicht festgelegt.

12.2.1 Pythagoras und Minkowski

Ereignisse, die in einem gewählten Bezugssystem gleichzeitig stattfinden, haben darin einen **raumartigen** Abstand, Ereignisse am gleichen Ort (äquilokal) haben einen **zeitartigen** Abstand. Der zeitartige Abstand zweier Ereignisse ist genau die Zeit die auf der Uhr vergeht, die frei durch die beiden Ereignisse hindurch „fällt“. Um diese Zeit zu bestimmen, muss man die Uhren verschieden bewegter Beobachter vergleichen, in unserem Beispiel in Abb. 12.10 von B_+ und B_- , die sich mit gleicher Geschwindigkeit von einem dritten Beobachter entfernen: Für B_0 sind die Uhren in B_+

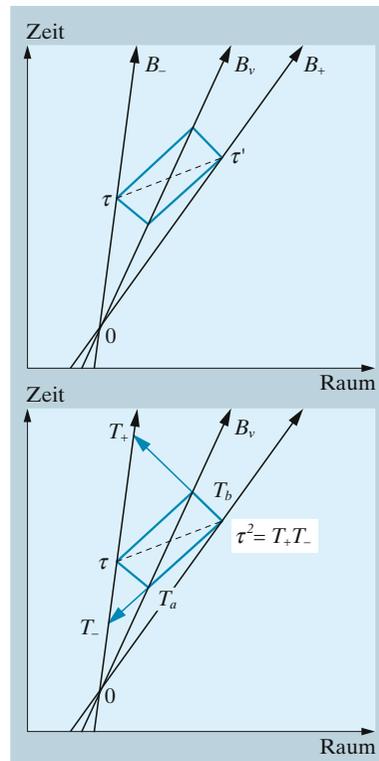


Abb. 12.10. Beschreibung von gleichzeitigen Ereignissen in zwei bewegten Bezugssystemen

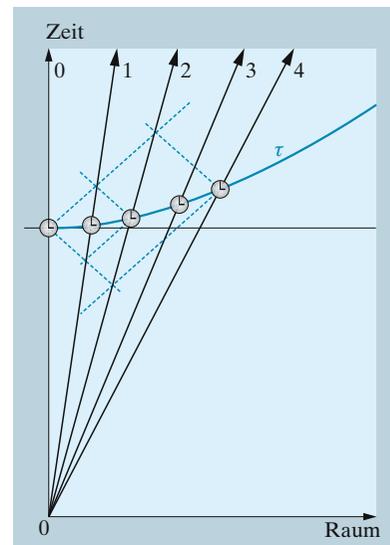


Abb. 12.11. Die blaue Hyperbel gibt die Ereignisse an, die alle den gleichen zeitlichen Abstand τ von einem gemeinsamen Ereignis 0 haben. Die Beobachter auf den Weltlinien lesen also auf ihren Uhren alle den gleichen Wert ab, wenn sie die Hyperbel kreuzen. Die gestrichelt eingezeichneten Licht-Parallelogramme beweisen, dass für Beobachter 1 (2) die Uhren 0 und 2 (0 und 4) gleiche Zeiten anzeigen. (In Abb. 12.17 ist die analoge Situation für die Längenkontraktion vorgestellt.)

und B_- dann perfekt synchronisiert, weil reflektierte Lichtblitze gleichzeitig zurückkommen. In dieser Situation gilt also $\tau = \tau'$: Aus dem rechten Teil entnimmt man ohne Schwierigkeiten durch Vergleich der Dreiecke T_+T_bO mit τT_aO und τT_bO mit T_-T_aO

$$\frac{T_+}{\tau} = \frac{T_b}{T_a} = \frac{\tau}{T_-}.$$

woraus durch Umformung die wichtige Relation folgt:

$$\tau^2 = T_+T_- \quad (12.7)$$

In Abb. 12.11 haben wir die Weltlinien mehrerer Uhren dargestellt, die alle zur gleichen Zeit vom gleichen Ort gestartet sind. Wir wollen nun feststellen, wann die Uhren die Zeit τ , die wir im ruhenden System messen, auf ihrer Uhr messen. Dazu wandeln wir die Gleichzeitigkeitskonstruktion, die in Abb. 12.11 nur für eine ausgewählte Weltlinie dargestellt ist, leicht ab: Vom Zeitpunkt τ im ruhenden System schicken wir den zeitlich vorwärts und rückwärts laufenden Lichtstrahl bis zur Weltlinie des bewegten Beobachters, der die T_- und T_+ -Ereignisse festlegt. Ein gleichzeitiges Ereignis wird wie in Abb. 12.8 konstruiert, alle gleichzeitigen Ereignisse liegen dann wieder auf der Diagonalen. So lässt sich geometrisch Punkt für Punkt die Hyperbel aus (12.7) konstruieren.

Die Relation aus (12.7) (noch besser zu erkennen in (12.9)) ist das Raumzeit-Äquivalent zu $a^2 + b^2 = c^2$, dem Satz des Pythagoras im euklidischen Raum. Die ungewohnten, rätselhaften Eigenschaften der Raumzeit werden hier schon deutlich: Obwohl die Abstände auf der Hyperbel in Abb. 12.11 nach unserem intuitiv-euklidischen Verständnis immer weiter entfernt liegen, haben sie in der Raumzeit gleichen Abstand zum Ursprung!

12.2.2 Abstände in der Raumzeit

Die Messvorschrift zur Gleichzeitigkeit liefert uns nach (12.5) und (12.6) die Abstände,

$$t = \frac{T_+ + T_-}{2} \quad x = \frac{cT_+ - cT_-}{2} \quad (12.8)$$

$$T_+ = t + (x/c) \quad T_- = t - (x/c)$$

Setzen wir diese Transformation in $\tau^2 = T_+T_-$ (12.7) ein, gewinnen wir das *Minkowski-Theorem* $\tau^2 = t^2 - (x/c)^2$. Es lässt sich zwanglos auf drei Dimensionen erweitern,

$$\tau^2 = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)/c^2, \quad (12.9)$$

und übernimmt wie schon erwähnt in der Raumzeit die Rolle des Satzes des Pythagoras. Die Größe τ charakterisiert den raumzeitlichen Abstand zwischen zwei Ereignissen in der Geometrie der Raumzeit. Dieser Abstand ist unabhängig von der Wahl des Bezugssystems, ob ruhend oder bewegt. Insbesondere für zwei Ereignisse am selben Ort gilt $\tau = t$, der Abstand τ

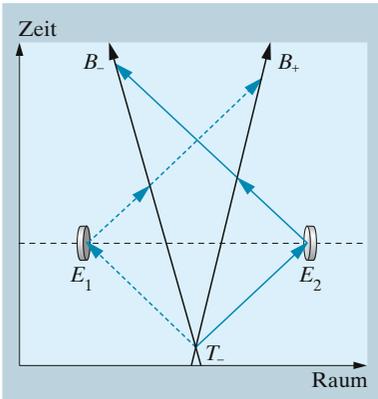


Abb. 12.12. Bewegte Beobachter können Ereignisse mit vertauschter Reihenfolge wahrnehmen

Tabelle 12.3. Abstände in der Raumzeit

Abstand	$(c\tau)^2$	Bemerkung
zeitartig	> 0	Es gibt ein bewegtes Bezugssystem, in welchem zwei Ereignisse mit diesem Raumzeit-Abstand am selben Ort geschehen, also innerhalb des Lichtkegels.
lichtartig	$= 0$	Diese Weltpunkte liegen genau auf dem Lichtkegel.
raumartig	< 0	Es gibt ein bewegtes Bezugssystem, in welchem zwei Ereignisse mit diesem Raumzeit-Abstand gleichzeitig geschehen, also außerhalb des Lichtkegels.

hat rein zeitlichen Charakter und wird **Eigenzeit** genannt. Nach dem Mathematiker Minkowski wird ein Raum, in welchem Abstände nach (12.9) gemessen werden, Minkowski-Raum genannt. In Tabelle 12.3 haben wir die Eigenschaften der Raumzeit-Abstände zusammengestellt.

12.2.3 Kausalität

Kausalität verlangt, dass die Ursache einer Wirkung immer vorausgehen muss, die zeitliche Reihenfolge also festgelegt ist. Kausalität ist eine notwendige Bedingung jeder physikalischen Erfahrung, jedenfalls sind bisher keine gegenteiligen Beobachtungen bekannt geworden. Die Überlegungen über Gleichzeitigkeit lassen es nun zu, dass verschieden schnell bewegte Beobachter (B_- und B_+ in Abb. 12.12) bestimmte Ereignisse sogar in vertauschter zeitlicher Reihenfolge erleben! Wenn wir nach aller Erfahrung davon ausgehen, dass jede Wirkung sich nur mit $v < c$ ausbreitet, können solche Ereignisse unmöglich einen kausalen Zusammenhang besitzen. Ein anderer Zusammenhang könnte nur mit hypothetischen Teilchen, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen und Tachyonen genannt werden, hergestellt werden. Solche Teilchen sind aber nirgends beobachtet worden.

Sind zwei Ereignisse in einem Bezugssystem gleichzeitig, dann kann man immer zwei weitere Systeme angeben, in welchen sich die Reihenfolgen gerade vertauschen. Ereignisse mit raumartigen Abständen können also niemals kausal verknüpft sein. Zu Ereignissen mit zeitartigen Abständen kann man dagegen immer ein Bezugssystem angeben, in welchem sie am selben Ort stattfinden. Weil raumartige Abstände von den zeitartigen durch den Lichtkegel getrennt werden, kann sich auch keine kausale Wirkung schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

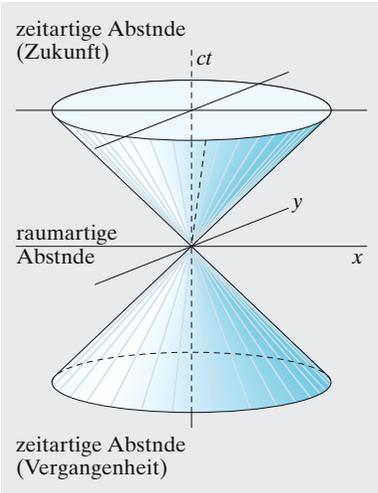


Abb. 12.13. Kausal mit dem Ursprungsereignis verknüpfte Ereignisse müssen innerhalb des Lichtkegels liegen, der hier in einer zweidimensionalen Welt dargestellt ist. Sie haben zeitartige Abstände. Außerhalb des Lichtkegels liegende Ereignisse haben raumartigen Abstand zum Ursprung, sie können kausal nicht verknüpft sein

12.2.4 Bewegte Uhren gehen langsamer – die Zeitdilatation

Wir haben schon im Lichtuhren-Beispiel in Abschn. 12.1.2 festgestellt, dass die Uhr eines bewegten Beobachters im Vergleich zu unserer eigenen, unbewegten Uhr langsamer zu vergehen scheint. Wir wollen diese **Zeitdilatation** (das bedeutet soviel wie Zeitdehnung) noch einmal im Hinblick auf das Relativitätspostulat untersuchen, d. h., keiner der Beobachter soll feststellen können, welcher von beiden der bewegte und welcher der unbewegte wäre.

Wenn sich der Beobachter mit der Geschwindigkeit v relativ zu unserem ruhenden Bezugssystem von einem Punkt $\mathbf{r}(t = 0) = \mathbf{r}_0$ nach

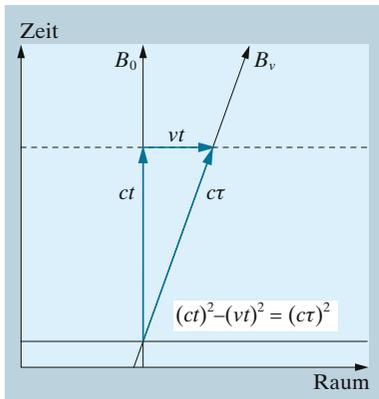


Abb. 12.14. Eigenzeitvergleich im ruhenden und im bewegten Bezugssystem

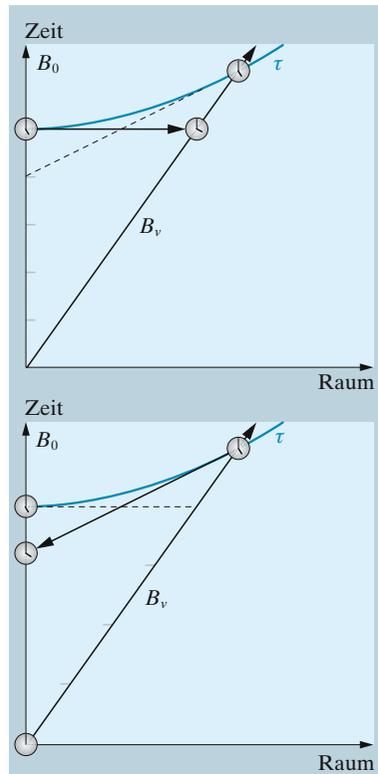


Abb. 12.15. Das Uhren-Paradoxon. *Oben* wird die Uhr des bewegten Beobachters B_v aus der Sicht des ruhenden Beobachters B_0 abgelesen, *unten* umgekehrt. Beide Beobachter lesen auf der von ihrem Standpunkt bewegten Uhr eine Zeit $T' < T$ ab. In diesem Beispiel wurde $v/c = 3/5$ gewählt; dabei ergibt sich eine Verkürzung um jeweils 20%

$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0$ geradlinig entfernt, dann sind die Ereignisse auf seiner Weltlinie für ihn äquilookal, in unserem Bezugssystem haben sie aber die Koordinaten $(0, x_0, y_0, z_0)$ und $(t, v_x t + x_0, v_y t + y_0, v_z t + z_0)$. Aus dem Minkowski-Theorem lässt sich direkt folgern, dass der Abstand τ zwischen den Ereignissen im Bezugssystem B_v allein zeitartig ist und den Wert $\tau^2 = t^2 - (v_x^2 t^2 + v_y^2 t^2 + v_z^2 t^2)/c^2 = t^2(1 - (v/c)^2)$ annimmt. In Anlehnung an Abb. 12.14 können wir die zeitartigen Abstand auch formulieren als

$$(c\tau)^2 = (ct)^2 - (vt)^2.$$

Die Uhr im bewegten Bezugssystem zeigt also erst die Zeit τ mit

$$\tau = \sqrt{1 - (v/c)^2} t, \quad (12.10)$$

wenn die Uhr im ruhenden System schon die Zeit $t > \tau$ anzeigt. Eine ruhende Uhr zeigt danach **immer die Eigenzeit** τ an.

In Abb. 12.15 haben wir die Gleichzeitigkeitsdiagramme für den ruhenden (links) und bewegten Beobachter (rechts) dargestellt. Man erkennt leicht, dass beide eine gegenüber der eigenen Uhr langsamer gehende Uhr beobachten, eine Situation, die gelegentlich als **Uhrenparadoxon** bezeichnet wird. Es ist schwer zu akzeptieren, dass meine Uhr für den anderen Beobachter, dessen Uhr ich langsamer gehen sehe, offenbar nicht schneller geht. Nach den Relativitätspostulaten ist diese Situation aber

sogar zwingend – sonst könnte man wieder bewegte von unbewegten Bezugssystemen unterscheiden. Wir fassen zusammen:

Jeder der Beobachter sieht die Uhr des anderen, bewegten Beobachters langsamer laufen als seine eigene.

Die Zeitdilatation lässt sich experimentell an zahlreichen mikroskopischen Systemen beobachten – nur die können sich so schnell bewegen dass messbare Effekte auftreten. Einstein selber hat Untersuchungen zur Zeitdilatation als *experimentum crucis* für seine Theorie bezeichnet.

Ein bekanntes Beispiel ist die **Lebensdauer von Myonen**, die sich in unserem Bezugssystem schnell bewegen. Myonen sind Elementarteilchen mit der 207-fachen Masse des Elektrons. Die Zeiteinheit im Bezugssystem der Myonen wird durch ihre Halbwertszeit festgelegt, und ihre Uhr wird abgelesen, indem die relative Zahl der Zerfälle der Myonen gemessen wird. Für ruhende Myonen gehorcht sie einem Exponentialgesetz mit der Zerfallskonstante (Lebensdauer) $\tau = 2,2 \mu\text{s}$. Myonen, die mit Beschleunigern auf eine Energie von 1 GeV beschleunigt werden, erreichen ca. 95% der Lichtgeschwindigkeit. Die Lebensdauer im Labor wird dadurch auf $\tau' = \tau/(1 - 0,95^2)^{1/2} \simeq 7 \mu\text{s}$ verlängert. Die Zeitdilatation spielt auch eine entscheidende Rolle für die Beobachtung von Myonen an der Erdoberfläche, die durch kosmische Strahlung in 9 000 m Höhe erzeugt werden (s. Aufgabe 12.2.5). Sie erreichen ebenfalls fast Lichtgeschwindigkeit und werden nur deshalb in größeren Mengen an der Erdoberfläche beobachtet.

Besonders effiziente Uhren sind natürliche, d. h. atomare Uhren bzw. deren Übergangsfrequenzen. Allerdings kommt zur Zeitdilatation dann noch der relativistische Dopplereffekt hinzu, so dass die Frequenz eines Oszillators mit der Frequenz ν_0 in seinem Ruhesystem im Laborsystem neben der Geschwindigkeit v auch noch vom Winkel θ zwischen Bewegungsrichtung und Beobachtungsrichtung abhängt (s. Abschn. 12.5, (12.22)):

$$\nu' = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} (1 - (v/c) \cos \theta) .$$

Die Zeitdilatation wird daher auch als **transversaler Doppler-Effekt** bezeichnet. Einstein hatte schon 1907 den naheliegenden Vorschlag gemacht, die Frequenz des emittierten Lichtes schnell bewegter Atome orthogonal zur Flugrichtung zu messen, dann ist lediglich die Zeitdilatation für die Frequenzverschiebungen verantwortlich. Allerdings ist die Justierung eines Experiments genau auf diesen Winkel maximal kritisch, deshalb wurden schon 1938 im ersten Labor-Experiment zur Zeitdilatation von Ives und Stilwell die Frequenzen parallel und antiparallel zur Bewegungsrichtung ($\theta = 0^\circ, 180^\circ$) der Atome gemessen: $\nu'_\pm = \nu_0(1 \pm (v/c))/\sqrt{1 - (v/c)^2}$. Das geometrische Mittel der beiden gemessenen Frequenzen sollte identisch sein mit der Frequenz im Ruhesystem, $\nu'_+ \nu'_- = \nu_0^2$. Abweichungen von den Vorhersagen der speziellen Relativitätstheorie können analog zu (12.4) als Beiträge proportional zu $(v/c)^2$ erwartet werden,

$$\nu'_+ \nu'_- = \nu_0^2 \left(1 + \alpha (v/c)^2 \right) .$$

Das bisher genaueste Experiment (s. 2. Beispiel in Abschn. 12.5) wurde mit gespeicherten Li^+ -Ionen bei einer Geschwindigkeit von $v = 0,064c$ ausge-

führt (G. Saathoff et al., Phys. Rev. Lett. **91**,190403 (2003)). Dabei wurde die Vorhersage der speziellen Relativitätstheorie für die Zeitdilatation mit einer Unsicherheit von $\alpha \leq 1,8 \cdot 10^{-7}$ bestätigt.

12.2.5 Das Zwillingsparadoxon

Es gibt kaum ein Phänomen, das unvorbereitete Menschen an der speziellen Relativitätstheorie mehr irritiert als das Zwillingsparadoxon:

x Beispiel ...

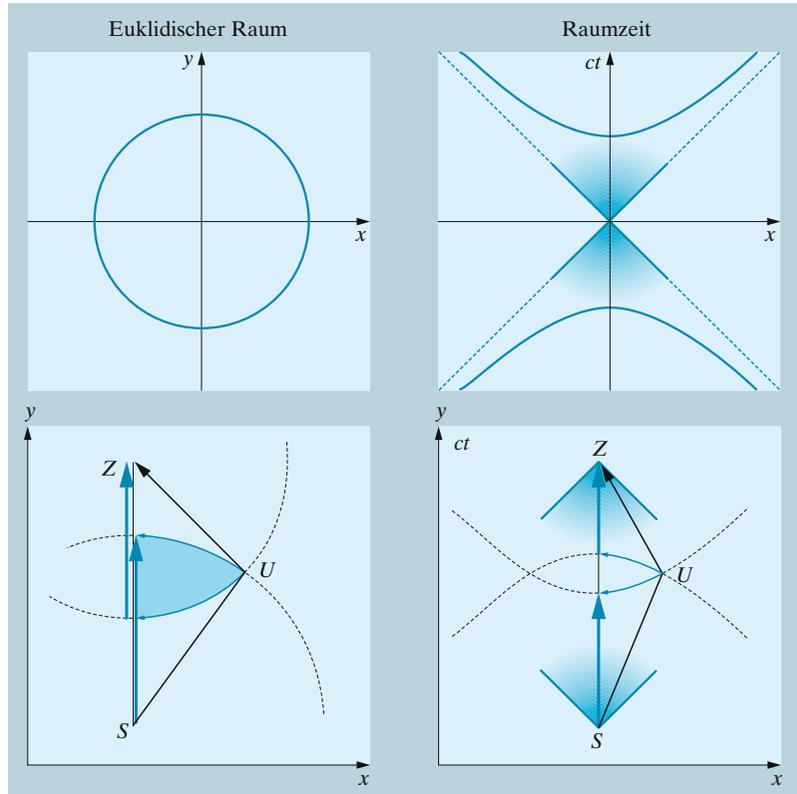
Von einem Zwillingspaar wird einer zum Astronauten. Er besteigt eine Rakete, die in kurzer Zeit auf $v/c = 3/5$ beschleunigt wird, und fliegt zum nächstgelegenen Stern alpha Centauri, den er in der Entfernung von 4,35 Lichtjahren „schon“ nach 7,25 (!) irdischen Kalenderjahren erreicht. Er verbringt dort wenige Tage und macht sich mit gleicher Geschwindigkeit auf die Heimreise, sodass er nach ungefähr 14,5 Jahren – eine halbe Generation später – wieder auf der Erde eintrifft. Er stellt bei der Ankunft fest, dass sein Kalender dem irdischen um 20% ($T' = T\sqrt{1 - (v/c)^2} = 0,8 \cdot T$), also fast 3 Jahre hinterläuft. Das Paradoxon: Der zurückgebliebene Zwilling hat sich doch ebenfalls in der jeweils entgegengesetzten Richtung bewegt, und ein jeder sollte doch die Uhr des anderen langsamer gehen sehen. Wo bleibt da das Relativitätspostulat?

Unsere Vorstellungskraft wird durch das Zwillingsparadoxon mächtig strapaziert, auch wenn das Beispiel zeigt, dass die Zeitdilatation für Menschen nur theoretisch erlebbar ist – man müsste schon kosmische Geschwindigkeiten erreichen und kosmische Entfernungen zurücklegen, damit die Uhren sichtbar auseinander rücken. Andererseits verlassen wir uns heute in großem Ausmaß auf höchst präzise Uhren, die weltweite Navigation wird vom Global Positioning System (GPS) gesteuert. Wie in Abschn. 14.9.7 geschildert befinden sich an Bord der 24 GPS-Satelliten Atomuhren, deren Signale an jedem Ort der Erde eine genaue Peilmessung zur Positionsbestimmung erlauben. Auf ihrer Umlaufbahn verfolgen die Satelliten eine andere Raumzeitbahn als die Erdbewohner. Daher müssen so genannte relativistische Korrekturen bei der Auswertung der Uhrens signale angebracht werden, um die geforderte Genauigkeit von $3 \cdot 10^{-9}$ oder wenigen Metern auf der Erdoberfläche zu erreichen.

Wir können das Zwillingsparadoxon mit Hilfe der ungewöhnlichen Geometrie der Raumzeit analysieren. Jedes Kind weiß, dass der Weg vom Start zum Ziel länger ist, wenn ein Umweg gemacht wird. Die Gerade ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte! So ist in Abb. 12.16 links unten der Weg *SUZ* in der euklidischen Welt natürlich länger als der gerade Weg *SZ*. Vollkommen anders verhält es sich aber in der Raumzeit – die Zeit der bewegten Uhren vergeht langsamer, deshalb bleibt bei der Rückkehr des bewegten Beobachters zur unbewegten Uhr eine Zeitdifferenz übrig.

Die Beschleunigungsphase als solche spielt keine Rolle, wenn man davon absieht, dass eine Weltlinie, die zum selben räumlichen Ausgangspunkt zurückkehren soll, eben kein ruhendes Bezugssystem repräsentiert,

Abb. 12.16. Ein Vergleich von Strecken gleichen Abstands zum Ursprung O : Im euklidischen Raum (*links oben*) ist es der Kreis; in der Raumzeit (*rechts oben*) eine Hyperbel. Der Umweg SUZ im euklidischen Dreieck ist immer länger als der direkte Weg SZ . Die analoge Überlegung für die Raumzeit zeigt: Der (bewegte) „Umweg“ ist kürzer als der direkte (unbewegte) Weg: Darauf beruht das Zwillingsparadoxon



dass sie das Inertialsystem mindestens einmal wechseln muss. Gedanklich könnte man sich auch vorstellen, dass der reisende Zwilling am Umkehrpunkt lediglich von der ankommenden auf eine andere Rakete in der Gegenrichtung umsteigt, die jeweils mit ihren eigenen Uhren ausgestattet sind.

Wir könnten den Weg, die Weltlinie des bewegten Beobachters auch noch ganz anders gestalten, seine Uhr würde gegenüber der unbewegten Uhr immer nachgehen. Und bei zwei bewegten Beobachtern geht dessen Uhr vor, der den kürzeren Raumzeit-Abstand zurückgelegt hat. Wenn die Weltlinie einer Uhr dargestellt wird mit $s \rightarrow (ct(s), x(s), y(s), z(s))$, dann wird trägt zu einem kurzen Wegelement, der Bogenlänge ds , nur die Eigenzeit τ bei,

$$ds = cd\tau = \left((cdt/ds)^2 - (dx/ds)^2 - (dy/ds)^2 - (dz/ds)^2 \right)^{1/2} ds,$$

im Ruhesystem der Uhr mit den Koordinaten $(c\tau, x', y', z')$ gilt $dx' = dy' = dz' = 0$. Wegen $(dx^2 + dy^2 + dz^2)/dt^2 = v^2$ gilt dann

$$d\tau = dt \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Die Zeit, die auf einer an einer Weltlinie entlang bewegten Uhr zwischen zwei Ereignissen $A:(ct_A, \mathbf{r}_A)$ und $B:(ct_B, \mathbf{r}_B)$ verstreicht, lässt sich dann

nach

$$c \int_A^B d\tau = \int_{s_A}^{s_B} \sqrt{(cdt/ds)^2 - (dx/ds)^2 - (dy/ds)^2 - (dz/ds)^2} ds \quad (12.11)$$

durch Integration entlang der Weltlinie berechnen.

✕ Beispiel...

Fliegende Uhren. Im Jahr 1971 wurden 4 Atomuhren in Linienflugzeuge verladen und zweimal um die Welt geflogen, einmal in östlicher und einmal in westlicher Richtung. Beim Vergleich mit einer am Boden verbliebenen Uhr zeigte der Flug ostwärts nach der Landung eine um 59 ± 10 ns zurückgebliebene, beim Flug westwärts eine um 275 ± 21 ns vorgelaufene Uhrzeit an. Aus der Theorie wurde eine Kombination von zwei Effekten vorhergesagt: Einem Beitrag durch das veränderte Gravitationsfeld der Erde in ca. 9 km Flughöhe, und einem kinematischen Beitrag wegen der Zeitdilatation, der nach (12.11) zu berechnen war. (J.C. Hafele and R.E. Keating, *Science* **177**, 166 (1972)). Wie kommt der Unterschied von westlicher und östlicher Flugrichtung zustande?

Die genauen Werte des Experiments hängen von den Details der Reiseroute und Reisegeschwindigkeiten ab. Wir können aber Schätzungen der erwartenden Zeitdifferenzen geben:

Alle Uhren, ob im Flugzeug oder am Boden, rotieren um den Erdmittelpunkt, und der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Flugstrecke am Äquator verläuft. Die Zeitanzeige der auf dem Erdboden (Radius R , Winkelgeschwindigkeit ω) rotierenden Uhren erfährt einen kinematischen Beitrag, den wir aus $T_B = T_0(1 - v/c)^2)^{-1/2} \approx T_0(1 + v^2/2c^2) = T_0(1 + (R\omega)^2/2c^2)$ abschätzen können, worin T_0 die Zeit eines gedachten Ruhesystems ist. Uhren, die in westlicher (östlicher) Richtung mit der Geschwindigkeit $-v$ ($+v$) über Grund unterwegs sind, erfahren mit $R\omega = v_B$ eine Änderung $T_F^\pm \approx T_0(1 + (v_B \pm v)^2/2c^2)$. Die Differenz ergibt sich somit zu $\Delta T_F^\pm = T_B - T_F^\pm \approx -T_B(\pm 2v_B v + v^2)/2c^2$, wobei wir wegen der sehr kleinen Änderungen $T_0 \approx T_B$ annehmen können. Die Geschwindigkeit der Erdoberfläche am Äquator beträgt $v_B = 465$ m/s, und bei 40 Flugstunden beträgt die Geschwindigkeit über Grund gerade etwa 1 000 km/h oder 278 m/s. Die berechneten Zeitdifferenzen sind 43 ns in westlicher, -267 ns in östlicher Richtung. In westlicher Richtung bewegt sich das Flugzeug der Erdrotation entgegen, d. h. es kompensiert teilweise die durch die Erdrotation verursachte Zeitdilatation. Nach der Landung geht diese Uhr gegenüber der zurückgebliebenen also vor, sie entspricht dem zurückgebliebenen Zwilling! In östlicher Flugrichtung geht die im Mittel schneller bewegte Uhr dagegen nach.

Der Vollständigkeit halber geben wir auch den Gravitationsbeitrag an, der eine Konsequenz der allgemeinen Relativitätstheorie ist (Abschn. 12.10). Er berechnet sich aus $T = T_0(1 + g(R+h)/c^2)$, wobei wir den Erdradius R und die Flughöhe h schon getrennt ►

angegeben haben. Nach 40 Flugstunden in 9 km Höhe sollte also die Uhren gegenüber der am Boden gebliebenen Uhr eine Zeitdifferenz $\Delta T_G = T_h - T_B = 141 \text{ ns}$ sowohl für die westliche als auch die östliche Flugrichtung anzeigen.

12.2.6 Maßstabsvergleich und Längenkontraktion

Die Abhängigkeit der Ortskoordinaten vom Bezugssystem war auch schon Galilei geläufig, sie ist gerade Inhalt der Galilei-Transformation (12.1). Nachdem wir festgestellt haben, dass bewegte Uhren eine gegenüber unserem ruhenden Bezugssystem verlangsamte Zeit anzeigen, dass also der Zeitmaßstab von der Bewegung abhängt, erwarten wir eine Bewegungsabhängigkeit auch für die bewegten Maßstäbe zur Bestimmung von räumlichen Abständen.

Wir vergleichen zwei auf identische Weise produzierte (u. U. sehr lange) Maßstäbe. Wir nehmen an, dass wir uns mit Beobachter B_v zum Zeitpunkt $t = 0$ bei O treffen, unsere Uhren auf Null stellen und außerdem jeder das linke Ende unserer Maßstäbe (x_L, x'_L) bei uns haben.

Ganz sicher betrachten beide Beobachter ihren eigenen Maßstab als jeweils eine Gleichzeitigkeitslinie und bestimmen seine Länge L aus den (x, y, z) -Koordinaten seiner Endpunkte. Nach dem Minkowski-Theorem muss in beiden Bezugssystemen die Relation

$$-L^2 = (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$$

erfüllt sein, die einen raumartigen Abstand charakterisiert und für $t = t' = 0$ genau die Länge des Stabes im jeweiligen Bezugssystem angibt. Die rechten Stabenden (x_R, x'_R) sind also ebenfalls auf einer Hyperbel zu finden (Abb. 12.17), ihre Weltlinien entsprechen gerade den Tangenten an die Hyperbel im Schnittpunkt mit der Gleichzeitigkeits- oder x' -Achse. So wie eine zeitliche Folge von Punktereignissen zu einer Weltlinie führt, kann die Bewegung des linienförmigen Stabes als **Weltfläche** gedeutet werden.

In der Argumentation können wir uns an dem Beispiel aus der Zeitdilatation orientieren: Wenn wir die Stablängen in unserem Ruhesystem B_0 messen, so liegen unsere Stabenden bei $\{x_L, x_R\} = \{0, L\}$ im ruhenden, die des bewegten Stabes bei $\{x_L, x_R\} = \{0, L_v < L\}$. Misst hingegen der bewegte Beobachter in seinem Bezugssystem, findet er seinen eigenen Stab bei $\{x'_L, x'_R\} = \{0, L\}$, den Stab in unserem System dagegen sieht er ebenfalls verkürzt, $\{x'_L, x'_R\} = \{0, L_0 < L\}$. Wie bei der Zeitdilatation ergibt sich hier also ein scheinbarer Widerspruch: Von beiden Bezugssystemen aus scheint der jeweils in Bewegung befindliche Maßstab verkürzt. Die Situation muss aber genau so sein wie in Abb. 12.17 vorgestellt, weil andernfalls ein Widerspruch gegen das Relativitätspostulat entstünde.

Jeder der Beobachter muss den Stab des anderen um genau den gleichen Faktor gegen seinen eigenen verkürzt finden.

Den **Lorentz-Fitzgerald-Kontraktionsfaktor** können wir analog zur Zeitdilatation bestimmen. Das Ergebnis lautet:

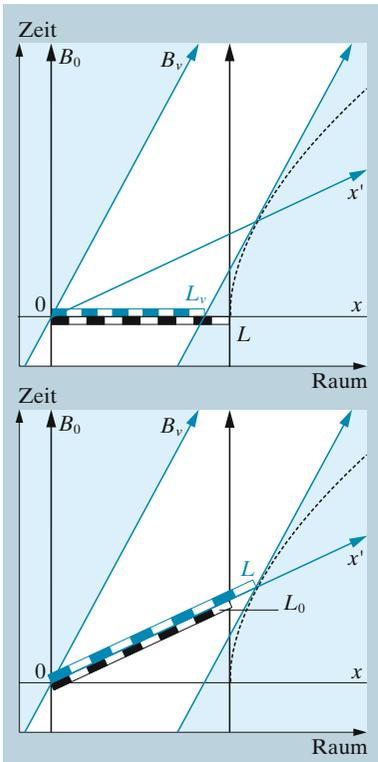


Abb. 12.17. Lorentz-Fitzgerald Längenkontraktion. Der Maßstab im bewegten Bezugssystem ist durch die hellblaue Weltfläche charakterisiert. Links werden die Längen des ruhenden und des bewegten Maßstabs bei 0 im ruhenden System B_0 bestimmt, rechts im bewegten System B_v . Die gestrichelte Linie gibt den Ort gleicher Länge L für bewegte Bezugssystem an. Diese Abbildung erhält man auch durch Spiegelung von Abb. 12.11 an der Diagonalen

$$L_v = \sqrt{1 - (v/c)^2} L. \quad (12.12)$$

Mit unserer Betrachtung haben wir auch gleich das so genannte **Garagen-Paradoxon** aufgeklärt: Passt ein schnell fahrendes Auto in eine Garage gleicher Länge? Vom Standpunkt des Garagenbetreibers ja, denn das bewegte Auto ist in seinem Bezugssystem kürzer als die Garage. Vom Standpunkt des Autofahrers ist dagegen die Garage kürzer, er sagt also nein. Und dass sie beide Recht haben, wissen wir nach der vorausgegangenen Überlegung.

12.3 Die Lorentz-Transformation

Wir fassen unsere bisherigen Erkenntnisse zusammen, um die Transformationsgleichungen für die Koordinaten der Raumzeit, die **Lorentz-Transformation**, zu erhalten. Ein Weltpunkt P mit $\mathbf{x} = (ct, x)$ wird im unbewegten Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren angegeben.

$$\mathbf{x} = ct\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_x \quad \text{mit } \mathbf{e}_0 = (1, 0), \quad \mathbf{e}_x = (0, 1)$$

Im bewegten Bezugssystem wird der Punkt P zuerst in den Einheitsvektoren seines Ruhesystems, $\mathbf{x}' = ct'\mathbf{e}_{0'} + x'\mathbf{e}_{x'}$, und dann in den Koordinaten von B_0 ausgedrückt. Die Einheitsvektoren müssen im System B_0 die Richtungen $\mathbf{e}_{0'} \propto (v, c)$ und $\mathbf{e}_{x'} \propto (c, v)$ besitzen. Ein ruhender Beobachter sieht im bewegten Bezugssystem die Zeit $t' = 1$ wegen der Zeitdilatation erst dann verstrichen, wenn seine Uhr schon $t = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ zeigt. Deshalb gilt:

$$\mathbf{e}_{x'} = \frac{(v/c, 1)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad \mathbf{e}_{0'} = \frac{(1, v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Aus dem (euklidischen) Skalarprodukt $x' = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_{x'}$ gewinnt man ohne Schwierigkeiten mit $x' = ct'\mathbf{e}_{0'} \cdot \mathbf{e}_x + x'\mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{e}_x$ etc.:

$$B_0 \rightarrow B_v: \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad t = \frac{vx'/c^2 + t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (12.13)$$

Man kann nachrechnen oder direkt erraten, dass die Umkehrtransformation durch den Ersatz $v \rightarrow -v$ benannt werden kann:

$$B_v \rightarrow B_0: \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad t' = \frac{-vx/c^2 + t}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

In Matrizenform lässt sich die Lorentztransformation mit $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/(1 - \beta^2)^{1/2}$ sehr kompakt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \\ &= \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12.14)$$

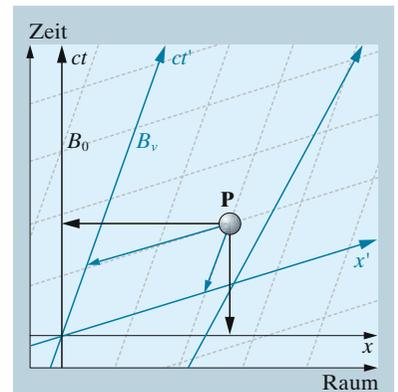


Abb. 12.18. Lorentz-Transformation gibt die Koordinaten der Weltpunkte in ruhenden und in bewegten Bezugssystemen an

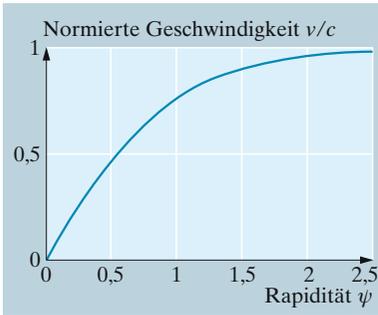


Abb. 12.19. Der Zusammenhang von Rapidity und v/c . Bei der Addition zweier Rapiditäten kann der Wert 1 nicht überschritten werden

Die Lorentz-Transformation hat formal einige Ähnlichkeit mit einer Drehung im euklidischen Raum, wir können die Transformationsmatrix nämlich auch mit

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi \\ -\sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad \text{mit } \tanh \psi = \frac{v}{c} \quad (12.15)$$

darstellen. Die Größe $\psi = \text{Artanh}(v/c)$ heißt **Rapidity**. Bei der relativistischen Geschwindigkeitsaddition (s. Abschn. 12.6) werden die Rapiditäten addiert.

12.4 Vierervektoren

Weil Orts- und Zeitkoordinaten in der speziellen Relativitätstheorie gleichmäßig behandelt werden, ist es sinnvoll, die Unterscheidung auch formal aufzugeben. Neben diesem konzeptionellen Aspekt gewinnen wir dabei eine sehr viel übersichtlichere Darstellung. Die Koordinaten eines Weltpunktes werden als **Vierervektor** oder **4-Vektor** notiert,

$$\mathbf{x} = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = x^i. \quad (12.16)$$

In der Relativitätstheorie ist es üblich, diesen Vektor auch in der Kurzform $x^i = (ct, \mathbf{r})$ anzugeben.

Was zunächst nur als mathematischer, vielleicht ästhetischer Kniff wirkt, hat weit reichende Konsequenzen. Bei einer Drehung des Koordinatensystems ändern sich nämlich die Abstände nicht. Der Abstand eines Ereignisses (ct, \mathbf{r}) vom Ursprung z. B. hat eben in allen Systemen den gleichen Wert $(ct)^2 - \mathbf{r}^2 = c\tau^2$, und nur die Aufteilung in die räumliche und die zeitliche Komponente wird von jedem Beobachter verschieden vorgenommen. Ganz allgemein ist der Abstand von Raumzeit-Ereignissen, den wir jetzt **4-Abstand** oder **4-Länge** nennen wollen, invariant gegen den Übergang in ein Bezugssystem, das gegen das erste gleichförmig bewegt ist. Der 4-Abstand verhält sich also genauso wie ein räumlicher Vektor gegen Drehungen des Koordinatensystems: die Komponenten ändern sich, aber die Länge bleibt invariant. Man kann daher die raumzeitlichen Unterschiede zwischen den Koordinaten zweier Punktereignisse als 4-Vektor auffassen. Analog lassen sich viele andere 4-Vektoren definieren, indem gefordert wird, dass ihre Raumzeit-Länge unter der Lorentz-Transformation konstant bleibt. Man spricht von **Lorentz-Invarianz** oder **relativistischer Invarianz**, der letzten Endes alle physikalischen Gesetze gehorchen müssen. Vierervektoren haben eine Reihe wichtiger und interessanter Eigenschaften:

Die relativistische 4-Länge des Vierervektors ist bekanntlich nach (12.9) definiert, $c\tau^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Die Länge eines Vektors wird allgemein aus dem Skalarprodukt berechnet, und um eine bequeme Schreibweise zu erzielen, wurde eine zweite „Sorte“ von Vierervektor eingeführt. Der schon bekannte Vierervektor x^i aus (12.16) heißt **kontravariant**, der zusätzliche Vektor mit

$$\begin{aligned} x_i &= (ct, -\mathbf{r}) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad \text{mit} \\ x_0 &= x^0, \quad x_1 = -x^1, \quad x_2 = -x^2, \quad x_3 = -x^3 \end{aligned} \quad (12.17)$$

heißt **kovariant**. In der so genannten **Einsteinschen Summenkonvention** wird das Summenzeichen fortgelassen. Stattdessen wird gefordert, über alle Indizes zu summieren, die gemeinsam und an gegenständiger Position auftreten (also einer oben und einer unten). Das Skalarprodukt zeigt beispielhaft, dass dadurch eine wesentliche Vereinfachung der Schreibweise erreicht wird:

$$x^i x_i = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 = (ct)^2 - \mathbf{r}^2 = (c\tau)^2$$

Diese Schreibweise ist auf alle Vierervektoren anwendbar.

In den Texten über die Relativitätstheorie wurden Symbole und Abkürzungen eingeführt, um die Lesbarkeit weiter zu verbessern: Beim Wechsel von einem ruhenden in ein mit v bewegtes Bezugssystem tauchen immer wieder dieselben Faktoren auf, z. B. der Kontraktionsfaktor γ aus Abschn. 12.2.6. Häufig findet man die Abkürzungen

$$\beta = v/c \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (12.18)$$

Die auf alle 4 Dimensionen erweiterte Lorentztransformation lautet in Matrixform und mit diesen Symbolen

$$x'^i = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (12.19)$$

Die Matrix wird in der kovarianten Formulierung auch mit $(\Lambda_v)^i_j$ bezeichnet, wobei (i, j) wie üblich die Position der Matrixelemente bezeichnet. Dann kann man im Sinne der Einsteinschen Summenkonvention noch kürzer schreiben

$$x'^i = (\Lambda_v)^i_j x^j.$$

Jede Größe x^i , die sich beim Übergang von einem ruhenden in ein bewegtes Bezugssystem nach dieser Gleichung transformiert, ist per Definition ein 4-Vektor.

Die Früchte dieser Begriffsbildung werden wir in den nächsten Abschnitten ernten. Dies versteht man vielleicht folgendermaßen: Der übliche Vektorformalismus macht es überflüssig, Naturgesetze wie das Parallelogramm der Kräfte oder die unabhängige Superposition von verschiedenen gerichteten Bewegungen, auf die Galilei und selbst der Student vor einem Jahrhundert noch viel Zeit verwandten, gesondert zu formulieren. Beides und vieles andere ist bereits als triviale Folgerung darin enthalten, dass man Kräfte und Geschwindigkeiten als Vektoren kennzeichnet. Die vereinfachende Kraft des Skalar- und des Vektorproduktes und erst recht der Differentialoperatoren der Vektoranalysis sind noch viel größer. Dies führt so weit, dass z. B. jeweils zwei der vier Maxwell-Gleichungen zu einem Naturgesetz zusammengefasst werden müssen, dass man das elektromagnetische Feld als antimetrischen Tensor erkennt, usw. (s. Abschn. 12.9.2). Auch das Gravitationsgesetz zusammen mit den Bewegungsgleichungen der Körper im Schwerfeld werden so schließlich „nahezu trivial“. Nicht-trivial bleibt nur, dass sich die Wirklichkeit diesen immerhin noch relativ

einfachen Begriffen so widerspruchlos fügt, dass Kräfte sich wirklich wie Vektoren und die genannten Felder wie Tensoren verhalten.

x Beispiel . . .

4-Geschwindigkeit. In Verallgemeinerung der newtonschen Mechanik $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ wollen wir eine **relativistisch invariante Geschwindigkeit** suchen. Die Form $v^i = dx^i/dt$ ist nicht invariant, weil t nicht relativistisch invariant ist. Wohl aber ist die Kombination aus der invarianten skalaren Operation $d/d\tau = cd/ds$ und dem 4-Vektor x^i ebenfalls invariant:

$$v^i = dx^i/d\tau$$

Nach (12.11) gilt $d/d\tau = \gamma d/dt$ und wir finden

$$v^i = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$$

Die $v^0 = \gamma c$ -Komponente der 4-Geschwindigkeit hängt direkt mit dem 4-Impuls zusammen, s. Abschn. 12.8. Die relativistische Länge der 4-Geschwindigkeit beträgt

$$v^i v_i = \frac{c^2 - v^2}{1 - (v/c)^2} = c^2.$$

12.5 Relativistischer Doppler-Effekt

Bei der Ausbreitung von Schall spielt das Medium – in erster Linie die Luft – als Träger der akustischen Dichtewellen die entscheidende Rolle. Wird die Schallquelle relativ zum Medium bewegt, tritt der **nicht-relativistische Dopplereffekt** auf (vgl. Abschn. 4.3.5): Fährt die Schallquelle auf den Empfänger zu, ergibt sich eine Frequenz- bzw. Tonerhöhung; fährt sie davon, wird die Frequenz erniedrigt. Entsprechendes wird für die Ausbreitung von Lichtwellen (allgemeiner elektromagnetischen Wellen) erwartet, nur breitet sich das Licht eben ohne ein Medium aus und unterliegt dem **relativistischen Dopplereffekt**.

Wir betrachten in Abb. 12.20 einen ruhenden Sender (Bezugssystem B_0), der ein periodisches Lichtsignal der Länge T' bzw. mit der Frequenz $\nu' = 1/T'$ abstrahlt, wobei T' in der Eigenzeit des Systems gemessen wird. Im bewegten Bezugssystem B_v , das sich parallel zur Beobachtungsrichtung mit v_{\parallel} entfernt, werden Signale mit der Periodenlänge $T = 1/\nu$ empfangen. Um das Verhältnis von T und T' zu berechnen, können wir die Weltlinie B_v parallel so verschieben, dass die Perioden ein gemeinsames Anfangsereignis haben. Wir erhalten dann die Bedingung $v_{\parallel} t = c(T - t)$ für die im ruhenden Bezugssystem beobachtete Zeit t . Wir müssen die Eigenzeit nach $T' = t\sqrt{1 - (v/c)^2}$ berechnen und erhalten nach kleinen Umformungen für die im ruhenden System beobachtete Periodenlänge

$$T = T' \frac{1 + v_{\parallel}/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (12.20)$$

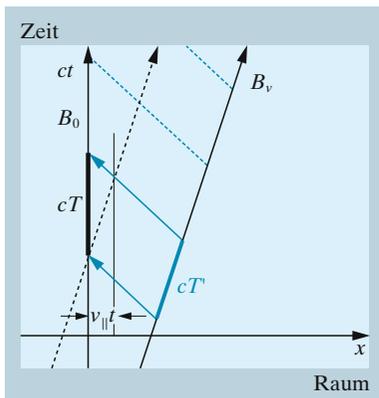


Abb. 12.20. Der relativistische Dopplereffekt

Wenn die Beobachtungsrichtung entlang des Wellenvektors \mathbf{k} von der Bewegungsrichtung \mathbf{v} abweicht, trägt nur die Geschwindigkeitskomponente $v_{\parallel} = -v \cos \theta$ zur Dopplerverschiebung bei, wie man aus der Geometrie in Abb. 12.21 erkennen kann. Der relativistische Dopplereffekt ergibt sich aus dieser Beziehung wegen $\nu = 1/T$ ganz offensichtlich zu

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + v_{\parallel}/c} = \nu' \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - (v/c) \cos \theta} \quad (12.21)$$

Um einen bewegten Sender, z. B. ein strahlendes Atom, bei seiner Eigenfrequenz anzuregen, muss man aus dem Ruhesystem heraus also die Frequenz

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} (1 - (v/c) \cos \theta) \quad (12.22)$$

verwenden. Für $\theta = 0^\circ$ entfernt sich der Sender vom Empfänger ($v_{\parallel} = -v$), für $\theta = 180^\circ$ läuft er darauf zu ($v_{\parallel} = v$), also gilt

$$\nu(0^\circ) = \nu' \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{1/2} \quad \text{und} \quad \nu(180^\circ) = \nu' \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right)^{1/2} \quad (12.23)$$

Die Taylor-Entwicklung dieser Spezialfälle ergibt

$$\nu = \nu' \left(1 \pm \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \pm \dots \right) \quad (12.24)$$

Die Frequenzverschiebung wird dominiert vom **Doppler-Effekt 1. Ordnung**, der eine Rotverschiebung für davoneilende, eine Blauverschiebung für ankommende Sender verursacht. Die Dopplerverschiebung von Licht spielt eine wichtige Rolle zum Beispiel in der Kosmologie: Wir wissen aus der Rotverschiebung des Lichtes entfernter Galaxien, dass das Weltall expandiert. Und die Laserkühlung (Abschn. 14.7.3) beruht gerade auf der geschwindigkeitsabhängigen Verschiebung atomarer Resonanzlinien.

✕ Beispiel ...

Dopplereffekt 1. Ordnung. In Abschn. 12.2.4 haben wir eine moderne Variante des Ives-Stilwell-Experiments zur Überprüfung der relativistischen Zeitdilatation beschrieben. Das Experiment wurde 2003 mit einer Absorptionslinie von Li^+ -Ionen bei $\lambda_{\text{Ruhe}} = 549 \text{ nm}$ (Sie beginnt im metastabilen $2s^3S_1$ -Zustand des Helium-ähnlichen Li^+ -Ions.) an einem Speicherring ausgeführt. In Abb. 12.22 ist die Abnahme des resonanten Fluoreszenzsignals gezeigt, wenn im bewegten Bezugssystem die Li-Ionen mit dem von vorne und dem von hinten kommenden Laserstrahl gleichzeitig in Resonanz sind. Welche Ionengeschwindigkeit muss man einstellen, um für das Experiment einen Festfrequenz-Argonlaser bei $\lambda_+ = 514 \text{ nm}$ für den nachlaufenden Lichtstrahl zu verwenden, Welche Wellenlänge ist dann für den rotverschobenen Laser erforderlich?

Die Frequenzverschiebung ist noch immer so gering, dass wir den Doppler-Effekt 1. Ordnung aus (12.24) gut verwenden können. ▶

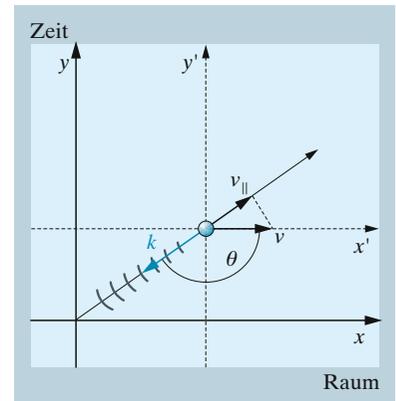
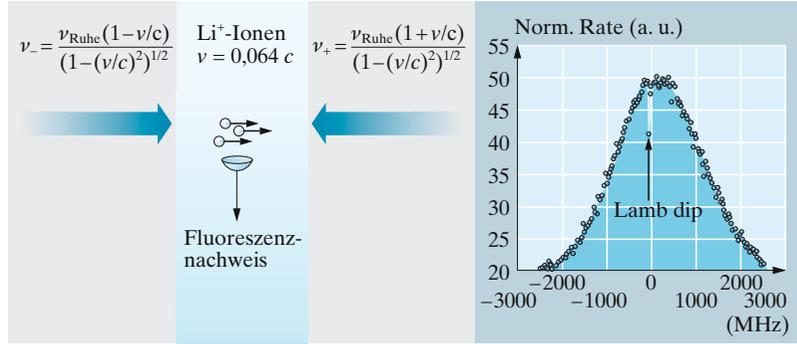


Abb. 12.21. Richtungsabhängigkeit beim Doppler-Effekt. Die Wellenfronten breiten sich entlang des \mathbf{k} -Vektors aus

Abb. 12.22. Fluoreszenzspektrum schnell bewegter Li^+ -Ionen. Die Ionen fliegen nicht alle genau gleich schnell, das gaußförmige Fluoreszenzspektrum ist daher eine Überlagerung vieler schmalere Linienformen. Nur wenn die Li-Ionen sowohl mit dem vorwärts als auch dem rückwärts laufenden Laserstrahl in Resonanz stehen, tritt durch Sättigung des Übergangs eine Reduktion des Fluoreszenzsignals auf, der sogenannte „Lamb-Dip“. Bei dieser Frequenz gilt gerade $\nu_+ \nu_- = \nu_{\text{Ruhe}}^2$. (Nach G. Saathoff, Dissertation, Heidelberg 2002)



Danach gilt

$$\lambda_{\pm} = \frac{c}{\nu_{\pm}} \simeq \frac{c}{\nu_{\text{Ruhe}}(1 \pm v/c)} \simeq \lambda_{\text{Ruhe}} \left(1 \mp \frac{v}{c} \right),$$

und man erhält aus $v/c = 1 - \lambda_+/\lambda_{\text{Ruhe}}$ und $514/549 \simeq 0,936$ den Wert $v/c = 0,064$. Das langwellige Licht muss bei der Wellenlänge $\lambda_- = \lambda_{\text{Ruhe}}^2/\lambda_+ = 586 \text{ nm}$ eingestrahlt werden. Das Auge kann die tief grüne und die gelbe Wellenlänge leicht unterscheiden.

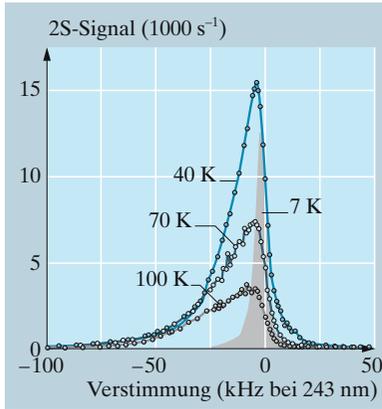


Abb. 12.23. Dopplereffekt 2. Ordnung: Zweiphotonen-Resonanz des $1s$ - $2s$ -Übergangs am Wasserstoffstrahl, eine der schmalsten erforschten atomaren Resonanzlinien. Der Dopplereffekt 2. Ordnung äußert sich als asymmetrische Linienverschiebung und -verbreiterung, die mit der Temperatur bzw. der mittleren Geschwindigkeit der Atome wächst. (Mit freundlicher Erlaubnis von T. Hänsch)

✘ Beispiel ...

Dopplereffekt 2. Ordnung. Eine der interessantesten spektroskopischen Linien ist die $1s$ - $2s$ -Resonanz von atomarem Wasserstoff, weil sie eine natürliche Linienbreite von nur $\Delta\nu \simeq 1 \text{ Hz}$ hat. Die Anregung kann durch Zwei-Photonen-Absorption ($\lambda = 243 \text{ nm}$) erreicht werden. Werden die Photonen aus gegenläufigen Laserstrahlen gleicher Frequenz ν_{Lab} absorbiert, gilt

$$\nu_{\text{Ruhe}} = \frac{\nu_{\text{Lab}}(1 + v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{\nu_{\text{Lab}}(1 - v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{2\nu_{\text{Lab}}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Der Dopplereffekt 1. Ordnung wird unabhängig von der Geschwindigkeit v der Atome unterdrückt, und die Zeitdilatation dominiert nun als (Doppler-)Effekt 2. Ordnung. Als Anregungsfrequenz im Labor beobachtet man also

$$\nu_{\text{Lab}} \simeq \frac{\nu_{\text{Ruhe}}}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right).$$

Die Lorentz-artigen Linienprofile der extrem scharfen $1s$ - $2s$ -Zweiphotonen-Resonanz erfahren im Laborsystem eine Verschiebung durch den Dopplereffekt 2. Ordnung. Die Geschwindigkeitsverteilung eines thermischen Atomstrahls verursacht durch Überlagerung der verschobenen Linien die asymmetrischen Spektrallinien aus Abb. 12.23.

12.6 Addition von Geschwindigkeiten

Mit Hilfe der Lorentztransformation kann man sich in wenigen Schritten überlegen, welche Geschwindigkeit w ein Körper, der im bewegten Bezugssystem (Geschwindigkeit v) mit $x' = ut'$ seine Bahn zieht, im ruhenden Bezugssystem hat. Nach Gln. (12.13) gilt nämlich

$$x = \frac{(u+v)t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \text{und} \quad t = \frac{(vu/c^2 + 1)t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

und durch Einsetzen des Ausdrucks für t' in die Beziehung für $x = wt$ findet man das **relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten**:

$$x = wt \quad \text{mit} \quad w = \frac{u+v}{1+uv/c^2} \tag{12.25}$$

Nach dieser Gleichung ist sofort klar, dass die relativistische Geschwindigkeitsaddition (12.25) im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten ($v \ll c$) wieder in die einfach Addition übergeht, die Folge der Galileo-Transformation (12.2) ist:

$$w = \frac{u+v}{1+uv/c^2} \simeq u+v - \left(v\left(\frac{u}{c}\right)^2 + u\left(\frac{v}{c}\right)^2 \right) + \dots$$

für $\{u/c, v/c\} \ll 1$.

Dasselbe Ergebnis erhält man übrigens, indem man die Rapiditäten aus (12.15) addiert.

✘ Beispiel ...

Bondisches k -Kalkül und Geschwindigkeitsaddition. Die Zeiten T und T' in Abb. 12.20 stehen nach (12.20) im Verhältnis

$$T' = k_v T = T \left(\frac{1+v/c}{1-v/c} \right)^{1/2} \tag{12.26}$$

Der k -Faktor gibt das Verhältnis der Eigenzeitintervalle in zwei Bezugssystemen an, die sich relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit v aufeinander zu ($k_v > 1$) oder voneinander weg ($k_v < 1$) bewegen. Derselbe Faktor tritt beim Dopplereffekt bei Bewegungen entlang der Sichtlinie auf (12.23).

Der k_v -Faktor hängt allein von der Relativgeschwindigkeit ab und erlaubt die elegante Begründung der meisten Resultate der speziellen Relativitätstheorie. Diese Methode hat den Namen „Bondisches k -Kalkül“ erhalten. Der Logarithmus des k_v -Faktors ist identisch mit der Rapidität ψ aus (12.15),

$$\ln k_v = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v/c}{1-v/c} = \text{Artanh}(v/c) = \psi,$$

und weist auf die Ursachen für seine Bedeutung hin.

Die Relativgeschwindigkeiten zwischen den Systemen seien u (B_1, B_2) und v (B_2, B_3). Dann sind die Eigenzeiten mit dem k -Faktor verknüpft: $T' = k_u T$ und $T'' = k_v T'$. Für die Relativgeschwindigkeit w zwischen B_1 und B_3 gilt dann offensichtlich $T'' = k_v T' = k_v k_u T = k_w T$. Einsetzen von (12.26) liefert ▶

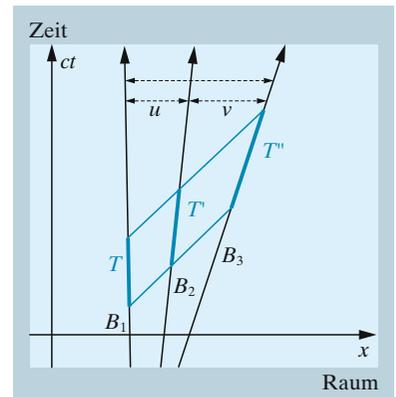


Abb. 12.24. Relativistische Geschwindigkeitsaddition mit dem Bondischen k -Kalkül

„Ein starrer Körper, welcher in ruhendem Zustand ausgemessen die Gestalt einer Kugel hat, hat also in bewegtem Zustande – vom ruhenden System aus betrachtet – die Gestalt eines Rotationsellipsoides mit den Achsen $\{R\sqrt{1-(v/c)^2}, R, R\}$. Während also die Y - und Z -Dimension der Kugel (also auch jedes starren Körpers von beliebiger Gestalt) durch die Bewegung nicht modifiziert erscheinen, erscheint die X -Dimension im Verhältnis $1 : \sqrt{1-(v/c)^2}$ verkürzt, also um so stärker, je größer v ist.“

A. Einstein in *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. Phys. **17**, 891 (1905)

Um das relativistische Sehen zu beschreiben, muss man zusätzlich Laufzeiteffekte berücksichtigen

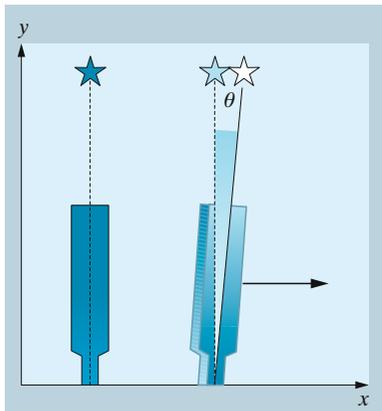


Abb. 12.25. Beobachtung eines im Zenit stehenden Sterns mit einem ruhenden und einem bewegten Fernrohr

nach Weglassen der Wurzelausdrücke

$$\frac{1 + w/c}{1 - w/c} = \frac{1 + v/c}{1 - v/c} \frac{1 + u/c}{1 - u/c}$$

woraus man durch kleine Umformungen wieder (12.25) gewinnt.

12.7 Relativistisches Sehen

Im Zentrum der Überlegungen, wie sich Raum und Zeit beim Übergang in ein bewegtes System ändern, haben ruhende und bewegte Beobachter gestanden. Wir haben zum Beispiel festgestellt, dass bewegte Maßstäbe verkürzt erscheinen, wenn wir sie nach unserer Vorschrift messen. Einstein hat schon von Anfang an darauf hingewiesen, aber nicht klar zwischen einer Messung und einem Sehprozess unterschieden: Beim Sehprozess kommt es darauf an, dass Lichtstrahlen von verschiedenen Ereignissen gleichzeitig an einem Ort – in einer Kamera oder im Auge – also in einem Weltpunkt eintreffen. Das ist in den Messvorschriften zur Längenbestimmung Abschn. 12.2.6 nicht der Fall.

Wahrnehmbare Modifikationen der Abbildung unserer Umgebung mit einer Kamera oder auf unserer Netzhaut können erst auftreten, wenn wir schon fast Lichtgeschwindigkeit erreicht haben – in realen menschlichen Umgebungen ist das nicht sehr sinnvoll. Große Geschwindigkeiten treten am ehesten bei der Sternbewegung auf, Bewegungseffekte sind deshalb zuerst bei Sternbeobachtungen festgestellt worden. In Abb. 12.25 wird klar, dass ein bewegtes Teleskop einen anderen Sternort anzeigt als ein ruhendes, weil der Beobachtungswinkel geschwindigkeitsabhängig ist. Dieser Effekt tritt schon allein als Folge der endlichen Lichtgeschwindigkeit auf. Jeder Radfahrer weiß, dass der Regen bei voller Fahrt in erster Linie von vorne kommt! Allerdings stimmen relativistische und konventionelle Vorhersage des Beobachtungswinkel nur für kleine v/c überein.

X Beispiel...

Aberration nach klassischen und nach relativistischen Bedingungen. In der klassischen Physik ist der Winkel θ in Abb. 12.25 sehr leicht auszurechnen: Während der Laufzeit t des Lichtstrahls durch das Teleskop bewegt es sich um gleichzeitig um den Weg vt in x -Richtung. Der Winkel wird dann leicht aus $\tan \theta = x/y = v/c$ berechnet. Dieser Winkel gilt in unserem ruhenden Bezugssystem. Der mit dem Teleskop bewegte Beobachter verwendet einen kontrahierten Maßstab (12.12) und misst daher den Wert γx . Im Ruhesystem des Teleskops muss also gelten $\tan \theta = \gamma x/y$ oder

$$\tan \theta = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \text{oder} \quad \sin \theta = v/c$$

Dieser Effekt heißt Aberration. Er wird beobachtet zum Beispiel bei den „Jahreszeiten“ astronomischer Beobachtungen: ▶

Im 6-Monatsrhythmus ändert sich die Geschwindigkeit der Erde um 60 km/s. Dadurch wird eine Winkeländerung von $\Delta\theta = 41'$ hervorgerufen.

Es ist überraschend, dass die Konsequenzen der endlichen Lichtgeschwindigkeit – die seit den Tagen von Roemer (Abschn. 9.3.1) bekannt war – für das „Sehen“ auch bei großen, relativistischen Geschwindigkeiten nicht früher erkannt worden sind und lange zu Missverständnissen bei der Beschreibung relativistischen Sehens geführt haben.

12.7.1 Ruhende Beobachter, bewegte Objekte

Um die Bild schnell bewegter Objekte zu erfassen, muss neben der relativistischen Längenkontraktion auch die endliche Lichtlaufzeit berücksichtigt werden. In Abb. 12.26 ist der einfache Fall eines Stabes dargestellt, der sich direkt auf die Kamera zubewegt. Als Kamera verwenden wir eine einfache Lochkamera, und als Bild definieren wir das Strahlenbündel, das gleichzeitig an diesem Ort eintrifft (wobei wir uns über die theoretisch erforderlichen Verschlusszeiten für die Kamera keine Gedanken machen).

Je weiter der Lichtweg bis zur Kamera, desto eher muss der Lichtstrahl losgelaufen sein, um mit dem kürzesten Lichtstrahl gemeinsam am Objektiv einzutreffen. Für einen mit $y_{\text{Stab}} = vt$ bewegten Stab (Abb. 12.26) liegen die Sendeorte mit gleicher Ankunftszeit auf Hyperbeln, also erscheint der Stab gekrümmt. Wenn mit y_{Stab} der Abstand des Stabes vom Kameraobjektiv gemeint ist, gilt für die Kurve gleicher Laufzeiten in der (x, y) -Ebene:

$$\left(y - \frac{y_{\text{Stab}}}{1 + \beta}\right)^2 = \frac{\beta^2}{(1 + \beta)^2} \left(y_{\text{Stab}}^2 + \frac{x^2}{1 - \beta^2}\right)$$

Wenn wir die Betrachtung auf beide Bilddimensionen ausdehnen, dann erscheint das Bildfeld gewölbt, wie an dem Gittermodell aus Abb. 12.27 zu erkennen ist.

Eine wichtige Rolle spielt die Laufzeit auch, wenn ein Objekt an der Kamera schnell vorbeifliegt. Zur Illustration betrachten wir in Abb. 12.28 einen Würfel, der sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung fliegt. Seine Position messen wir mit dem Winkel ϕ , und zu Beginn befindet er sich bei $\phi = 90^\circ$.

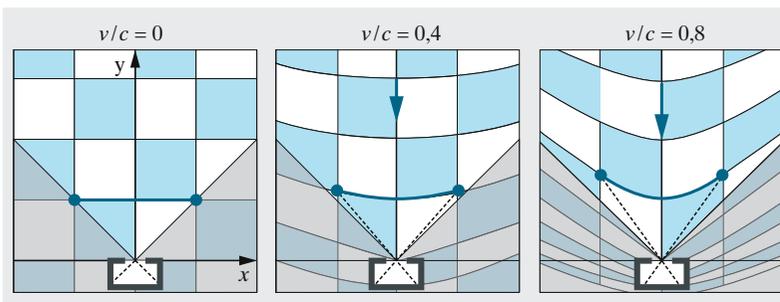


Abb. 12.26. Laufzeitverzerrung eines Stabes beim Kamerablick in Flugrichtung. Das Bildfeld der Kamera ist durch den schattierten Bereich begrenzt. Mit wachsender Geschwindigkeit wird der Öffnungswinkel, unter dem ein von vorne kommendes Objekt gesehen wird, immer kleiner

Abb. 12.27. Ein Gitter mit orthogonalen Punkten wird bei schneller Bewegung durch die Laufzeit des Lichtes verzerrt. Der hellblau schattierte Bereich deutet das Gesichtsfeld einer Kamera an. Mit freundlicher Erlaubnis von U. Kraus

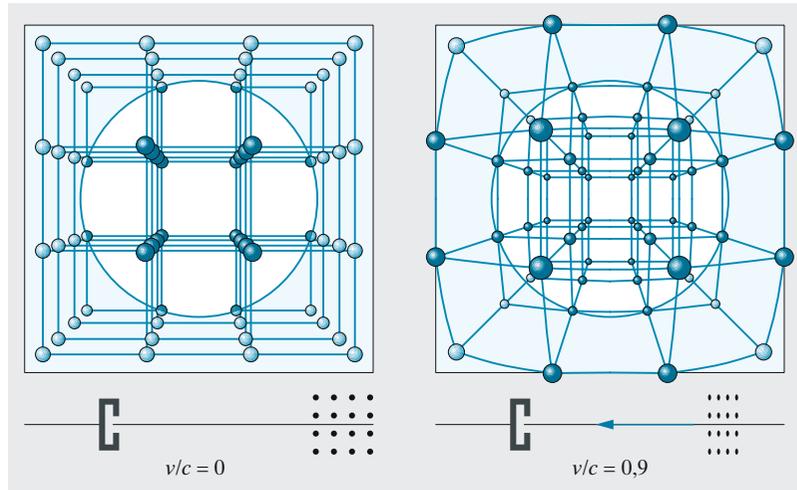
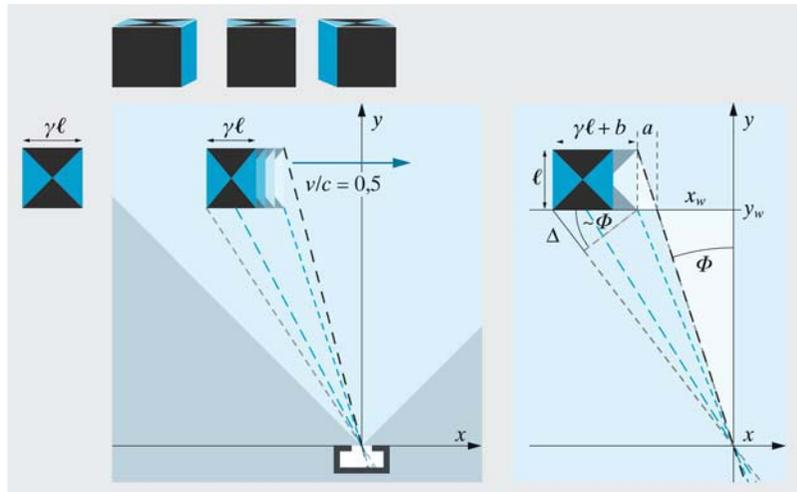


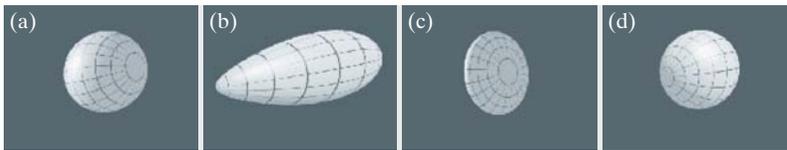
Abb. 12.28. Vorbeiflug eines Würfels an einer Kamera. Links: Bei $\phi = 30^\circ$ verschwindet die Vorderseite, wird die Rückseite bei $v/c = 0,5$ sichtbar. Rechts: Wichtige Bezeichnungen



Bei großen Abständen sehen wir den Würfel von vorne, ganz wie bei gewöhnlichen Flugobjekten. In der Nähe der Kamera gibt es aber eine Position, bei welcher der Lichtstrahl, der von der hinteren Kante der vorderen (dunkelblauen) Fläche ausgeht, an der vorderen Kante des schnell fliegenden Würfels nicht mehr „vorbeikommt“. Diese Situation tritt gerade dann ein, wenn der Würfel für die Strecke a dieselbe Zeit benötigt, wie das Licht für die Strecke $(a^2 + \ell^2)^{1/2}$, also $a/v = (a^2 + \ell^2)^{1/2}/c$ oder $a = \gamma\beta\ell$.

Für weit entfernte Körper ($y_w \gg \ell$) können wir die kleinen Unterschiede zwischen den Winkeln, unter denen wir die einzelnen Kanten sehen, vernachlässigen und erhalten dann den Wert $\phi = \tan^{-1} \gamma\beta$, bei dem die vordere Fläche verschwindet. Die gleiche Argumentation können wir verwenden um zu zeigen, dass bei demselben Winkel plötzlich die hintere Fläche sichtbar wird. Er beträgt bei $v/c = 0,5$ gerade 30° .

Für $v/c \rightarrow 0$ berechnen wir erwartungsgemäß $\phi = 0^\circ$ – es ist uns wohl vertraut, dass ein langsam an einer Kamera vorbeifliegender Ge-



genstand scheinbar um insgesamt 180° rotiert. Die scheinbare Rotation des abgebildeten Körpers ist also nicht überraschend, die endliche Lichtgeschwindigkeit verursacht lediglich eine geschwindigkeitsabhängige Verlagerung des Beobachtungswinkels, bei welchem das „Umklappen“ von der Sichtbarkeit der Vorder- zur Rückseite stattfindet.

Die Längenkontraktion hat bei unseren Überlegungen noch gar keine Rolle gespielt. Sie ist zusätzlich zu einem weiteren Laufzeiteffekt zu berücksichtigen: Die Lichtstrahlen der hinteren Kante des Würfels müssen so rechtzeitig auf die Reise geschickt werden, dass die mit denen von der vorderen Kante gleichzeitig eintreffen. Vordere und hintere Kante des Würfels sind bei der Emission gleichzeitig eintreffender Lichtstrahlen um die Strecke $\ell' = \ell/\gamma + b$ von einander getrennt (Abb. 12.28), wobei ℓ/γ die kontrahierte Länge des bewegten Würfels angibt. Wenn der Würfel die Strecke b zurückgelegt hat, muss der Lichtstrahl der hinteren Kante den Weg $\Delta \simeq \ell' \sin \phi$ zurückgelegt haben, also $\Delta/c = b/v$. Nach kurzer Rechnung erhalten wir dann für weit vorbeifliegende Objekte den Zusammenhang

$$\ell' = \frac{\ell/\gamma}{1 - \beta \sin \phi}$$

Die genauere Berechnung der Bildeigenschaften eines sehr schnell bewegten Objekts kann nur mit Hilfe eines Computers geschehen, der alle relativistischen Transformationen ausführt. In Abb. 12.29 sind unsere Überlegungen am Beispiel einer schnell bewegten Kugel noch einmal zusammengefasst und erweitert:

Weder die Laufzeitkorrektur (Abb. 12.29(b)) noch die Längenkontraktion (c) allein vermitteln einen korrekten Eindruck von Bildern relativistisch schnell bewegter Objekte, erst die gemeinsame Berücksichtigung. Für die Kugel erhält man das interessante Resultat, dass die perfekte Kugelform gerade beibehalten wird, nur die scheinbare Rotation der Kugel relativistisch modifiziert wird, wie in (d) an den Höhenlinien gut zu erkennen ist.

12.7.2 Bewegte Beobachter, ruhende Objekte

Das Relativitätspostulat fordert, dass wir nicht unterscheiden können, ob der Beobachter mit seiner Kamera ruht und die Objekte sich bewegen, oder ob sich der Beobachter durch eine ruhende Umgebung bewegt. Treffen sich ein ruhender und ein bewegter Beobachter in einem bestimmten Ereignis (ct, x) treffen, dann empfangen sie die gleichen rückwärtigen Lichtkegel. Sie müssen aber unterschiedliche Bilder sehen, die Farben werden durch den Doppler-Effekt verändert, die Richtung und Intensität der Lichtstrahlen hängen von der Geschwindigkeit ab.

Abb. 12.29. Computerbilder einer ruhenden Kugel (a) und einer bewegten Kugel unter Berücksichtigung der Laufzeitkorrektur (b) und der Längenkontraktion (c) allein und gemeinsam (d). (Mit freundlicher Erlaubnis von Daniel Weiskopf. Ein Artikel zu diesem Thema ist zu finden bei U. Kraus et al., Physik Journal 2002, Nr. 7/8, S. 77)

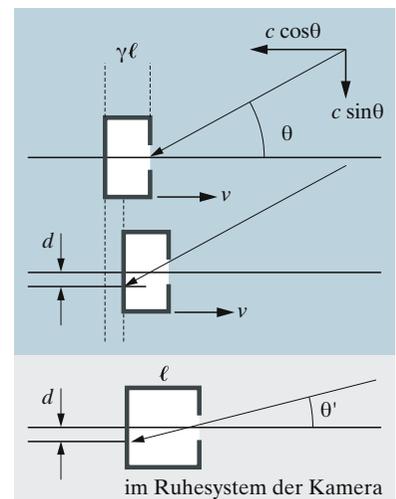


Abb. 12.30. Zur Herleitung der Aberrationsformel Gl. (12.27)

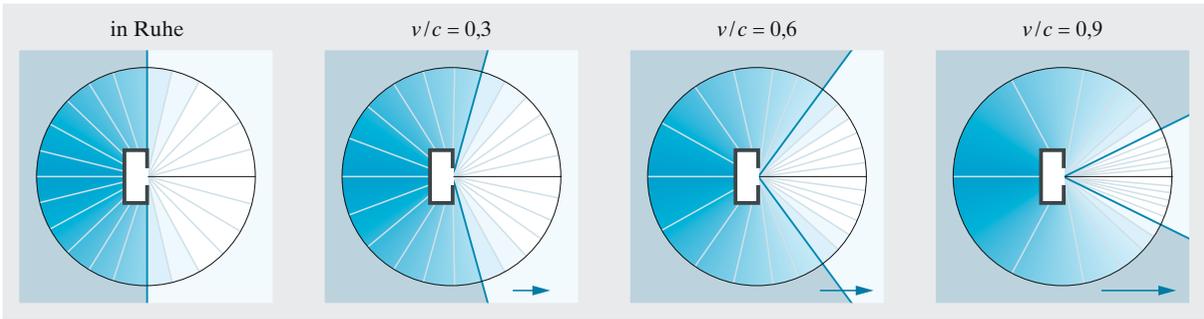
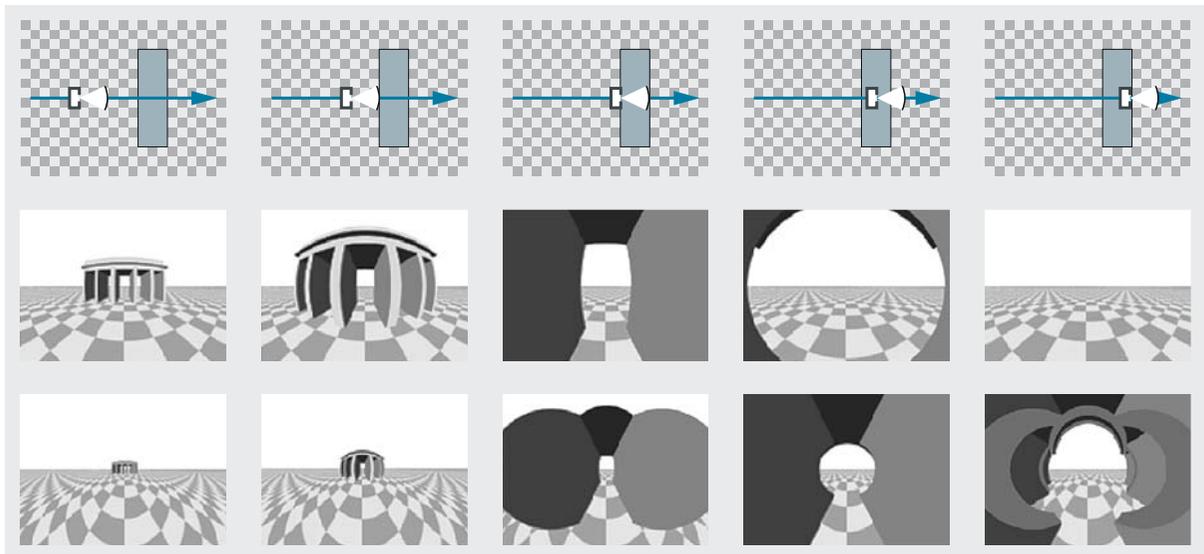


Abb. 12.31. Richtungsverteilung nach der Aberrationsformel Gl. (12.27). Mit zunehmender Geschwindigkeit werden die einfallenden Strahlen in der Vorwärtsrichtung konzentriert. Der Bereich vor und hinter der ruhenden Kamera ist durch die dunkel- bzw. hellgraue Umgebung angedeutet. Der Grenzwinkel vorn/hinten erfüllt für die bewegte Kamera gerade $\cos \theta = v/c$. In das Blickfeld der Kamera geraten also auch solche Gegenstände, die im Rücken der ruhenden Kamera liegen

Abb. 12.32. Schnappschüsse beim schnellen Flug durch das Brandenburger Tor. Die Kamera hat einen Öffnungswinkel von 54×42 Grad und fliegt in halber Höhe des Tores. *Oben:* Maßstäbliche Position der Kamera. *Mitte:* $v/c = 0,9$. *Unten:* $v/c = 0,99$. Bei der höchsten Geschwindigkeit wird nach dem Durchflug auch die Rückseite des Tores sichtbar. Mit freundlicher Hilfe von Ute Kraus, Tübingen



Für den Vergleich mit dem vorangegangenen Abschnitt ist zunächst die geschwindigkeitsabhängige Richtung der Lichtstrahlen wichtig. Die Aberrationsformel

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - (v/c)^2}}{v/c + \cos \theta} \tag{12.27}$$

lässt sich auf elementare Weise mit der Bildentstehung in einer bewegten Lochkamera erklären: In Abb. 12.30 trifft ein Lichtstrahl unter dem Winkel θ auf das Objektiv der längenkontrahierten Kamera. Er trifft nach der Zeit Δt auf das Bildfeld, das sich dem Lichtstrahl mit der Geschwindigkeit v entgegen bewegt, es gilt also $\ell/\gamma = (c \cos \theta + v)\Delta t$ bzw. $\Delta t = \ell/(v + c \cos \theta)\gamma$. Der Bildpunkt entsteht dann in der Entfernung $d = c \cos \theta \Delta t$ von der Achse. Den Winkel im Ruhesystem der Kamera bestimmen wir aus $\tan \theta' = d/\ell$ und finden unschwer Gl. (12.27).

In Abb. 12.31 ist die modifizierte Richtungsverteilung einer bewegten im Vergleich zur ruhenden Kamera vorgestellt.

Computerprogramme erlauben uns heute, den relativistischen Einfluss der Bewegung auf Abbildungen zu visualisieren. Im Computer ist es nämlich einfach, die Lichtgeschwindigkeit auf menschliche Dimensionen von zum Beispiel einigen 10 km/h herabzusetzen. Das Abbild der digitalisierten Umgebung kann dann Gitterpunkt für Gitterpunkt berechnet werden.

Es gibt noch weitere Effekte, die bei relativistischen Geschwindigkeiten unser gewohntes Sehen verändern würden. Den Dopplereffekt haben wir in Abschn. 12.5 schon besprochen, er verursacht eine **veränderte Farbwahrnehmung** der betrachteten Objekte. Zum Beispiel würden wir von Objekten, die uns mit $0,95v/c$ entgegen kommen, deren infrarote Wärmestrahlung zwischen $2,5$ und $5 \mu\text{m}$ sehen können, beim Blick zurück die ultravioletten Anteile ihres Spektrums. Beim schnellen Vorbeiflug an sonnenartigen Sternen würde man zunächst einen gleißend blauen Stern erleben, der nach dem Vorbeiziehen nur noch schwach rot leuchtet. Der dominierende Effekt ist dabei eine **Helligkeitsverschiebung**: Wie in Abb. 12.31 zu sehen ist, scheint das Licht für eine bewegte Kamera aus einem immer kleineren Raumwinkel von vorne zu kommen, die Leuchtdichte wird also stark erhöht für entgegenkommende Objekt, während sie für schnell davon eilende Objekte stark reduziert wird.

12.8 Relativistischer Impuls und relativistische Energie

Die beiden wichtigsten Erhaltungsgrößen in der newtonschen Mechanik sind Energie und Impuls. Für einen unbeschleunigten Körper sind als Folge der newtonschen Gleichung $(1.16) m(d^2/dt^2)\mathbf{x} = 0$ Energie und Impuls konstant:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad \text{und} \quad E = E_0 + \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = E_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (12.28)$$

In Abb. 12.33 wird die quadratische Energie-Impuls-Relation nach Newton veranschaulicht.

Weil nur Differenzen von Energien wichtig sind, kann der Energienullpunkt frei gewählt werden, hier also $E_0 = 0$. Für Galilei war klar, wie sich Energie und Impuls beim Übergang in ein mit \mathbf{u} bewegtes System verändern: Ersetze einfach $\mathbf{v} \rightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{u})$ und berechne neu. Wie verändern sich aber Energie und Impuls, wenn man die Relativitätsbedingungen

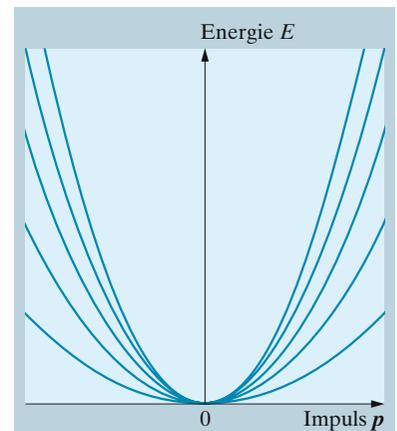


Abb. 12.33. Energie-Impuls-Relationen nach Newton. Die kinetische Energie nimmt proportional zur Masse zu, die von Kurve zu Kurve in gleichen Schritten erhöht wird

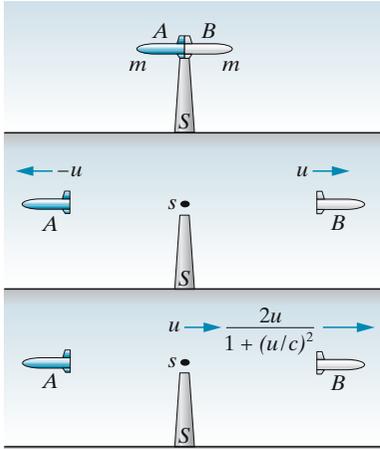


Abb. 12.34. Geschwindigkeiten und Impulse im ruhenden und im bewegten Schwerpunktsystem

berücksichtigt? Und Energie und Impuls sind nach (12.28) keineswegs unabhängig voneinander. Wie hängen sie unter relativistischen Bedingungen zusammen? Zur Illustration betrachten wir ein Beispiel, das das Versagen des newtonschen Impulskonzepts unter relativistischen Bedingungen zeigt.

12.8.1 Die newtonschen Impulse werden beim Wechsel des Bezugssystems nicht erhalten

Zwei ruhende Raumschiffe A und B (Abb. 12.34) mit identischen Massen $m_A = m_B = m$ werden durch eine Feder auseinander getrieben und auf die entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten u und $-u$ beschleunigt. Weil dabei nur innere Kräfte wirken, bleibt ihr gemeinsamer Schwerpunkt $x_S = 0$ auch nach dem Beschleunigungsvorgang in Ruhe. Deshalb gilt für den Gesamtimpuls auch nach dem Start noch $\mathbf{p}_{\text{tot}} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = -m\mathbf{u} + m\mathbf{u} = 0$. Im mit u bewegten Bezugssystem gilt vor dem Start nach Newton $\mathbf{p}_{\text{tot}} = 2m\mathbf{u}$. Nach dem Start ruht der Beobachter mit Raumschiff A und misst in Übereinstimmung mit dem relativistischen Additionstheorem (12.25) die Geschwindigkeit $v_B = v = 2u / (1 + (u/c)^2)$ für Raumschiff B. Offensichtlich ist der Gesamtimpuls $\mathbf{p}_{\text{tot}} = 2m\mathbf{u} / (1 + (u/c)^2)$ aber kleiner als vor dem Start, im Widerspruch zur Newtonschen Impulserhaltung.

Um die newtonsche Impuls-Beziehung zu modifizieren, fordern wir $p = mv \rightarrow mv f(v)$ mit $f(v = 0) = 1$ und betrachten den Schwerpunkt des Systems aus den beiden Raketen nach dem Start. Im Ruhesystem des Schwerpunkts $x_S = 0$ gilt mit $x_{A,B} = \pm ut$

$$m x_A(t) + m x_B(t) = -mu f(u)t + mu f(u)t = 0,$$

und die Modifikation spielt darin keine Rolle. Im Ruhesystem, von A ($v_A = 0$) ändert sich die Schwerpunktskoordinate mit $x_S^A = ut$, es muss aber ebenso gelten: $m f(0)(x_A - x_S^A) + m f(v)(x_B - x_S^A) = 0$ bzw.

$$mut = m f(v) (v - u) t.$$

Daraus erhält man mit $v = 2u / (1 + (u/c)^2)$ nach einigen Umformungen und mit (12.18) das Ergebnis $f(v) = \gamma$:

$$f\left(\frac{2u}{1 + (u/c)^2}\right) = \frac{1 + (u/c)^2}{1 - (u/c)^2} \quad \text{bzw.} \quad f(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma.$$

Sinnvoll wird die Modifikation durch den zweiten Ausdruck, mit der Geschwindigkeit v des Körpers selbst ausgedrückt. Im bewegten System A identifizieren wir für das Raumschiff B den Impuls probeweise mit dem Ausdruck¹

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{12.29}$$

Wenn wir wieder einsetzen $\mathbf{v} = 2\mathbf{u} / (1 + (u/c)^2)$, finden wir genau den (relativistischen) Impuls des Systems vor dem Start (Masse $2m$) das sich

¹ In den meisten älteren Lehrbüchern wird von der „relativistischen Massenzunahme“ gesprochen. Eines der wichtigsten Ergebnisse der Relativitätstheorie ist aber die vollkommene Äquivalenz von Energie und Masse, s. (12.36). Deshalb reservieren wir den Begriff *Masse* ausschließlich für die Masse eines Teilchens (oder eines Systems von Teilchen) im Ruhezustand.

im System A mit der Geschwindigkeit u bewegt,

$$p = \frac{2mu}{\sqrt{1 - \frac{(2u/c)^2}{(1 + (u/c)^2)^2}}} = \frac{2mu}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}.$$

Die Impulserhaltung scheint (zumindest für diese speziellen Bedingungen) gerettet, und für sehr kleine Geschwindigkeiten $u/c \ll 1$ finden wir wieder den newtonschen Grenzfall.

12.8.2 Der 4-Impuls

Es ist naheliegend, den relativistischen modifizierten mechanischen Impuls mit den drei raumartigen Komponenten eines zugehörigen 4-Impulsvektors zu identifizieren, $p^{1,2,3} = mv_{x,y,z}/(1 - (v/c)^2)^{1/2}$. Um die zeitartige Komponente p^0 zu ergänzen, orientieren wir uns an dem Beispiel zur 4-Geschwindigkeit v^i von S. 630 und ergänzen $p^0 = mc$. Da v^i ein 4-Vektor ist, muss auch der 4-Impuls $p^i = mv^i$ 4-Vektor-Charakter haben, denn er unterscheidet sich von v^i nur in dem skalaren Faktor m , der Masse des bewegten Körpers. Die invariante Länge des 4-Impulses

$$p^i = \frac{(mc, mv_x, mv_y, mv_z)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

wird dann nach

$$p^i p_i = \frac{1}{1 - (v/c)^2} (m^2 c^2 - m^2 v^2) = m^2 c^2$$

berechnet. Mit den Argumenten, mit denen wir die 4-Geschwindigkeit im Beispiel auf S. 630 konstruiert haben, können wir auch eine relativistische Form der newtonschen Gleichung erhalten. Wir fordern also

$$\frac{dp^i}{d\tau} = m \frac{dv^i}{d\tau} = F^i$$

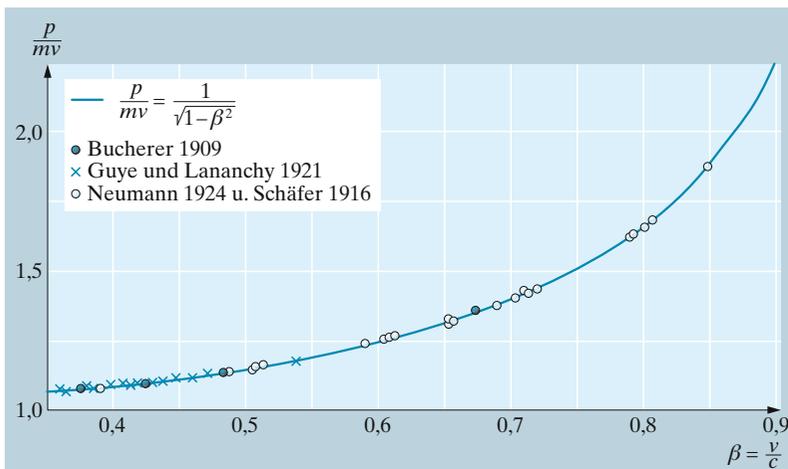


Abb. 12.35. Impulsmessung am relativistisch schnellen Elektron. In historischen Experimenten wurden schnelle Elektronen aus β -Strahlquellen verwendet, der Impuls aus der Ablenkung im Magnetfeld bestimmt. In älteren Lehrbüchern wurde die Impulsänderung als „Massenänderung“ interpretiert. Heute wird der Begriff Masse allein auf das Schwerpunktsystem angewandt. (Nach K. Hellwege, Einführung in die Physik der Atome, Springer 1974)

wobei F^i die relativistisch kovariante **4-Kraft** ist. Im Grenzfall $v/c \rightarrow 0$ gilt $dv^i/d\tau \approx dv^i/dt = (0, \mathbf{F})$. Lorentztransformation dieser 4-Kraft in ein in x -Richtung mit v_x bewegtes Bezugssystem erzeugt die Komponente $F^0 = \gamma v_x F_x/c$, die ohne Probleme auf 3 Dimensionen erweitert wird: $F^0 = \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}/c$. Im nichtrelativistischen Grenzfall entspricht $c dp^0/d\tau \approx c dp^0/dt = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$ gerade der zugeführten Leistung und rechtfertigt die Interpretation der p^0 -Komponente als **relativistische Energie**:

$$E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (12.30)$$

Energie- und Impulserhaltung sind also in der Relativitätstheorie zu einem Konzept zusammengefasst. Der 4-Impuls hat die Form

$$p^i = (E/c, \mathbf{p}), \quad (12.31)$$

und mit (12.29) können wir auch die Geschwindigkeit \mathbf{v} in Beziehung setzen zum mechanischen Impuls und zur Energie:

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}/\gamma m = \frac{c\mathbf{p}}{E/c}. \quad (12.32)$$

Den Zusammenhang von Energie und Impuls, die relativistische Energie-Impuls-Relation können wir jetzt ebenfalls formulieren:

$$E^2 = (mc^2)^2 + (c\mathbf{p})^2. \quad (12.33)$$

Dieser Zusammenhang gilt für massebehaftete Teilchen wie für masselose Teilchen, zum Beispiel Photonen, Weil die Masse eines Teilchens invariant ist, kann man auch feststellen, dass alle 4-Impulse p^i eines Teilchens auf einem Hyperboloid angeordnet sind, der so genannten **Massenschale** mit

$$(mc^2)^2 = E^2 - (c\mathbf{p})^2.$$

Die Verwendung des relativistischen Energie-Impuls Konzepts in (12.32) zeigt, dass die Geschwindigkeit masseloser Teilchen immer $v = c$ betragen muss. Wir greifen diese Frage im Abschn. 12.9.3 zum 4-Vektor-Charakter elektromagnetischer Wellen noch einmal auf.

Die Taylorentwicklung von (12.30) verleiht uns weitere Einsichten in das Wesen der relativistischen Energie $E = \gamma mc^2$:

$$\gamma mc^2 = \frac{mc^2}{(1 - (v/c)^2)^{-1/2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Offensichtlich entspricht die kinetische Energie nach Newton genau der niedrigsten relativistischen Korrektur von der Ordnung $(v/c)^2$. Und es gibt weitere Beiträge,

$$E_{\text{kin}} = E - mc^2 \simeq \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} \dots, \quad (12.34)$$

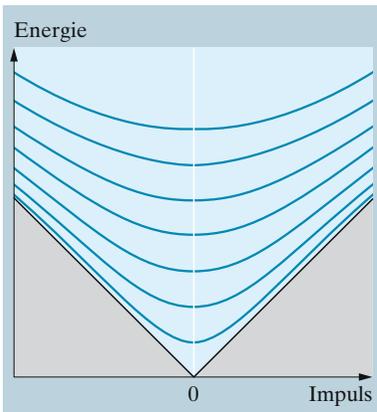


Abb. 12.36. Relativistische Energie-Impuls-Relation mit Massenschalen. Für kleine Impulse ist die newtonsche Energie-Impuls-Relation eine gute Näherung. Masselose Teilchen wie zum Beispiel Photonen finden sich auf den Geraden des Grenzfalls

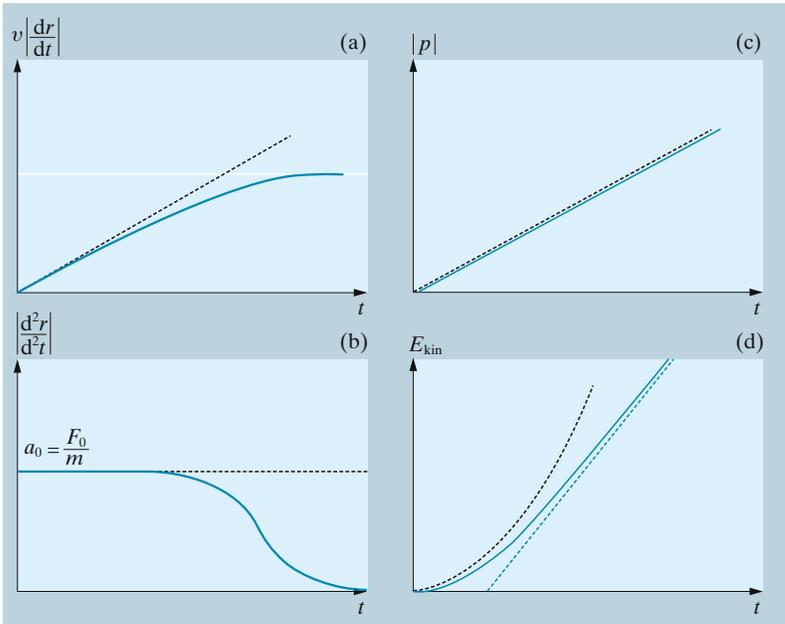


Abb. 12.37. Bewegung im homogenen Kraftfeld nach der newtonschen (---) und der relativistischen Mechanik (—). (a) Die Geschwindigkeit kennt bei Newton keine Begrenzung, bei Einstein kann sie c nicht überschreiten. (b) Die Beschleunigung ist bei Newton konstant, bei Einstein sinkt sie gegen Null ab, wenn v sich c nähert. (c) Der Impuls wächst in beiden Fällen linear: $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$. Bei Newton kommt das allein v zugute, bei Einstein wird die Sättigung von v durch das Anwachsen der Trägheit kompensiert. (d) Die kinetische Energie ist bei Einstein nur für $v \ll c$ eine Parabel, bei $v \approx c$ geht sie nach $E \approx pc$ in eine Gerade über. Die Diagramme gelten nicht im homogenen Schwerfeld (dort ist die Kraft proportional der Masse, wächst also mit dieser an), aber z. B. im homogenen elektrischen Feld

die zum Beispiel wichtig sind, um die Feinstruktur des Wasserstoffatoms zu verstehen (Abschn. 14.4.3). Die Relativitätstheorie zeigt ganz allgemein, dass Energie und Masse zwei Aspekte der gleichen Sache zu betrachten sind, dass schon ein ruhender Körper bei $v = 0$ mit der Masse m die Energie

$$E = E_{\text{ruh}} = mc^2$$

besitzt, und dass zu einer bestimmten Energie immer auch eine bestimmte Masse gehört. Dieser Zusammenhang wird als **Energie-Masse-Äquivalenz**, bezeichnet und ist zur wohl berühmtesten Formel der gesamten Physik geworden. Für die Energie des bewegten Körpers gilt

$$\text{Energie des bewegten Körpers: } E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (12.35)$$

mit den wichtigen Grenzfällen

$$\begin{aligned} \text{Ruhender Körper:} & \quad v/c = 0 \quad E = mc^2 \\ \text{Langsam bewegter Körper:} & \quad v/c \ll 1 \quad E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ \text{Schnell bewegter Körper:} & \quad v/c \rightarrow 1 \quad E \approx c|\mathbf{p}| \end{aligned} \quad (12.36)$$

12.8.3 Systeme von Teilchen

Wie der Impuls eines einzelnen Teilchens muss auch der Gesamt-4-Impuls eines Systems aus zwei oder mehr Teilchen, $p_{\text{tot}}^i = p_a^i + p_b^i$, eine relativistisch invariante Länge besitzen,

$$p_{\text{tot}}^i p_{\text{tot}}^i = (p_a^i + p_b^i) (p_{ia} + p_{ib}) = \text{const.} \quad (12.37)$$

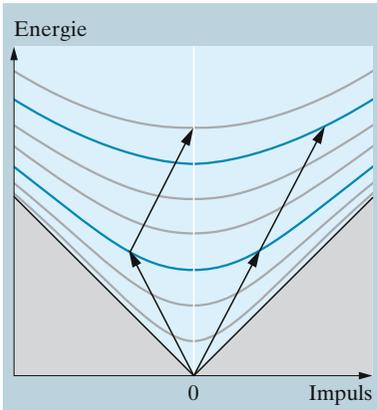


Abb. 12.38. Das Ergebnis des Beispiels zur Erhaltung des 4-Impulses lässt sich graphisch darstellen: Der Gesamt-4-Impuls kann sich nur auf den dargestellten Massenschalen bewegen. Bewegen sich zwei Körper gleicher Masse in derselben Richtung und mit gleicher Geschwindigkeit, läuft der 4-Impuls auf der Massenschale der doppelten Masse. Sind die Impulse entgegengesetzt, so sind auch Schalen mit höherer Masse zugänglich

ebenso wie das Skalarprodukt

$$c^2 p_a^i p_{ib} = E_a E_b - c^2 \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b$$

Ein wichtiges Beispiel für die relativistische Kinematik sind Stöße sehr schneller Teilchen. In Beschleunigern sind Geschwindigkeiten nahe c die Regel, dort müssen also alle Stöße relativistisch behandelt werden. Wir betrachten zwei Teilchen mit den 4-Impulsen $p_a^i = (E_a, \mathbf{p}_a)$ und $p_b^i = (E_b, \mathbf{p}_b)$ und wollen die Energien im Schwerpunktsystem und in einem speziellen Laborsystem, in welchem ein Teilchen in Ruhe ist, betrachten. Gleichung (12.37) gilt insbesondere auch im Schwerpunktsystem,

$$\begin{aligned} E_S &= c \left((p_a^i + p_b^i) (p_{ia} + p_{ib}) \right)^{1/2} \\ &= \left((E_a + E_b)^2 - c^2 (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Nehmen wir noch an, dass die Bewegungsrichtungen der Teilchen den Winkel θ einschließen, dann gilt für die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem (vgl. (1.68), (1.69))

$$E_S = c \left(m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2(E_a/c)(E_b/c)(1 - (v_a/c)(v_b/c) \cos \theta) \right)^{1/2}$$

Bewegen sich zwei identische Massen $m = m_a = m_b$ mit gleicher Geschwindigkeit $v = v_a = v_b$, vereinfacht sich das Resultat zu

$$E_S = mc^2 \left(2(1 + \cos \theta) + 2\gamma^2(1 - \cos \theta) \right)^2$$

Für die Spezialfälle $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ erhält man wie erwartet $E_S = 2mc^2$ bzw. $2\gamma mc^2$. Für einen frontalen Stoß steht daher die volle relativistische Energie etwa zur Erzeugung neuer Teilchen zur Verfügung. Deren Masse darf offensichtlich den Wert $m \leq E_S/c^2$ nicht überschreiten.

Befindet sich Teilchen b zu Beginn in Ruhe, so gilt $\mathbf{p}_b = 0$ und man hat im Schwerpunktsystem die Gesamtenergie

$$E_S = c \left(m_a^2 c^2 + m_b^2 c^2 + 2E_a m_b \right)^{1/2}$$

zur Verfügung. Der Gesamtimpuls ist $\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \mathbf{p}_a$, und nach (12.32) gilt für die Schwerpunktschwindigkeit

$$v_S = \frac{c \mathbf{p}_a}{E_a/c + m_b c}$$

12.9 Elektromagnetische Felder und Bewegung

Bewegung spielt schon für statische elektromagnetische Felder eine ganz offensichtliche Rolle – magnetische Felder werden nämlich von Strömen, also bewegten Ladungen erzeugt. Was passiert aber in einem Bezugssystem, das neben dem Strom herläuft, ruhende Elektronen und stattdessen bewegte Metallionen beobachtet? Genau dieser Frage sind wir schon

in Abschn. 6.8.2 nachgegangen und haben festgestellt, dass wegen der Lorentz-Kontraktion der bewegte Beobachter eine höhere Dichte von Metallionen und daher einen geladenen Draht sieht. Die Summe aus Coulombkraft und Lorentzkraft bleibt gleich – der Beobachter kann aus der Messung der elektromagnetischen Kraft keine Information über seinen Bewegungszustand gewinnen. Bewegung vermischt aber elektrische und magnetische Felder. Die Lorentzkraft im Magnetfeld (6.111) tritt nur auf, wenn sich ein geladenes Teilchen bewegt. Im Ruhesystem des mit der Geschwindigkeit v bewegten Teilchen wird die Lorentzkraft durch eine äquivalente Coulombkraft ersetzt, $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, s. Abschn. 6.7.5.

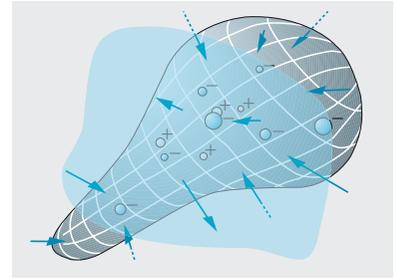


Abb. 12.39. Anwendung des gaußschen Satzes aus Abschn. 6.1.2 auf ein bewegtes Volumen

12.9.1 Relativistische Ladungsinvarianz

Bei diesen Überlegungen haben wir implizit angenommen, dass die Bewegung auf die Ladung gar keinen Einfluss hat. Nachdem wir im vorausgegangenen Kapitel festgestellt haben, dass sich die effektive Masse eines Körpers – die wir durch eine Kraftmessung ermitteln können – von Bezugssystem zu Bezugssystem mit dem Faktor γ aus (12.18) ändert, ist das keine Selbstverständlichkeit mehr. Experimentelle Hinweise auf die Unabhängigkeit der Ladung von der Bewegung erhalten wir aus der Neutralität der Materie: Das Wasserstoffmolekül und das Heliumatom haben jeweils 2 positive und 2 negative Ladungen (2 Protonen und 2 Elektronen). Sie sind beide neutral mit einer gemessenen Genauigkeit besser als $1 : 10^{20}$. Ihre Elektronen befinden sich aber in ganz verschiedenen Bewegungszuständen: Wenn die Bewegung irgendeinen Effekt auf die Ladung hätte, dann dürften sie nicht beide gleichzeitig neutral sein. Die Isotopieverschiebungen in atomaren Spektren (Abschn. 14.9.1) sind ein weiteres Indiz: Sie werden für Kerne gleicher Ordnungszahl zwanglos durch die unterschiedlichen Massen erklärt, geben aber keine Hinweise auf verschiedene Ladungszustände der Kerne.

Man kann die relativistische Invarianz der Ladung z. B. mit dem Gaußschen Satz (6.8b) ausdrücken: Der Wert des Oberflächenintegrals $\int \int_{A(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ (A ist die Oberfläche eines Volumen V im ruhenden Bezugssystem) hängt nur von der Anzahl der Ladungen und ihrer Art in V ab, nicht von ihrem Bewegungszustand. Das gilt auch für ein Volumen V' mit der Oberfläche A' , das in einem anderen Bezugssystem ruht und zur Zeit t' (Die Zeit ist keine absolute Größe!) dieselben Ladungen einschließt wie V zum Zeitpunkt t :

$$Q/\varepsilon_0 = \int \int_{A(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int \int_{A'(t')} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{A}' \quad (12.38)$$

Die Ladungsdichte allerdings ist nicht konstant, wenn ϱ_0 die Ladungsdichte im ruhenden System ist, gilt ϱ . Wenn ϱ nicht invariant ist, ist es vielleicht doch eine Komponente eines 4-Vektors? Die Antwort ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung (6.65),

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \nabla \cdot \mathbf{j} = -\dot{\varrho}$$

oder

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$$

Wir definieren die **Viererstromdichte** mit $j^0 = c\rho$,

$$j^i = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$$

und führen den verallgemeinerten, kovarianten (Vierer-)Gradientenoperator $\partial_i = \partial/\partial x^i$ ein,

$$\partial_i = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Nach der Definition (12.17) kann man selbstverständlich auch die kontravarianten Formen $j^i = \partial/\partial x_i$ bilden. Damit können wir die Kontinuitätsgleichung nach der Einsteinschen Summenkonvention als Skalarprodukt ausdrücken,

$$\partial_i j^i = 0.$$

Wir betrachten den Kondensator aus Abschn. 6.1.2 bzw. Abb. 12.40 aus einem mit v bewegten Bezugssystem. Der Maßstab des Kondensators wird dann verkürzt, und die Fläche A im ruhenden System verkürzt sich zu $A' = A/\gamma$, während die Ladung $Q = \sigma A = \sigma' A'$ erhalten bleibt. Die gemessene Ladungsdichte wird entsprechend erhöht, $\sigma' = \gamma\sigma$, und das im bewegten Bezugssystem gemessene elektrische Feld erhält den Wert

$$E' = \gamma E = \frac{E}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Bewegt sich der Kondensator dem Beobachter entgegen (z.B. in z -Richtung, dann liegt das Feld parallel zur Bewegungsrichtung), dann bleiben alle Maßstäbe erhalten. Man kann für die Richtungen des elektrischen parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung verallgemeinern:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} \quad \text{und} \quad E'_{\perp} = \frac{E_{\perp}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Die Verallgemeinerung ist übrigens schon eine Konsequenz des Feldbegriffes: Es spielt keine Rolle, aus welcher Anordnung von Ladungen das Feld entstanden ist, solange das Feld eindeutig definiert ist.

Wir können die Überlegungen zusammenfassen und erhalten die Lorentztransformationen für die elektromagnetischen Felder, die wir in ihre Komponenten parallel (\parallel), \perp) zerlegen. Wir schreiben

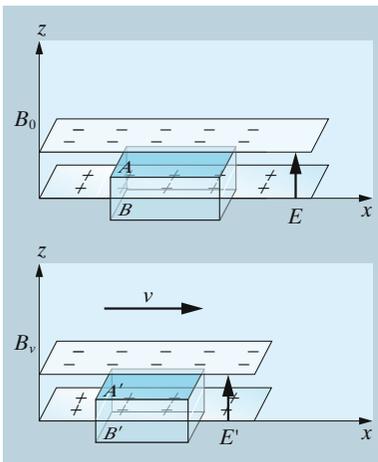


Abb. 12.40. Elektrisches Feld im bewegten Kondensator. Der gaußsche Satz wird auf das quaderförmige Volumen angewendet. Unten: Bei Bewegung wird die Länge des Kondensators in Bewegungsrichtung verkürzt. Zur Anwendung des gaußschen Satzes (s. Abschn. 6.1.2)

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} & B'_{\parallel} &= B_{\parallel} \\ E'_{\perp} &= \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} & B'_{\perp} &= \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2)_{\perp}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{aligned} \quad (12.39)$$

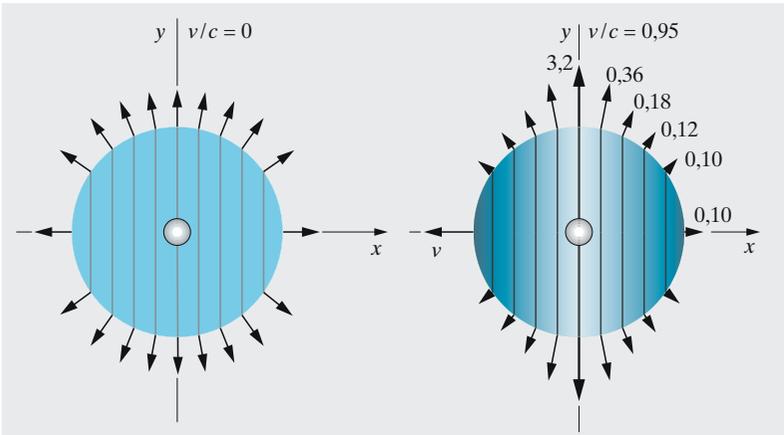


Abb. 12.41. Das Feld einer schnell bewegten elektromagnetischen Ladung erhält seinen radialen Charakter, aber die Feldstärke in Bewegungsrichtung wird reduziert, in orthogonaler Richtung erhöht (12.40). Die Zahlenangaben zu den Höhenlinien beziehen sich auf die Feldstärke der unbewegten Ladung. Im *linken Bild* symbolisieren alle Feldvektoren den Wert 1

x Beispiel...

Das elektrische Feld einer mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Ladung. Wir folgen einer Darstellung von E. Purcell im Berkeley Physics Course und betrachten im Ruhesystem B_0 eine Ladung Q mit ihrem radial ausstrahlenden Feld in der xy -Ebene,

$$(E_x, E_y) = \left(\frac{Qx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{Qy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right),$$

Das bewegte Bezugssystem B_v bewege sich mit der Geschwindigkeit v in negative x -Richtung. Wir wenden die Lorentz-Transformation nach (12.19) auf die Koordinaten und nach (12.39) auf die Felder an. Das Ergebnis lautet

$$(E'_x, E'_y) = (E_x, \gamma E_y) = \left(\frac{\gamma Q x'}{((\gamma x')^2 + y'^2)^{3/2}}, \frac{\gamma Q y'}{((\gamma x')^2 + y'^2)^{3/2}} \right),$$

Als eine kleine Überraschung finden wir $E'_x/E'_y = E_x/E_y$ – das Feld zeigt weiterhin radial von der Ladung weg. Die Feldstärke berechnen wir nach $E'^2 = E'^2_x + E'^2_y$,

$$E'^2 = \frac{Q^2 (x'^2 + y'^2)}{\gamma^4 (x'^2 + y'^2 - (\beta y')^2)} = \frac{Q^2 (1 - \beta^2)}{(x'^2 + y'^2) \left(1 - \frac{(\beta y')^2}{x'^2 + y'^2}\right)}$$

Der letzte Ausdruck in der Klammer ist gerade der Sinus des Winkels zwischen der Bewegungsrichtung und der Feldrichtung, $\sin \theta' = y'/r' = y'/(x'^2 + y'^2)^{1/2}$, und in dieser Form werden die relativistischen Modifikationen des Feldes der bewegten Ladung schneller deutlich:

$$E' = \frac{Q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \quad (12.40)$$

12.9.2 Der elektromagnetische Feldtensor

Beim Übergang von einem ruhenden in ein bewegtes Bezugssystem werden elektrische und magnetische Felder wie Raum und Zeit nach den Regeln der Lorentztransformation (12.39) „gemischt“. In der Sprache der 4-Vektoren wird die Formulierung der Elektrodynamik besonders elegant. Die vier Maxwell-Gleichungen für die $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ -Felder zerfallen in zwei Gruppen, eine homogene

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (12.41)$$

und eine inhomogene Gruppe, in der der 4-Strom die Inhomogenität bildet,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{j}/\varepsilon_0 c^2 \quad (12.42)$$

Wir definieren aus den elektromagnetischen Feldkomponenten die antisymmetrische Matrix ($\{i, k\} = 0, 1, 2, 3$)

$$(F^{ik}) = -(F^{ki}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (12.43)$$

Dann kann man die inhomogenen Maxwellgleichungen in der sehr kurzen und eleganten Form

$$\partial_i F^{ik} = \frac{j^k}{c^2 \varepsilon_0}$$

formulieren. Komponentenweise ausgeschrieben lauten die Beziehungen nach der Einsteinschen Summenkonvention nämlich

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{E_x}{c} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_y}{c} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{E_z}{c} = \frac{\rho}{c \varepsilon_0}$$

$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \frac{\partial}{c \partial t} \frac{E_x}{c} + \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y = \frac{j_x}{c^2 \varepsilon_0}$$

$$\partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_3 F^{32} = \frac{\partial}{c \partial t} \frac{E_y}{c} + \frac{\partial}{\partial x} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_x = \frac{j_y}{c^2 \varepsilon_0}$$

$$\partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} = \frac{\partial}{c \partial t} \frac{E_z}{c} - \frac{\partial}{\partial x} B_y + \frac{\partial}{\partial y} B_x = \frac{j_z}{c^2 \varepsilon_0}$$

Man kann nun zeigen, dass die Matrix (F^{ij}) Tensorcharakter besitzt, dass heißt, ihre Komponenten transformieren sich beim Übergang von einem ruhenden in ein bewegtes Bezugssystem nach Regeln ähnlich der Lorentz-Transformation. Damit sind dann auch die Transformationen für die \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder festgelegt.

Um auch die homogenen Maxwellgleichungen (12.41) elegant zu formulieren, benötigen wir zusätzlich den Feldtensor

$$(F_{ik}) = -(F_{ki}) = (F^{ik})^T = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

dessen ebenfalls antisymmetrische Matrix durch Transposition mit $F_{ik} = (F^{ik})^T$ verknüpft ist. Komponentenweise lauten die Gleichungen

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = -\partial_x B_x - \partial_y B_y - \partial_z B_z = 0$$

$$\partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23} = -\partial_y E_z/c + \partial_z E_y/c - \partial_t B_x/c = 0$$

$$\partial_3 F_{01} + \partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} = \partial_z E_x/c + \partial_t B_y/c - \partial_x E_z/c = 0$$

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = -\partial_t B_z/c - \partial_x E_y/c + \partial_y E_x/c = 0$$

und man sieht, dass in jeder Gleichung die drei Koeffizienten in drei geraden Permutationen vorkommen, sodass man auch schreiben kann

$$\partial_i F_{k\ell} + \partial_k F_{\ell i} + \partial_\ell F_{ik} = 0$$

Warum das Verfahren überhaupt Vorteile hat? Erinnern wir uns daran, dass wir die elektromagnetischen Felder von Potentialen abgeleitet haben. In der statischen Form lauten sie $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ (6.15) und $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (6.159), Wechselfelder werden von Potentialen verursacht, die die Form (6.160) haben,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A},$$

und schon nahelegen, die Potentiale ϕ und \mathbf{A} als Komponenten eines **4-Potentials**

$$A^i = (\phi, A_x, A_y, A_z)$$

aufzufassen. Die inhomogenen Maxwellgleichung (12.42) führen wie schon in Abschn. 7.1.4 ausgeführt zu Bestimmungsgleichungen für die Potentiale. Wir erhalten

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} = \rho/\varepsilon_0, \quad (12.44)$$

und die zweite kann unter Ausnutzung von $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$ und kurzer Umsortierung ausgedrückt werden nach

$$\nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi \right) - \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{c^2 \varepsilon_0} \quad (12.45)$$

In der Wahl der Potentiale haben wir noch Freiheit, wir können sie eichen, denn sie sind durch die Bestimmungsgleichungen noch nicht eindeutig festgelegt. Insbesondere können wir wählen

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0.$$

Diese spezielle Festlegung wird **Lorentz-Eichung** genannt und ist die natürliche Wahl für Phänomene, in denen relativistische Behandlung wichtig ist. Treten nur geringe Geschwindigkeiten $v/c \ll 1$ auf, wird meistens

die **Coulomb-Eichung** mit $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ verwendet. Das Resultat nach Ausnutzung der Gln. (12.44) und (12.45) ist überzeugend, denn es entkoppelt die Gleichungen für $\{\varphi, \mathbf{A}\}$, die formal identische Wellengleichungen ergeben ($\nabla^2 = \Delta$):

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{und} \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{c^2 \varepsilon_0}$$

Sie können mit dem d'Alembert-Operator $\square = \Delta - (1/c^2) \partial^2 / \partial t^2$ in der eleganten Form

$$\square A^i = \frac{j^i}{c^2 \varepsilon_0} \quad (12.46)$$

zusammengefasst werden. Der relativistische Feldtensor (12.43) lässt sich dann aus den Lösungen dieser Potentiale nach

$$F^{ik} = \partial^i A^k - \partial^k A^i$$

berechnen.

12.9.3 Elektromagnetische Wellen

In Abwesenheit von Ladungen und Strömen vereinfacht sich die Wellengleichung (12.47) zu

$$\square A^i = 0 \quad (12.47)$$

Sie wird gelöst von ebenen Wellen mit

$$A^i(x) = A^{i0} \exp i(k^i x_i),$$

wenn für den 4-Vektor $k^i = (k^0, k^1, k^2, k^3) = (\omega/c, -k_x, -k_y, -k_z)$ muss die Bedingung

$$k^i k_i = (\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = (\omega/c)^2 - |\mathbf{k}|^2 = 0$$

für den 4-Abstand erfüllt sein. Der 4-Vektor elektromagnetischer Wellen hat erwartungsgemäß lichtartigen Charakter. Energie und Impuls von Photonen werden in Übereinstimmung mit unseren Überlegungen aus Abschn. 12.8.2 für masselose Teilchen ebenfalls mit dem 4-Impulsvektor ausgedrückt:

$$p_{\text{photon}}^i = \hbar k^i = (\hbar \omega/c, \hbar \mathbf{k})$$

12.10 Gravitation und Kosmologie

12.10.1 Allgemeine Relativität

Es gibt kein Mittel festzustellen, ob und mit welcher gleichförmigen Geschwindigkeit man sich bewegt. Aus dieser Behauptung folgt die spezielle Relativitätstheorie. Ob man sich ungleichförmig bewegt, kann man zunächst ohne weiteres sagen, weil dabei Trägheitskräfte auftreten. Allerdings hätte ein Schwerfeld genau die gleichen mechanischen Aus-

wirkungen, denn beide – Trägheitskräfte und Gravitation – erfassen die gleiche Eigenschaft der Objekte, nämlich ihre Masse. Dass *träge* und *schwere* Masse identisch (oder genauer proportional zu einander) sind, ist durchaus nicht selbstverständlich. Es muss experimentell bewiesen werden. Der einfachste Beweis liegt in der Beobachtung, dass abgesehen vom Luftwiderstand alle Körper gleich schnell fallen. *Newton*, *Eötvös*, *Dicke*, *Braginski* und *Rudenko* haben die Identität mit immer wachsender Genauigkeit (bis 10^{-12}) nachgewiesen.

Auf dieser **Identität von träger und schwerer Masse** beruht die Schwerelosigkeit in der antriebslos fallenden Rakete. Gewöhnlich sagt man, Trägheitskräfte infolge der Beschleunigung und Gravitation kompensieren einander exakt. Man kann aber auch den Spieß umdrehen und sagen: Die Gravitation ist im Grunde dasselbe wie die Trägheitskräfte und lässt sich daher wegtransformieren, wenn man sich in das geeignete Bezugssystem (das frei fallende) begibt, ebenso wie sich die Kräfte im bremsenden Auto wegtransformieren, indem man den Vorgang vom Straßenrand aus beschreibt.

Die so postulierte **Äquivalenz zwischen Trägheits- und Schwerfeld** „erklärt“ zunächst die Identität von träger und schwerer Masse, die sonst eigentlich ein Wunder wäre. Damit ist garantiert, dass alle mechanischen Vorgänge identisch sind, gleichgültig ob man sich in einer mit a „nach oben“ beschleunigten Rakete (ohne Schwerfeld) oder in einer ruhenden Rakete im Schwerfeld $-a$ befindet. Die Motoren müssten in beiden Fällen den gleichen Schub hergeben, im ersten Fall zur Beschleunigung, im zweiten, um das Fallen im Schwerfeld zu verhindern. Wenn man das **Äquivalenzprinzip** ernst nimmt, müssten aber andere Folgen der Beschleunigung ebenso gut auch im Schwerfeld auftreten.

Ein Lichtstrahl, der senkrecht zur Beschleunigungsrichtung emittiert wird, bleibt hinter der beschleunigten Rakete zurück, fällt also nicht genau gegenüber der Quelle auf den Schirm, sondern tiefer. Licht krümmt sich im Beschleunigungsfeld. Im Schwerfeld müsste das auch der Fall sein. Der Effekt ist zu klein, um im Labor nachgewiesen zu werden. Am Sonnenrand vorbeigehende Licht- oder Radiostrahlung zeigt ihn einwandfrei (s. Abschn. 12.10.2).

Unten in der Kabine stehe ein Sender S , der Strahlung nach oben einem Empfänger E zusendet. Beim Abstand l zwischen E und S hat E während der Laufzeit $t = l/c$ der Strahlung die Geschwindigkeit $v = at = al/c$ relativ zu S angenommen. E misst also nicht die ausgesandte Frequenz ν_0 , sondern eine durch Doppler-Effekt rotverschobene Frequenz $\nu = \nu_0(1 - v/c) = \nu_0(1 - al/c^2)$. Wenn ein Schwerfeld $-a$ den gleichen Effekt hervorrufen sollte, würde das heißen, dass der Sender, der auf einem um $\Delta\varphi = -al$ tieferen Gravitationspotential steht als der Empfänger, für diesen um den Faktor $1 + \Delta\varphi/c^2$ langsamer schwingt. Diese Rotverschiebung müsste für die Sonnenoberfläche $\Delta\nu/\nu = -2,1 \cdot 10^{-6}$ betragen. Für weiße Zwergsterne wäre sie viel größer. In beiden Fällen ist es schwierig, sie von anderen Ursachen der Linienverbreiterung und -verschiebung zu trennen. Mittels der teilweise sehr viel schärferen γ -Linien (**Mößbauer-Effekt**) haben *Rebka* und *Pound* den direkten Nachweis im Labor geführt (Abschn. 13.1.4).

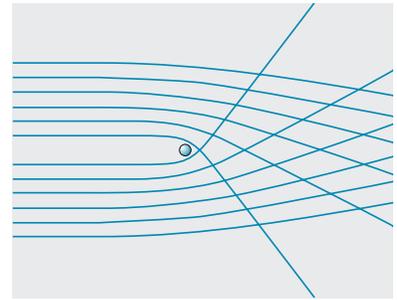


Abb. 12.42. Lichtablenkung im Schwerfeld einer Punktmasse. Der Ablenkwinkel $\delta\psi = 4GM/(dc^2)$ ist doppelt so groß wie nach *Newton* für eine mit c fliegende Masse. Die 2 stammt von der zusätzlichen Veränderung des Zeitablaufs (vgl. Abb. 12.43)

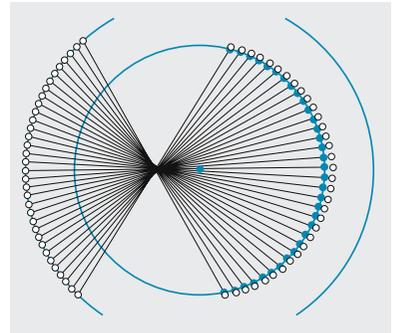


Abb. 12.43. An der Venus reflektierte Radarsignale haben eine längere Laufzeit als dem geometrischen Abstand entspricht, wenn sie nahe an der Sonne vorbei müssen. Dort verlangsamt sich der von der Erde aus beurteilte Zeitablauf nicht nur für schwingende Atome, sondern auch für das laufende Licht. Venus scheint daher einige km weiter entfernt zu sein als sie wirklich ist (scheinbare Verschiebung um den Faktor 10^5 übertrieben; *Shapiro* 1968)

In der beschleunigten Rakete braucht das Lichtsignal von S bis E länger als normalerweise, weil es die Strecke $\frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}al^2/c^2$ zusätzlich durchlaufen muss. Bei ruhender Rakete im Schwerfeld müsste dieser Effekt auch auftreten und darauf beruhen, dass das Licht in Gebieten niederen Gravitationspotentials langsamer läuft. Die Verzögerung beruht auf dem Unterschied des mittleren c gegen den normalen Wert: $\bar{c} = c(1 + \frac{1}{2} \Delta\varphi/c^2)$; man beachte, dass $\Delta\varphi$ negativ ist. Zwischen S selbst und E ist der Unterschied doppelt so groß: $c' = c(1 + \Delta\varphi/c^2)$. Passive bzw. aktive Radarreflexion an Venus bzw. einer Raumsonde bestätigt das. Wenn das Signal an der Sonne vorbei muss, ist seine Laufzeit um $2 \cdot 10^{-4}$ s (Hin- und Rückweg) länger als dem geometrischen Abstand des „Relais“ entspricht.

$$c' = c \left(1 - \frac{GM}{rc^2} \right);$$

$$t = \int \frac{dr}{c'} \approx \frac{2d}{c} + \frac{2GM}{c^3} \int_{r_V}^{r_E} \frac{dr}{r} = \frac{2d}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln \frac{r_E r_V}{p^2}$$

(r_E , r_V : Bahnradien von Erde und Venus, p : minimaler Abstand des Radarstrahls von der Sonne, d : Abstand Erde–Venus).

Durch diese Experimente ist das **Äquivalenzprinzip** gesichert:

Es besteht keinerlei Unterscheidungsmöglichkeit zwischen einer Beschleunigung und einem (homogenen) Schwerfeld.

Diese Tatsache führt formal auf die grundsätzliche Gleichberechtigung aller Bezugssysteme, die allgemeine Relativität. Physikalisch liefert sie mehr als das, nämlich eine Deutung der Gravitation.

12.10.2 Einsteins Gravitationstheorie

Ein homogenes Schwerfeld lässt sich infolge des Äquivalenzprinzips exakt wegtransformieren: Indem man sich frei fallen lässt, begibt man sich in ein Inertialsystem. Reale Schwerfelder sind aber immer inhomogen. Dann lässt sich die Inertialeigenschaft nur lokal (in der Umgebung des Schwerpunktes des fallenden Systems) erreichen. Die Beschleunigung des fallenden Systems ist überall gleich, die Schwerebeschleunigung dagegen nicht. Die Abweichungen, üblicherweise als Gezeitenkräfte bezeichnet, sind in erster Näherung proportional dem Abstand vom Schwerpunkt. Die Äpfel schweben in der über Europa fallenden Rakete, aber dafür fallen neuseeländische Äpfel mit $2g$ (Aufgaben 1.8.5, 1.8.6).

Einsteins Idee war, das Wesentliche an der Gravitation eben in diesen Effekten zu suchen, die sich nicht durch Änderung des Bezugssystems wegtransformieren lassen, die bestenfalls dort verschwinden, wo man selbst ist, aber anderswo bestehen bleiben. Ein Bezugssystem ist eine Karte der Welt, in die man die Ereignisse einträgt. Man kann nicht alles verzerrungsfrei auf einer ebenen Karte abbilden, z. B. nicht die Erdoberfläche. Die Mercator-Projektion gibt nur die Umgebung des Äquators getreu wieder. Ein Flugzeug auf der Polarroute scheint auf einer solchen Karte eine krumme Linie zu beschreiben, selbst wenn es seinen Kurs nicht ändert und keinen Kräften ausgesetzt ist, d. h. wenn es auf einem Großkreis bleibt.

Jemand, der die Erde für eben hält, würde diese angebliche Kursänderung auf entsprechende Kräfte zurückführen.

Die kräftefreie Bahn des Flugzeugs (von der Coriolis-Kraft sehen wir hier ab), der Großkreis oder die **geodätische Linie**, ist die kürzeste Verbindung zwischen Start- und Zielpunkt. Diese Bahn hängt nicht von der Fluggeschwindigkeit ab. Bei der Gravitation scheint die Lage anders: Die Bahnform hängt entscheidend von v ab. Man muss aber die raumzeitliche Bahn, die Weltlinie des Körpers betrachten. Die Weltlinie der Erde ist eine äußerst lang gestreckte Schraubenlinie: Während die Erde ein Jahr in t -Richtung „fliegt“, pendelt sie räumlich nur um 1 000 Lichtsekunden, ungefähr $3 \cdot 10^{-5}$ Lichtjahre. Für einen noch langsameren Körper wird die räumliche Projektion der Weltlinie kürzer, ihre Krümmung noch größer.

Wir führen dies quantitativ durch, d. h. weisen nach, dass sich eine raumzeitliche Krümmung als Kraftfeld von der Art der Gravitation auswirkt, dass also die *räumlichen* Bahnkurven in diesem Feld nicht von der Masse des Körpers abhängen, der sie durchläuft, und dass sie umso stärker gekrümmt sind, je langsamer der Körper fliegt. Die Krümmung der *raumzeitlichen* Bahn, d. h. der Weltlinie, ist bestimmt durch die Krümmung der Raumzeit selbst, habe also den konstanten Wert $k = g/c^2$ (wesentlich ist ihre Konstanz; die Bedeutung von g wird gleich klar werden). Es handele sich nun um einen Körper, der im gewählten Bezugssystem mit v fliegt. Seine Weltlinie steigt im t, x -Diagramm um den Winkel α mit $\tan \alpha = v/c$, krümmt sich aber gleichzeitig in die y -Richtung, bildet also ein Stück einer Schraubenlinie, deren Achse nicht die t -Achse ($x = y = 0$) zu sein braucht. Die Krümmung dieser Schraubenlinie soll g/c^2 sein. Für die *räumliche* Bahn, d. h. die Projektion der Weltlinie auf die x, y -Ebene, sieht die Krümmung größer aus. Krümmung ist Änderung des Richtungswinkels/Bogenlänge der Kurve: $k = d\varphi/ds$. Die Änderung des Richtungswinkels ist für die Schraubenlinie um den Faktor $\sin \alpha = v/\sqrt{v^2 + c^2}$ kleiner als für die Direktissima der x, y -Projektion (um die effektive Steigung zu vermindern, steigt der Skifahrer ja schräg zum Hang auf). Außerdem verteilt sich die Winkeländerung bei der Schraubenlinie über ein ebenfalls um $\sin \alpha$ längeres Bogenstück (Abb. 12.44). Die rein räumliche Bahnkrümmung ist also $k_r = k(v^2 + c^2)/v^2 = (1 + v^2/c^2)g/v^2$. Für $v \ll c$ wird $k_r = g/v^2$, der Bahnradius $R = 1/k_r = v^2/g$ ist also genau der, den ein Körper unter der senkrechten Beschleunigung g ausführt (Zentripetalbeschleunigung = g). Von der Masse des Körpers ist keine Rede gewesen.

× Beispiel ...

Berechnen Sie differentialgeometrisch die Krümmung einer Schraubenlinie und ihrer Projektion auf die Ebene senkrecht zur Achse. Ist die Diskussion in Abschn. 12.10.2 exakt richtig?

Die Schraubenlinie $x = r \cos u$, $y = r \sin u$, $z = cu/\omega$ hat die Krümmung $k = r/(r^2 + c^2/\omega^2) = \omega^2 r/(\omega^2 r^2 + c^2) = v^2/(r(v^2 + c^2))$. Die Projektion senkrecht zur Achse hat natürlich die Krümmung $k_r = 1/r$. Die Diskussion in Abschn. 12.10.2 ist also exakt richtig.

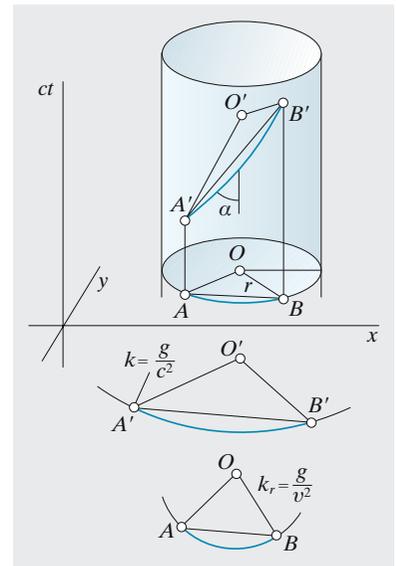


Abb. 12.44. Krümmung der Raumzeit macht sich im dreidimensionalen Querschnitt als Kraft bemerkbar. $A'B'$ ist ein Segment einer kürzesten Bahn (Spiralbahn) in der Raumzeit mit der Krümmung g/c^2 . Die Krümmung der räumlichen Projektion hängt von der Steilheit der Spirale so ab, dass die Zentripetalbeschleunigung der gleichförmigen Kreisbewegung herauskommt

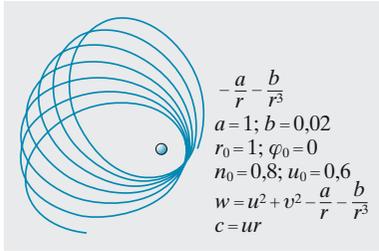


Abb. 12.45. Nach *Einstein* schließt sich die Kepler-Ellipse im Schwerfeld der Punktmasse nicht genau, weil der Zeitablauf in Perihel- und Aphelnähe verschieden ist. Es entsteht eine Rosettenbahn. Äußerlich ganz ähnlich wäre die Bahn im Feld eines abgeplatteten Zentralkörpers oder eines Sterns, der noch andere Planeten hat

Die Darstellung des Beschleunigungsfeldes als raumzeitliche Krümmung ist, wie unser Bild zeigt, automatisch relativistisch invariant, da sie ja als Eigenschaft der Raumzeit selbst eingeführt wird. Die Beliebigkeit der Bezugssysteme, d. h. der Steigung v/c der Weltlinie, wird dabei besonders evident, aber auch, warum diese beliebige Steigung etwas so Wesentliches wie die Bahnkrümmung bedingt.

Das einsteinsche Schwerfeld einer Punktmasse M unterscheidet sich vom newtonschen zunächst dadurch, dass sein Potential im Abstand $R = GM/c^2$ den maximal möglichen Wert c^2 übersteigen würde. R ist der **Schwarzschild-Radius** der Masse M . Für unsere Sonne beträgt er 1,5 km. Wäre die Sonne so klein, würde sie zum **Schwarzen Loch** (Abschn. 12.10.4). Bei Newton tritt der unmögliche Wert $U = \infty$ erst im Abstand $r = 0$ ein. Der Punkt $r = 0$ ist also bei Einstein zu einer Kugel vom Radius $R = GM/c^2$ aufgebläht. Dadurch verzerrt sich die Metrik des umgebenden Raumes ähnlich wie der Stoff einer Hose, in der ein Nagel vom Radius R ein Loch aufgeweitet hat, ohne Fäden zu zerstören. Die Abstände sind nicht mehr vom Zentrum des Loches (der Sonne) zu rechnen, sondern vom Rand des Loches, dem Schwarzschild-Radius R aus.

Wenn ein Lichtstrahl dicht am Sonnenrand vorbeigeht, wird er, als Teilchen mit der Geschwindigkeit c aufgefasst, bereits nach Newton auf einer Kepler-Hyperbel abgelenkt. Aus der Kegelschnittgleichung $r = p/(1 + \varepsilon \cos \varphi)$ mit $\varepsilon \gg 1$ für die schwach gekrümmte Hyperbel folgt ein Ablenkwinkel zwischen den Asymptoten $\gamma = 2/\varepsilon$, also nach (1.95) und (1.96) $\gamma = 2Lc/(GMm) = 2R/R_\odot = 0,88''$. Die maximale Bahnkrümmung ergibt sich aus der Kräftebilanz $c^2/R_K = GM/R_\odot$ zu $1/R_K = R/R_\odot^2$. Dabei ist die Verzerrung der Metrik nicht berücksichtigt. Die Gleichung einer Geraden, die im Abstand R_\odot verläuft, heißt nicht mehr $r = R_\odot/\cos \varphi$, sondern $r = R + R_\odot/\cos \varphi$, und man erhält dadurch in ihrer Mitte eine Krümmung R/R_\odot^2 . Somit verdoppelt sich die Ablenkung zu $1,76''$. Beobachtungen an totalen Sonnenfinsternissen seit 1919 haben immer klarer für Einsteins Wert entschieden. Wie schwer die Lichtablenkung aus der Refraktion der Sonnenatmosphäre mit ihrem Dichtegradienten herauszufischen ist, macht Aufgabe 9.5.5 klar. Man kann heute die Radiostrahlung von Quasars benutzen, ohne eine totale Sonnenfinsternis abwarten zu müssen. Das nötige Auflösungsvermögen schafft die **Langbasis-Interferometrie** (zwei gekoppelte Radioteleskope, die bis zu einem Erddurchmesser voneinander entfernt sind).

Eine Planetenbahn im Einstein-Schwarzschild-Feld erhält man wieder, indem man die Abstände nicht vom Sonnenzentrum, sondern vom Schwarzschild-Radius R an rechnet, d. h. statt r immer $r - R$ schreibt. Nach dem Verfahren von Abschn. 1.7.4 ergibt sich dann nicht die Ellipse $r = p/(1 + \varepsilon \cos \varphi)$, sondern $r = p/(1 + \varepsilon \cos(v\varphi))$ mit $v = 1 - 3GM/(c^2 p)$ (Aufgaben 12.10.20–12.10.22). Diese Bahn ist noch ellipsenähnlich, schließt sich aber nicht nach $\varphi = 2\pi$, sondern erst nach $2\pi/v = 2\pi + 6\pi GM/(c^2 p) = 2\pi + 6\pi R/p$. Bei jedem Umlauf rückt das Perihel der Bahn um $\Delta\varphi = 6\pi R/p$ vor. Für eine kreisähnliche Ellipse ist $GM/p = v^2$, also $\Delta\varphi = 6\pi v^2/c^2$. Die Erde mit $v^2/c^2 = 10^{-8}$ hat im Jahrhundert $3,8''$, Merkur mit $v^2/c^2 = 2,6 \cdot 10^{-8}$ in der gleichen Zeit (416 Umläufen) $43''$ **Perihelverschiebung**. Das ist genau der Betrag, der sich nicht durch die Einflüsse der übrigen Planeten erklären lässt (Abschn. 1.8.5).

Die Sonne selbst ist infolge ihrer Eigenrotation etwas abgeplattet. Diese Abplattung und ihr Einfluss auf die Präzession der Planetenbahnen lassen sich weder sehr genau berechnen (da die Sonne nicht starr rotiert) noch sehr genau messen (infolge der Unbestimmtheiten in der Definition des Sonnenrandes). Von diesem Beitrag hängt es ab, ob der Fehlbetrag von $43''/\text{Jhh.}$ für Merkur in der Newton-Theorie gänzlich unerklärt bleibt und daher mit *Einsteins* $43''$ gleichzusetzen ist, oder ob

an der Einstein-Theorie gewisse Modifikationen anzubringen sind (Mischung von tensorieller und skalarer Theorie, *Dicke-Brans-Jordan*).

Unser Bild hat zwar gezeigt, wie sich die raumzeitliche Krümmung dynamisch auswirkt, aber nicht, wie diese Krümmung selbst zustandekommt, warum sie z. B. wie r^{-2} vom Abstand von der erzeugenden Masse abhängt. Das ist mit so einfachen Mitteln auch nicht quantitativ zu verstehen. Die beste Vorstellungshilfe ist der Begriff der Minimalfläche. Das ist eine Fläche, wie sie eine freigespannte Seifenhaut oder eine kräftefreie Flüssigkeitsoberfläche bildet. Minimalflächen (Abschn. 3.2 und Aufgabe 3.2.10) haben die mittlere Krümmung $1/R_1 + 1/R_2 = 0$, d. h. müssen immer Sattelflächen sein (Krümmung in einer Richtung positiv, in der anderen negativ). Analog hat der einsteinsche leere Raum die **Hauptkrümmung** Null (in beiden Fällen bedeutet das nicht das Verschwinden der Krümmung überhaupt). Wäre der Raum überall leer, dann wäre er *eben* wie die überall kräftefreie Flüssigkeitsoberfläche. Eine Störung (Singularität), z. B. eine kugelförmige Masse, wirkt sich auf den Raum ähnlich aus wie ein eingetauchter Strohhalm auf die Flüssigkeitsoberfläche, die trompetenförmig hochgezogen oder heruntergedrückt wird, je nach der Benetzbarkeit des Strohhalms. Die mittlere Krümmung bleibt dabei aber trotzdem Null, d. h. die (negative) Krümmung in der x, z -Ebene muss nahe am Strohhalm größer sein, um die größere (positive) Krümmung in der x, y -Ebene zu kompensieren. Die x, z -Krümmung nimmt ungefähr wie $1/r$ mit dem Abstand von der Störung ab. Man kann sich vorstellen, dass die höhere Dimensionalität im Fall der Gravitation eine Abnahme wie $1/r^2$ erzwingt.

In einem sehr starken Schwerfeld ist es denkbar, dass der Krümmungsradius $R = c^2/g = c^2 r^2/(GM)$ so klein wird wie der Abstand r von der gravitierenden Masse. Dann muss sich der Raum in sich selbst zurückkrümmen, er muss sich schließen. Wir erhalten die Bedingung für ein **Schwarzes Loch**: $GM/r \approx c^2$ (Abschn. 12.10.4) bzw. für den **Schwarzschild-Radius** $r \approx GM/c^2$. Der völlig leere Raum hätte verschwindende Krümmung (nicht nur verschwindende Hauptkrümmung). Jede Masse zwingt ihm eine gewisse Krümmung auf. Über sehr große Abstände kann man mit einer mittleren Massendichte ϱ der Welt und einer entsprechenden mittleren Raumkrümmung rechnen. Zur Massendichte ist hierbei auch jede Energiedichte/ c^2 zu rechnen, z. B. die Dichte kinetischer Energie oder die Energiedichte elektromagnetischer Felder.

12.10.3 Gravitationswellen

Ein weiterer Unterschied zwischen Newtons und Einsteins Gravitation liegt in der Existenz von **Gravitationswellen** (nicht zu verwechseln mit den „Schwerewellen“ auf Flüssigkeiten). Newtons Theorie ist ausgedrückt in der Poisson-Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi\varrho$, die beschreibt, welches Potential φ eine gegebene Massendichte ϱ erzeugt. Um dieses statische Bild relativistisch invariant zu machen, könnte man zum Laplace-Operator Δ noch das t -Glied $-\partial^2/(c^2 \partial t^2)$ hinzufügen und auch die rechte Seite modifizieren. Es entsteht eine Gleichung für ein Viererpotential Φ , die links

$\square\Phi = \Delta\Phi - \partial^2\Phi/(c^2 \partial t^2)$ enthält. Das ist aber eine Gleichung für Wellen mit der Geschwindigkeit c .

Wie eine beschleunigte elektrische Ladung außer ihrem statischen Feld auch ein Wellenfeld erzeugt, das sich von ihr ablöst, kann eine beschleunigte Masse Gravitationswellen erzeugen.

Da Massen aber immer positiv sind, existiert kein Analogon zur Hertz-Dipolstrahlung. Gravitationsstrahlung ist mindestens **Quadrupolstrahlung**. Eine Masse, die einfach verschwände, würde eine Monopolstrahlung emittieren. Selbst der radiale Einsturz eines Schwarzen Loches ist aber nicht von dieser Art, denn das Feld bleibt ja erhalten. Ein nicht rotierendes Schwarzes Loch erzeugt nicht einmal eine Quadrupolstrahlung.

Jede nichtkugelsymmetrische Masse hat ein Quadrupolmoment Q und erzeugt ein **Quadrupolpotential**

$$\varphi = -G \left[\frac{M}{r} + \frac{Q}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \dots \right] \quad (12.48)$$

(Entwicklung nach **Kugelfunktionen**). Für zwei gleiche Massen M , die einander im Abstand $2d$ umkreisen, ergibt sich $Q = 2Md^2$ (Aufgabe 12.10.11). Dieses Quadrupolmoment (eigentlich ein Tensor) ändert seine Richtung mit der Kreisfrequenz des Umlaufs $\omega = \sqrt{GM/(4d^3)}$. Die Strahlungsleistung eines schwingenden Dipols ist $P \approx p^2\omega^4/(\epsilon_0 c^3)$ (vgl. Abschn. 7.4.6). Für eine Quadrupolstrahlung erhält man analog $P \approx GQ^2\omega^6/c^5$ (Ersatz der elektrischen Kopplungskonstante $\approx 1/\epsilon_0$ durch die gravitative G ; Erhöhung der Potenz von ω/c infolge des Übergangs vom Dipol zum Quadrupol). Für unseren Doppelstern erhalten wir bis auf Zahlenfaktoren $P \approx G^4 M^5 / (c^5 d^5)$. Diese Leistung ist selbst bei massiven engen Doppelsternen recht klein (10^{12} bis 10^{17} W). Neutronensterne, die einander auf einige Durchmesser nahe kämen, würden dagegen einen erheblichen Anteil ihrer Massenenergie gravitativ abstrahlen und würden mit ziemlicher Sicherheit ineinander stürzen. Einen nicht ganz so engen **Doppelpulsar** entdeckten *Taylor* und *Hulse* 1974. Seitdem haben sie die Bahndaten dieses Systems zu sagenhafter Genauigkeit verfeinert (Nobelpreis 1993). Die Periode, mit der diese Pulsare einander umlaufen, wird immer kürzer: Die Partner nähern sich, die Gesamtenergie des Systems nimmt ab, und zwar genauso, wie Einsteins Theorie für die Leistung der abgestrahlten Gravitationswellen vorhersagt (Aufgabe 12.10.13). Als Quelle intensiver Gravitationsstrahlung kommt eher der Einsturz eines rotierenden Sterns zum nicht kugelsymmetrischen Schwarzen Loch in Frage. Dieser Einsturz hat eine Zeitkonstante $\tau \approx 10^{-4}$ bis 10^{-5} s (Zeit, in der der Schwarzschild-Radius mit Lichtgeschwindigkeit durchfallen wird). τ^{-1} übernimmt die Rolle von ω in den obigen Abschätzungen.

Zum *Empfang* von Wellenstrahlung benutzt man Schwinger, die möglichst stark durch innere Schwingungen reagieren sollen. Sie tun das, wenn ihre Resonanzkurve bei der zu empfangenden Frequenz möglichst hoch liegt und die Anpassung gut ist. Es sollen ja innere Schwingungen ausgelöst werden. Wenn der Schwinger als Ganzes leicht hin- und herpendelt, nutzt es nichts. Gute Anpassung setzt voraus: Schwingerlänge

$l \approx \lambda$ der Welle. Andernfalls fängt der Schwinger nur einen Bruchteil l^2/λ^2 der Wellenleistungsdichte ein. Neuerdings werden auch riesige Michelson-Interferometer für diesen Zweck eingesetzt, s. Abb. 10.51.

Gravitationswellen regen elastische Eigenschwingungen in jedem Material an. Solche Eigenschwingungen haben Frequenzen $\nu_0 \approx c_s/l$ (c_s : Schallgeschwindigkeit). Demnach sind die Bedingungen $\nu_0 \approx \nu$, $l \approx \lambda$ grundsätzlich nicht erfüllbar, denn $c_s \ll c = \nu\lambda$. Der Verlustfaktor ist selbst bei Resonanz etwa c_s^2/c^2 . Mit $c_s/c \approx 10^{-5}$, wie bei typischen Metallen, kommt man mit $l \approx 1$ m in Resonanz mit einer Quelle von 100 km Durchmesser. Mit solchen Empfängern (Al-Zylindern und -Scheiben, deren Deformation piezoelektrisch äußerst genau gemessen werden kann) versucht *J. Weber* seit 1968 Gravitationsstrahlung aufzufangen. Die Zylinder sprechen hauptsächlich auf Wellen an, die axial einfallen, und haben daher eine gewisse Richtcharakteristik. Triviale Störungen durch lokale Erschütterungen oder Erdbeben versucht *Weber* zu eliminieren, indem er nur zeitliche Koinzidenzen zwischen weit entfernten Empfängern (Baltimore–Chicago) zählt. Mit der Erde rotierend scheint sein Gravitationsteleskop besonders dann echte Ereignisse zu registrieren, wenn es in Richtung des Zentrums der Galaxis zeigt. Solche Ereignisse sind kurzzeitige Ausbrüche von etwa 1 W/cm^2 Intensität und einigen ms Dauer, die durchschnittlich einmal in der Minute erfolgen. Bei einem Abstand der Quelle von 10^4 Lichtjahren $\approx 10^{20}$ m würde das einer Gesamtleistung von 10^{44} W entsprechen, d. h. einem Energieumsatz von etwa 10^{41} J. Das galaktische Zentrum müsste durch Gravitationsstrahlung sehr viel mehr Energie abgeben als durch elektromagnetische Strahlung, nämlich mehrere Sonnenmassen im Jahr. Man diskutiert auch die Möglichkeit, dass das galaktische Zentrum als starke Gravitationslinse nur Gravitationsstrahlung auf uns fokussiert, die nicht aus ihm selbst stammt, sondern vielleicht noch vom Urknall herrührt. Auch dann wären die angeblich beobachteten Intensitäten schwer zu erklären. Dazu kommt, dass das thermische Rauschen in *Webers* Empfängern (elastische Schwingungen mit der Energie $kT/\text{Freiheitsgrad}$) in gefährlicher Nähe der in Frage kommenden Empfangsleistung liegt (Aufgabe 12.10.12, vgl. auch Theorie des **Nyquist-Rauschens**, Aufgabe 7.2.12). Man entwickelt zurzeit Empfänger, die noch viel empfindlicher sind (z. B. Saphir-Einkristalle von mehreren kg), und dabei weniger anfällig gegen thermische Schwankungen (Kühlung mit flüssigem Helium).

12.10.4 Schwarze Löcher

Im Wesentlichen ist der Begriff des **Schwarzen Loches** schon 200 Jahre alt. *Laplace* erkannte, dass ein Stern so massereich sein kann, dass er nicht einmal das Licht von seiner Oberfläche entweichen lässt (Aufgabe 12.10.5). Wenn das Licht der Schwerebeschleunigung unterliegt, lautet die Bedingung für seine Entweichgeschwindigkeit einfach

$$\boxed{\frac{GM}{R} = \frac{1}{2}c^2} \quad (12.49)$$

Die spezielle Relativitätstheorie streicht $\frac{1}{2}$ und ergänzt: Da Licht nicht entweichen kann, kann auch keine andere Wirkung von einem solchen Stern auf den Rest der Welt ausgehen. Die allgemeine Relativitätstheorie schränkt ein: außer seiner Gravitation. Auch Abschn. 12.10.1 zeigt, dass das Schwerepotential am Rand eines solchen Sterns alle üblichen Raumzeitvorstellungen sprengt: Dort aufgestellte Uhren würden für den außerhalb befindlichen Beobachter unendlich langsam gehen, was man auch so ausdrücken kann, dass Photonen in der Außenwelt mit maximaler Rotverschiebung, also mit der Frequenz Null ankommen würden; Abstände schrumpfen von außen betrachtet auf Null. Die Sternmasse schnürt sich also in einer Punkt singularität aus unserer Welt ab (**Gravitationskollaps**).

Von den speziellen Eigenschaften der Sternmaterie war bisher nicht die Rede. Sie spielen auch keinerlei Rolle, denn alle Materie wird durch solche Schwerefelder zu einem unkenntlichen Brei zerquetscht. Kein Material, selbst nicht die Nukleonencores oder die Quarks, kann einen solchen Druck aushalten. Der Schweredruck wird nämlich im Schwarzen Loch $p \approx GM\rho/R \approx \rho c^2$ (vgl. Aufgabe 5.2.6). In einem Material, das dies oder mehr aushielte, wäre die Schallgeschwindigkeit $c_s \approx \sqrt{p/\rho} \gtrsim c$. Ein solches Material könnte zur Fortleitung von Schallsignalen mit Überlichtgeschwindigkeit dienen. Die ganze Struktur der Physik lässt das nicht zu.

× Beispiel ...

Weisen Sie nach: Wenn Radius und Masse eines Körpers die Bedingung des Schwarzen Loches erfüllen, ist die Schallgeschwindigkeit im Innern von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit.

Im Schwarzen Loch ($GM/R \approx c^2$) herrscht der Schweredruck $p \approx GM^2/R^4$ (Aufgabe 5.2.6). Von der gleichen Größenordnung müssten auch E -Modul bzw. reziproke Kompressibilität der Materie sein, denn diese müsste ja dem Druck standhalten, ohne wesentlich komprimiert zu werden. Die Schallgeschwindigkeit ergibt sich also aus Druck und Dichte $\rho \approx M/R^3$ zu $c_s \approx \sqrt{p/\rho} \approx \sqrt{GM/R}$, woraus sofort $c_s \approx c$ folgt. Das gilt nur, wenn die Materie wirklich durch thermischen oder fermischen Gegendruck gegen den Schweredruck ankämpfen muss. Für das ganze Weltall mit $\rho \approx 10^{-30}$ g/cm³ ist die Kompressibilität sehr viel größer, c_s sehr viel kleiner. Deswegen betrachtet man das Weltall i. Allg. nicht als Schwarzes Loch, obwohl die Bedingung $GM/R \approx c^2$ zutrifft.

Ein heißer Stern widersteht dem Gravitationskollaps infolge seines thermischen Drucks (in einigen Fällen wirkt auch der Strahlungsdruck mit). Ein Stern, dessen thermonukleare Reserven ausgebrannt sind, kann sich nur noch auf die Festigkeit seines Materials, d. h. den Fermi-Druck seiner Teilchen stützen (Abschn. 19.3.3, Weißer Zwerg). Der Fermi-Druck ist der quantenmechanische Widerstand von Teilchen gegen zu große gegenseitige Annäherung. Er versagt, wenn der ausgebrannte Stern mehr als 1,9 Sonnenmassen hat (Chandrasekhar-Grenze: Übergang zum relativistisch entarteten Gas, Neutronenstern). Die Nukleonen selbst halten noch etwas mehr aus. Bei hinreichend großer Masse erreicht aber

auch Materie von Kerndichte $\rho \approx 10^{14} \text{ g/cm}^3$ den zum Kollaps führenden Schweredruck. Aus (12.49) ergibt sich die kritische Masse zu $M = (3/(4\pi))^{1/2} c^3 G^{-3/2} \rho^{-1/2} \approx 10^{31} \text{ kg}$, ungefähr drei Sonnenmassen. So massive Sterne gibt es, und wenn sie alt genug sind, haben sie ihren Kernbrennstoff verbraucht, es bleibt ihnen also nichts anderes übrig, als zum Schwarzen Loch zusammenzustürzen.

Ein Stern, der sich durch seine periodische Doppler-Verschiebung als Partner eines Doppelsternsystems ausweist, erlaubt aus der Periode und der Verschiebung eine Schätzung des Bahnradius und damit der Masse des anderen Partners. Wenn dessen Masse größer ist als der kritische Wert, dabei von dem Partner aber weder direkt optisch noch spektroskopisch etwas zu sehen ist, liegt der Verdacht auf ein Schwarzes Loch nahe. Dazu kommt folgendes Kriterium: Ein Schwarzes Loch schluckt alle Materie, die in seine Reichweite kommt. Während diese Materie zuletzt mit Lichtgeschwindigkeit aus unserer Welt verschwindet, stößt sie einen Röntgen- bzw. γ -Todesschrei aus (Hawking-Strahlung). Röntgenastronomie ist vom Erdboden aus wegen der atmosphärischen Absorption nicht möglich. Der mit einem Röntgenteleskop ausgerüstete Uhuru-Satellit hat 1970 mehrere Doppelsterne mit den erforderlichen Eigenschaften als sehr intensive Röntgen-Quellen erkannt, vor allem die Quelle **Cygnus X-1**, die mit ziemlicher Sicherheit als ein blauer Stern betrachtet werden kann, der ein Schwarzes Loch umkreist und von diesem langsam eingeschlürft wird.

In der heutigen Welt ist nur der Gravitationsdruck stark genug, um Materie zum Schwarzen Loch zu komprimieren, und zwar für Massen oberhalb 10^{31} kg . Wenn der Urknall (Abschn. 12.10.7) hinreichend turbulent erfolgte, könnten dabei auch kleinere Massen von außen her so stark komprimiert worden sein. Solche Schwarzen Mini-Löcher können aber auch nicht kleiner sein als $M \approx 10^{13} \text{ kg}$, denn sonst wären sie aus quantenmechanischen Gründen längst zerstrahlt (Aufgabe 12.10.9). Ein solches Mini-Loch, das sich zerstrahlt, wäre alles andere als schwarz: Eine explodierende H-Bombe wäre ein Fünkchen dagegen. Man hat einige rätselhaftere Ereignisse wie z. B. den **Tunguska-„Meteoriten“** von 1906 als Durchgang eines Mini-Lochs durch die Erde zu deuten versucht, obwohl eine solche Deutung weder wahrscheinlich noch nötig ist.

12.10.5 Kosmologische Modelle

Viele für die modernste Forschung aktuelle Probleme lassen sich schon in einem nichtrelativistischen Modell verstehen. Eine riesige Masse, die anfangs sehr dicht gepackt war, explodiere. Die Splitter (Galaxien) fliegen mit verschiedenen Geschwindigkeiten davon, die schnellsten mit v_0 . Stöße zwischen den Splintern ziehen wir auch in der Anfangsphase nicht in Betracht. Alle Geschwindigkeiten bleiben dann radial. Im Bezugssystem *jedes* Splinters fliegen alle anderen radial nach außen weg, und zwar umso schneller, je weiter sie entfernt sind. Das ist einfach einzusehen: t sei die Zeit nach der Explosion. Vom ursprünglichen Zentrum habe unser Splitter mit der Geschwindigkeit \dot{r}_0 den Abstand $r_0 = \dot{r}_0 t$. Ein anderer Splitter mit \dot{r}_1 und $r_1 = \dot{r}_1 t$ hat relativ zu r_0 den Abstand $d = r_1 - r_0 = (\dot{r}_1 - \dot{r}_0)t$ und die Geschwindigkeit $v = \dot{r}_1 - \dot{r}_0$. Das Verhältnis v/d ist t^{-1} , die reziproke Zeit seit dem **Urknall**.

Genau dies hat *Hubble* 1929 beobachtet:

Das Spektrum ferner Galaxien zeigt eine **Rotverschiebung**, die proportional zum (unabhängig gemessenen) Abstand ist.

Deutet man diese Rotverschiebung als Doppler-Effekt infolge einer Radialgeschwindigkeit v , dann folgt die

Hubble-Konstante	
$H = \frac{v}{a} = 25(75) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = \frac{1}{1,3 \cdot 10^{10} \text{ Jahre}}$	(12.50)

(Mpc = **Megaparsec**; 1 pc = 3,26 Lichtjahre ist der Abstand, aus dem der Erdbahnradius unter 1'' Sehwinkel erscheint.)

Dieses einfache Modell hat mehrere Schwächen. Zunächst ist die Gravitation nicht berücksichtigt. Wir werden das gleich nachholen. Wenn zu Anfang wirklich alle Materie in einem Punkt vereinigt war, müsste $v_0 = \infty$ gewesen sein, damit die Splitter gegen diese riesige Gravitation entweichen konnten. Das relativistische Bild, das wir weiter unten kurz skizzieren, vermeidet Geschwindigkeiten $v > c$. Ferner stört an unserem Modell, dass es nicht räumlich homogen ist: Die Welt ist danach nicht überall im Wesentlichen gleich beschaffen, wie es das **kosmologische Postulat** fordert, sondern nur innerhalb der materieerfüllten Kugel. Außerhalb ist nichts. Die Relativitätstheorie bringt auch das in Ordnung. Viele Forscher stoßen sich schließlich auch an der zeitlichen Inhomogenität: Die Welt ist nicht immer im Wesentlichen gleich beschaffen, wie es ein erweitertes kosmologisches Postulat verlangt, sondern bei $t \approx 0$ war sie wesentlich anders, bei $t = 0$ in ganz extremer Weise, und was vor $t = 0$ war, kann prinzipiell kein Mensch sagen. Es gibt Theorien, die diese zeitliche Singularität vermeiden (**steady state-Kosmologien**).

Wir betrachten eine Galaxis am Rand der Explosionswolke, d. h. im Abstand R vom Zentrum. Die ganze übrige kugelförmige Masse M zieht sie zurück, d. h. beschleunigt sie mit $\dot{R} = -GM/R^2$. Die Lage ist genauso wie bei der Rakete (Abschn. 1.5.9e). Der Energiesatz lautet

$$\eta = \frac{1}{2} \dot{R}^2 - GMR^{-1}. \quad (12.51)$$

η ist die Gesamtenergie/kg. Bei $\eta > 0$ werden die Galaxien, wenn auch verlangsamt, bis ins Unendliche fliegen. Bei $\eta < 0$ folgt auf eine maximale Expansion eine Rekontraktion. $R(t)$ wird durch einen Zykloidenbogen beschrieben. Die maximale Ausdehnung entspricht $R_{\max} = GM/\eta$, die zeitliche Länge des Bogens (eine Periode des Weltrades) $T = 2\pi GM/|\eta|^{-3/2}$. Die Grenze zwischen dem ewig expandierenden und dem Zykloidenmodell liegt bei einer Hubble-Konstanten $H_{\text{kr}} = \dot{R}/R = \sqrt{2GM/R^3}$, bzw. bei einer mittleren Dichte des Weltalls $\rho_{\text{kr}} = 3H_{\text{kr}}^2/(8\pi G)$. Die Anfangsgeschwindigkeit muss unendlich gewesen sein, falls der Urknall von einer Punktmasse aus erfolgte. Andernfalls muss man die Zykloidenspitze irgendwo ziemlich willkürlich stützen.

In diesem Weltmodell (auch bei $\eta > 0$) gibt die gemessene Hubble-Konstante nicht mehr die reziproke Zeit seit dem Urknall an. Be-

obachtungen in unserer „näheren“ Umgebung beziehen sich ja nur auf ein kleines Stück der Zyklode, dessen lineare Extrapolation die Tangente im Jetzt-Punkt ergibt. Die Steigung dieser Tangente ist die *jetzige* Geschwindigkeit $\dot{R}(t)$ des Randes der Welt und gibt die jetzige oder lokale Hubble-Konstante $H(t) = \dot{R}(t)/R(t) = 1/T_H$ (T_H : Hubble-Zeit), die nach Abb. 12.46 *größer* ist als die Zeit T_F seit dem Urknall (**Friedmann-Zeit**).

Beobachtung sehr ferner Galaxien kann Aufschluss über die Gestalt der Kurve $R(t)$ geben. Eine um d entfernte Galaxis sehen wir so, wie sie vor einer Zeit d/c war, d. h. noch mit größerer Geschwindigkeit und Rotverschiebung. Der Zusammenhang zwischen Rotverschiebung $z = \Delta\lambda/\lambda$ und d dürfte dann nicht mehr linear sein, sondern müsste superlinear werden. Quasare (quasistellare Radioquellen, deren Rotverschiebungen bis $z = 3,56$ gehen) zeigen genau dieses Verhalten. Leider sind so große Entfernungen nicht mehr hypothesenfrei messbar. Cepheiden sieht man längst nicht mehr; man muss sich auf Helligkeitsvergleiche anscheinend ähnlicher Objekte bzw. auf die Dichteverteilung dieser Objekte verlassen.

Wir haben bisher das Verhalten von Galaxien am Rand der Welt untersucht. Eine Galaxis im Abstand r vom Zentrum unterliegt nur der Gravitation der innerhalb liegenden Kugel. In den bisherigen Formeln ist einfach R durch r zu ersetzen. Deshalb bleibt die Kugel, wenn sie einmal homogen mit Materie erfüllt war, auch in jedem späteren Stadium homogen.

Wenn der x - und der y -Maßstab festgelegt sind, ist eine Zyklode durch einen weiteren Parameter, z. B. den Radius des Rades gekennzeichnet. Unser homogen-isotropes, rotationsfreies Weltmodell ist demnach durch drei Parameter vollständig gekennzeichnet:

- H_0 , den jetzigen Wert der Hubble-Konstante; er gibt den Zeitmaßstab;
- R_0 , den jetzigen Radius des Weltalls; er gibt den Entfernungsmaßstab;
- den **Decelerationsparameter** $q_0 = \ddot{R}/\dot{R}^2 = GM/(R_0^3 H_0^2) = 4\pi G \varrho_0 / (3H_0^2)$; er kennzeichnet die Form der Zyklode (bei $q_0 > \frac{1}{2}$ bzw. $\eta < 0$) oder der expandierenden Lösung (bei $q_0 \leq \frac{1}{2}$ bzw. $\eta \geq 0$). Der Grenzfall $q_0 = 0$ entspräche einer Welt mit verschwindender Dichte und Gravitations-Deceleration. Allein im Fall $q_0 = 0$ ist jeder Wert von \dot{R} möglich; in allen anderen Fällen muss \dot{R} zu Anfang unendlich sein (Abb. 12.46).

Die Bestimmung dieser Parameter ist zurzeit eins der Kernprobleme der beobachtenden Kosmologie. Die Hubble-Konstante ist in den letzten Jahrzehnten mit Verfeinerung der Entfernungsmessmethoden immer „kleiner geworden“. Ihr jetziger (1982) Wert von $1/1,3 \cdot 10^{10}$ Jahren scheint „stationär“ zu sein. Er ist verträglich mit Altersbestimmungen für die verschiedensten Objekte und nach den verschiedensten Methoden (Erde, Meteoriten, Sterne, Sternhaufen, Galaxien). Die Friedmann-Zeit sollte danach mindestens $8 \cdot 10^9$ Jahre sein. Wir können also noch nicht sehr weit oben auf der Zyklode sein, sonst wäre der Unterschied zwischen Hubble- und Friedmann-Zeit größer. Eben deswegen ist aber die Bestimmung von q_0 besonders schwierig. Man kann noch nicht einmal sagen, ob q_0 größer oder kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, d. h. ob die Welt für immer expandieren wird oder ob sie wieder in den Ur-Feuerball zurückkehren wird.

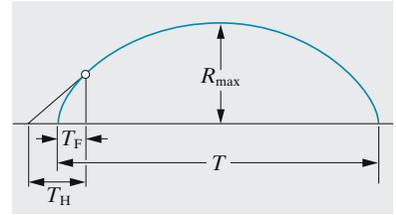


Abb. 12.46. Zeitabhängigkeit des Welt-radius nach einem Modell ohne kosmologische Abstoßung und mit negativer Gesamtenergie. Der Zyklodenbogen müsste sich dann zyklisch wiederholen. Aus Rotverschiebungsmessungen folgt eine größere Zeit T_H (Hubble-Zeit), als tatsächlich seit dem Urknall verstrichen ist (T_F : Friedmann-Zeit)

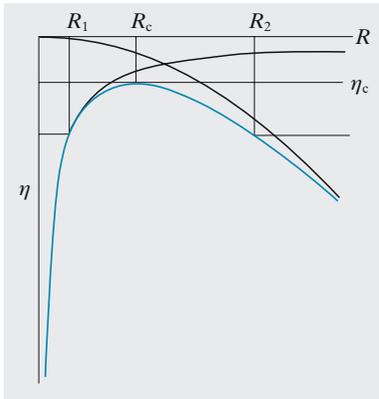


Abb. 12.47. Potentialkurve für ein Weltall mit kosmologischer Abstoßung. Die Entwicklung des Weltalls entspricht der Bewegung eines Körpers mit einer gewissen spezifischen Anfangsenergie η auf dieser Kurve. Bei $\eta > \eta_c$ unbegrenzte Ausdehnung, bei $\eta < \eta_c$ zyklisches Verhalten, bei $\eta = \eta_c$ ist labiles Gleichgewicht auf dem Gipfel möglich

12.10.6 Die kosmologische Kraft

Einstein empfand es als einen Mangel seiner Feldgleichungen, dass sie keine statische Lösung zulassen. Er suchte nach einer Erweiterung, die mathematisch konsistent ist und die Welt stabilisiert, und fand, dass man ein **kosmologisches Kraftglied** hinzufügen kann, das proportional zum Abstand ist. Die Bewegungsgleichung des nichtrelativistischen Modells erweitert sich dann zu $\ddot{R} = -GM/R^2 + \Lambda R/3$, der Energiesatz zu $\frac{1}{2}\dot{R}^2 - GM/R - \Lambda R^2/6 = \eta$.

Das kombinierte Potential aus Gravitation und kosmologischer Abstoßung bildet einen Berg mit einem flachen Gipfel von der Höhe $\eta_c = -1,1(GM)^{2/3}\Lambda^{1/3}$ beim Radius $R_c = (3GM/\Lambda)^{1/3}$ (Abb. 12.47). Offensichtlich gibt es jetzt drei qualitativ verschiedene Arten von Lösungen:

- $\eta \geq \eta_c$: Die Welt kommt über den Berg, d. h. sie dehnt sich unbegrenzt aus, und zwar von $R = 0$ an (Urknall). Über dem Berg kann die $R(t)$ -Kurve für einige Zeit fast geradlinig werden, weil sowohl Gravitation als auch Λ -Kraft dort relativ schwach sind. Dieses Gebiet reicht von $R_1 \approx GM/\eta$ bis ungefähr R_c . Speziell bei $\eta \approx \eta_c$ wird dieser gerade Bereich horizontal: Die Welt steht lange auf der Kippe zwischen Expansion und Rekontraktion.
- $\eta = \eta_c$: Vom Anfangswert von R (und \dot{R}) hängt ab, was weiter geschieht. Bei $R < R_c$ (und $\dot{R} \neq 0$) expandiert die Welt bis R_c , das sie aber erst nach unendlich langer Zeit erreicht. Die Geschichte begann mit einem Urknall. Bei $R = R_c$ (woraus $\dot{R} = 0$ folgt) liegt die Welt im instabilen Gleichgewicht auf dem Gipfel (**statischer Einstein-Kosmos**). Bei $R > R_c$ (und $\dot{R} \neq 0$) erfolgt unbegrenzte Expansion; in unendlich ferner Vergangenheit lag der Zustand $R = R_c$ (**Lemaître-Eddington-Kosmos**). Die Prozesse bei $R \neq R_c$ könnten im Prinzip auch umgekehrt verlaufen (Kontraktion auf $R = 0$ vom Wert $R = R_c$ in der unendlich fernen Zukunft von $R = \infty$ in unendlich ferner Vergangenheit), aber der Hubble-Effekt ($\dot{R} > 0$) schließt diese Fälle für unsere Welt aus.
- $\eta < \eta_c$ und $R < R_c$: Die Welt bleibt vor dem Berg; $R(t)$ folgt der Zykloide, die ganz oben mehr oder weniger durch den Einfluss des Λ -Gliedes modifiziert sein kann. Die Welt dehnt sich aus bis $R_1 \approx GM/\eta$, dann kontrahiert sie wieder.
- $\eta < \eta_c$ und $R > R_c$: Die Welt bleibt hinter dem Berg. Es gilt die cosh-Lösung von Aufgabe 1.4.7. Die Welt wird unbegrenzt beschleunigt expandieren, aber in der Vergangenheit gab es keinen Urknall, sondern R hat, aus dem Unendlichen kommend, auf einen Minimalwert $R_2 \approx \sqrt{6|\eta|/\Lambda}$ abgenommen und steigt seitdem wieder.

Λ könnte auch negativ sein (kosmologische Anziehung). Das würde offenbar jede unbegrenzte Expansion ausschließen. Bei großem R , wo die Gravitation keine Rolle mehr spielt, käme einfach eine harmonische Schwingung heraus.

Welches dieser Weltmodelle zutrifft, ist noch nicht entschieden. Das kosmologische Glied Λ war einige Zeit aus mehr ästhetischen Gründen in Misskredit gekommen, vor allem, weil man seinen physikalischen Ursprung nicht einsah.

Eine ähnliche abstandsproportionale Kraft ergäbe sich, wenn die Materiekugel starr, d. h. mit überall gleichem ω rotierte. Diese Idee ist allerdings dynamisch schwer allgemein durchzuführen und verletzt nahezu sämtliche Symmetrieforderungen, die man an die Welt als Ganzes zu stellen gewohnt ist. Physikalisch sinnvoller wäre ein allgemeines Aufquellen des Raumes infolge Quantenfluktuationen des Vakuums, ähnlich wie sie die Quantenelektrodynamik annimmt. Man weiß noch nicht, was an diesen Ideen richtig ist, und ob Λ überhaupt von Null verschieden ist oder welches Vorzeichen es hat.

Man sollte meinen, dass diese anschaulich einfachen Ergebnisse durch die spezielle und besonders durch die allgemeine Relativitätstheorie viel komplizierter werden. Für die Rechnung trifft das auch zu. Wenn man aber unter $R(t)$ den Krümmungsradius des Weltalls versteht, d. h. im Allgemeinen den größtmöglichen Abstand, erhält man genau dieselbe Auswahl von Modellen wie in der nichtrelativistischen Kosmologie. Da aber R der größtmögliche Abstand ist, erledigt sich die Frage, was dahinter kommt. Die Inhomogenität zwischen „drinnen etwas – draußen nichts“ wird beseitigt. Ebenso verschwinden die Überlichtgeschwindigkeiten, denn $\dot{R} = c$.

R ist der größtmögliche Abstand, weil der Raum gekrümmt ist. Diese Krümmung kann positiv, Null oder negativ sein. Das hängt von der mittleren Energiedichte, einschließlich der Ruhmassendichte ab. Sie ist genau unser η , und dieser Wert ist überall im Weltall derselbe, nicht nur am Rand, wie man aus (12.51) entnehmen könnte. Am Rand legen die Galaxien, von uns aus betrachtet, ihre ganze Ruhenergie in Fluchtbewegung an: Photonen, die von dort kommen, sind für uns so vollständig rotverschoben, dass ihre Frequenz und damit ihre Energie Null werden; Entsprechendes gilt für jede Art von Materie. Dort wird die Energiedichte lediglich durch η beschrieben. Für $r < R$ bleibt ein größerer Bruchteil der Ruhenergie übrig und ergänzt den dort kleineren Wert von η zur überall gleichen Gesamtenergiedichte, wie es das kosmologische Postulat verlangt.

Energie- oder Massendichte bedingt aber nach Einsteins Gravitationstheorie Raumkrümmung. Diese Krümmung ist positiv wie im zweidimensionalen Fall bei einer Kugeloberfläche, wenn $\eta > 0$ (**sphärischer** oder **Einstein-Raum**). Die Krümmung ist Null bei $\eta = 0$ (**ebener** oder **euklidischer Raum**), negativ wie bei einer Sattelfläche für $\eta < 0$ (**hyperbolischer** oder **Lobatschewski-Bolyai-Raum**). Der sphärische Raum ($\eta > 0$) schließt sich zu einem riesigen Schwarzen Loch, R ist sein Radius. Dieser Raumtyp erlaubt, wie wir gezeigt haben, nur Weltmodelle, die vom Urknall aus unbegrenzt expandieren. Qualitativ dasselbe gilt vom ebenen und auch vom hyperbolischen Raum, wenn $\eta > \eta_c$. Nur bei $\eta < \eta_c$ existieren die zyklischen bzw. cosh-förmigen Lösungen.

Diese Modelle wurden im Wesentlichen schon von *Friedmann* diskutiert (1924). *Gott* u. A. bemühen sich herauszufinden, welcher von diesen Fällen auf unsere Welt zutrifft.²

12.10.7 Gab es einen Urknall?

Bis vor kurzem glaubte man nicht, dass Sterne schwere Elemente thermokern aufbauen können. Selbst unter den extremsten Temperatur- und Dichteverhältnissen sollte der Aufbau nur höchstens bis zum Eisen gehen. Andererseits ist klar, dass z. B. Uran nicht von Ewigkeit her existiert haben kann, sondern höchstens einige 10^{10} Jahre. Zum Aufbau schwerer Elemente mussten Bedingungen postuliert werden, die noch extremer sind als im Sterninnern und die andererseits nicht viel länger als 10^{10} Jahre zurückliegen. Der zurückextrapolierte Hubble-Effekt mit dem überdichten Anfangszustand schien beide Probleme glänzend zu lösen. *Gamow*, *Lemaître* u. A. entwickelten Theorien vom **Ursprung der Elemente** durch sukzessiven Neutroneneinfang, die zunächst die kosmische Häufigkeitsverteilung der Nuklide recht gut zu erklären schienen. Noch vor der Zeit des Kernaufbaus sollten sich die Elementarteilchen selbst aus dem Urbrei herausgeschält haben. Diese Theorien setzen voraus, dass in der heutigen Welt eine isotrope Strahlungsdichte vorhanden ist, deren Kompression beim Zurückextrapolieren zu sehr hohen Temperaturen führt (vgl. Auf-

² *J. R. Gott* u. a.: *Astrophys. J.* **194**, 543 (1974). *J. E. Gunn* u. a.: *Nature* **257**, 454 (1975).

gabe 12.10.18), etwa 10^9 K zur Zeit des Aufbaus der Elemente, um 10^{13} K bei der Bildung der Hadronen ($kT \approx mc^2$).

1965 entdeckten *Penzias* und *Wilson* eine Radiostrahlung mit planckscher Energieverteilung entsprechend 2,7 K, die, wie es damals schien, völlig isotrop ist. Sie entspricht genau Gamows verdünntem Nachhall vom Geburtsschrei des Weltalls. Andererseits erwies sich die ursprüngliche Theorie vom Aufbau der Elemente als nicht haltbar: Der Kernaufbau wäre auch im heißesten Feuerball nur bis zum Helium möglich, einfach weil es zu schwierig ist, dem ^4He -Tetraeder ein weiteres Nukleon anzufügen. Außerdem hat man, merkwürdigerweise gerade in kalten Sternen, die Spektrallinien des Elements Technetium gefunden, dessen langlebigstes Isotop eine Halbwertszeit von nur $2,6 \cdot 10^6$ Jahren hat. Der Aufbau schwerer Kerne ist also ein ganz normaler Prozess im Sterninnern. Dadurch ermutigt, hat man sogar die 55-tägige Halbwertszeit der Helligkeit von Supernovae mit der des Californium-Isotops ^{254}Cf in Verbindung gebracht. Zur Elementerzeugung ist jedenfalls heute der Urknall weder dienlich noch nötig.

Angesichts dieser Situation (aber noch vor der Entdeckung der 2,7-K-Strahlung), entwickelten *Hoyle*, *Bondi* und *Gold* eine Theorie, die Singularitäten wie den Urknall vermeidet und das **erweiterte kosmologische Postulat** erfüllt (Homogenität auch in der Zeit). Da die Welt allem Anschein nach expandiert, muss man, um speziell die mittlere Dichte konstant zu halten, eine ständige Neuerzeugung von Materie aus dem Nichts annehmen. Betrachtet man als natürliche Einheitszelle des Raumes ein Nukleonenvolumen und berücksichtigt, dass die meisten dieser Zellen erst seit einem Weltalter H^{-1} existieren, dann erlaubt die Unschärferelation eine Energieschwankung in solchen Volumina, die gerade eine Teilchenerzeugungsrate darstellen, sodass der Dichteverlust infolge der Spiralnebelldiffusion ersetzt wird. Die dazu notwendige Erzeugungsrate ergibt sich aus der mittleren Dichte (wahrscheinlichster Wert $\rho_0 \approx 10^{-27} \text{ kg/m}^3$), die nahe beim kritischen Wert für einen Weltradius $R \approx c/H \approx 1,3 \cdot 10^{26} \text{ m}$ liegt (vgl. (12.49)). Materie verschwindet mit der Rate $\dot{M} \approx -\rho_0 R^2 c$ hinter dem Ereignishorizont (Kugelfläche mit R). Sie muss also mit einer Quelldichte $\approx \rho_0 c/R \approx \rho_0 H \approx 10^{-45} \text{ kg/m}^3 \text{ s}$ neu erzeugt werden. In der ganzen Erdatmosphäre würde danach nur etwa ein Nukleon pro Sekunde erzeugt, was eine direkte Prüfung vorläufig aussichtslos macht.

Das wichtigste Argument gegen die zeitliche Homogenität der Welt betrifft die Verteilung der **Quasars**. Diese Quasistellar Radio Sources wurden zuerst als radioteleskopisch nicht auflösbare Quellen entdeckt und später z. T. mit optischen Objekten identifiziert, die außerordentlich große Rotverschiebungen $z = \Delta\lambda/\lambda$ haben (bis $z = 3,56!$) und außer ihrer hohen Radiointensität auch einen spektralen UV-Exzess zeigen. Seit man festgestellt hat, dass auch rein optisch identifizierte Objekte ähnlich hohes z haben, nimmt man dieses z als kennzeichnend für einen Quasar, ob er stark radioemittiert oder nicht. Bei gewöhnlichen Galaxien findet man dagegen nur z -Werte bis 0,4. Deutet man z kosmologisch, d. h. im Sinne des Hubble-Effekts, dann müssen die fernsten Quasars also etwa zehnmal ferner sein als die fernsten Galaxien, die man noch sieht. Beide haben ähnliche scheinbare Helligkeit (19. Größe), demnach ist ein

Quasar etwa 100-mal so hell wie eine Galaxis. Angesichts dessen ist besonders merkwürdig, dass die Helligkeit vieler Quasars mit Perioden von wenigen Tagen schwankt. Das ist nur denkbar, wenn ihr Durchmesser nicht größer ist als ebenso viele Lichttage, denn die Teile eines größeren Strahlers könnten ihre Emission prinzipiell nicht so koordinieren, einfach deswegen, weil die Gleichzeitigkeit zwischen diesen Teilen nicht einmal genau genug *definiert* wäre: Das absolute Anderswo wäre zu breit. Helligkeit von 100 Galaxien auf so kleinem Raum (nicht viel größer als das Sonnensystem) schien undenkbar, bis man im Kern ziemlich normaler Galaxien (**Seyfert-Galaxien**) Vorgänge entdeckte, die dem nahe kommen, deren physikalischer Mechanismus allerdings noch ebenso ungeklärt ist.

Für die Entscheidung zwischen Urknall und steady state ist die räumliche Verteilung der Quasars wesentlich, nämlich die Tatsache, dass sie fast alle sehr weit weg sind. Das gleiche Volumen enthält umso mehr Quasars, je weiter es von uns entfernt ist. Die bisher überzeugendste Erklärung ist, dass Quasars, wie bei dem enormen Energieausstoß eines so kleinen Systems nicht verwunderlich, sehr junge Systeme sind, die ziemlich zu Anfang der Welt entstanden. Eigentlich sind sie schon alle ausgebrannt bzw. zu normaler Leuchtkraft abgesunken, und wir sehen die fernem nur noch deswegen, weil ihr Licht schon mehrere Milliarden Jahre unterwegs ist. Das steady state-Modell hat auf Anhieb nichts ähnlich Einleuchtendes anzubieten. Es wird immer wahrscheinlicher, dass im Zentrum eines Quasars, wie auch in einer normalen Galaxie ein riesiges schwarzes Loch sitzt, das sich von Sternen ernährt, von denen es etwa einen jährlich schluckt. Der Unterschied zwischen den jugendlich unruhigen Quasars und den stilleren Normalgalaxien liegt nur in der Masse, also im Alter des schwarzen Loches: Wenn die Masse kleiner ist als etwa 10^8 Sonnenmassen (**Laplace-Grenze**, Aufgabe 12.10.5), liegt die **Roche-Grenze** (Aufgabe 1.7.16) außerhalb des schwarzen Loches, nahe kommende Sterne werden also erst zerrissen und dann gefressen. Später wandert die Roche-Grenze ins Innere, und das schwarze Loch schluckt die Sterne unzerstört und daher ohne viel Strahlungsgeschrei.

Der Hubble-Effekt in seiner Deutung als Doppler-Effekt und damit die Expansion des Weltalls sind übrigens auch nicht unangefochten geblieben. Schon *Hubble* selbst diskutierte die Möglichkeit einer **Ermüdung des Lichts** auf seinem langen Weg, die in einer Frequenzabnahme durch Stoß mit anderen Teilchen beruhen sollte. 1972 fanden *Rubin* und *Ford* eine deutliche Anisotropie der Rotverschiebung. Galaxien in der einen Hemisphäre, in deren Zentrum die Sternbilder Jungfrau und Coma Berenices liegen, und damit einer der größten Haufen von Galaxien, der Virgo-Coma-Haufen, zeigen bei offenbar gleichem Abstand eine systematisch stärkere Rotverschiebung als Galaxien in der anderen Hälfte. Diese selbst noch etwas umstrittene Anomalie der Rotverschiebung und viele andere sind vielfach so gedeutet worden, dass Stoßprozesse beim Durchgang durch dichtere Materie wenigstens einen Teil der Rotverschiebung bedingen. Ein **ultrarelativistischer Compton-Effekt** würde die Beobachtungstatsachen ziemlich zwanglos erklären, wenn als Stoßpartner des Photons Teilchen mit endlicher Ruhmasse unterhalb 10^{-54} kg in ausrei-

chender Dichte verfügbar wären. Eine Ruhmasse des Photons von dieser geringen Größenordnung ist nicht auszuschließen (Aufgabe 12.8.8), und daher ist diese Hypothese, die Urknall und Materieerzeugung überflüssig machen würde, durchaus diskutabel.

12.10.8 Das Geheimnis der dunklen Massen

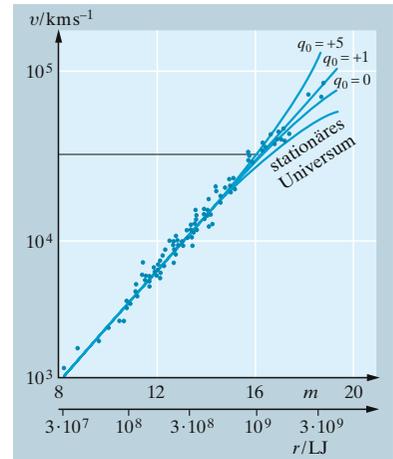
Fast alle Galaxien entfernen sich voneinander, nur die Andromeda-Galaxie nähert sich uns mit 50 km/s, während sie nach dem Hubble-Gesetz etwa ebenso schnell von uns fliehen sollte. Das muss an der Gravitation zwischen den beiden relativ nahen Galaxien liegen, aber ihre beobachtbaren, in Sterne zusammengeballten Massen würden nicht ausreichen, die Hubble-Expansion zu bremsen. Es gibt viel mehr unsichtbare Masse als sichtbare, leuchtende. Dasselbe folgt aus der Dynamik der Spiralgalaxien, nämlich ihrer Rotation: Die innersten Teile, bis etwa 10 000 Lichtjahre Radius, rotieren wie ein starrer Körper, außerhalb ist die Umlaufgeschwindigkeit der Sterne zum Zentrum praktisch konstant (200–300 km/s). Eine Punktmasse (die zentrale Kugel, in der die meisten Sterne sitzen) müsste mit $v \sim r^{-1/2}$ umkreist werden, innerhalb einer homogenen Kugel würde $v \sim r$ gelten. Die Wahrheit liegt dazwischen: Die Dichte nimmt nach außen ab, aber längst nicht so schnell wie die der sichtbaren Sternverteilung.

Der Andromedanebel erscheint insgesamt so hell wie ein Stern 3. Größe, ist aber $2 \cdot 10^6$ Lichtjahre entfernt, der typische Stern 3. Größe nur etwa 30 Lichtjahre. Also leuchtet der Andromedanebel wie $5 \cdot 10^9$ Sterne mit 10^{40} kg Gesamtmasse. Berücksichtigt man Lichtschwächung durch gegenseitige Bedeckung und Absorption in Dunkelwolken, kommt man knapp 10-mal höher. Die Masse, die einen Stern ganz außen ($r \approx 5 \cdot 10^4$ Lichtjahre) mit $v = 300$ km/s herumzwingt, ergibt sich aber zu $M = rv^2/G = 10^{42}$ kg. Mindestens $\frac{9}{10}$ dieser Masse leuchtet also nicht und bildet keine Scheibe mit Zentralwulst, sondern vermutlich eine annähernd kugelförmige Wolke, den Halo, mit nach außen abnehmender Dichte. Für größere Bereiche, etwa Galaxienhaufen, erhält man ein noch größeres Verhältnis dunkel/hell, bis hin zu 100, dem Wert, der etwa der Grenzdicke zwischen dem ewig expandierenden und dem wieder kontrahierenden Weltall entspricht.

Woraus besteht aber die **dunkle Masse**? Aus hungernden schwarzen Löchern (ohne Akkretionsscheibe), aus Neutrinos, aus noch exotischeren Teilchen wie **Higgs-Teilchen** usw.? Neutrinos werden von den Sternen seit 10^{10} Jahren emittiert, vorher viel intensiver aus Teilchenreaktionen, und praktisch nie vernichtet, aber durch die Expansion so rotverschoben, also verlangsamt, dass überwiegend nur ihre Ruhmasse zählt, falls sie eine haben (Aufgabe 18.4.31). Die experimentellen Grenzen für diese Ruhmasse erniedrigen sich aber ständig, sodass sie kaum noch für die dunkle Masse ausreicht. Ein viel trivialerer Kandidat gewinnt dagegen an Wahrscheinlichkeit: Die **braunen Zwerge**. Das sind Gasklumpen, zu massearm, um im Zentrum die Fusionstemperatur zu erreichen, daher nicht leuchtend: Stern-Fehlgeburten mit Massen zwischen $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{10}$ Sonnenmasse (unterhalb der unteren Grenze würden Verdichtungen sich wieder zerstreuen). Entdecken kann man einen solchen Körper durch seine **Gravitationslinsenwirkung** (Aufgabe 12.10.26): Ein Stern, der ziemlich genau hinter ihm vorbeizieht, erscheint momentan (einige Tage lang) heller. Unter 5 Millionen beobachteten Sternen der Magellan-Wolken (Satellitengalaxien der unseren) hat man jetzt drei Ereignisse gefunden, deren Signatur genau passt. Diese Häufigkeit entspricht sehr gut der statistischen Erwartung. Einige solche Objekte hat man kürzlich auch direkt beobachtet.

▲ Ausblick

In der modernen Physik geht nichts mehr ohne die Relativitätstheorie. Die Theorien der Elementarteilchen von der Dirac-Gleichung an setzen sie ebenso selbstverständlich voraus wie die Experimentatoren beim Bau ihrer Beschleuniger und der Auswertung energiereicher Wechselwirkungen. Fast jedes Jahr finden internationale Colloquien über relativistische Astronomie und Kosmologie statt. Warum sich die Materie in Pulsaren noch exotischer verhält als in weißen Zwergen, versteht man nur relativistisch, ganz abgesehen von schwarzen Löchern und der Struktur des ganzen Universums.



Hubble-Effekt (Daten nach *Allan Sandage*). Die Radialgeschwindigkeit v aus dem relativistisch korrigierten Dopplereffekt ist aufgetragen über der scheinbaren Helligkeit m der Galaxien. m ist ein logarithmisches Maß für den Abstand r (untere Abszissenachse). Die v -Kurve ist nur im unteren Teil logarithmisch. Die theoretischen Kurven für verschiedene Decelerationsparameter q_0 lassen noch keine Entscheidung zwischen offenem, ewig expandierendem ($q_0 < 1/2$) und geschlossenem Weltall zu

✓ Aufgaben ...

www. CD

●● 12.1.1 Die seltsamen Eigenschaften des Äthers

Seit es nachweisbar astronomische Messungen gibt (ca. seit 3 000 v. Chr.) hat sich die Länge des Jahres, wenn überhaupt, höchstens um 10 min verändert. Seit es Präzisionschronometer gibt (seit ca. 100 Jahren) beträgt diese Änderung höchstens 0,1 s. Es gibt kein Anzeichen, dass sich seit dem Kambrium (d. h. in ca. 500 000 000 a) die Jahreslänge um mehr als etwa 30% geändert hat (vgl. Aufgabe 1.1.6). Welche dieser Abschätzungen ergibt die kleinste relative Änderung? Was folgt daraus für die evtl. Änderungen des Erdbahnradius und der Bahngeschwindigkeit der Erde? Wenn es ein widerstehendes interplanetarisches Medium gibt, welche Bremskraft übt es höchstens auf die Erde aus? Wie groß kann demnach seine

Dichte und insbesondere die des hypothetischen Äthers höchstens sein? Eine weitere Abschätzung ergibt sich daraus, dass die bei dieser Bremsung auftretende Reibungswärme viel kleiner ist als die Strahlungsleistung der Sonne auf die Erde. Welche meteorologischen Folgen müssten nämlich sonst eintreten? Wenn die Lichtwellen elastische Ätherschwingungen wären, welche elastischen Eigenschaften müsste der Äther haben? Beachten Sie, dass das Licht transversal schwingt! Geben Sie Abschätzungen für die zu postulierenden elastischen Größen und vergleichen Sie mit normalen Materialien!

●● 12.1.2 Michelson-Versuch

Monochromatisches Licht aus der Quelle L wird durch einen halbdurchlässigen Spiegel P in zwei kohärente

Teilstrahlen gleicher Intensität zerlegt, die nach gleicher Laufstrecke l durch zwei Spiegel $A'B'$ und $A''B''$ zurückgeworfen und wieder auf P vereinigt werden. Dort erzeugen sie ein Interferenzbild (Abb. 10.50). Betrachten Sie zunächst idealisierte Lichtstrahlen mit streng punktförmigem Querschnitt. Wie sieht das Interferenzbild aus, wenn (a) die Arme genau gleich lang sind, (b) wenn sie um genau eine halbe Wellenlänge verschieden lang sind? Wozu ist die Kompensatorplatte P' da? Wie lang müssen die Arme sein, damit bei einer Bewegung des Labors und der Erde gegen den hypothetischen Äther z. B. mit der Kreisbahngeschwindigkeit der Erde eine Laufzeitdifferenz von einer halben Periode herauskommt? Ist es mechanisch möglich, zwei Arme von dieser Länge bis auf $\lambda/2$ an-

zugleichen? Wie müsste sich das Interferenzbild ändern, wenn man den Apparat um 90° schwenkt, also die Rollen der beiden Arme vertauscht? Welche Schlüsse ziehen Sie, wenn keine solche Änderung eintritt? Kann es daran liegen, dass die Erde im Moment der Messung relativ zum Äther ruhte? Wenn ja, welchen Effekt sollte man dann 6 Monate später erwarten? Wenn wieder nichts eintritt, was sagen Sie dann? Um welchen Faktor müsste sich der jeweils in Richtung des „Ätherwindes“ stehende Arm verändern, um die erwartete Laufzeitdifferenz zu kompensieren?

● 12.1.3 Weltlinien

Wie sehen graphische Fahrpläne aus für den Verkehr auf einer Bahnlinie, für den Schiffsverkehr auf einer Meeresfläche, für den Flugverkehr (unter Berücksichtigung der Höhendimension)?

Wie würde in jedem der drei Fälle ein ruhendes Fahrzeug, ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Fahrzeug, ein Zusammenstoß dargestellt werden? Wie liest man Geschwindigkeiten ab, wie Beschleunigungen? Welche Rolle spielt es, welche Kartenprojektion man für die Darstellung des Meeres wählt?

●● 12.1.4 Lösungsvorschläge

Als Ausweg aus dem Michelson-Dilemma schlug *Ritz* vor, das Licht breite sich immer *relativ zu seiner Quelle* allseitig mit der Geschwindigkeit c aus. Würde dies das Ergebnis des Michelson-Versuchs erklären? *De Sitter* argumentierte so: Es gibt Doppelsterne, die einander mit Perioden von wenigen Stunden umkreisen. Man stellt die periodisch wechselnden Radialgeschwindigkeiten relativ zur Erde aus dem Doppler-Effekt fest (spektroskopische Doppelsterne). Wenn *Ritz* recht hätte, müsste es in den Spektren solcher Doppelsterne sehr spukhaft zugehen. Wie nämlich?

● 12.1.5 Wer hat sich bewegt?

Während eines Vortrages über Relativitätstheorie, den *Eddington* in

Edinburgh gab, bemerkte ein Zuhörer: „Sir Arthur, Sie sehen müde aus, und ich verstehe das, denn Sie sind ja den ganzen Tag hierher gereist. Was ich nicht verstehe, ist, wie Sie sagen können, es sei ganz egal, ob Sie zu uns gekommen sind oder wir zu Ihnen, denn im zweiten Fall hätten Sie doch keinerlei Grund zur Müdigkeit.“ Wie hätten Sie sich aus der Affäre gezogen?

● 12.1.6 Strahlungsbremung

Man hat gemeint, die Sterne müssten allmählich zur Ruhe kommen, denn solange sie sich bewegen, staut sich ihr Licht vor ihnen auf, m. a. W. die Energiedichte ist vor ihnen größer als hinter ihnen, was einen bremsenden Zusatzstrahlungsdruck zur Folge hat. Stimmt das? Gibt es einen entsprechenden akustischen Effekt?

●● 12.2.1 Lorentz-Kontraktion

Zwei entgegengesetzte Ladungen stehen im Abstand d im Gleichgewicht, weil ihre Coulomb-Anziehung durch eine steilere Abstoßung kompensiert wird. Welche Zusatzfelder und -kräfte treten für einen Beobachter auf, der sich gegenüber dem System mit einer Geschwindigkeit v senkrecht zur Verbindungslinie der Ladungen bewegt? Wie verhält sich die Zusatzkraft zur Coulomb-Kraft? Kann der Gleichgewichtsabstand derselbe bleiben? Um welchen Faktor ändert er sich, vorausgesetzt dass diese Änderung klein bleibt? Wie verhält sich eine Netzebene eines NaCl-Kristalls, die senkrecht zu v steht? Wie werden die benachbarten Netzebenen darauf reagieren?

●● 12.2.2 Schnelle Uhren gehen nach

dpa-Meldung vom Oktober 1971: „Zwei amerikanische Wissenschaftler ... schnallten im Jumbo-Jet ... zwei Präzisions-Atomuhren fest. Zwei weitere Messgeräte des gleichen Typs, haargenau abgestimmt, blieben im U.S. Naval Observatory zurück ... Auf dem Flug in östlicher Richtung ... sind die „schnellen“ Atomuhren

im Flugzeug etwa eine hundertmilliardstel Sekunde nachgegangen ... Wesentlich schwieriger zu begreifen war das Ergebnis des Fluges in westlicher Richtung ... Die Vergleichsuhren *auf der Erde* gingen diesmal nach, um etwa eine dreihundertmilliardstel Sekunde ...“

Ist rein physikalisch eine Zeitdifferenz zu erwarten? Ist ihre angegebene Größenordnung richtig? Begeben Sie sich ins bequemste Bezugssystem, das eines Beobachters, der an der Erdrotation nicht teilnimmt. Sie können dann sogar die Fluggeschwindigkeit abschätzen. Ist das Ergebnis vernünftig?

●● 12.2.3 Zeitdilatation

In dem Moment, wo eine Rakete mit der Geschwindigkeit v (z. B. $c/2$) an uns vorbeifliegt, öffnet jemand darin einen Photoverschluss in einer seitlichen Öffnung O und sieht das Licht eines Sterns S genau auf den gegenüberliegenden Punkt P der Wand fallen. Wir müssen den Vorgang durch einen Lichtstrahl beschreiben, der, um den während der Lichtlaufzeit OP weiterbewegten Punkt P (jetzt in P') zu erreichen, unter einem Winkel α verläuft (wie groß ist α). Die Zeit zwischen den beiden Punktereignissen „Verschluss wird geöffnet“ und „Licht erreicht P “ sei für uns Δt , für den Astronauten $\Delta t'$. Welcher Zusammenhang zwischen Δt und $\Delta t'$ ergibt sich daraus? Sehen die Astronauten und wir den Stern in der gleichen Richtung? Müsste dieser Effekt nicht

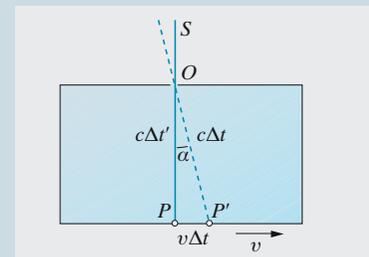


Abb. 12.48. Gedankenversuch zur Lorentz-Transformation

auch auf der bewegten Erde auftreten? Wie groß wäre er? Wo stehen eigentlich die Sterne wirklich? Zeichnen Sie das Schema so, dass wir den Stern in „senkrechter“ Richtung sehen, und ziehen Sie die entsprechenden Schlussfolgerungen. Sind sie quantitativ die gleichen wie vorher? Wenn nein, warum nicht?

●● 12.2.4 Zwillingsparadoxon

Nehmen Sie die „vitalistische“ Hypothese an: Alle physikalischen Vorgänge in einem System S' , das sich gegen ein Inertialsystem S geradlinig gleichförmig bewegt, verlaufen, von S aus betrachtet, nach der einsteinschen Zeitdilatation verlangsamt, alle biologischen und psychischen Prozesse dagegen nicht. Entwickeln Sie eine Methode, ein Inertialsystem vor dem anderen auszuzeichnen, speziell eines als absolut ruhend zu erklären. Was folgt daraus? Sie beobachten einen Astronauten, der mit $v = 0,99c$ fliegt. Beschreiben Sie seinen Tageslauf. Wie beschreibt der Astronaut Ihren Tageslauf? (Alles unter der obigen „vitalistischen“ Annahme!)

●● 12.2.5 Myonen der kosmischen Strahlung

Ein ruhendes Myon hat eine Masse von 207 Elektronenmassen und eine Lebensdauer von $2,2 \cdot 10^{-6}$ s. An der Erdoberfläche treffen etwa 5 Myonen pro cm^2 und s ein. Ihre mittlere Energie liegt um 1 GeV. Diese Myonen werden vorwiegend in 12–15 km Höhe erzeugt (durch Zerfall von Pionen, die ihrerseits aus Kernstößen der kosmischen Primärkerne stammen). Diskutieren Sie das Schicksal einer Anzahl von Myonen, die in der Höhe h erzeugt werden und die Lebensdauer τ haben. Welcher Bruchteil höchstens kann die Erdoberfläche erreichen? Wie groß müsste die Myonen-Flussdichte in 13 km Höhe sein? Welche Energieflussdichte repräsentiert dies mindestens (außer Myonen werden auch sehr viele Elektronen u. A. erzeugt)? Vergleichen Sie diese Energieflussdichte mit der optisch-thermischen

Sonnenstrahlung. Wo wird schließlich die Energie der kosmischen Strahlung absorbiert, wo die der Sonnenstrahlung? Stellen Sie sich die Folgen für den Energiehaushalt der Erdoberfläche und der Atmosphäre vor. Wenn diese Folgen Ihnen paradox erscheinen, wo liegt die Lösung? Fermis Antwort: In der Zeitdilatation. Wieso? Myonenflussdichte in großer Höhe für zwei Myonenenergien:

Tabelle 12.4. Wörterbuchstatistischer Ensembles

Höhe	0,4	1,5	
h/km	GeV	GeV	
0	5	0,2	
4	11	1,6	
13	25	10	Myonen/ $\text{cm}^2 \text{ s}$

Sind die Höhenabhängigkeiten gleich? Wenn nicht, wie erklären Sie den Unterschied? Können Sie die oben aufgestellte Hypothese auch quantitativ bestätigen? Der Abfall des Myonenflusses in Wasser ist so, dass nach 50 m durchlaufener Schichtdicke noch etwa $\frac{1}{100}$ des ursprünglichen Flusses vorhanden ist. Korrigieren Sie die obigen Abschätzungen durch Berücksichtigung der atmosphärischen Absorption der Myonen!

● 12.2.6 v -Stapelei

Von einer großen Rakete R_1 , die relativ zur Erde mit $v = c/2$ fliegt, wird eine sehr viel kleinere Rakete R_2 gestartet, die schließlich relativ zu R_1 mit $c/2$ fliegt. R_2 schießt eine noch viel kleinere Rakete R_3 ab, die relativ zu R_2 mit $c/2$ fliegt usw., solange technisch möglich. Alle Geschwindigkeiten liegen in gleicher Richtung. Geben sie die Geschwindigkeiten der einzelnen Raketen relativ zur Erde an. Ist es möglich, so die Lichtgeschwindigkeit zu erreichen oder zu überschreiten?

●● 12.2.7 Fizeau-Versuch

Licht aus der monochromatischen Quelle L wird durch den halb-

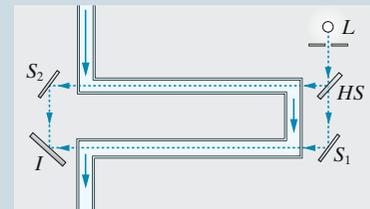


Abb. 12.49. Der Fizeau-Versuch zur Messung der Lichtgeschwindigkeit in einer bewegten Flüssigkeit

durchlässigen Spiegel HS in zwei kohärente Strahlen zerlegt. Diese gehen durch zwei Rohre der Länge l , in denen eine Flüssigkeit von der Brechzahl n mit der Geschwindigkeit v im angegebenen Sinne strömt. Die Strahlen vereinigen sich schließlich auf dem Interferenzschirm I , auf dem ihr Gangunterschied bestimmt werden kann. Die Messung selbst spielt sich z. B. so ab, dass man die Geschwindigkeit v von 0 aus bis zu einem Wert v_1 steigert, wo ein Gangunterschied von $\lambda/2$ auftritt. Wie stellt man diesen Gangunterschied fest? Wie kommt er zustande?

Ergebnisse bei $l = 3$ m, Wellenlänge $\lambda = 500$ nm:

Tabelle 12.5.

Flüssigkeit	Brechzahl	$\lambda/2$ -Geschwindigkeit (m/s)
Wasser	1,33	15,9
Ethanol	1,36	14,8
Benzol	1,50	10,2
Schwefelkohlenstoff	1,63	7,4

Einen weiteren Punkt dieser Abhängigkeit hat man noch „umsonst“. Welchen? Stellen Sie eine empirische Formel für die Lichtgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) in diesen strömenden Medien auf! Wie kann man diese Formel deuten? Können Sie sich eine „klassische“ Deutung vorstellen? Müsste jemand, der an den Lichtäther glaubt, schließen, dass dieser von der Flüssigkeit mitgeführt wird oder nicht?

●● 12.2.8 Transversale

Beschleunigung

In Abschn. 12.2.5 wird die Transformation einer Beschleunigung a beim Übergang zwischen zwei Inertialsystemen diskutiert, deren Relativgeschwindigkeit v parallel zu a ist. Leiten Sie die Transformation für eine transversale Beschleunigung $a \perp v$ her.

● 12.2.9 Zyklotron

Im Zyklotron laufen die geladenen Teilchen mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = ZeB/m$ um (m Masse, Ze Ladung, B Magnetfeld; s. Abschn. 18.3.3). Die Beschleunigung erfolgt durch ein elektrisches Wechselfeld genau angepasster fester Frequenz im Zwischenraum zwischen den beiden „D“. Man stellt fest, dass man Protonen so nur bis auf etwa 400 MeV bringen kann. Warum?

●● 12.4.1 Vierervektoren

Wenn eine Größe in einem Bezugssystem durch einen Vierervektor a , z. B. (x, y, z, ict) , dargestellt wird, ergibt sich der Vektor a' in einem dagegen mit v bewegten System als $a' = La$, wobei L die Lorentz-Matrix ist. (Matrix A · Vektor b ergibt einen Vektor, dessen i -Komponente lautet $\sum_k a_{ik} b_k$). Wie lautet L , in Komponenten geschrieben, speziell für v parallel zur x -Achse? Zeigen Sie, dass die Zeilenvektoren von L den Betrag 1 haben und aufeinander senkrecht stehen. Gilt dasselbe für die Spaltenvektoren? Ändert a bei der Transformation seinen Betrag? Wie lautet die zu L inverse Matrix L^{-1} , definiert durch $LL^{-1} = U$ (U Einheitsmatrix, definiert durch $Ua = a$ für jedes a)? Welche Beziehung besteht zur Transponierten L^* (durch Spiegelung an der Hauptdiagonale entstanden)? Welches Transformationsgesetz, ausgedrückt durch eventuell mehrfache Anwendung von L , vermuten Sie für einen Vierertensor T ? Ein Tensor macht aus einem Vektor einen anderen Vektor gemäß $b = Ta$.

●● 12.5.1 Transversaler

Doppler-Effekt

He^+ -Ionen werden in Feldern verschiedener Stärke beschleunigt (Beschleunigungspotential U) und zum Leuchten angeregt. Die Emission wird *genau* senkrecht zum Ionenstrahl beobachtet. Man findet folgende Emissionslinien (Pickering-Serie) für verschiedene U :

Tabelle 12.6. Thermodynamische Gleichgewichtsgrößen

U/MV	Wellenlängen in nm			
0	656,0	541,2	485,9	433,9
1	656,2	541,3	486,1	434,0
3	656,6	541,6	486,3	434,2
10	657,8	543,7	487,2	435,1
30	661,4	545,6	489,8	437,5

Erklären Sie die erste Zeile dieser Tabelle. Was bedeutet das Verhalten der Zahlen in den Spalten quantitativ? Wo in der Tabelle vermuten Sie einen Mess- oder Protokollfehler? Deuten Sie die Werte quantitativ. Welche Frequenzen erwarten Sie bei Beobachtung in Richtung des Strahles? Was geschieht, wenn die Emission eines zu langen Abschnitts des geraden Strahles in den Kollimator gelangt?

● 12.8.1 Elektronengeschwindigkeit

Ein Physiker, gefragt, wie schnell die Elektronen in seinem 2 MeV-Beschleuniger fliegen, tippt in seinen Taschenrechner $2000 \div 512 + 1 = 1/x$ INV COS SIN, erhält 0,979 und sagt: Sie fliegen mit 97,9% der Lichtgeschwindigkeit. Können Sie das erklären?

● 12.8.2 Kernenergie

Welches ist die Energieausbeute pro kg Kernbrennstoff bei der Spaltung, z. B. als typische Reaktion ${}_{92}^{235}\text{U} \rightarrow {}_{58}^{138}\text{Ce} + {}_{42}^{94}\text{Mo} + 3n + 8e^-$, bei der Fusion $2 {}_1^2\text{D} \rightarrow {}_2^4\text{He}$, bei der Proton-Antiproton-Zerstrahlung $p + \bar{p} \rightarrow 2\gamma$. Die Massenzahlen der Teilchen sind

Tabelle 12.7.

Teilchen	Massenzahl
e^\pm	0,000 55
${}^4\text{He}$	4,003 87
p, \bar{p}	1,008 15
${}^{138}\text{Ce}$	137,95
n	1,008 99
${}^{94}\text{Mo}$	93,93
D	2,014 74
${}^{235}\text{U}$	235,1

Was könnte man mit diesen Energien beispielsweise ausrichten?

● 12.8.3 Wie lange lebt die Sonne?

Bestimmen Sie den **Massenverlust der Sonne** infolge ihrer Strahlung. Wie lange könnte demnach die Sonne bestenfalls mit der heutigen Leistung scheinen, wenn man bedenkt, dass es sich um eine Fusionsreaktion handelt? Welchen Bruchteil Helium muss die Sonne mindestens enthalten, da sie annähernd 10^{10} Jahre alt ist?

● 12.8.4 Energiesatz

Leiten Sie den relativistischen Zusammenhang (12.33) zwischen Gesamtenergie W und Impuls p her. Inwiefern enthält er den nichtrelativistischen Zusammenhang als Spezialfall? Wie lautet der extremrelativistische Zusammenhang und oberhalb welcher Energie gilt er?

●● 12.8.5 Pion-Zerfall

Das geladene **Pion** zerfällt (nach der Lebensdauer $\tau = 2,6 \cdot 10^{-8}$ s) in ein Myon und ein Neutrino: $\pi \rightarrow \mu + \nu$. Ruhmasse des Pions: $273 m_e$, des Myons: $207 m_e$, des Neutrinos: $m_\nu \approx 0$. Welches ist die Summe der kinetischen Energien von Myon und Neutrino beim Zerfall eines ruhenden Pions? Wie verteilt sie sich auf die beiden Teilchen? Welches sind deren Impulse? Wie wäre die nichtrelativistische Aufteilung? Wie ändert sich die Betrachtung, wenn das Pion im Fluge zerfällt?

●● 12.8.6 Antiproton-Erzeugung

Beim Stoß eines sehr schnellen Protons mit einem ruhenden Proton kann

zusätzlich ein **Proton-Antiproton-Paar** entstehen: $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$. Die Reaktion setzt nicht bei 1,88 GeV ein (warum sollte man das auf den ersten Blick erwarten?), sondern erst bei 5,62 GeV. Wie kommt das?

●● 12.8.7 Masse-Energie-Äquivalenz

Von *Einstein* selbst stammt (bis auf die Einkleidung) folgendes Gedankenexperiment: An den Enden eines rohrförmigen Raumschiffs sind zwei gleiche Laser angebracht. Der Laser L ist angeregt und strahlt dem Laser L' einen Lichtblitz von der Gesamtenergie E zu, den L' absorbiert, wobei L' selbst angeregt wird. Emissions- und Absorptionsvorgang dauern je eine Zeit Δt , der Lichtblitz hat eine Laufzeit l/c (l : Länge des Raumschiffs). Es sei z. B. $\Delta t \ll l/c$. Welche Kräfte übt der Strahlungsdruck bei Emission und Absorption aus und in welcher Richtung? Wie viel Impuls wird übertragen? Bewegt sich das Raumschiff? Ferner sei eine Vorrichtung eingebaut, die die beiden Laser hinreichend langsam (warum?) vertauscht, sodass der angeregte Laser (jetzt L') wieder „vorn“ ist. Damit ist alles wie zu Anfang. Hat sich das Raumschiff verschoben? Wenn ja: Widerspricht das nicht dem Schwerpunktsatz? Wenn nein: Da doch beim Emissions-Absorptionsvorgang eine Verschiebung stattgefunden hat, muss die Vertauschung der Laser eine kompensierende Verschiebung bewirken. Wie ist das möglich, wenn die beiden Laser gleiche Masse haben? Oder haben sie das nicht?

●●● 12.8.8 Photon-Ruhmasse?

Breitet sich das Licht wirklich mit Lichtgeschwindigkeit aus? Haben Photonen vielleicht doch eine **Ruhmasse**? Energie und Impuls eines Photons folgen aus der Planck- und der de Broglie-Beziehung, erfüllen aber auch den relativistischen Energiesatz. Das Photon ist einer Wellengruppe zuzuordnen. Wie hinge die Geschwindigkeit eines Photons von

seiner Frequenz ab, wenn es eine Ruhmasse m_0 hätte?

●● 12.8.9 Wird Andy es überleben?

Im interstellaren Raum.

Andy: Jetzt sehe ich euer Schiff. Aber ihr fliegt ja mindestens mit Einstein 0,5 auf mich zu!

Bob: Stimmt. Genau mit $c/2$. Was hast du bei dir?

Andy: Nichts, nur den Raumanzug. Luft habe ich noch für 5 Minuten.

Bob: Jetzt haben wir dich im Radar. Du fliegst, Kopf voran, genau parallel zur Schiffswand. Wir machen die seitliche Luke auf, um dich einzufangen. Kollisionskurs ist genau berechnet.

Andy: Habt ihr eurem Computer auch gesagt, dass ich immerhin noch endliche Dicke habe?

Bob: Sicher. Die Wand ist hinreichend dünn und du auch. Vor allem roll dich nicht etwa zusammen aus Angst, nicht durchzupassen, sonst haust du bestimmt mit dem Rücken oder irgendwas an. Bleib ausgestreckt! Wie groß bist du?

Andy: 2 m, mit Helm.

Bob: Die Luke ist auch 2 m lang.

Andy: Aber selbst wenn ich reinkomme, haue ich doch drinnen an!

Bob: Das Schiff ist lang genug, alles frei. Wir werden dich dann schon irgendwie bremsen.

Andy: Halt mal, eure Luke ist doch Lorentz-kontrahiert. Also komme ich nicht durch.

Bob: Unsinn, *du* bist kontrahiert, auf 1,73 m. Wir haben also noch Spiel. Verlass dich doch auf den alten *Einstein*.

Andy: Eben. Der weiß ja nicht mal, wer wirklich kontrahiert ist. Er sagt, das ist egal. Mir nicht. Unrecht hat er übrigens sowieso: Wenn ich durchkomme, war *ich* wirklich kontrahiert, wenn nicht, die Luke. Schreibt mir auf den Grabstein: Hier ruht absolut, der die Relativität widerlegte. Wie geht die Geschichte aus?

● 12.8.10 Tachyonen

Das Tachyon ist ein hypothetisches Teilchen, das schneller als das Licht

im Vakuum fliegt. Wenn ein Tachyon vernünftige (positiv reelle) Werte von Energie und Impuls haben soll, wie müsste dann seine Ruhmasse beschaffen sein? In Materie müsste ein Tachyon immer Tscherenkow-Strahlung anregen, da es mit $v > c$ fliegt. Diskutieren Sie, wie es auf diesen Energieverlust reagiert. Welche Phasengeschwindigkeit müsste die de Broglie-Welle eines Tachyons haben?

●● 12.9.1 Vierer-Maxwell

Schreiben Sie die **Maxwell-Gleichungen relativistisch**. Folgende Konventionen sind dabei üblich und nützlich: (a) Ein lateinischer Index läuft von 1 bis 3, ein griechischer von 1 bis 4. (b) Über einen doppelt auftretenden Index wird automatisch summiert. (c) Ein Index hinter dem Komma besagt, dass nach der entsprechenden Koordinate differenziert werden soll. – Wie Geschwindigkeit und Ladungsdichte, so verschmelzen Vektorpotential A (vgl. Aufgabe 7.3.3) und Skalarpotential φ , zu einem Vierervektor A_ν (den Faktor ic setzen Sie so, dass die Dimension passt und alles Folgende richtig wird). Dann bilden Sie den Feldtensor $T_{\mu\nu} = \text{Rot } A_\nu = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$. Analogie zur dreidimensionalen *rot*? Warum ist *rot* ein Vektor, *Rot* ein antimetrischer Tensor? Was bedeuten die Komponenten von $T_{\mu\nu}$? Zwei der Maxwell-Gleichungen betreffen $T_{\mu\nu}$ und sind, entsprechend der Definition von $T_{\mu\nu}$, eigentlich Trivialitäten. Ein anderer Tensor, der **Induktionstensor** $W_{\mu\nu}$, fasst die beiden anderen Feldvektoren zusammen. Von ihm handeln die beiden anderen Maxwell-Gleichungen. Wie lauten sie jetzt? Wie drücken sie sich in A_ν aus, speziell im Vakuum? Wie schreiben sich Kontinuitätsgleichung, **Lorentz-Konvention** (Aufgabe 7.3.3) und Wellengleichung im Vakuum? Sind sie relativistisch invariant formuliert?

●● 12.9.2 Lorentz-Kraft

Im Labor herrscht ein homogenes statisches Magnetfeld und kein elektri-

sches Feld. Jemand, z. B. ein Elektron, fliegt mit der Geschwindigkeit v durch das Labor. Welche Felder herrschen für ihn? Legen Sie die räumlichen Achsen so, dass Sie möglichst wenig Arbeit beim Transformieren haben. Welche Kraft wirkt auf das fliegende Elektron? Muss man die Lorentz-Kraft besonders postulieren oder braucht man nur elektrische Kräfte? Welche relativistische Verfeinerung erfährt der übliche Ausdruck für die Lorentz-Kraft?

●● 12.9.3 Trouton-Noble-Versuch

Ein geladener Plattenkondensator ist so aufgehängt, dass er sich um eine zu den Platten parallele Achse drehen könnte, wenn er einem Drehmoment unterworfen wäre. Trouton und Noble versuchten 1903 so den Bewegungszustand der Erde relativ zum „Äther“ zu messen. Wenn Erde und Kondensator eine Geschwindigkeit v haben, repräsentiert jede Kondensatorplatte einen Strom, deren Magnetfeld B auf die andere Platte eine Lorentz-Kraft F ausübt. Vereinfachen Sie, indem Sie einen elektrischen Dipol Q^+Q^- betrachten. Bestimmen Sie Richtung und Größe von B und F . Tritt ein Drehmoment auf, und wie groß ist es? In Wirklichkeit dreht sich der Kondensator nicht. Warum nicht? Kann man dies als Bestätigung der Relativitätstheorie werten?

●● 12.9.4 Bewegte Kugel

Eine homogen aufgeladene Kugel erzeugt um sich ein kugelsymmetrisches E -Feld. Bleibt das richtig in einem Bezugssystem S' , in dem die Kugel sehr schnell fliegt (im Vakuum)? Wenn nicht, was hat sich geändert? Ist die Kugel nicht mehr homogen geladen? Ist sie keine Kugel mehr? Stehen die Feldlinien nicht mehr senkrecht auf ihrer Oberfläche?

●● 12.9.5 Relativistisches Kraftwerk

Eine Eisenbahnschiene z. B. in Nordost-Kanada ist durch das erdmagnetische Feld vertikal magnetisiert. Um den Effekt zu verstärken, kann

man auch an eine künstlich vertikal permanent-magnetisierte Stahlschiene denken. Kann eine fahrende Lokomotive an zwei Schleifkontakten, die beiderseits der Schiene gleiten, eine Spannung abgreifen? Wie groß ist sie? Wie ist die Lage, wenn nicht der Zug fährt, sondern die Schiene unter ihm weggleitet? Wenn Ihnen die letzte Frage zu einfach scheint, benutzen Sie das Ergebnis der ersten nicht, und denken daran, dass B über der bewegten Schiene streng konstant ist (homogene Magnetisierung vorausgesetzt). Wie kann nach den Maxwell-Gleichungen aus $\dot{B} = 0$ ein E entstehen? Betrachten Sie die Leitungselektronen in der bewegten Schiene und zeigen Sie, dass die Schiene eine elektrische Querpolarisation annehmen muss. Auf ihr beruht der Unipolargenerator (aus technischen Gründen nicht als translatorisch bewegter, sondern als rotierender Magnet ausgebildet). Kann man sagen, ein solcher Generator beruhe auf einem rein relativistischen Effekt?

●● 12.9.6 Bewegte Leiter laden sich auf

Im Bezugssystem A ist ein Draht gespannt, durch den Strom fließt, ohne dass der Draht selbst eine Ladung trägt. Welche Felder misst ein Beobachter in A' ? Ein Beobachter B fliegt parallel zum Draht. Herrscht für ihn auch nur ein Magnetfeld? Woher könnte ein eventuelles elektrisches Feld stammen? Könnte es sein, dass der Draht für B geladen ist? Gäbe es eine anschauliche Erklärung dafür? Denken Sie daran, dass Elektronen sich im Draht an den ruhenden Rumpfröhren vorbeibewegen und zeichnen Sie die Weltlinien der beiden Teilchenarten. Zeigen Sie quantitativ, welche Ladungsdichte und welches E -Feld B misst.

●●● 12.9.7 Tscherenkow-Strahlung

Warum strahlt ein ungebremstes Teilchen im Vakuum nicht, kann aber in einem Medium Tscherenkow-Strahlung

aussenden? Ein geladenes Teilchen fliegt durchs Vakuum bzw. durch ein Medium mit der Brechzahl n . Ein bremsendes Kraftfeld ist nicht vorhanden. Kann das Teilchen ein Photon emittieren? Setzen Sie Energie- und Impulssatz an und beachten Sie zur Vereinfachung, dass $E = pc/v$ (aber am besten nur auf einer Seite der Energiegleichung). Es ergibt sich eine Bedingung für den Emissionswinkel. Ist sie immer erfüllbar? Gibt es mehrere mögliche Richtungen? Vergleichen Sie die beiden Glieder im entstandenen Ausdruck. Diskutieren Sie z. B. die Lichtemission durch ein 3 MeV-Elektron in Wasser. Betrachten Sie die Sache auch so: Das Teilchen fliege mit $v > c_{\text{Phase}} = c/n$. Es herrscht keine Dispersion. Welcher Raumbereich kann von der Existenz des Teilchens überhaupt etwas wissen, d. h. wo kann überhaupt nur ein Feld existieren, das von der Ladung ausgeht? Wie steht die mögliche Emissionsrichtung zu diesem Bereich? Kann man diese Richtung auch rein elektrodynamisch verstehen?

● 12.10.1 Äquivalenzprinzip

Die Astronauten Max und Moritz, die bisher alle Freuden der Schwerelosigkeit genossen haben, stellen beim Aufwachen fest, dass sie sich normal schwer fühlen. Max meint, die Rakete beschleunige, Moritz, man befinde sich in einem Schwerfeld. Die Diskussion dreht sich um Antriebsmotoren, Gegenstände in der Kabine und draußen, Präzisionsmessungen an quer und längs zur Kabine laufenden Lichtsignalen usw.

●● 12.10.2 Drehscheibe

Im Zentrum einer mit ω rotierenden Scheibe sitzt ein Mann. Da er dort geboren ist, glaubt er, seine Scheibe sei in Ruhe und verteidigt diesen Standpunkt auch gegen den Hubschrauberpiloten, der über ihm schwebt, ohne sich mitzudrehen. Malen Sie die Diskussion aus; sie dreht sich um Kräfte, Potentiale, Uhren, Lichtquellen und Maßstäbe weiter außen auf der Scheibe.

●● 12.10.3 Lichtablenkung

Man kann die Krümmung eines Lichtstrahls auch durch einen Gradienten der Brechzahl n beschreiben. Wie müsste n vom Ort abhängen, um die Lichtkrümmung in einem homogenen Schwerefeld, einem Zentrifugalfeld, dem Feld einer kugelsymmetrischen Masse zu deuten? Wieso hat eine Kugelmasse Linsenwirkung für Licht- und Gravitationsstrahlung?

● 12.10.4 Die fernsten Objekte?

Könnte die Rotverschiebung in der Strahlung eines **Quasars** nicht auch von seinem eigenen Schwerefeld herühren? Schätzen Sie die nötigen Werte von Gravitationspotential und Radius bei verschiedenen sinnvollen Massen. Wenn der Quasar als Stern 19. Größe erscheint und seine Oberfläche etwa die Emissionsdichte der Sonne hat, wie weit dürfte er entfernt sein?

● 12.10.5 Laplaces Schwarzes

Loch

„Ein Stern von der gleichen Dichte wie die Erde, dessen Durchmesser 250-mal größer wäre als der der Sonne, würde infolge seiner Anziehung von seinen Strahlen nichts zu uns gelangen lassen. Es ist möglich, dass die größten Körper im Weltall aus diesem Grunde für uns unsichtbar sind“. (*Pierre Simon de Laplace*, Exposition du Système du Monde, 1796.) Stimmt das? Wie stellte sich *Laplace* das Licht vor? Würde er seine Aussage auch nach *Fresnels* und *Youngs* Arbeiten aufrechterhalten haben? Welche anderen Kombinationen von Masse, Dichte, Radius erfüllen *Laplaces* Bedingung (speziell $\rho = \text{Kerndichte}$, $M = \text{Sonnenmasse}$, $R = \text{Elementarlänge} \approx 10^{13} \text{ cm}$, $R \approx 10^{10} \text{ Lichtjahre}$)?

●● 12.10.6 Olbers-Paradoxon

Warum ist es nachts dunkel? *Olbers* zeigte 1826: Wenn die Welt unendlich groß und überall im Wesentlichen so beschaffen ist wie hier (homogen), dann müsste der Nachthimmel

überall ungefähr so hell sein wie die Sonnenscheibe. Wie kam er darauf? Zeigen Sie auch, dass dann sogar die Temperatur und das Potential überall unendlich groß wären. Welche Auswege gibt es (vgl. Aufgaben 12.10.7, 12.10.8)?

● 12.10.7 Olbers-Lösung?

Würde absorbierende interstellare Materie das Olbers-Paradoxon (unendliche Strahlungsdichte für ein unendliches homogenes Weltall) lösen?

●● 12.10.8 Charlier-Modell

Zeigen Sie, dass man durch hierarchische Staffelung der Systemgrößen die Olbers-Divergenzen ($T = \infty$, $\varphi = \infty$) vermeiden kann: Viele Sterne bilden eine Galaxis, viele Galaxien eine Metagalaxis usw. Wie müssen die Anzahlen von Systemen in einem Übersystem und die Abstände zwischen Übersystemen gestaffelt sein, damit T und φ endlich bleiben?

●● 12.10.9 Sind Schwarze Löcher wirklich schwarz?

Ist ein **Schwarzes Loch** gar nicht schwarz – oder nur so schwarz wie ein schwarzer Körper? Es scheint, als gingen auch in einem Schwarzen Loch wie überall ständig Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse virtueller Teilchen vor sich. Solche Teilchen können u. U., gedeckt durch die Unschärferelation, bis über den Rand des Schwarzen Loches, seinen Ereignishorizont, hinausfliegen und sich draußen „realisieren“ (dies klingt konträr zu den Aussagen über Austauschkräfte, ist aber die einfachste Art, diese sehr komplizierten Gedankengänge darzustellen). Welche Teilchen mit welchen Impulsen und Energien widersetzen sich so der Einsperung in ein Schwarzes Loch? Wieso kann *Hawking* sagen, ein Schwarzes Loch der Masse M strahle wie ein schwarzer Körper der Temperatur $10^{-7} M_{\odot}/MK$? Drücken Sie das in rein physikalischen Konstanten aus. Welche Strahlungsleistung

würde ein solcher schwarzer Körper? Welchen Massenverlust bedingt diese Abstrahlung? Wie lange kann also ein Schwarzes Loch leben? Was passiert kurz vor Ende seines Lebens? Wie groß (Radius und Masse) sind die Schwarzen Minilöcher, die gerade jetzt zerstrahlen?

●●● 12.10.10 Einstein kontra Bohr

Einstein hat den indeterministischen Charakter der Quantentheorie nie akzeptiert, und manche Theoretiker geben ihm auch heute noch Recht. Er versuchte immer wieder, z. B. die Unschärferelation als Trugschluss zu entlarven. Auf dem Solvay-Kongress 1930 trug er folgendes Gedankenexperiment vor: In einem innen ideal verspiegelten Kasten sei Strahlungsenergie eingesperrt. In der Kastenwand sitzt ein Photoverschluss, der sich z. B. um Punkt 12 Uhr für eine sehr kurze Zeit öffnet und etwas Strahlung austreten lässt. Wägen vor und nach dem Öffnen ergibt mit beliebiger Genauigkeit den entwichenen Energiebetrag, der Zeitzähler + Verschluss-Mechanismus ergibt mit beliebiger Genauigkeit die Zeit, wo diese Energie den Verschluss passiert hat, ohne jede Begrenzung durch $\Delta E \Delta t \geq h$. *Bohr* brauchte eine schlaflose Nacht, um diesen Einwand zu widerlegen. Brauchen Sie auch so lange, wenn Sie wissen, dass er *Einstein* mit dessen eigenen Waffen schlug, nämlich nachwies, dass einer von *Einsteins* „eigenen“ Effekten die Sache in Ordnung bringt?

●● 12.10.11 Doppelstern

Zwei gleiche Massen M umkreisen einander im Abstand d . Welcher Wert ist für das **Quadrupolmoment** Q in (12.48) anzusetzen, damit das Potential des Systems in erster Näherung richtig herauskommt? Sie brauchen nur einen weit entfernten Punkt auf der Drehachse ($\vartheta = 0$) zu betrachten. Da (12.48) die allgemein gültige Entwicklung des (im Mittel) kugelsymmetrischen

Potentials nach Kugelfunktionen darstellt, genügt Anpassung in einem einzigen Punkt. Sie können auch einen Punkt auf der zur Drehachse senkrechten Ebene, die die Körper enthält, wählen, aber achten Sie darauf, dass die Hantel rotiert. Welches Quadrupolmoment erreichen also Doppelsterne? Ist die Gravitationsstrahlungsleistung bei weiten oder engen Doppelsternen größer? Wie groß kann sie werden?

●● 12.10.12 Gravitationswellen-Antenne

Schätzen Sie die Strahlungsleistung, die *Webers* Al-Zylinder aus dem **Gravitationswellenfeld** einer typischen starken Quelle in plausibler Entfernung aufnimmt. Wie hängt diese Leistung vom Verhältnis Antennenabmessung/Wellenlänge ab? Vergleichen Sie mit der Leistung des thermischen Rauschens, d. h. eines elastischen Schwingungsmodes. Wie hängt diese Rauschleistung von Temperatur und „durchgelassenem“ Frequenzbereich ab? Was kann man tun, um die Empfindlichkeit des Empfängers zu verbessern?

●● 12.10.13 Doppelpulsar

Taylor und *Hulse* entdeckten mit dem 305 m-Radioteleskop in der Felsmuschel von Arecibo (Puerto Rico) einen Pulsar mit 59 ms Pulsperiode. Diese Periode schwankt allerdings ganz regelmäßig um 0,05% innerhalb $T \approx 28\,000$ s auf und ab. Wieso lässt dies auf einen unsichtbaren Partner schließen, und wie groß ungefähr müsste der Abstand beider sein? T nimmt jede Sekunde um $2,4 \cdot 10^{-12}$ s ab. Wie ändern sich Bahnparameter und Bahnenergie? Welche Gravitationswellenleistung strahlt dieser Quadropol ab? Passt das zum Bahnenergieverlust?

●● 12.10.14 Tunguska-Meteorit

Am 30.6.1908, 7^h17, bei wolkenlosem Himmel sahen Reisende der Transsibirischen Bahn nahe der Station Kansk im Nordosten ein Objekt

über den Himmel sausen, das heller war als die Sonne. Das Ereignis mit den vielfach beschriebenen Folgen (Bäume in 40 km Umkreis entwurzelt und radial auswärts umgelegt usw.) fand 600 km entfernt jenseits der Podkamennaja Tunguska statt. Schätzen Sie seine Gesamtenergie aus den obigen Angaben. Mit schönster Regelmäßigkeit wird jede neue Energiequelle zur Erklärung vorgeschlagen: Spaltbare, fusionierbare Materie, Antimaterie ... Welche Massen wären jeweils anzunehmen? In welcher Höhe hätte z. B. ein Anti-Meteorit dieser Größe genügend Luft eingefangen, um völlig verpufft zu sein? Wenn er vorher verdampft, erhöht das die Höhenschätzung oder nicht? Zur Hypothese eines Schwarzen Mini-Lochs, das die Erde durchschlagen hat: Welchen Durchmesser hat der Kanal, in dem ein Mini-Loch der Masse M und der Geschwindigkeit v alle Materie einschlüpft? Welches M müsste man annehmen, um die atmosphärische Energiefreisetzung zu erklären? Was müsste im Erdinnern und beim Wiederaustritt passieren? Klassische Hypothese (*Whipple* u. A.): Kometenkopf, als „dreckiger Schneeball“, d. h. Staub und Steine in H_2O -, NH_3 - und CH_4 -Eis eingebacken. Masse? Spielt die chemische Zusammensetzung eine Rolle? Auf welche Hypothese setzen Sie?

●● 12.10.15 n -Kugel

Der Weltraum könnte die Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel sein. Bestimmen Sie Volumen und Oberfläche einer n -dimensionalen Kugel.

●● 12.10.16 Urstrahlung

Ein Volumen, in dem ein isotropes Strahlungsfeld besteht, dehne sich adiabatisch aus. Wie ändern sich dabei Energiedichte und Druck? Wenn das Strahlungsfeld schwarz ist und bleibt (kann man das beweisen?), wie ändert sich seine Temperatur? 1965 entdeckten *Penzias* und *Wilson* eine isotrope schwarze **Weltraumstrahlung** mit $T = 2,7$ K. Welche

Energiedichte hat sie, wo liegt das spektrale Dichtemaximum? Vergleichen Sie die Intensität mit der Radiostrahlung der Sonne. Man hat diese Strahlung gedeutet als „Nachhall vom Geburtsschrei der Elemente“, d. h. als eine mit der Hubble-Expansion des Weltalls verdünnte und von der Materie entkoppelte Strahlung aus der Zeit, als Temperatur und Dichte im ganzen Weltall (nicht nur in den Sternen, die es damals noch nicht gab) zur thermonuklearen Bildung schwerer Kerne ausreichten. Heute ist die mittlere Materiedichte im Weltall etwa 10^{-29} g/cm³ (vgl. Abschn. 12.10.5). Extrapolieren Sie zurück. Kommen Sie auf vernünftige T - und ρ -Werte? Wie alt war das Weltall, als die Elemente entstanden?

●● 12.10.17 Steady state

Nach der Urknall-Theorie existiert das Weltall erst seit einer Zeit T . Allgemeiner: Wenn die Deutung des Hubble-Effekts durch eine Expansion des Universums richtig ist, existiert der größte Teil des jetzt vorhandenen Raumvolumens erst seit dieser Zeit T . Welche Energieunschärfe ist mit dieser endlichen Existenzdauer verknüpft? Beziehen Sie diese Energieunschärfe auf das „Elementarvolumen“, nämlich das Volumen eines Nukleons, und drücken Sie sie als mögliche Erzeugungsrate neuer Nukleonen aus. Reicht diese Erzeugungsrate aus, um das Universum in einem stationären Zustand entsprechend *Hoyle-Bondi-Gold* zu halten? Welche Massendichte ist dazu notwendig? Wie würde sich ein Weltall entwickeln, das eine andere Dichte hätte? Geben Sie den Radius eines stationären Weltalls (definiert als der „Horizontabstand“, wo die Expansionsgeschwindigkeit c würde) und die Teilchenzahl in diesem Weltall an und prüfen Sie, ob die **Eddington-Dirac-Beziehung** erfüllt ist.

●●● 12.10.18 Geschichte des Universums

Diskutieren Sie, wie sich die physikalischen Verhältnisse im Universum

nach der Urknall-Theorie entwickelt haben. Wir gehen dabei aus von einem Zustand, wo die Temperatur so hoch war, dass sie zur Erzeugung von Hadron-Antihadron-Paaren ausreichte. Dementsprechend war das ganze damals existierende Weltall mit Hadronen erfüllt, die Materie hatte Kerndichte. Dies ist der früheste Zustand, den die bekannten Naturgesetze noch beschreiben können. Vorher lag die **Hadronenära**, es folgte die **Leptonenära**. Sie umfasst die Zeit, wo noch überall Elektron-Positron-Paare erzeugt werden konnten. Dann folgte die **Photonenära**, in der Strahlung und Materie im Gleichgewicht standen. Dies hörte auf, und die Materie begann, sich zu Galaxien und Sternen zusammenzuballen, als die mittlere freie Weglänge des Photons größer wurde als der „Weltradius“. Während dieser ganzen Zeit dehnte sich das Weltall gemäß der Friedmann-Gleichung aus (Abschn. 12.10.5 und 1.5.9e). Stellen Sie die Zeitabhängigkeiten des Weltradius R und der Materiedichte ρ für kleine Zeiten explizit dar. Wie hing die Temperatur während der Photonenära von der Zeit ab? Um den Ausgangspunkt zu finden, extrapolieren Sie zurück bis zum Ende der Hadronenära. Dann betrachten wir das von der Materie entkoppelte Strahlungsfeld der Stellarära. Zusammen mit dem Raum dehnt sich dieses Strahlungsfeld adiabatisch aus. Wie ändern sich dabei Energiedichte und Druck? Wenn das Strahlungsfeld „schwarz“ ist und bleibt (was spricht dafür?), wie ändert sich dann die Temperatur mit der Zeit? Welche Dichte und Temperatur ergeben sich für die heutige Zeit?

- **12.10.19 Primordiales Helium**
Die Masse des Weltalls, soweit sie in Atomen steckt, besteht zu 85% aus Wasserstoff, zu 15% aus Helium, schwerere Elemente, so wichtig sie für uns sind, machen noch nicht 1% aus. Man hält das He für überwiegend primordial, d. h. vor der Galaxien- und Sternbildung entstanden. Die Sterne haben fast ebenso viel davon wei-

terfusioniert wie aus H erzeugt. Den 15%-Anteil erklärt man so: Kurz nach dem Urknall gab es gleich viele Protonen und Neutronen, weil sie sich durch Reaktionen wie $n + \nu \rightleftharpoons p + e^-$ ständig ineinander umwandelten. Unterhalb einer gewissen Temperatur (welcher und wann?) ging dies nur noch in Richtung Proton, weil das Neutron schwerer ist. Neutronen sind nur deswegen noch übrig, weil für ihre vollständige Vernichtung nach dem obigen Mechanismus nicht genug Zeit war. Vor dem normalen β -Zerfall hat sie später die Bindung in He bewahrt. Erklären Sie die 15%. Beachten Sie das Expansionsgesetz und den Wirkungsquerschnitt von Neutrino-Wechselwirkungen.

- **12.10.20 Periheldrehung I**

Wie sieht die Bahn eines Planeten im Einstein-Schwarzschild-Feld der Sonne aus? Wiederholen Sie die Rechnung von Abschn. 1.7.4, wobei Sie den Abstand r immer vom Schwarzschild-Radius aus zählen.

- **12.10.21 Feldmasse**

Entnehmen Sie die Energiedichte des Schwerefeldes aus der Analogie mit dem elektrischen Feld. Was entspricht der Feldstärke E , was entspricht ϵ_0 ? Welche Massendichte steckt im Schwerefeld der Erde? Vergleichen Sie mit der Dichte der Atmosphäre. Dasselbe für die Sonne: Vergleich mit der Dichte der Corona oder des interstellaren Gases. Könnte es Sterne geben, deren ganze Masse in ihrem Schwerefeld steckt?

- **12.10.22 Periheldrehung II**

Ein Planet bewegt sich im kombinierten Schwerefeld der Sonne und der Massenwolke, die im Schwerefeld selbst steckt. Wie sieht das kombinierte Potential aus? Welche Bahn beschreibt der Planet?

- **12.10.23 Überlichtgeschwindigkeit I**

Laserstrahlbündel reichen ohne weiteres bis zum Mond und erzeugen dort

einen nicht allzu großen Lichtfleck (wie groß etwa?). Schwenkt man diese Lichtquelle etwas, dann huscht der Lichtfleck sehr schnell über die Mondoberfläche. Kann man erreichen, dass der Fleck mit Lichtgeschwindigkeit oder sogar schneller huscht? Wenn ja, was sagt die Relativitätstheorie dazu?

- **12.10.24 Überlichtgeschwindigkeit II**

Bewegt man die Finger, die eine Schere halten, ganz wenig, dann verschiebt sich der Punkt, in dem die beiden Scherenblätter sich schneiden, um sehr viel mehr, d. h. der Schnitt z. B. in Papier verlängert sich schneller, als man die Finger bewegt. Wäre rein geometrisch eine Schere denkbar, bei der der Schnitt sich mit Überlichtgeschwindigkeit verlängert? Was sagt die Relativitätstheorie dazu?

- **12.10.25 Überlicht-Jets**

Die Radioastronomie hat entdeckt, dass viele Galaxien „Jets“ aussenden, d. h. sehr scharf begrenzte Plasmastrahlen, in denen manchmal „Blobs“ oder Verdichtungen entstehen und auswärts fliegen. Die Geschwindigkeit dieser Blobs bestimmte man aus dem Winkelabstand von der Muttergalaxie, den sie eine gewisse Zeit nach ihrem Austritt erreicht haben. Voraussetzung dafür ist natürlich, dass der Abstand dieser Galaxie von uns bekannt ist. Dabei ergaben sich häufig Geschwindigkeiten größer als c für den Blob. Muss man danach an der Relativitätstheorie oder an den Abstandsschätzungen zweifeln, oder gibt es einen anderen Ausweg? Nehmen Sie z. B. an, dass der Jet unter einem spitzen Winkel auf uns zukommt. Zeichnen Sie ein Weltliniendiagramm (einen graphischen Fahrplan) des Blobs und der Lichtsignale, die von ihm und von seiner Galaxie ausgehen. Mittels dieses Diagramms geben Sie die scheinbare Geschwindigkeit des Blobs an, die ein Erdbeobachter misst, wenn er nicht an diesen Winkel denkt. Wie hängt diese Geschwindigkeit vom Winkel ab, wann kann sie größer als c werden?

●● 12.10.26 Gravitationslinse

Es gibt Gruppen von Galaxien, seltsamerweise oft in „Quintetten“ angeordnet, die das Modell des expandierenden Universums zu widerlegen scheinen. Die Galaxien der Gruppe scheinen einander zu berühren, sehen gleich groß und gleich hell aus, aber eine hat eine erheblich andere Rotverschiebung als die übrigen

(Beispiele: Stephan-Quintett, 4 Galaxien mit 6 000 km/s, eine mit 800 km/s; Quintett VV 172: 4 Galaxien mit 16 000 km/s, eine mit 37 000 km/s). Es ist äußerst unwahrscheinlich, dass diese Galaxien nur zufällig in der gleichen Sichtlinie stehen und dass ihre Leuchtkräfte so extrem verschieden sind, dass dies den extremen, aus dem

Hubble-Gesetz folgenden Abstandsunterschied ausgleicht. Jetzt scheint man das Rätsel durch Gravitationslinsenwirkung erklären zu können: Das nähere Objekt verstärkt durch Lichtablenkung die ferneren. Ist das bei den gegebenen Werten plausibel? Reicht die Masse der leuchtenden Materie in einer Galaxie dazu aus?

Teilchen, Wellen, mikroskopische Physik

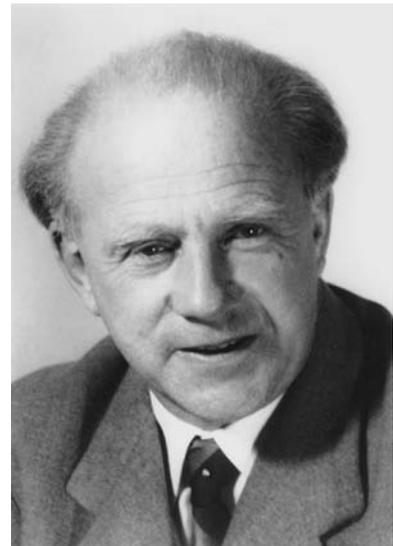
■ Inhalt

13.1	Das Photon	678
13.2	Wellen und Teilchen	683
13.3	Spektren	691
13.4	Der Versuch von Franck und Hertz	696
13.5	Die Entdeckung des Atomkerns	699
13.6	Grundzüge der Quantenmechanik	704
13.7	Teilchen in Potentialtöpfen	717

▼ Einleitung

Die klassische Lichttheorie, besonders in ihrer vollendetsten Form als **Maxwell-Lorentz-Theorie** der elektromagnetischen Wellen und ihrer Wechselwirkung mit den atomaren Ladungssystemen, hatte eine ungeheure Fülle optischer Erscheinungen mit bewundernswerter Präzision beschrieben. Brechung und Dispersion, Streuung, die ganze Vielfalt der Polarisationserscheinungen bis hin zum Faraday- und Kerr-Effekt, der optischen Aktivität und, etwas später, den feinsten Einzelheiten der Ausbreitung von Radiowellen – all dies konnte die klassische Lichttheorie im Wesentlichen verständlich machen. Zum ersten Mal versagte diese Theorie, als sie sich an die Erklärung der Emission und Absorption des Lichtes machte. Am einfachsten sollte die Emission durch einzelne Atome sein. Warum hierbei nur bestimmte scharfe Frequenzen ausgestrahlt werden und wo sie liegen, blieb völlig dunkel. Vereinzelt Ansätze, wie *Thomsons* Atommodell (Kap. 14), erklärten zwar die Existenz der Spektrallinien, gaben aber völlig falsche Werte für ihre Lage. Für sehr viele sich gegenseitig beeinflussende emittierende Teilchen, wie z. B. im heißen Festkörper, speziell im „schwarzen“, schien die Lage überraschenderweise günstiger: Ein kontinuierliches Spektrum folgte wenigstens einigen Regeln der klassischen Physik, wie dem wienschen Verschiebungsgesetz und dem Stefan-Boltzmann-Gesetz. Die Gesamtform der spektralen Energieverteilung jedoch entzog sich umso mehr der klassischen Beschreibung, je genauer man sie ausmaß.

Bei dem Versuch, die Strahlungsgesetze zu erklären war Max Planck auf das Wirkungsquantum h gestoßen, das sich als wichtigster Schlüssel zum Verständnis der mikroskopischen Welt entpuppen sollte. Es erlaubt nämlich, den Bereich der klassischen Physik, wo unsere vielleicht antrainierten, aber jedenfalls mit der Erfahrung im Einklang stehenden Vorstellungen von Teilchen und Wellen Gültigkeit haben, von der Welt der mikroskopischen Objekte, der Welt der Quantenphysik, zu unterscheiden. Dass mikroskopische Objekte mal mehr Teilchen-, ►



„... der Dualismus zwischen zwei verschiedenen Beschreibungsweisen der Wirklichkeit (Teilchen- und Wellenbild) kann nicht länger als grundsätzliche Schwierigkeit betrachtet werden, da es ... in der mathematischen Formulierung keine Widersprüche geben kann.“

Werner Heisenberg,
Die Kopenhagener Deutung
der Quantentheorie (1963)

(Foto: Deutsches Museum München)

mal mehr Wellencharakter zeigen, mag unsere Vorstellung, unsere Intuition strapazieren – die Quantentheorie sagt alle damit verbundenen Phänomene korrekt und widerspruchsfrei vorher. Ein Dualismusproblem existiert in der Quantenphysik nicht.

13.1 Das Photon

Plancks Durchbruch zur Energieverteilung der schwarzen Strahlung (Abschn. 11.2.3) öffnete den Weg. Das Energiequantum $h\nu$, das er fast widerwillig postulieren musste, wurde bald in vielen anderen Erscheinungen wiedergefunden.

13.1.1 Entdeckung des Photons

„Ich nehme mir die Freiheit, für dieses neue Atom, das kein Licht ist, aber eine wesentliche Rolle bei jedem Strahlungsprozess spielt, den Namen *Photon* vorzuschlagen.“

Gilbert N. Lewis,
Nature **118**, 874 (1926)

Lange war die Beobachtung von *Hallwachs* ein Rätsel geblieben, wonach die *Energie* der beim Photoeffekt ausgelösten Elektronen nur durch die *Frequenz* des auslösenden Lichtes, ihre *Anzahl* nur durch die *Intensität* dieses Lichtes bestimmt wird (Abschn. 8.1.2). Die klassische Lichttheorie hätte den entscheidenden Einfluss auf die Elektronenenergie von der Lichtintensität erwartet. *Einstein* klärte dieses Rätsel auf sehr einfache Weise (1905), indem er annahm, dass auch für die Elektronenauslösung nur ganze Lichtenergiebeträge von der Größe $h\nu$ („Lichtquanten“) zur Verfügung stehen, der gleiche Betrag, der nach *Planck* zwischen Oszillatoren und Strahlungsfeld ausgetauscht wird. Dies führt zu Einsteins Gleichung (8.2), die sich experimentell vollkommen bestätigt und eine unabhängige, sehr präzise Messung von h ermöglicht. Deren Ergebnis stimmt genau mit dem aus der schwarzen Strahlung überein.

Eine Photokathode, eingebaut in ein Zählrohr, das den Nachweis einzelner Elektronen gestattet (Photomultiplier, Abb. 8.8), werde einer sehr schwachen Lichtintensität ausgesetzt. Bei Kombination mit Verstärker und Lautsprecher erzeugt so jedes Photoelektron einen hörbaren Knack. Die Folge dieser Knacke ist statistisch ebenso unregelmäßig (Poisson-Verteilung) wie die Folge atomarer Ereignisse. Zwar lässt sich das Zeitmittel voraussagen, z. B. die mittlere Anzahl der Knacke pro Minute – umso genauer, je länger der fragliche Zeitraum ist –, der Einzelakt jedoch entzieht sich jeder Voraussage. Alle Versuche, den Elektronen einen gewissen Wirkungsbereich zuzuschreiben, innerhalb dessen sie die in einer Lichtwelle stetig einströmende Energie gewissermaßen einsaugen, bis sie den Vorrat gespeichert haben, den sie zur Auslösung aus dem Metall brauchen, führen zu unlösbaren Widersprüchen. Die Energie des Lichtes ist offenbar nicht kontinuierlich über die Wellenfront verteilt; vielmehr ist sie in einer Art Lichtkorpuskeln oder *Photonen* konzentriert. Andererseits sind die Wellen dadurch keineswegs abgeschafft. Dies zeigt schon die Tatsache, dass die Energie des Photons $h\nu$ ist, also durch die Frequenz von etwas Schwingendem bestimmt wird. Man muss dem Licht – und wie sich später zeigte, auch den „echten Korpuskeln“ wie Elektronen oder Protonen – sowohl *Wellen-* als auch *Quantennatur* zuschreiben (**Dualität des Lichtes**, Abschn. 13.2).

13.1.2 Masse und Impuls der Photonen; Strahlungsdruck

Ein Photon hat die Energie $h\nu$ und bewegt sich im Vakuum mit der Geschwindigkeit c . Ein „richtiges“ Teilchen kann also das Photon nach der Relativitätstheorie (Abschn. 12.2.6) nicht sein, denn jeder Körper sollte bei der Geschwindigkeit c eine unendliche Masse annehmen (was natürlich verhindert, dass er jemals diese Geschwindigkeit erreicht). Der einzige Ausweg ist, dem Photon die „Ruhmasse“ Null zuzuschreiben. Erst bei der Lichtgeschwindigkeit nimmt die Masse des Photons einen endlichen Wert an. Bei dieser Geschwindigkeit gilt auch eine etwas abgeänderte Beziehung zwischen kinetischer Energie E_{kin} und Impuls p : Bei $v \ll c$ ist $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$, $p = mv$, also $p = 2E_{\text{kin}}/v$, bei $v \approx c$ dagegen $p = E_{\text{kin}}/c$ (Abschn. 12.8.2). Das Lichtquant mit der Energie $h\nu$ hat also den Impuls

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (13.1)$$

Damit wird z. B. die Deutung des Strahlungsdruckes, die in der klassischen Theorie ziemlich kompliziert war, äußerst einfach.

In der elektromagnetischen Theorie kommt der Strahlungsdruck so heraus: Die Welle falle auf ein Material mit der Leitfähigkeit σ , in dem ihre Feldstärke \mathbf{E} eine Stromdichte $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ erzeugt. Das Magnetfeld \mathbf{B} der Welle steht senkrecht auf \mathbf{E} und damit auf \mathbf{j} , also gerade so, dass die Dichte der Lorentz-Kraft $\mathbf{j}\mathbf{B} = \sigma\mathbf{E}\mathbf{B}$, die auf die Ströme und damit auf das Material wirkt, maximal wird. Diese Kraft steht senkrecht auf \mathbf{E} und \mathbf{B} , also in Ausbreitungsrichtung der Welle (Abb. 13.1). Aus der Kraftdichte wird eine Kraft durch Multiplikation mit einem Volumen, also ein Druck (Kraft/Fläche) durch Multiplikation mit einer Länge, oder besser durch Integration der Kraftdichte $\sigma\mathbf{E}\mathbf{B}$ über die Eindringtiefe der Welle. Ein schwach absorbierendes Material hat ein kleines σ (Abschn. 10.3.1) und damit eine kleine Kraftdichte; dafür ist die Eindringtiefe $1/\alpha$ groß (Absorptionskoeffizient $\alpha = \sigma/(n\varepsilon_0c)$, Abschn. 7.4.7). Auf alle vollständig absorbierenden Materialien wirkt so der gleiche Strahlungsdruck

$$p_{\text{Str}} = \int_0^\infty \sigma EB \, dx = \frac{1}{\alpha} \sigma EB = n\varepsilon_0cEB = n\varepsilon_0\mu_0cEH = \frac{1}{c}I. \quad (13.2)$$

Im Quantenbild ergibt sich der Strahlungsdruck p_{Str} auf eine absolut schwarze Oberfläche aus dem Impuls aller aufprallenden Photonen, bei einer reflektierenden Oberfläche aus dem doppelten Impuls, da die Photonen ja zurückprallen – ganz analog wie beim Gasdruck. Druck ist Impulsübertragung pro Fläche und Zeit, Intensität I ist Energiefluss pro Fläche und Zeit. Damit ergibt sich aus (13.1) sofort

$$p_{\text{Str}} = \gamma \frac{I}{c} \quad (13.3)$$

($\gamma = 1$ für absolut schwarze, $\gamma = 2$ für ideal reflektierende Flächen).

Der experimentelle Nachweis des Strahlungsdruckes durch *P. I. Lebedew* ergab innerhalb der Beobachtungsfehler von etwa 20% Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert.

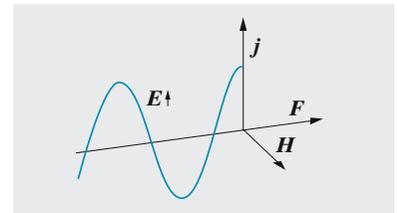


Abb. 13.1. Der Strahlungsdruck als Lorentz-Kraft: Das elektrische Feld der Welle erzeugt Ströme \mathbf{j} , die im Magnetfeld \mathbf{H} der Welle eine Kraft \mathbf{F} erfahren

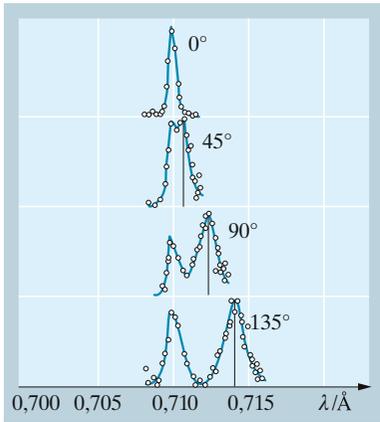


Abb. 13.2. Originalexperiment von A. H. Compton, K_{α} -Strahlung von Mo fällt auf Graphit und wird unter verschiedenen Winkeln zur Einfallrichtung teils elastisch (ohne λ -Verschiebung), teils inelastisch (mit λ -Erhöhung) gestreut. Die Zunahme der λ -Verschiebung mit dem Streuwinkel lässt sich nach keinem klassischen Modell verstehen, folgt aber sofort aus den Stoßgesetzen für ein Photon

Wenn der Impuls eines Lichtquants $h\nu/c = h/\lambda$ ist und andererseits als mc ausgedrückt werden kann, ergibt sich für die Masse

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{E}{c^2} \tag{13.4}$$

Dies wäre nach der Energie-Massenäquivalenz auch von vornherein zu erwarten gewesen. Dass dem Photon keine Ruhmasse zukommt, bedeutet, dass es reine Strahlungsenergie ist. Auf Grund der Vorstellung, dass Photonen Masse haben, die mit ihrer Frequenz zusammenhängt, lassen sich auch Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie wie Rotverschiebung und Lichtablenkung im Schwerfeld sehr einfach verstehen (Abschn. 12.10.2).

13.1.3 Stoß von Photonen und Elektronen; Compton-Effekt

Die Photonenvorstellung hat auch folgenden zunächst rätselhaften Effekt aufgeklärt (s. Abb. 13.2, Compton, 1922): Monochromatische Röntgenstrahlung wird durch Materie gestreut, und zwar im Gegensatz zum sichtbaren Licht unter Vergrößerung ihrer Wellenlänge. Die Wellenlänge des Streulichtes ist umso größer, je größer der Streuwinkel ϑ ist. Rückwärtsstreuung ($\vartheta = \pi$) liefert eine Wellenlängenzunahme um $4,85 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0,0485 \text{ \AA}$, unabhängig von der eingestrahelten Wellenlänge.

Compton deutete den Effekt als einen Stoßvorgang zwischen dem Röntgenphoton und einem Elektron der streuenden Materie. Ein solcher Vorgang wird durch Energie- und Impulserhaltung vollständig charakterisiert, wenn der Streuwinkel ϑ gegeben ist. Das Elektron kann vor dem Stoß als ruhend betrachtet werden. Seine Energie und sein Impuls sind dem Photon entzogen worden:

$$h\nu - h\nu' = \text{kinetische Energie des Elektrons} \tag{13.5}$$

Die Impulsbilanz wird ausgedrückt durch Abb. 13.3. Die genaue Ausrechnung ist elementar, aber ziemlich kompliziert. Eigentlich muss der Vorgang relativistisch behandelt werden. Wir betrachten den Grenzfall, dass die Wellenlänge sich relativ nur wenig ändert (was häufig zutrifft). Dann sind die beiden mit $h\nu/c$ und $h\nu'/c$ bezeichneten Vektoren in Abb. 13.3 praktisch gleich lang, und man liest aus den rechtwinkligen Dreiecken ABD und ACD ab

$$\frac{1}{2}mv = \frac{h\nu}{c} \sin \frac{\vartheta}{2}$$

Die kinetische Energie des Elektrons ist also (Vergleich mit (13.5))

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{(mv)^2}{m} = \frac{4h^2\nu^2 \sin^2(\vartheta/2)}{2mc^2} = h\nu - h\nu'$$

Kürzen durch $h\nu^2$ liefert, wenn man beachtet, dass $v' \approx v$

$$\frac{2h}{mc^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{v - v'}{v^2} \approx \frac{1}{v'} - \frac{1}{v}$$

oder in $\lambda = c/v$ geschrieben:

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \tag{13.6}$$

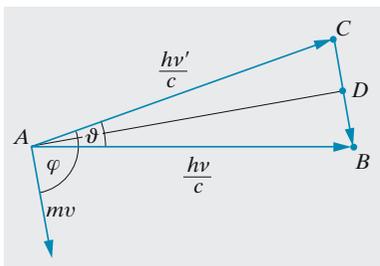


Abb. 13.3. Impulserhaltung beim Compton-Effekt

Diese Formel gilt auch im allgemeinen Fall, nicht nur für $v' \approx v$. Das Experiment bestätigt sie glänzend; speziell ist $2h/(mc)$ genau der für Rückstreuung gefundene Wert von $0,0485 \text{ \AA}$. Die Hälfte davon heißt auch Compton-Wellenlänge

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = 0,0243 \text{ \AA} . \quad (13.7)$$

Ein Photon, das die Wellenlänge λ_C hätte, besäße die Masse $h\nu/c^2 = h/(\lambda_C c) = m$, also die gleiche Masse wie das ruhende Elektron. Ein solches Photon würde bei Rückwärtsstreuung seine Wellenlänge verdoppeln. Dies zeigt schon, dass die nichtrelativistische Behandlung hier nicht angemessen wäre; nach den nichtrelativistischen Stoßgesetzen bleibt ein Teilchen, das ein massengleiches zentral stößt, einfach liegen, was für ein Photon natürlich unmöglich ist.

Nach dieser Theorie muss die Streuung mit dem Auftreten schneller gestoßener Elektronen verbunden sein. *Bothe* und *Geiger* konnten durch Koinzidenzmessungen von Photonen und Elektronen die Gleichzeitigkeit von Streuung und Erzeugung schneller Elektronen nachweisen. Energie, Impuls und Richtung dieser Elektronen entsprachen ebenfalls genau der Theorie. Der Compton-Effekt beweist also überzeugend die Richtigkeit der Photonenvorstellung und die Gültigkeit von Energie- und Impulssatz bei der Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung.

Bei niederfrequenten Photonen muss man anders rechnen, weil für sie fast alle Elektronen schnell sind. Beim Stoß mit einem Elektron ändert sich ihre Frequenz relativ um $\Delta\nu/\nu \approx 2v_e/c$. Die Elektronen des intergalaktischen Plasmas mit etwa 10^7 K sollen nach *Seldowitsch* und *Sunjajew* so die leichte Anisotropie der 3 K -Urstrahlung erzeugen, die der Satellit COBE (Cosmic Background Explorer) 1993 entdeckt hat (Abschn. 11.2.6 und Aufgabe 13.1.5).

× Beispiel...

Warum wird bei sichtbarem Licht keine Compton-Wellenlängenänderung des Streulichtes beobachtet?

Natürlich werden auch sichtbare Photonen an Elektronen gestreut. Die maximale λ -Änderung dabei (für 180° -Streuung) ist die doppelte Compton-Wellenlänge, also $0,048 \text{ \AA}$, d. h. nur etwa 10^{-5} der einfallenden Wellenlänge. Die mechanische Analogie ist die eines sehr leichten Teilchens, das beim Stoß mit einem sehr schweren ohne merkliche Impulsänderung zurückprallt. Das gilt für freie Elektronen. Bei Atomelektronen nimmt das ganze Atom den Impuls auf, und $\Delta\lambda/\lambda$ ist noch etwa 10^4 -mal kleiner. Dieser winzige Rückstoß ist aber die Ursache der Lichtkräfte aus Abschn. 14.7.

13.1.4 Rückstoß bei der γ -Emission; Mößbauer-Effekt

Wenn ein Atom ein Photon emittiert, muss dessen Impuls h/λ durch einen entgegengesetzt gleichen Rückstoßimpuls ausgeglichen werden, den das Atom aufnimmt. Im Sichtbaren und UV ist dieser Rückstoß sehr klein und hat erst bei vielen Emissionsprozessen einen merkbaren Einfluss, der bei der Laserkühlung (Abschn. 14.7) ausgenutzt wird.

Anders im Bereich der γ -Strahlung, die von angeregten *Kernen* emittiert wird. Ihre typische Energie-Größenordnung ist $E \approx 1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$. Der entsprechende Impuls $p = h\nu/c = E/c \approx 10^{-21} \text{ kg m/s}$ ist schon imstande, einen Kern mit erheblicher Geschwindigkeit wegzuschleudern. Die kinetische Energie, die der Kern so aufnimmt, nämlich

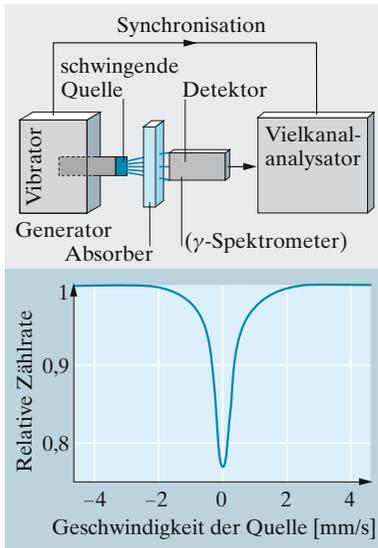


Abb. 13.4. Einfaches Mößbauer-Experiment. Je nach der Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Absorber, hier realisiert durch Vibration der Quelle, ist die (oft durch Kühlung rückstoßfrei gemachte) Absorption verschieden stark. Der mit dem Generator synchronisierte Vielkanal-Analysator ordnet die Zählimpulse in die der jeweiligen Geschwindigkeit entsprechenden Kanäle ein. Unten: 14 keV-Linie von ^{57}Fe , eine besonders schmale Linie

$E_{\text{Kern}} = p^2/(2M) = E^2/(2Mc^2)$ (M : Kernmasse), geht dem γ -Quant verloren. Dessen Frequenz erniedrigt sich um einen entsprechenden Betrag $\Delta\nu$, der bestimmt ist durch

$$h \Delta\nu = -E_{\text{Kern}} = -\frac{E^2}{2Mc^2} = -\frac{h^2\nu^2}{2Mc^2},$$

d. h.

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{h\nu}{2Mc^2}. \quad (13.8)$$

Da Mc^2 für Kerne mehrere GeV beträgt, ist die relative Verstimmung der γ -Frequenz nicht sehr groß (weniger als 10^{-3}). Die typischen γ -Linien sind aber so scharf, dass trotzdem eine bedeutsame Konsequenz eintritt: Damit ein anderer identischer Kern das γ -Quant absorbieren kann, muss seine Frequenz in eine Absorptionslinie fallen, die identisch ist mit der Emissionslinie, wie sie *ohne Rückstoß* läge. Die Verstimmung durch den Rückstoß reicht aus, um diese „Resonanzabsorption“ unmöglich zu machen.

Nun gelingt es aber, den Rückstoß zunichte zu machen, und zwar dadurch, dass man das γ -strahlende Atom in das Kristallgitter eines festen Körpers einbaut. Dieses besitzt – ganz ähnlich wie ein einzelnes Atom – diskrete Energiezustände, die verschiedenen Typen von Schwingungen im Gitter entsprechen. Das Gitter kann also bestimmte Energiebeträge aufnehmen, andere nicht. Gehört zu den letzteren der Energiebetrag, den der freie Kern bei der Emission nach den Stoßgesetzen als kinetische Energie aufnehmen müsste, so kann diese Energie von den Nachbaratomen, d. h. von Schwingungen des Gitters nicht aufgenommen werden, sondern nur als kinetische Energie vom ganzen Kristall oder Kristallit. Dessen Masse ist aber im Vergleich zur Masse des Kerns so ungeheuer groß, dass der Kern sich so verhält, als sei er vollkommen starr eingebaut. Damit entfallen alle Effekte, die sonst durch die Rückstoß-Energie bewirkt werden, nämlich Linienverschiebung und -verbreiterung, und es wird eine Linie von außerordentlicher Schärfe emittiert, die von einem gleichartigen Kern, wenn auch er in ein Kristallgitter eingebaut ist, mit gleicher Schärfe (oder Selektivität) absorbiert werden kann¹.

Die Spektrallinien im Bereich der γ -Strahlung, die man so erhält – in Emission, wie auch in Absorption –, sind extrem scharf, ihre relative Halbwertsbreite ($\Delta\nu/\nu$) kann kleiner als 10^{-13} sein. Mit gespeicherten Atomen oder Ionen werden heute ähnlich geringe Linienbreiten bei optischen Frequenzen erzielt. Der Rückstoß wird in diesem Fall von der Speicherapparatur aufgenommen, man kann vom optischen Mößbauer-Effekt sprechen.

Bewegt man eine solche γ -Strahlenquelle mit einer Geschwindigkeit von nur 3 cm/s ($= 10^{-10}$ · Lichtgeschwindigkeit) vom Absorber weg oder auf ihn zu (Abb. 13.4), so ist die Frequenz der Strahlung, wenn sie den Absorber erreicht, durch Doppler-Effekt um 10^{-10} verändert, und sie wird nicht mehr absorbiert. Durch Anwendung verschiedener Geschwindigkeiten lässt sich also die Frequenz der emittierten Spektrallinie (oder auch des Absorptionsgebietes) um winzige Beträge messbar verändern, ohne dass

¹ Dieser Effekt heißt Mößbauer-Effekt. Er wurde von Rudolf Mößbauer 1958 im Rahmen seiner Doktorarbeit entdeckt (Nobelpreis 1961).

die Linienschärfe verloren geht. Ebenso lassen sich winzige Veränderungen am emittierenden oder am absorbierenden Kern oder am Lichtquant selbst feststellen.

Auf diese Weise haben *R. V. Pound* und *G. A. Rebka* 1960 gemessen, dass sich die Frequenz eines γ -Lichtquants um den Faktor $5 \cdot 10^{-15}$ verringert, wenn es sich im Schwerfeld der Erde um 45 m nach oben bewegt. Es verliert dabei also die Energie $h\nu \cdot 5 \cdot 10^{-15}$. Das ist aber gerade diejenige Arbeit, die geleistet werden muss, um die Masse des Quants ($h\nu/c^2$, vgl. (13.4)) im Erdfeld um $H = 45$ m zu heben:

$$\frac{h\nu}{c^2} gH = h\nu \cdot 4,9 \cdot 10^{-15} .$$

Damit ist experimentell bewiesen, dass die Masse eines Lichtquants der Schwere unterliegt.

13.2 Wellen und Teilchen

Licht ist zwar Welle, aber auch Teilchen, schloss *Einstein* aus dem Photoeffekt. Ein Elektron ist ein Teilchen, aber auch eine Welle, vermutete 20 Jahre später *de Broglie*, und bald wurde dies durch zahlreiche Versuche bestätigt. Dieser Welle–Teilchen-Dualismus liegt der ganzen modernen Physik zugrunde.

13.2.1 Materiewellen

In den ersten beiden Jahrzehnten unseres Jahrhunderts wurde klar, dass das „klassische“ Bild von den Teilchen als immer weiter verkleinerten Billardkugeln nicht imstande ist, das Verhalten des Atoms zu beschreiben. Schon die Tatsache, dass jedes Atom nur ganz charakteristische Spektrallinien aussendet und absorbiert, an denen man sein Vorhandensein spektralanalytisch nachweisen kann, blieb ungeklärt. Hier halfen die Überlegungen von *Planck* über die Wärmestrahlung (vgl. Abschn. 11.2.3) und *Einstein* über den Photoeffekt (vgl. Abschn. 8.1.2) weiter. Das Licht hat außer seinen Welleneigenschaften, die sich in Beugung, Interferenz und Polarisation ausdrücken, auch einen Teilchenaspekt, der besonders bei der Emission und Absorption zur Geltung kommt. Die Lichtwelle regelt die Ausbreitung der Lichtteilchen (Photonen); bei der Wechselwirkung mit Materie können aber immer nur ganze Photonen erzeugt oder vernichtet werden. Warum sollen Objekte, die bisher als Teilchen betrachtet worden waren, nicht gleichzeitig auch Welleneigenschaften haben, fragte *Louis de Broglie* 1923. Dass man auf diese Welleneigenschaften nicht früher experimentell gestoßen ist, muss an der außerordentlich kleinen Wellenlänge liegen. Wenn die Analogie zwischen Licht und Elektron vollkommen wäre, müssten Frequenz und Energie auch beim Elektron nach der Einstein-Planck-Gleichung $E = h\nu$ zusammenhängen. Wir können hier noch nicht sagen, mit welcher Phasengeschwindigkeit sich die *Materiewellen* ausbreiten. Nehmen wir an, sie sei c (was nicht allgemein stimmt, vgl. Abschn. 12.8.2). Dann wäre die Wellenlänge $\lambda = c/\nu = ch/E$.

Ein sehr schnelles Teilchen hat den Impuls $p = E/c$. Es ergibt sich, dass die Wellenlänge vom Impuls des Teilchens bestimmt wird:

$$\lambda = \frac{h}{p} . \quad (13.9)$$

De Broglie konnte dies allgemein begründen (vgl. Abschn. 12.8.2).

Wenn man annimmt, dass die Mechanik der atomaren Teilchen sich von der Mechanik der Billardkugeln unterscheidet wie die Wellenoptik von der geometrischen Optik, gewinnt man eine Ahnung, warum sich die Atome so eigenartig verhalten. Wenn das Elektron eine Wellenerscheinung ist, darf man sich nicht wundern, dass sie nur bestimmte Frequenzen zulässt, wenn sie in das Kraftfeld eines bestimmten Atoms eingesperrt ist, genau wie die Luft in einer Trompete nur bestimmte Eigenschwingungen ausführen kann. Tatsächlich kam *de Broglie* auf seine Idee durch die Tatsache, dass in der bohrschen Theorie des Atomelektrons nur Zustände möglich sind, die durch ganze Zahlen gekennzeichnet werden (Abschn. 15.1.1). Ähnliches kannte die Physik nur aus Eigenschwingungserscheinungen. *De Broglie* sagte selbst: „Es gilt, eine neue Mechanik zu schaffen, die die alte Mechanik ebenso als Grenzfall enthält, sie aber gleichzeitig erweitert, wie dies die Wellenoptik mit der geometrischen Optik tut.“

13.2.2 Elektronenbeugung

Wenn die Ausbreitung von Teilchen durch Materiewellen geregelt wird, müssten sich auch Beugungs- und Interferenzerscheinungen beobachten lassen. Man trennt z. B. zwei Strahlen freier Elektronen, die aus der gleichen Quelle kommen, analog zu *Fresnels* Spiegel- oder Biprismaversuch und lässt sie dann fast parallel wieder zusammenlaufen (Abb. 13.5). Als Quelle dient das elektronenoptisch auf 50 nm verkleinerte Bild einer üblichen Elektronenquelle. Die Elektronen fliegen an einem positiv aufgeladenen Metallfaden vorbei und werden von ihm zur Mitte hin abgelenkt. Das Feld eines solchen Drahtes ist proportional r^{-1} (r : Abstand vom Draht). Ein Elektron, das nahe am Draht vorbeifliegt, erfährt also eine starke seitliche Kraftkomponente, aber nur für kurze Zeit. Fliegt das Elektron in größerem Abstand vorbei, dann ist die seitlich ablenkende Kraftkomponente kleiner, aber wirkt längere Zeit. Im Feld des geraden Drahtes (nicht etwa auch im Feld der Punktladung) hängt daher überraschenderweise der Gesamtablenkwinkel eines Elektrons nicht von dem Abstand ab, in dem es den Draht passiert, sondern nur von seiner Energie (vgl. Aufgabe 6.1.9). Elektronen homogener Energie (monochromatische Elektronen) verhalten sich also genau wie monochromatisches Licht am Fresnel-Doppelspiegel oder -Biprisma.

Auf der Photoplatte, vor der sich die Teilbündel unter sehr kleinem Winkel durchkreuzen, entstehen, wenn der Faden aufgeladen ist, die typischen Interferenzstreifen von Abb. 13.6. Es gibt Orte, wo sich die auf verschiedenen Wegen eintreffenden Elektronen verstärken, aber auch solche, wo sie sich auslöschen. So etwas ist nur bei Wellen möglich. Analog zu *Fresnels* Rechnung (Abschn. 10.1.2) kann man die Wellenlänge der

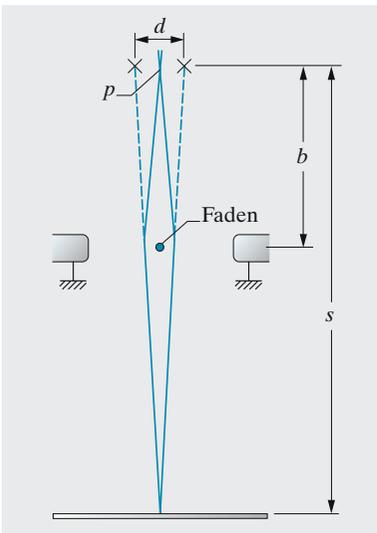


Abb. 13.5. Biprisma zur Erzeugung von Elektroneninterferenzen nach *Düker* und *Möllenstedt*

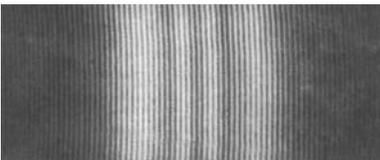
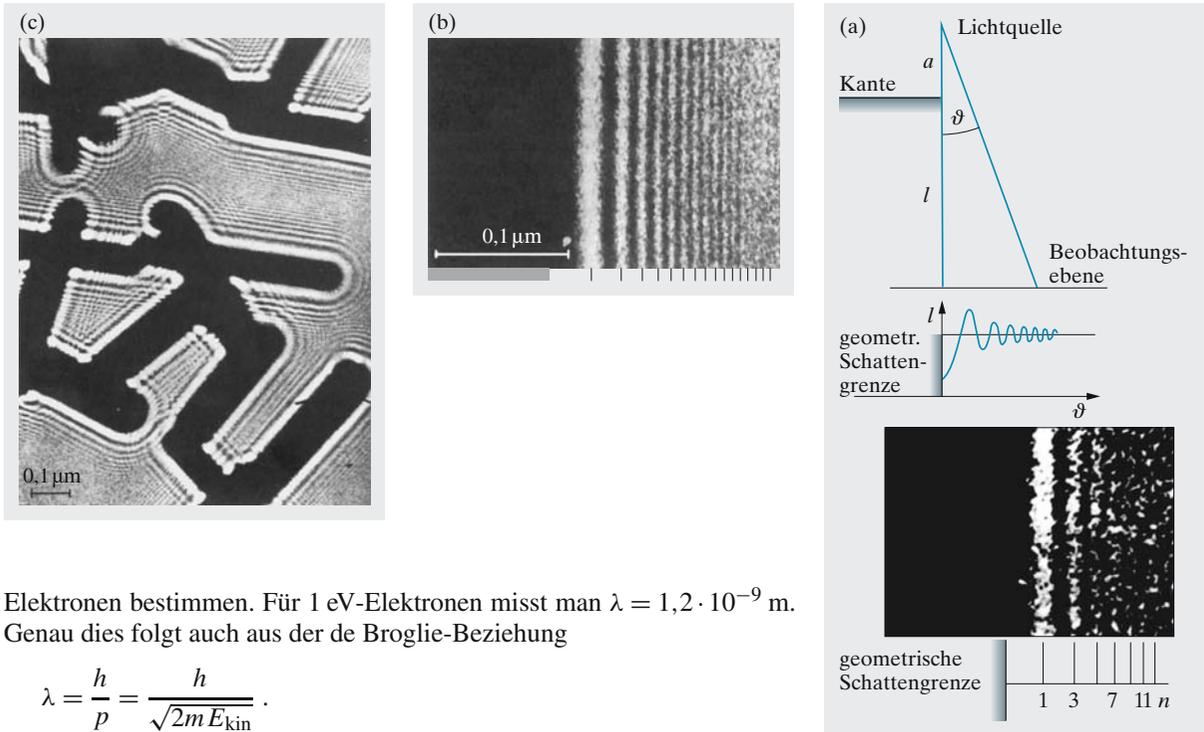


Abb. 13.6. Elektroneninterferenzen mit dem „Biprisma“ nach *Düker* und *Möllenstedt*



Elektronen bestimmen. Für 1 eV-Elektronen misst man $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-9}$ m. Genau dies folgt auch aus der de Broglie-Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m E_{\text{kin}}}}$$

Alle Konzepte der Wellenoptik lassen sich auf die Optik von Materiewellen übertragen, z. B. die Fresnelbeugung an einer scharfen Kante (Abb. 13.7, Abschn. 10.1.10).

Bei höheren Energien wird die Wellenlänge noch kleiner und vergleichbar mit der von hartem Röntgenlicht. Mit makroskopischen Anordnungen ist Interferenz dann kaum noch herstellbar. Nur die Teilchen in einem Kristall bieten ein hinreichend feines Beugungsgitter an. Wie *Davisson* und *Germer* 1927 zeigten (Abb. 13.8), kann man mit Elektronen die gleichen Beugungsbilder von Kristallen erzeugen wie mit Röntgenstrahlung (vgl. Abschn. 16.3.2). *G. P. Thomson* erhielt ähnliche Beugungsbilder an Kristallpulver (analog zur Methode von *Debye-Scherrer*). Da Elektronen zu stark mit Materie wechselwirken, verwendet man heute vielfach Neutronen. Bei ihrer großen Masse müssen nach $\lambda = h/(mv)$ diese Neutronen sehr langsam sein, damit die Wellenlänge nicht zu klein wird. Im Elektronenmikroskop begrenzt die de Broglie-Wellenlänge genauso das Auflösungsvermögen wie im Lichtmikroskop die optische Wellenlänge. Allerdings kann man die Elektronenwellenlänge sehr viel kleiner machen (vgl. Abschn. 9.5).

13.2.3 Elektronenbeugung an Lochblenden

Interferenz- und Beugungsversuche verlaufen für Licht und Teilchen im Wesentlichen gleich. Einige der folgenden Versuche sind zwar aus technischen Gründen nur beim Licht direkt durchgeführt worden, müssen aber nach allem, was wir wissen, für Elektronen genauso verlaufen.

Abb. 13.7. (a) 34 keV-Elektronen fallen auf eine scharfkantig begrenzte Platte. Es ergibt sich kein scharfer Schatten, sondern das Gebiet, das eigentlich hell sein sollte, ist von Fresnel-Streifen durchzogen. Wenn ein Objekt nicht genau in der Brennebene des Mikroskops liegt, ist es von Fresnel-Streifen berandet ($U = 34$ keV, $a = 0,35$ mm, $l = 313$ mm); (b) scharfe Kante ($U = 38$ keV, $l = 0,14$ mm); (c) ZnO-Kristalle ($U = 38$ keV, $l = 0,0177$ mm) (alle drei Aufnahmen von *H. Boersch*; (a) *Naturwissenschaften* **28**, 709 (1940), (b, c) *Phys. Zeitschr.* **44**, 202 (1943))

Abb. 13.8. Elektroneninterferenz-Experiment von *Davisson und Germer*. *Links*: Versuchsanordnung. Die durch die eine Spannung beschleunigten, monoenergetischen Elektronen werden an der (111)-Spaltfläche eines Ni-Einkristalls reflektiert. Rechts: Intensität der reflektierten Elektronen als Funktion des Reflexionswinkel θ im Polardiagramm. Bei der Elektronenenergie von 54 eV tritt bei ca. 50° ein Maximum auf. Es wird als Interferenzerscheinung von Elektronen interpretiert, die an aufeinander folgenden Kristallgitterebenen gestreut werden. Aus der Lage des Interferenzmaximums und dem bekannten Abstand der Gitterebenen lässt sich die Wellenlänge der Elektronen in Übereinstimmung mit de Broglie bestimmen. (Das Messergebnis entstammt der Originalarbeit von C. Davisson und L. H. Germer aus *Nature* **119** 558 (1927))

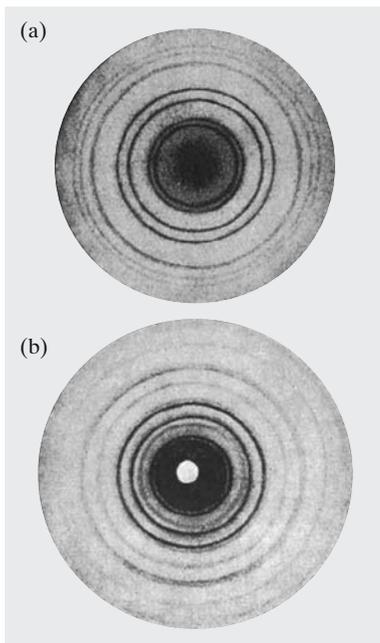
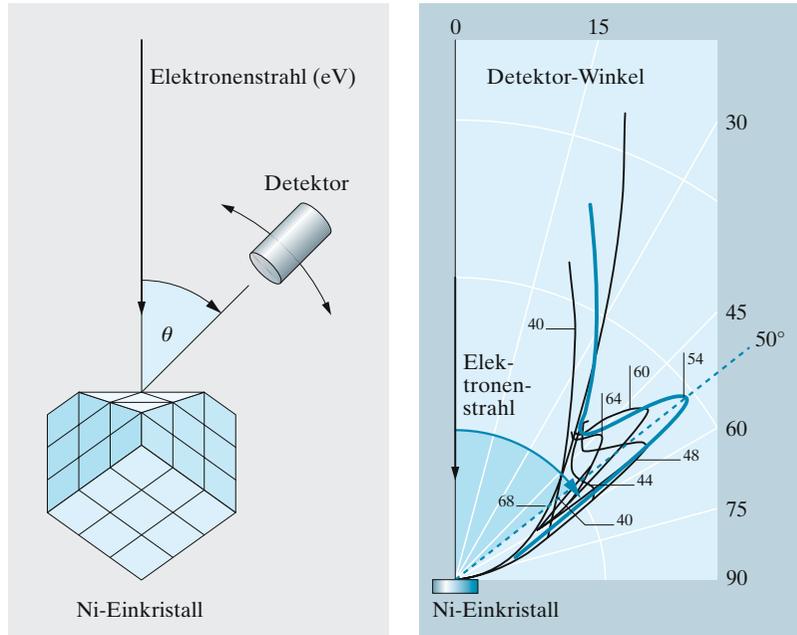


Abb. 13.9a,b. Elektronenbeugung und Röntgenbeugung an einer Silberfolie. (a) 36 kV-Elektronen; (b) Kupfer- K_α -Strahlung, $\lambda = 0,154$ nm. (Nach *Mark und Wierl*, aus W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

Wir lassen ein genau paralleles Elektronenbündel auf eine sehr feine Lochblende fallen. Wie für das Licht (Abschn. 10.1.4) ergibt sich auf dem Leuchtschirm, der das Auftreffen des Elektrons anzeigt, kein scharfes Bild des Loches, sondern ein Beugungsscheibchen vom Durchmesser $d = 1,22 f \lambda / r$ (Abb. 10.16b), abgesehen von den schwächeren Beugungsringen höherer Ordnung, die das Scheibchen umschließen. Offenbar fliegen die Elektronen nach dem Durchgang durch das Loch nicht mehr streng parallel, einige sind um den Winkel $\alpha \approx \lambda / r$ abgelenkt worden. Vorher lag der ganze Impuls $p = h / \lambda$ genau senkrecht zum Schirm, jetzt haben einige Elektronen eine transversale Impulskomponente $p_{tr} = \alpha p = h / r$. Diese Ablenkung könnte von der Wechselwirkung der Elektronen mit den Lochrändern herrühren. Man sollte dann aber eine Abhängigkeit vom Material und der Dicke des Blendenschirms erwarten. Eine solche Abhängigkeit besteht nicht. Allein die Lochgröße ist entscheidend für die Ablenkung, d. h. die Impulsänderung. Auch die gegenseitige Abstoßung der Elektronen, die durch das Loch müssen, ist nicht für die Ablenkung verantwortlich zu machen. Selbst wenn die Intensität so schwach ist, dass zur Zeit mit Sicherheit nur ein Elektron sich in der Nähe des Lochs befindet, bilden die Auftreffpunkte der nacheinander eintreffenden Elektronen ein Beugungsbild. Sogar für ein einzelnes Elektron, das durch das Loch gegangen ist, kann anscheinend niemand voraussagen, wo es auf dem Schirm auftreffen wird. Diese Ungenauigkeit ist umso größer, je kleiner das Loch ist. Allein die Tatsache, dass das Elektron an einer Stelle seinen Ort mit einer Ungenauigkeit von höchstens r hat festlegen müssen, belastet seinen Impuls mit einer Ungenauigkeit h / r .

Dieser Schluss, gegen den sich unsere Logik zunächst sträubt, wird durch folgenden Versuch bestätigt und verschärft. Wir schneiden zwei Spalte in einen Blendenschirm, auf den Elektronen senkrecht auffallen. Im Versuch A lassen wir beide Spalte 1 s lang offen, im Versuch B nur den einen Spalt 1 s lang, dann den anderen ebenso lange. Beidemal machen wir eine Zeitaufnahme (2 s) vom Auffangschirm. Die Bilder sind völlig verschieden: zwei überlagerte Beugungsbilder der beiden Spalte im Fall B, das Beugungsbild des **Doppelspaltes** (Abschn. 10.1.4) im Fall A. Ein Elektron, als übliches Teilchen aufgefasst, kann entweder durch Spalt 1 oder Spalt 2 gehen. Wenn es durch Spalt 1 geht, sollte es ihm ganz egal sein, ob der Spalt 2 existiert bzw. ob er offen ist. Wie das Ergebnis zeigt, verhält sich das Elektron nicht so. Es „weiß“ sehr wohl, dass zwei Spalte da sind und richtet sein Verhalten danach. Im Wellenbild ist das ganz klar, im Teilchenbild scheinbar absurd. Das ist der Hauptgrund, weshalb man *Newtons* Vorstellung der Lichtkorpuskeln durch die Versuche von *Fresnel* und *Young* als erledigt ansah. Dieser Schluss war aber vorschnell, genauso, wie es vorschnell wäre, das Elektron nun einfach als Welle anzusehen. In ihrer Wechselwirkung mit Materie verhalten sich Elektron und Licht durchaus als praktisch punktförmige Teilchen. Im Doppelspaltversuch mit geringer Intensität z. B. flammt der Leuchtschirm nur jeweils punktwise auf, wenn dort ein Elektron auftrifft, aber die Gesamtheit dieser Lichtblitze bildet genau das von der Wellenvorstellung vorausgesagte Beugungsbild. Die beiden scheinbar einander ausschließenden Bilder – Teilchen und Welle – müssen, so schwierig das scheint, zusammengedacht werden. Die Materie ist beides zugleich.

x Beispiel ...

Vergleichen Sie die Röntgen- und die Elektronenbeugung am MgO-Kristall (Abb. 16.12 und 13.10). Schätzen Sie die Wellenlänge der verwendeten Röntgenstrahlung. Worauf können die Intensitätsunterschiede beruhen?

Alle Reflexe sind in beiden Bildern vorhanden, selbst die Reflexe 115 und 333 sind in Abb. 13.10 zwar nicht bezeichnet, aber andeutungsweise sichtbar. Über die absolute Größe des Ablenkwinkels ist aus Abb. 13.10 nichts auszusagen. Wären die Winkel in beiden Abbildungen gleich, würde das heißen, dass in Abb. 16.12 eine 200 keV-Röntgenstrahlung benutzt wurde. Wahrscheinlich war die Röntgenenergie aber kleiner und die Ablenkung größer als in Abb. 13.10.

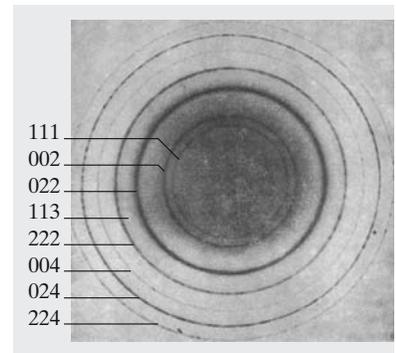
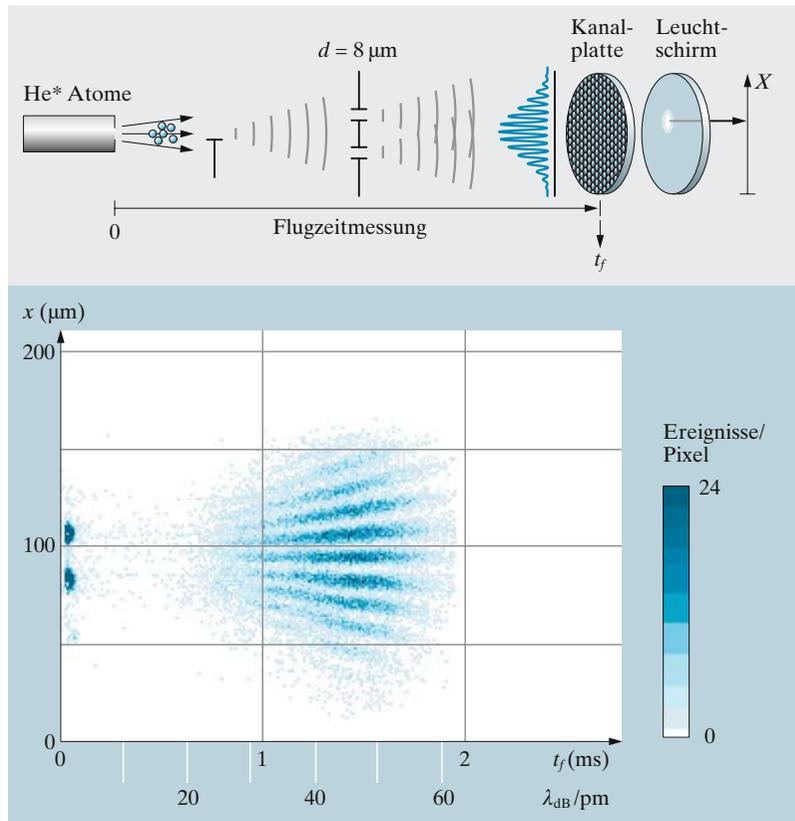


Abb. 13.10. Elektronenbeugung an MgO. Energie 80 keV. Vgl. die Röntgenbeugung am gleichen Kristall, Abb. 16.12

13.2.4 Selbstinterferenz von Atomen

Atome sind mikroskopische Objekte und müssen nach den Regeln der Quantenmechanik beschrieben werden. Diese Einsicht bezieht sich nicht nur auf die inneren Freiheitsgrade, d. h. die Bewegung der atomaren oder molekularen Elektronen, die bei der Entstehung der Quantenmechanik eine unübertroffene Rolle gespielt haben. Die atomare Schwerpunktbewegung wird zwar in einem gewöhnlichen, verdünnten Gas (nur dort können

Abb. 13.11. Doppelspalt-Experiment mit Materiewellen von He^* -Atomen. Metastabile Helium-Atome lösen wie Photonen auf einem Sekundärelektronen-Vervielfacher (SEV, s. Abschn. 8.1.4) einen Ladungsimpuls von 10^5 – 10^6 Elektronen/Atom aus, d. h. auch ein einzelnes Atom kann mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nachgewiesen werden. In der Kanalplatte wirkt jeder Kanal als SEV. Mit einem Leuchtschirm kann man daher auch den Ort des Ladungsimpulses nachweisen. Die gepulste Strahlquelle erlaubt darüberhinaus, die Geschwindigkeit der Atome aus der Flugzeit und damit ihre de Broglie-Wellenlänge zu bestimmen. Daher kann das Beugungsmuster in diesem Experiment als Funktion der Wellenlänge gewonnen werden. (Mit freundlicher Erlaubnis von J. Mlynek und T. Pfau, Konstanz)



wir von einzelnen Atomen sprechen) sehr gut im klassischen Teilchenbild beschrieben, das heißt durch Trajektorien mit wohl definiertem Ort und Impuls. Nach de Broglie kommt aber bei kleinen Geschwindigkeiten der Wellencharakter der Quantenmechanik wieder zum Vorschein, wobei die so genannte thermische de Broglie-Wellenlänge mit der thermischen Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\pi kT/m}$ zusammenhängt,

$$\lambda_{\text{de Broglie}} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}. \quad (13.10)$$

Die Welleneigenschaften eines Atomstrahls werden wie in der optischen Interferometrie deutlich, wenn die Bedingungen für transversale und longitudinale Kohärenz (s. Abschn. 10.1.1) erfüllt sind, wobei allerdings wegen der i. Allg. viel kürzeren Wellenlängen hohe Anforderungen an die „atomoptischen“ Elemente gestellt werden.

Das youngsche **Doppelspalt**-Experiment (s. Abschn. 10.1.2) ist das wohl einfachste Experiment, um Welleneigenschaften durch Interferenzphänomene nachzuweisen. Ein komplementäres Experiment ist die Beugung am dünnen Draht, die für Elektronen schon in Abschn. 13.2.2 vorgestellt wurde. Genau das youngsche Doppelspalt-Experiment lässt sich aber auch mit Atomen durchzuführen, indem z. B. ein Düsenstrahl von Helium-Atomen verwendet wird, der hinreichend monoenergetisch

($\Delta E/E < 10\%$) ist. Der Nachweis metastabiler Helium-Atome (die durch eine Entladung in der Quelle erzeugt werden) ist darüber hinaus so empfindlich, dass das Experiment auch mit einem sehr geringen Fluss von Atomen ausgeführt werden kann. Jedes Helium-Atom ist also im Prinzip allein in der Apparatur, und Interferenz-Phänomene müssen als Selbstinterferenz interpretiert werden. In der experimentellen Anordnung aus Abb. 13.11 ergibt sich sogar die Möglichkeit, mit einer gepulsten Quelle die Flugzeit vom Doppelspalt bis zum Detektor zu messen und daraus die de Broglie-Wellenlänge genau zu vermessen. Das Experiment beweist, dass auch relativ „schwere“ Teilchen – Atome, inzwischen sogar Moleküle wie C_{70} mit einem Molekulargewicht $M = 840$, und an der Universität Wien sind Beugungsexperimente mit noch größeren Objekten geplant – den Regeln der Quantenmechanik streng folgen.

Während uns heute die Interferenzphänomene von Licht und wohl im Analogieschluss auch Photonen keinerlei Mühe bereiten, irritiert die Selbstinterferenz von Teilchen unser Vorstellungsvermögen, insbesondere dann, wenn sie ins Groteske getrieben wird wie in der Karikatur Abb. 13.12. Dabei übertragen wir natürlich unsere makroskopisch trainierten Erfahrungen mit kompakten Teilchen auf die mikroskopische Welt, obwohl wir doch eigentlich genau wissen müssten, dass dort andere Spielregeln gelten.

13.2.5 Interferometrie mit Materiewellen

Die Kristallbeugung des Davisson-Germer-Experiments können wir durchaus schon als einen Interferenzeffekt mit Materiewellen betrachten, und auch das Doppelspalt-Experiment aus Abschn. 13.2.4 beweist die Wellennatur der verwendeten Materiestrahlen. Von einem „echten“ Interferometer erwarten wir aber, dass wir seine Arme unabhängig voneinander manipulieren können, z. B. die Weglänge in nur einem Arm eines



Abb. 13.12. Karikatur zur Selbstinterferenz eines makroskopischen Teilchens. (Mit freundlicher Genehmigung von Frau Carmen Stahlschmidt)

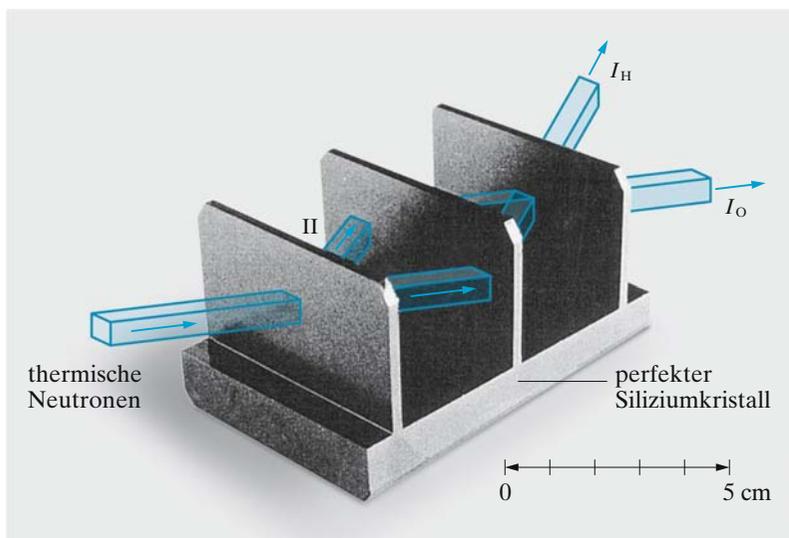


Abb. 13.13. Mach-Zehnder-Interferometer für thermische Neutronen. Vergleiche mit Abb. 10.52. Mit freundlicher Erlaubnis von Helmut Rauch, Wien

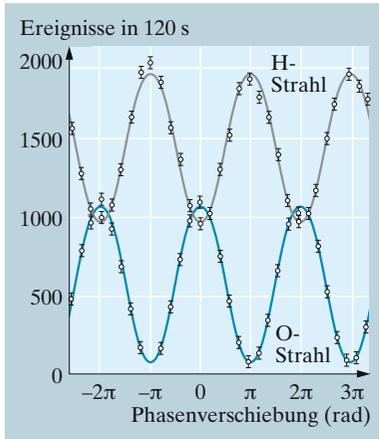


Abb. 13.14. Interferenzsignal der beiden Ausgangsstrahlen des Neutronen-Mach-Zehnder-Interferometers. Eine Aluminiumplatte wirkt wie ein Glasfenster im analogen optischen Interferometer. Wird sie zwischen zwei Halbplatten (Abb. 13.13) eingesetzt und gedreht, verursacht sie eine Phasendifferenz zwischen den beiden Armen. Die beiden Interferometerarme zeigen das erwartete komplementäre Verhalten. Mit freundlicher Erlaubnis von Helmut Rauch, Wien

Michelson- (Abb. 10.50) oder Mach-Zehnder-Interferometers (Abb. 10.52) verändern. Solchen Atom-Interferometern haben wir einen eigenen kurzen Abschnitt gewidmet (Abschn. 14.8.2). Materiewellen-Interferometer sind aber auch schon für thermische, d. h. langsame Neutronenstrahlen konstruiert worden, die man in hinreichender Intensität allerdings nur aus einem geeigneten Reaktor beziehen kann. Sie eignen sich sehr gut, um ungewöhnliche Phänomene der Quantenphysik zu studieren und demonstrieren.

Das Mach-Zehnder-Interferometer für Neutronenstrahlen in Abb. 13.13 besteht aus zwei Strahlteilern (erste und letzte Halbplatte) und einem Spiegel (mittlere Halbplatte). Die Kristallgitterebenen des Si sorgen sowohl für die Strahlteilung wie für die Spiegelreflexion und müssen parallel ausgerichtet sein. Diese Perfektion wird erreicht, indem das ganze Interferometer aus einem einzigen, störungsfreien Silizium-Einkristall geschnitten wird. Die Zwischenräume in diesem Interferometer sind so groß, dass man z. B. Komponenten zur Erzeugung elektromagnetischer Felder einbauen kann.

Das Interferenzsignal $I_{H,O}$ am Ausgang des Interferometers (Abb. 13.14) wird beschrieben nach

$$I_{H,O} = |\psi_I + \psi_{II}|^2 \propto 1 \pm \cos \Delta\Phi,$$

und $\Delta\Phi$ ist die Phasenverschiebung, die gegenüber der ungestörten, d. h. von identischen Kräften und Feldern in beiden Interferometerarmen bestimmten Propagation der Materiewellen auftritt. Die Phasenverschiebung kann durch Kräfte verursacht werden, die wir auch aus der klassischen Welt kennen, zum Beispiel die Wirkung magnetischer Felder auf das magnetische Dipolmoment des Neutrons. Darüberhinaus gibt es aber Quantenphänomene wie zum Beispiel den Aharonov-Bohm-Effekt, der eine Phasenverschiebung der Materiewellenfunktion verursacht, ohne dass dabei eine klassische Kraft auftritt.

13.2.6 Die Unbestimmtheitsrelation

Jedes Teilchen mit der Energie E und dem Impuls p ist gleichzeitig eine Welle mit der Frequenz $\nu = E/h$ und der Wellenlänge $\lambda = h/p$.

Wenn das stimmt, kann man die Folgerungen aus unseren Versuchen so verallgemeinern:

Es ist unmöglich, Ort und Impuls eines Teilchens gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit vorherzusagen.

Die Lochblende liege z. B. in der x, y -Ebene. Ein Loch vom Radius r legt x - und y -Koordinate des durchgehenden Elektrons bis auf einen Fehler $\Delta x = \Delta y = r$ fest. Wie wir sahen, werden eben dadurch die x - und y -Komponente des Impulses um den Fehler $\Delta p_x = \Delta p_y = h/r$ unbestimmt. Bei sehr kleiner Ortsunschärfe (sehr kleinem Loch) wird die Impulsunschärfe sehr groß und umgekehrt. Beide Unschärfen stehen in dem Zusammenhang

$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \approx h} . \quad (13.11)$$

Dies ist **Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation**. Sie drückt im Grunde nur die Tatsache aus, dass die Materie Welleneigenschaften hat, die durch die Beziehungen von *Planck*, *Einstein* und *de Broglie* beschrieben werden. Man hat heute bequemer zu handhabende Beschreibungen atomarer Systeme entwickelt, in denen die Welle nicht mehr explizit auftritt, ohne dass dadurch die Unbestimmtheitsrelation ihre Bedeutung verliert.

Eine ähnliche Relation wie zwischen Ort und Impuls gilt auch zwischen Zeit und Energie.

Wenn man ein System nur eine Zeit Δt lang beobachtet, oder wenn es überhaupt nur so lange existiert, ist es unmöglich, seine Energie genauer festzulegen als bis auf einen Fehler ΔE , der sich ergibt aus

$$\Delta E \Delta t \approx h . \quad (13.12)$$

Diese Beziehung ist im Wellenbild sehr einfach zu verstehen. Messung der Energie des Teilchens bedeutet Frequenzmessung der zugehörigen Welle. Eine Frequenzmessung läuft immer auf eine Zählung der eintreffenden Wellenberge (oder -täler) hinaus. Eine harmonische Welle der Frequenz ν macht $\nu \Delta t$ Berge in der Zeit Δt . Sind z. B. sieben Berge eingetroffen, weiß man nicht, ob der achte dicht „vor der Tür steht“ oder nicht. Der Fehler von $\nu \Delta t$ ist also von der Größenordnung 1, der Fehler von ν demnach $\Delta \nu \approx 1/\Delta t$, der Fehler von $E = h\nu$ ist $\Delta E \approx h/\Delta t$, was mit (13.12) übereinstimmt. Die Fourier-Analyse (Abschn. 4.1.1d) zeigt auch in aller Strenge, dass sogar eine reine Sinuswelle, die nur eine Dauer Δt hat, immer durch ein Frequenzspektrum von der Breite $\Delta \nu \approx 1/\Delta t$ beschrieben werden muss.

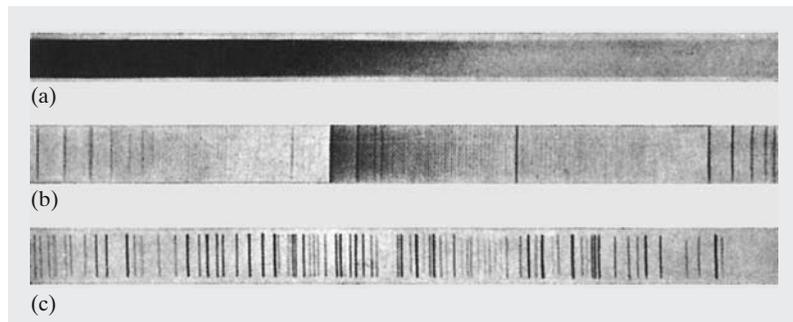
13.3 Spektren

Was in Atomen und Molekülen los ist, erkennt man am detailliertesten aus ihren Spektren. Um 1900 hoffte man, ein „Newton der Spektroskopie“ würde klarlegen, was die Welt im Innersten zusammenhält. Er kam, er hieß *Niels Bohr*, aber auch ein Jahrhundert später sind wir immer noch auf dem Weg ins „Innerste“.

13.3.1 Emission und Absorption von Licht

Die Gesetze der Wärmestrahlung lassen sich ableiten, ohne dass man auf die innere Struktur der Materie eingeht, die mit der Strahlung in Wechselwirkung steht, d. h. sie emittiert und absorbiert. Man braucht nur zu wissen, ob diese Materie „schwarz“ ist oder nicht, genauer, welches Absorptionsvermögen sie hat. Alles weitere ist eine Angelegenheit der Strahlung selbst und des Energieaustausches zwischen ihren verschiedenen Frequenzbereichen, die wir als Energiebereiche der Photonen gedeutet haben. Der praktische Erfolg der Theorie der schwarzen Strahlung beruht darauf, dass

Abb. 13.15. Das kontinuierliche Spektrum eines heißen Festkörpers (a), das Bandenspektrum eines Molekül-gases (b) und das Linienspektrum eines Atomgases (c). (Aus W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))



zumindest im Sichtbaren viele heiße Körper, besonders feste und flüssige, sich nahezu schwarz oder grau verhalten (Absorptionsvermögen frequenz-unabhängig); ihre Grenzen liegen dort, wo die spektrale Verteilung des Absorptionsvermögens wesentlich wird.

Von den individuellen Eigenschaften der Atome oder Moleküle ist im Festkörper oder der Flüssigkeit wenigstens optisch nicht mehr viel zu erkennen. Dicht gepackt sind alle Teilchen grau. Dass jedes Atom oder Molekül nur ganz charakteristische Spektrallinien hat, d. h. nur bei bestimmten scharfen Frequenzen absorbieren und emittieren kann, zeigt sich, von Ausnahmefällen abgesehen, erst im Zustand isolierter Teilchen, im Gas. Die scharfen Spektrallinien der Gasteilchen verbreitern sich, je mehr die Teilchen zusammenrücken, zu breiten Absorptions- und Emissionsgebieten und schließlich im Extremfall zum konstanten Absorptionsvermögen des schwarzen oder grauen Körpers (Abb. 13.15).

Die Absorption gelöster Teilchen, obwohl in breiten und daher ziemlich uncharakteristischen Absorptionsgebieten konzentriert, ist besonders in der organischen und Biochemie ein wichtiges Mittel zum quantitativen Nachweis von Substanzen. Viel charakteristischer sind natürlich die scharfen Linien von Gasen und Dämpfen, die in der **Spektralanalyse** ausgenutzt werden und die den ungeheuren Aufschwung der Astrophysik seit etwa 100 Jahren ermöglichten. Fast alles, was man über die Sterne weiß, hat man aus ihren Spektren abgeleitet. Weil andererseits die Lage der Spektrallinien so charakteristisch für die verschiedenen Atome ist, liegt auf der Hand, dass ein Verständnis der Spektren auch ein Verständnis der Atome bedeutet. Bei der Entwicklung dieser Zusammenhänge werden wir häufig zwischen dem klassisch-elektrodynamischen Grundmodell eines strahlenden Teilchens, nämlich dem Hertz-Oszillator, und dem Photonenbild hin- und herspringen, bis wir im bohrschen Atommodell eine vorläufige und in der quantenmechanischen Theorie des Atoms eine weitergehende Synthese finden.

13.3.2 Linienverbreiterung

Absolut scharfe **Spektrallinien** gibt es nicht. Selbst ein völlig isoliertes Atom könnte nur dann Licht einer absolut scharfen Frequenz aussenden, wenn es ununterbrochen strahlen würde. Unabhängig vom speziellen Atommodell muss die emittierte Welle irgendwann aufhören. Jeder solche Abbruch verletzt aber die absolute Periodizität, und das Ergebnis ist nur

noch durch ein Kontinuum von Frequenzen darstellbar (Abschn. 4.1.1d: Fourier-Analyse).

Ein Hertz-Dipol, also eine Ladung e , die mit der Amplitude x_0 und der Kreisfrequenz ω schwingt, strahlt nach Abschn. 7.4.6 eine Leistung $P = \omega^4 e^2 x_0^2 / (6\pi \epsilon_0 c^3)$ aus. Diese Leistung wird der Gesamtenergie der Schwingung entzogen, die $E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$ beträgt und somit nach einer Zeit

$$\tau = \frac{E}{P} = 3\pi \frac{\epsilon_0 c^3 m}{e^2 \omega^2} \quad (13.13)$$

verbraucht ist. Sind die schwingenden Teilchen Elektronen, so ergibt sich $\tau \approx 10^{-8}$ s. Die emittierte Welle ist also gedämpft mit einer **Dämpfungs-konstante** $\gamma = 1/\tau$.

Wie in (4.27) ergibt sich das Frequenzspektrum einer gedämpften Schwingung $f(t) = A e^{-(\gamma/2)t} e^{i\omega_0 t}$ aus dem Fourier-Integral

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) e^{-i\omega' t} dt &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(\gamma/2+i\omega_0-i\omega')t} dt \\ &= \frac{1}{\gamma/2 - i(\omega_0 - \omega')} \frac{A}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Der Realteil hiervon ist das Frequenzspektrum:

$$g(\omega') = \frac{\gamma/2}{(\omega_0 - \omega')^2 + (\gamma/2)^2}.$$

Das Maximum dieser symmetrischen Kurve (Abb. 13.16) liegt bei der Frequenz $\omega' = \omega_0$; dort hat die Amplitude den Wert $g(\omega_0) = 2/\gamma$; auf die Hälfte dieses Wertes ist sie abgesunken bei einer Verstimmung um $\Delta\omega' = \gamma/2$ (Halbwertsbreite). Da $\gamma = 1/\tau$, folgt die Gesamtbreite der Linie

$$\boxed{\Delta\omega' = \gamma = \frac{1}{\tau}}. \quad (13.14)$$

Die Breite einer Spektrallinie, die einem gedämpften Wellenzug des einzelnen Emissionsaktes entspricht, ist gleich der reziproken **Lebensdauer des angeregten Zustandes**. Diese Beziehung gilt ganz allgemein, gleichgültig ob der Strahlungsprozess durch Dämpfung oder anders abgebrochen wird.

Völlig isolierte Atome senden häufig Linien aus, deren **natürliche Linienbreite** der oben geschilderten klassischen Strahlungsdämpfung (13.13) entspricht (s. Abschn. 14.6.3). Für sichtbares Licht ist $\gamma/\omega \approx 10^{-8}$. Noch schärfere Linien kann man nur erwarten, wenn der angeregte Zustand langlebiger ist. Dies ist für gewisse Atomzustände (metastabile Zustände, Abschn. 13.4.2) und vielfach für Zustände des Atomkerns der Fall. Die Schärfe der entsprechenden γ -Linien wird im Mößbauer-Effekt ausgenutzt (Abschn. 13.1.4)

In dichten Gasen und besonders im kondensierten Zustand werden die individuellen Strahlungsakte nicht mehr durch Strahlungsdämpfung, sondern durch Stöße mit anderen Teilchen abgebrochen. Die Lebensdauer τ ist dann annähernd mit der gaskinetischen Stoßzeit gleichzusetzen (Abschn. 5.2.7):

$$\tau = \frac{l}{v} \approx \frac{1}{nAv}$$

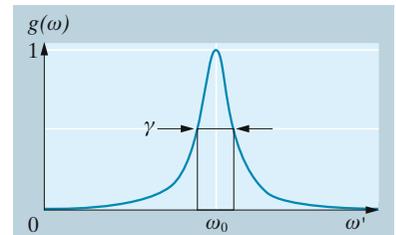


Abb. 13.16. Profil einer Spektrallinie als Fourier-Spektrum eines gedämpften Wellenzuges

(l : freie Weglänge; v : mittlere thermische Geschwindigkeit; n : Teilchenzahl-dichte; A : Stoßquerschnitt). Das führt zur **Stoß-** oder **Druckverbreiterung** der Spektrallinien auf die Breite

$$\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau} \approx nAv \sim p. \tag{13.15}$$

Die Quantentheorie des Atoms hat gegen die Größenordnung von τ aus der klassischen Elektrodynamik im Normalfall nichts einzuwenden, erklärt aber, warum einige Atomzustände viel langlebiger (metastabil) sind.

Die endliche Leuchtdauer der Atome hat eine weitere sehr praktische Konsequenz. Da der von einem Atom emittierte Wellenzug zeitlich i. Allg. $\tau \approx 10^{-8}$ s, räumlich also $c\tau \approx 3$ m lang ist, kann man nicht erwarten, dass man mit zwei Lichtbündeln, selbst wenn sie aus der gleichen Quelle stammen, noch Interferenzen herstellen kann, wenn ihr Gangunterschied größer als diese **Kohärenzlänge** ist. Versuche mit dem Michelson-Interferometer bestätigen das.

x Beispiel ...

Wie muss ein Spektralapparat (Abschn. 10.1.6) gebaut sein, damit er bis zur **natürlichen Linienbreite** auflösen kann? Was stellen die Linien andernfalls dar? Die natürliche Linienbreite der meisten („erlaubten“ Übergängen entsprechenden) Linien ist gerade nicht mehr auflösbar. Selbst mit einem Beugungsgitter mit $n = 10^6$ benutzten Strichen müsste man etwa in der Ordnung $z = 100$ messen (Abschn. 10.1.6: $\lambda/\Delta\lambda = zn$). Außerdem wird die natürliche Breite schon bei Heliumtemperaturen von der Doppler-Breite überdeckt. „Verbotene“ Linien, die von metastabilen Zuständen ausgehen, haben noch viel geringere natürliche Breite. Die Linien sind also normalerweise Beugungsbilder des Spaltes.

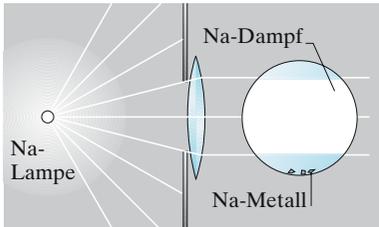


Abb. 13.17. Das Licht der Natrium-D-Linien regt den Na-Dampf zum Resonanzleuchten an (leuchtender Teil im Bild weiß)

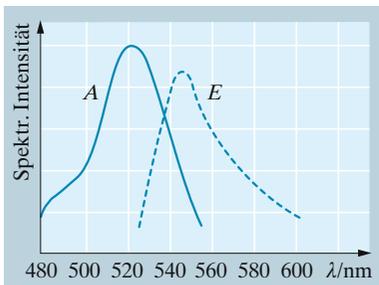


Abb. 13.18. Stokes-Verschiebung beim Fluoreszenzlicht einer Eosinlösung. A Absorption. E Emission

13.3.3 Fluoreszenz

In einem hochevakuierten Gefäß befindet sich metallisches Natrium mit seinem Dampf, dessen Druck bei 100 °C 10^{-7} mbar beträgt (Abb. 13.17). Schickt man durch das Gefäß ein Bündel gelben Na-Lichts (die D_1 - und D_2 -Linien), dann sieht man auch von der Seite die Spur dieses Bündels im gelben Licht des Natriums leuchten. Durchstrahlt man das Gefäß mit weißem Licht (z. B. aus einer Bogenlampe), dann leuchtet die Spur ebenfalls im gelben Licht der **D-Linien**. Natriumdampf streut Licht, aber nur selektiv in den **D-Linien**. Eine solche selektive Streuung heißt **Fluoreszenz**. Im Spektrum des durch den Dampf hindurchgegangenen Lichts zeigt sich ein Paar von **D-Absorptionslinien**: Energie aus dem einfallenden Strahl ist verbraucht worden, um die Na-Atome zum Mitschwingen anzuregen; die in Resonanz mitschwingenden Na-Atome strahlen diese Energie nach allen Seiten wieder ab. Deswegen spricht man in diesem Fall von **Resonanzfluoreszenz**. Durchstrahlt man den Dampf mit der Linie 330,3 nm, so erscheint auch sie als Resonanzfluoreszenz; neben ihr treten aber auch die **D-Linien** auf, die nun nicht mehr als Resonanzlinien aufgefasst werden können.

Auch bei anderen fluoreszenzfähigen Systemen ist das emittierte Licht fast immer höchstens so kurzweilig wie das absorbierte (**Stokes-Regel**, Abb. 13.18). Im Photonenbild ist das ganz verständlich: Das absorbierte Photon kann höchstens Energie, also Frequenz verlieren, bevor es wieder ausgestrahlt wird. Ein solcher Energieverlust kann eintreten, wenn während der Lebensdauer des angeregten Zustandes ein gaskinetischer Zusammenstoß erfolgt, der die Anregungsenergie

gie teilweise oder ganz abführt. Die abgeführte Energie kann in kinetische (thermische) Energie umgesetzt oder vom Stoßpartner als Anregungsenergie übernommen und ausgestrahlt oder weitertransportiert werden (Energiewanderung). Bei vollständiger Umwandlung in thermische Energie beobachtet man also **Fluoreszenzlöschung**. Die Häufigkeit aller dieser Prozesse nimmt i. Allg. mit wachsender Temperatur zu.

Nur ausnahmsweise beobachtet man in der Emission kürzerwellige Antistokes-Linien als in der Absorption. Die Zusatzenergie kann entweder aus dem thermischen Energievorrat stammen (in diesem Fall nimmt die Intensität der Antistokes-Linien mit wachsender Temperatur zu), oder die Absorption des Photons kann einen Übergang höherer Energie ausgelöst haben, der sonst verboten wäre (Abb. 13.19).

Das Absorptions- und das Fluoreszenzspektrum eines mehratomigen Gases (z. B. Joddampf) ist viel komplizierter. Auch Flüssigkeiten und Festkörper zeigen bei geeigneter Einstrahlung Fluoreszenz. Die Absorption des zur Anregung befähigten Lichts ebenso wie die Emission erfolgen fast immer in kontinuierlichen Banden. Eine Ausnahme sind Festkörper, die seltene Erden enthalten; sie zeigen auch scharfe Fluoreszenzlinien.

Typische Vertreter fluoreszenzfähiger flüssiger Körper, die durch sichtbares Licht angeregt werden, sind Fluoreszein und Eosin in wässriger Lösung. Praktisch wichtig ist die Fluoreszenz des Uranglases und des Bariumplatincyanids, die zum Nachweis von ultraviolett Licht und von Röntgenstrahlen verwendet wird. Die durch Röntgenstrahlen erregte Fluoreszenz ist allerdings den von ihnen ausgelösten Sekundärelektronen zuzuschreiben.

13.3.4 Phosphoreszenz

Viele feste Körper, als Phosphore („Lichtträger“) bezeichnet, leuchten nach Bestrahlung mit kurzwelligem Licht noch länger nach. Im Gegensatz zur Fluoreszenz wird die Energie des anregenden Lichts nicht sofort (innerhalb 10^{-8} s) wieder ausgestrahlt, sondern unter Umständen erst im Laufe von Tagen. Erdalkali-, Zinksulfid- und Zinksilikat-Phosphore haben je nach Zusammensetzung Nachleuchtdauern zwischen Bruchteilen von Millisekunden (Fernsehschirme) und mehreren Stunden (Leuchtzifferblätter). Sie entstehen durch Schmelzen oder Sintern der Sulfide oder Silikate von Ca, Sr, Zn, Cd, „aktiviert“ mit geringen Mengen von Cu, Ag, Mn, Bi oder anderen Schwermetallen sowie unter Beimengung eines **Flussmittels**. Die Atome des aktivierenden Schwermetalles bilden Zentren, in denen die absorbierte **Lichtsumme** gespeichert wird. Temperatursteigerung verkürzt die Nachleuchtdauer; die Lichtsumme bleibt dabei aber bis zu gewissen Grenzen konstant. Für jeden Phosphor gibt es eine Höchstlichtsumme, die bei Steigerung der Anregung nicht überschritten werden kann. Die Anzahl der speicherbaren Photonen entspricht i. Allg. der der Zentren, d. h. der Anzahl der aktivierenden Metallatome.

13.3.5 Raman-Effekt

Nach der Photonenvorstellung besteht Lichtstreuung darin, dass die Energie der Photonen nicht gleich einer möglichen Differenz von Energieniveaus des Atoms oder Moleküls ist, und dass das Photon nur „versuchsweise“ absorbiert wird, wobei es das Atom in einen Zustand W_v überführt. Da dieser nicht zu den erlaubten gehört, wird das Photon sofort wieder ausgestrahlt, wobei seine ursprüngliche Flugrichtung weitgehend verloren geht (Abb. 13.20).

Liegen neben dem Ausgangsniveau weitere Energieniveaus, so kann die Rückkehr aus W_v in eines davon erfolgen. Die Energiedifferenz zwischen ihm und dem Ausgangsniveau muss dann dem Photon entnommen oder zugefügt werden. Im Streulicht findet man neben der eingestrahnten Spektrallinie eine oder mehrere verschobene Begleiter. Die gleichen Frequenzverschiebungen $\Delta\nu$ können sich auch neben weiteren eingestrahnten Linien wiederfinden (Abb. 13.21). Sie entsprechen

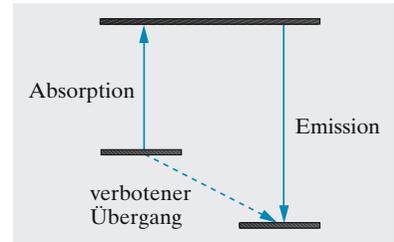


Abb. 13.19. Metastabiler Zustand und verbotener Übergang

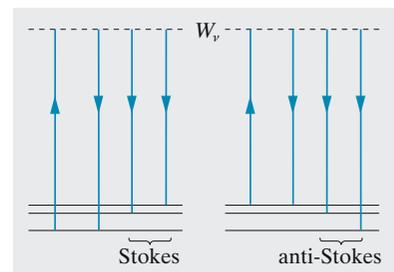
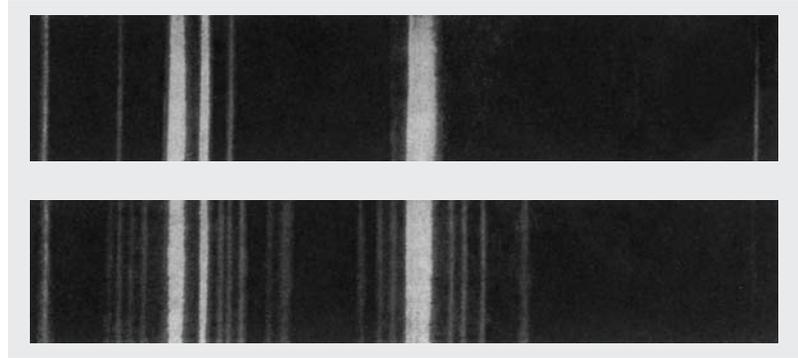


Abb. 13.20. Termschema zur Deutung der Raman-Linien

Abb. 13.21. Raman-Effekt mit Quecksilber-Bogenlicht an Benzol; *oben*: Spektrum des primären Hg-Lichts, *unten*: Spektrum des Streulichts



genau den Abständen zwischen End- und Ausgangsniveaus im streuenden Atom. Die Verschiebungen können nach längeren oder kürzeren Wellen erfolgen (Stokes- und Antistokes-Linien). Wenn der Ausgangszustand der Grundzustand war, gibt es allerdings nur Stokes-Linien.

Streuung ist Emission der Ladungen, die mit der einfallenden Lichtwelle mit-schwingen, speziell der Elektronenhülle. Die Amplitude des Streulichts hängt von der Polarisierbarkeit dieses Ladungssystems ab, und diese ändert sich, wenn die Atome im Molekül oder im Festkörper gegeneinander schwingen. Im gleichen Takt wird also das Streulicht moduliert, und die Modulationsfrequenz äußert sich im Spektrum als Abstand zwischen Haupt- und Seitenlinie (Abschn. 4.1.1, 4.1.4). Mit einer ähnlichen Überlegung hat *Smekal* diesen Effekt vorausgesagt, einige Jahre bevor *Raman* ihn 1928 nachwies.

In Abb. 13.21 sind die $\Delta\nu$ so klein, dass sie, direkt am Benzolmolekül beobachtet, Übergängen im fernen Ultrarot entsprechen würden, wo sie sehr schwer zu beobachten sind. Der Raman-Effekt rückt sie ins bequeme sichtbare Gebiet.

13.4 Der Versuch von Franck und Hertz

Dass die Atome diskrete Energiezustände haben und dass sie mit Energiebeträgen, die kleiner sind als der Abstand bis zum nächsten Energiezustand, nichts anfangen können, auch wenn ihnen diese Energie anders als in Photonenform geboten wird, wiesen *Franck* und *Hertz* 1913 nach.

Ein Gefäß wird gut evakuiert, und dann wird ein sehr geringer Dampfdruck einer einheitlichen Substanz, z. B. Natrium erzeugt (etwa durch leichtes Erhitzen eines Stückchens Natrium, das sich im Gefäß befindet). Eine Glühkathode *K* steht einer mit Öffnungen versehenen Anode gegenüber (Abb. 13.22). Regelt man die Anodenspannung von Null an langsam hoch, so bemerkt man ein gelbes Leuchten im Licht der Natrium-*D*-Linien, sobald die Anodenspannung 2,1 V überschreitet.

Die Natrium-*D*-Linien liegen bei $\lambda = 589 \text{ nm}$. Ihre Quantenenergie ist also $W = h\nu = hc/\lambda = 3,38 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,11 \text{ eV}$. Ein Elektron kann also ein Atom erst dann durch Stoß zur Ausstrahlung anregen, wenn seine Energie mindestens so groß ist wie die des emittierten Lichtquants. Dieses ist sozusagen die Umkehrung der entsprechenden Bedingung für den Photoeffekt.

Die ursprüngliche Anordnung von *Franck* und *Hertz* (Abb. 13.23) gestattet auch nachzuweisen, dass die Elektronen tatsächlich den Dampf ohne Energiever-

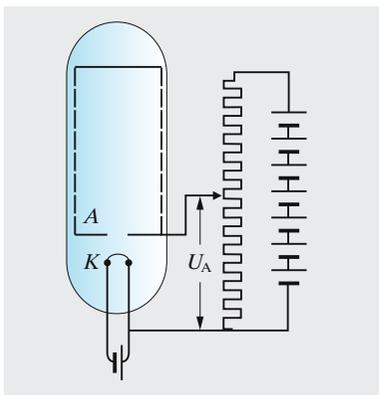


Abb. 13.22. Lichtenregung von Natriumdampf durch Elektronenstoß

lust durchlaufen, wenn ihre Energie unterhalb der Anregungsstufe liegt. In einem zylindrischen Rohr Z aus Platin befindet sich ein axialer Glühdraht K , umgeben von einem zylindrischen Drahtnetz A , das als Anode dient. Das Rohr enthält ein wenig Quecksilberdampf. Elektronen werden im Feld zwischen K und A beschleunigt; ein Teil von ihnen fliegt durch die Maschen von A weiter und wird mit dem Galvanometer G nachgewiesen. Um ganz langsame Elektronen, speziell solche, die gerade einen Energie verzehrenden Stoß hinter sich haben, zurückzuhalten, legt man ein schwaches Gegenfeld (etwa $0,5\text{ V}$) zwischen Z und A . Regelt man dann die Anodenspannung langsam hoch, so steigt der Strom durch G bis $4,9\text{ V}$ steil an, geht bei dieser Spannung aber fast auf Null zurück (Abb. 13.24). Mit steigender Spannung nimmt er dann wieder zu, bis sich bei $9,8\text{ V}$, $14,7\text{ V}$ usw. die gleiche Erscheinung wiederholt. $4,9\text{ eV}$ entsprechen der Quantenenergie für die $253,7\text{ nm}$ -Quecksilberlinie. Damit ist die Deutung des Effektes sehr einfach: Sobald die Elektronen die Energie von $4,9\text{ eV}$ erreicht haben, sind sie imstande, Hg-Atome anzuregen, wozu sie allerdings ihre ganze Energie hergeben müssen und nicht mehr gegen die Gegenspannung anlaufen können. Eine leichte Steigerung der Anodenspannung macht dies aber wieder möglich, und erst bei $U_A = 2 \cdot 4,9\text{ V}$ geben die meisten Elektronen in zwei aufeinander folgenden Stößen ihre Energie wieder vollständig ab.

Genauere Untersuchungen z. B. an der **Natriumdampfampe** zeigen, dass die Atome auch andere Energiestufen haben. Zusätzlich zu den D -Linien kommt aus dem Na-Dampf auch die Linie 330 nm , sobald die Elektronenenergie auf $3,7\text{ eV}$ gesteigert wird. Schon bei $3,15$ und $3,55\text{ eV}$ treten Infrarotlinien auf.

13.4.1 Die Energiestufen der Atome

Im Vertrauen auf die Elektronenstoßversuche kann man allgemein postulieren, dass jeder Spektrallinie, die ein Atom oder Molekül emittieren oder absorbieren kann, eine Differenz zwischen zwei Energiezuständen dieses Teilchens entspricht.

Absorption eines Photons von der Frequenz ν hebt die Energie des Atoms um den Betrag $h\nu$, Emission bedeutet einen entsprechenden Energieverlust. Dasselbe gilt auch für die möglichen Energiebeträge, die das Atom einem stoßenden Elektron entziehen kann. Die Übereinstimmung von Absorptionslinien, Emissionslinien und Elektronenstoßenergien bestätigt die **Bohr-Frequenzbedingung** zwischen den Energiezuständen E_1, E_2, \dots des Atoms und den Frequenzen der Spektrallinien

$$h\nu = E_k - E_i \quad (13.16)$$

Der tiefstmögliche Energiezustand eines Atoms heißt sein **Grundzustand**, die höheren sind **angeregte Zustände**.

Aus der Bohr-Frequenzbedingung folgt sofort das schon früher empirisch von *Ritz* gefundene **Kombinationsprinzip**: Wenn man die Frequenzen zweier Spektrallinien addiert oder subtrahiert, erhält man oft die Frequenz einer anderen Linie; oder allgemeiner: Die Frequenzen aller Linien eines Spektrums lassen sich als Differenzen von verhältnismäßig wenigen **Spektraltermen** darstellen, die miteinander kombiniert werden. Diese Terme erweisen sich jetzt einfach als die durch h dividierten Energien

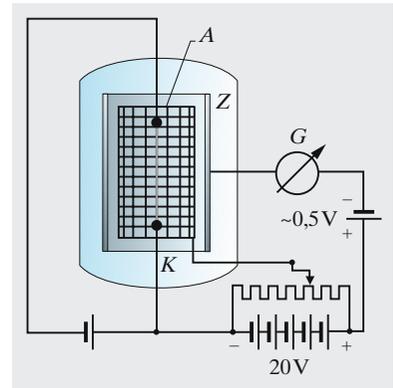


Abb. 13.23. Atomstoßversuch von Franck und Hertz zum Nachweis des quantenhaften Energieverlustes der stoßenden Elektronen

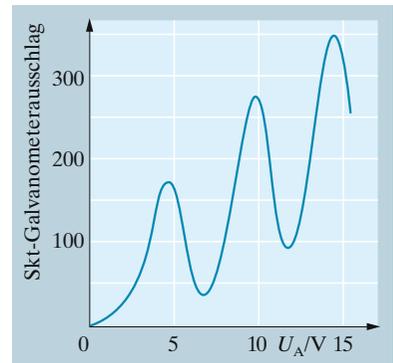


Abb. 13.24. Der zur Hilfsanode fließende Anodenstrom als Funktion der Anodenspannung im Stoßversuch von Franck und Hertz

der möglichen Zustände des Atoms. Allerdings treten nicht alle Kombinationen von Termen oder Zuständen als Spektrallinien auf: Es gibt gewisse Übergangsverbote oder **Auswahlregeln** (s. Abschn. 14.6.2), deren wahre Bedeutung erst die Quantenmechanik enthüllt.

Alle Spektrallinien, bei denen der untere Term übereinstimmt und nur der obere, der **Laufterm**, verschieden ist, lassen sich zu einer im Spektrum oft deutlich erkennbaren **Spektralserie** (s. Abschn. 14.2.3) zusammenfassen. Die Linien solcher Serien rücken meist im Kurzwelligen immer enger zusammen und konvergieren gegen eine **Seriengrenze**. Dies zeigt, dass die dem Laufterm entsprechenden Energiezustände mit wachsender Energie immer enger liegen.

Steigert man die Energie des Elektrons oder Photons, das man auf ein Atom schießt, so bringt man dieses in immer höhere Energiestufen. Schließlich aber führt dies zur Zerstörung des Atoms, und zwar zunächst zur Abtrennung eines Elektrons, einer **Ionisierung**. Schon daraus ist zu vermuten, dass im Atom Elektronen enthalten sind und dass die Anregungszustände eigentlich Zustände dieser Elektronen sind. Ionisierung tritt ein, wenn einem Atom vom Grundzustand mehr Energie zugeführt wird als eine charakteristische Grenzenergie, die **Ionisierungsenergie** (sie wird oft in eV ausgedrückt und dann etwas unsauber als Ionisierungsspannung bezeichnet).

13.4.2 Anregung und Ionisierung

Abbildung 13.25 gibt eine Übersicht über die wichtigsten Wechselwirkungen zwischen Atomen, Photonen und Elektronen, die mit Anregung oder Ionisierung verbunden sind. Wenn ein bestimmter Prozess möglich ist, so ist auch seine Umkehrung möglich, die dem rückwärts gespielten Film des Originalprozesses entspricht. Wenn ein Atom z. B. einem Elektron einen bestimmten Energiebetrag entnehmen und ihn zum Übergang in einen höheren Zustand benutzen kann, so kann es die gleiche Energie auch an ein vorbeikommendes Elektron abgeben, wobei dieses beschleunigt wird (**Stoß zweiter Art**).

Nur solche Prozesse sind möglich, die den drei Erhaltungssätzen für Energie, Impuls und Drehimpuls gehorchen. Dies schließt z. B. die Rekombination eines isolierten Atoms mit einem einzelnen Elektron aus: Das entstehende neutrale Atom kann nicht gleichzeitig die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$ und den Impuls mv des Elektrons aufnehmen. Es muss ein weiterer Partner da sein, der die Bilanzen in Ordnung bringt. In kondensierter Materie ist das meist ein anderes Atom, im verdünnten Gas oder Plasma oft ein anderes Elektron (**Dreierstoß-Rekombination**).

Trotz ihrer weitgehenden formalen Entsprechung sind die Übergänge, die durch Photonen-, Elektronen- oder Atomstoß ausgelöst werden können, teilweise verschieden, und zwar hauptsächlich wegen der Verschiedenheit der Impuls- und Drehimpulsbilanz. Es gibt Übergänge, die optisch verboten, also durch Photonenstoß nicht oder nur sehr schwer, durch Elektronen- oder Atomstoß (thermischen Stoß) aber sehr leicht zu bewerkstelligen sind. Der energetisch höhere in einem solchen Paar von Zuständen, zwischen denen der Übergang optisch verboten ist, heißt (optisch) **metastabiler**

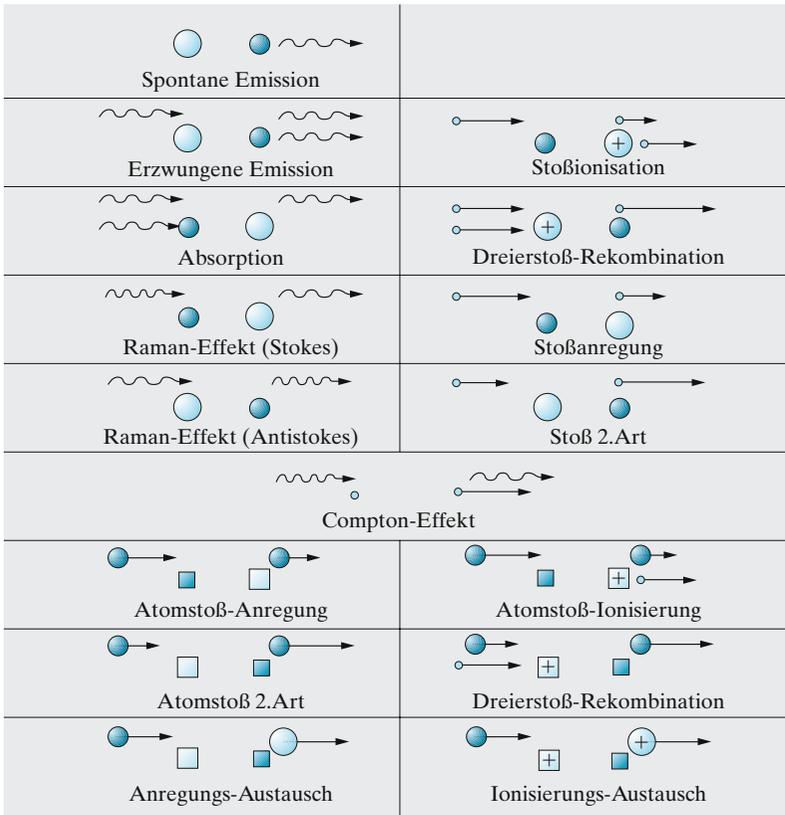


Abb. 13.25. Übersicht über die Stoßprozesse zwischen Atomen, Elektronen, Photonen. (↔) Photon, (○) Elektron, (●, ■) Atome im Grundzustand, (○, □) im angeregten Zustand, (⊕, ⊞) Ionen

Zustand. Wenn die „erlösenden“ thermischen oder Elektronenstöße selten sind, können solche Zustände sehr lange Lebensdauern haben und erhebliche Energiemengen speichern.

Wenn man die Linie 253,7 nm in Hg-Dampf einstrahlt, dem Tl-Dampf beigemischt ist, so treten neben den Hg-Resonanzlinien (Abschn. 13.3.3) auch längerwellige Tl-Linien auf. Angeregte Hg-Atome haben ihre Anregungsenergien mit Tl-Atomen ausgetauscht. Die Differenz zwischen den beiden Anregungsenergien geht in kinetische Energie über. Solche indirekte Anregung heißt **sensibilisierte Fluoreszenz**; Hg ist der Sensibilisator für das Tl-Leuchten.

13.5 Die Entdeckung des Atomkerns

Es wurde schon vor 1900 klar, dass Atome aus geladenen Teilchen aufgebaut waren. Einige Eigenschaften der negativ geladenen Elektronen, etwa ihre Ladung und Masse, waren bereits bekannt. Nicht bekannt war, wie sich in den Atomen, deren Größe man ebenfalls schon abschätzen konnte, die Masse und die positive Ladung verteilten. Die Experimente von *Rutherford* haben unzweideutig gezeigt, dass Atome auf den ersten Blick wie mikroskopische Planetensysteme aussehen: Masse und positive La-

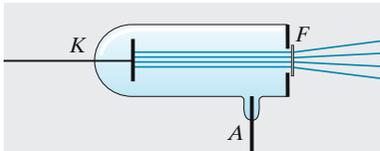


Abb. 13.26. Kathodenstrahlrohr mit Lenard-Fenster

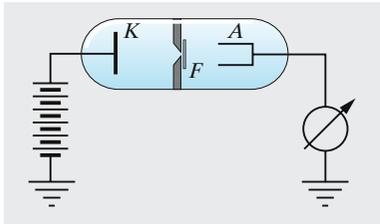


Abb. 13.27. Anordnung zur Messung des Wirkungsquerschnitts absorbierender Stoffe für Kathodenstrahlung

dung sind in einem Kern konzentriert, in dessen Coulomb-Kraftfeld sich die Elektronen bewegen.

Die Bewegung der mikroskopischen Teilchen, also der Elektronen, konnte jedoch mit den Gesetzen der klassischen Mechanik nicht mehr erfolgreich beschrieben werden. Rutherfords Experimente stehen an einem entscheidenden Wendepunkt von der klassischen zur modernen Physik.

13.5.1 Das leere Atom

Atome und Moleküle sind keine kompakten Gebilde, sondern überwiegend „leer wie das Weltall“. Das zeigten *Heinrich Hertz* (1891) und *Philipp Lenard* (um 1900). Kathodenstrahlung von etwa 40 kV Beschleunigungsspannung dringt leicht durch ein dünnes Fenster (F in Abb. 13.26; z. B. 5 μm Aluminiumfolie) in die Außenluft und bringt sie als Halbkugel von einigen cm Radius zu bläulichem Leuchten. In Abb. 13.27 dringt die Strahlung in einen Teil der Röhre, wo Gasart und Druck beliebig eingestellt werden können und eine Anode (A) den Teilchenstrom direkt auffängt. Erstaunlich ist, dass die schnellen Elektronen überhaupt durch die Metallfolie von einigen μm Dicke kommen, in der immerhin etwa 10^4 Atomschichten in dichter Packung übereinander liegen. In einigen mm Luft sind es ebenso viele, und die Elektronen kommen dort sogar einige cm weit. Der Wirkungsquerschnitt der Atome für die Absorption dieser Elektronen ist also 10^5 -mal kleiner als der geometrische Querschnitt, der z. B. für die freie Weglänge langsamer Teilchen in Normalluft (10^{-5} cm) verantwortlich ist.

Die quantitative Messung mit Änderung von Beschleunigungsspannung U , Gasdichte ρ und Abstand d zwischen F und A (Abb. 13.27) ergibt ein Absorptionsgesetz wie beim Licht: Der Elektronenstrom, der bei A ankommt, ändert sich gemäß

$$I = I_0 e^{-\alpha d} = I_0 e^{-\beta \rho d} \quad (13.17)$$

Der **Massenabsorptionskoeffizient** β hat für alle Stoffe (auch feste) ungefähr den gleichen Wert, hängt aber sehr stark von der Elektronenenergie eU ab. Man kann $\alpha = \beta \rho$ durch den **Einfangquerschnitt** σ eines Absorberteilchens darstellen. Diese Teilchen haben die Anzahldichte $n = \rho/m$. Jedes präsentiert den schnellen Elektronen eine Scheibfläche σ , die Gesamtaufangfläche pro Volumeneinheit ist $n\sigma$, die mittlere freie Weglänge $l = 1/(n\sigma)$, das Absorptionsgesetz lautet damit $I = I_0 e^{-x/l}$. Der Vergleich liefert $\alpha = \beta \rho = n\sigma$, also

$$\beta = \frac{\sigma}{m} \quad (13.18)$$

In Luft hat der Einfangquerschnitt σ bis $U \approx 300$ V etwa den geometrischen Wert $3 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$. Von da bis 660 kV fällt er auf $3 \cdot 10^{-26} \text{ m}^2$, hat dann also nur noch den Radius $r = 10^{-13} \text{ m}$. Nach dem Coulomb-Gesetz ist das ganz verständlich (vgl. Aufgabe 8.3.1): Ein Elektron mit der Energie E kann sich einer Ladung Q maximal so weit nähern, bis $eQ/(4\pi\epsilon_0 r) \approx E$. Dieses r fungiert als Radius des Einfangquerschnitts σ und nimmt wie E^{-1} ab, σ wie E^{-2} . Die quantitative Übereinstimmung mit der Messung verlangt $Q \approx 10e$: Eine solche Ladung muss irgendwo

im Atom konzentriert und mit einer erheblichen Masse verbunden sein. Ein Elektron im Atom kann dem schnellen nämlich nur einige eV entziehen, sonst fliegt es aus dem Atom hinaus und wird – bei zentralem Stoß – selbst zum schnellen Elektron.

Streuversuche mit den noch viel energiereicheren radioaktiven α -Teilchen zeigen genauer, wie Ladung und Masse im Atom verteilt sind.

13.5.2 Das Experiment von Rutherford

Wie leer die Materie wirklich ist, zeigten *Rutherford, Geiger, Marsden* in den Jahren 1906 bis 1913 durch eines der folgenschwersten Experimente der ganzen Physik. Sie ließen ein eng ausgeblendetes, also paralleles Bündel von α -Teilchen aus einem radioaktiven Präparat auf eine sehr dünne Goldfolie (wenige μm) fallen. Weitaus die meisten α -Teilchen gehen fast unabgelenkt durch, nur wenige werden stärker abgelenkt. Man weist sie auf einem Zählgerät, z. B. einem **Szintillationsmikroskop** nach, das man im Kreis um die Folie schwenken kann (Abb. 13.28). Jedes α -Teilchen löst im Leuchtstoffschirm einen Lichtblitz aus; diese Blitze können visuell gezählt oder automatisch von einem Multiplier mit Zählung registriert werden. Ihre Häufigkeit nimmt mit dem Streuwinkel φ sehr stark ab (Abb. 13.29). Wenn man z. B. unter 15° Ablenkung 3 500 α -Teilchen zählt, findet man in der gleichen Zeit bei 150° nur noch knapp ein Teilchen (Abb. 13.30, ausgezogene Kurve; man beachte die logarithmische Auftragung des Bruchteils $dN/N = \text{Anzahl abgelenkter Teilchen}/\text{Anzahl einfallender Teilchen}$).

Die damals vernünftigste Vorstellung vom Atomaufbau, das **Thomson-Modell**, betrachtet die positive Ladung und die Masse als über das Atomvolumen (Durchmesser einige \AA) gleichmäßig verteilt und die praktisch punktförmigen Elektronen darin eingebettet. Da die positive Ladung im Festkörper demnach sehr gleichmäßig verteilt sein soll, kann sie das durchfliegende α -Teilchen kaum ablenken. Das Feld der Elektronen ist sehr viel inhomogener, aber dafür können diese das 7 350-mal schwerere α -Teilchen nach den Stoßgesetzen ((1.69), Abb. 1.31) nur sehr wenig ablenken: $\sin \varphi \leq m'/(m + m') \approx m'/m = 1/7\,350$, d. h. $\varphi \leq 28''$. Die Gesamtablenkung des α -Teilchens setzt sich also aus sehr vielen sehr kleinen Ablenkungen zusammen, deren Richtungen nicht im einzelnen vorhersagbar sind. Die Lage ist dieselbe wie bei der Diffusion, wo die Gesamtverschiebung eines Teilchens sich aus sehr vielen freien Weglängen mit zufälligen Richtungen zusammensetzt. Die Verteilung der Lichtblitze auf dem Schirm entspräche nach dem Thomson-Modell der Verteilung von Teilchen, die seit einer gewissen Zeit von einem eng begrenzten Bereich (dem Durchstoßbereich des Primärbündels) wegdiffundieren. Es käme eine **Gauß-Verteilung** $dN/N = Ae^{-B\varphi^2}$ heraus, die in logarithmischer Auftragung eine Parabel $\ln A - B\varphi^2$ ergibt, also sich gerade im falschen Sinne ausbaucht (Abb. 13.30).

Der Fehler liegt offenbar in der Annahme, dass die positive Ladung und die Masse des Atoms (zu der die Elektronen ja praktisch nichts beitragen) etwa gleichmäßig verteilt sind. Stärkere Konzentration dieser Ladung und Masse bringt stärkere Felder, die heftiger, wenn auch seltener ablenken

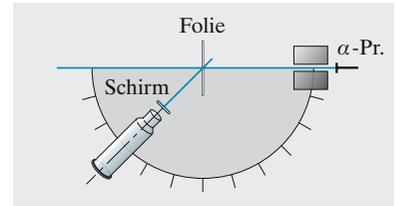


Abb. 13.28. Prinzip der Versuchsanordnung zur Messung der Einzelstreuung von α -Strahlung. Von der Strahlungsquelle α -Pr treffen die α -Teilchen auf die Streufolie; der durch ein Mikroskop betrachtete Szintillationsschirm kann zwischen 0° und fast 180° um die Streufolie herumgeschwenkt werden

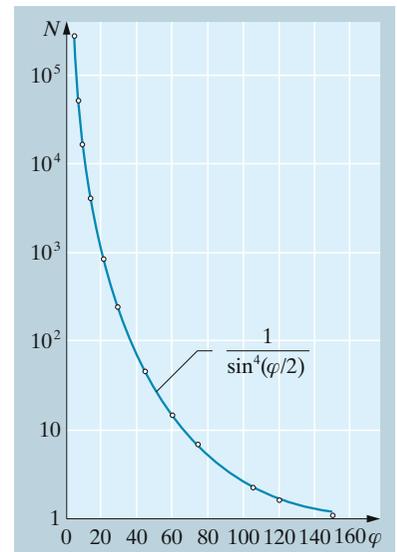


Abb. 13.29. Die Ergebnisse von Geiger und Marsden bestätigen nicht nur den Verlauf des rutherfordischen $1/\sin^4(\varphi/2)$ -Gesetzes. Sie erlauben auch eine Abschätzung des Kerndurchmessers aus dem größten gemessenen Streuwinkel: Aus der kinetischen Energie der Teilchen und dem Streuwinkel lässt sich der kleinste Abstand zwischen Kern und α -Streuteilchen bestimmen. Der größte Streuwinkel, der noch auf der Rutherford-Kurve liegt, ergibt dann direkt eine Obergrenze für den Kernradius

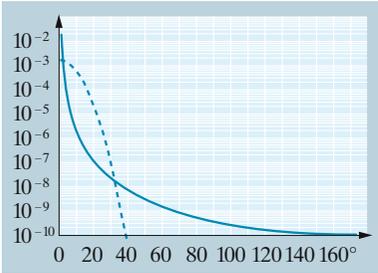


Abb. 13.30. Winkelabhängigkeit der Streuwahrscheinlichkeit von 6 MeV- α -Teilchen in einer Goldfolie von 1 μm Dicke. (—) Messkurve und theoretische Kurve nach dem Rutherford-Modell, (---) Gauß-Kurve nach dem Thomson-Modell. Man beachte die logarithmische Ordinate

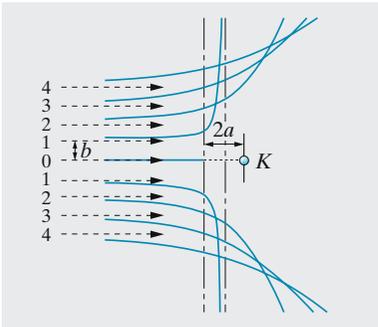


Abb. 13.31. Hyperbelbahnen von α -Teilchen im Kraftfeld des Atomkerns. Der außerhalb der Atome beobachtete Ablenkungswinkel ist der Winkel zwischen den Asymptoten der Hyperbel

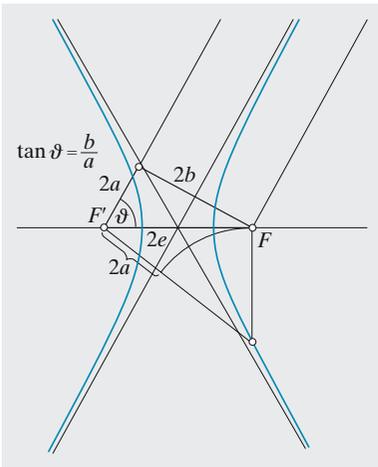


Abb. 13.32. Geometrie der Hyperbel

können. *Rutherford* nahm also 1911 einen praktisch punktförmigen Kern an, was die α -Streuungen vollständig erklärt (wenn es auch die Stabilität und das sonstige Verhalten des Atoms nicht richtig beschreibt). Im r^{-2} -Coulomb-Feld des streuenden Kerns werden die ebenfalls positiven α -Teilchen (${}^4_2\text{He}$ -Kerne) ähnlich wie Kometen im Feld der Sonne auf **Hyperbelbahnen** abgelenkt (Abb. 13.31), allerdings durch Abstoßung, nicht durch Anziehung. Große Ablenkungswinkel kommen nur im starken Feld sehr nahe am Kern vor. Diese Felder nehmen nur einen kleinen Teil des ganzen Atomvolumens ein, und entsprechend klein ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein α -Teilchen dorthin trifft.

Abbildung 13.33 zeigt die Bahn eines positiven Teilchens der Ladung $Z'e$ und der Energie E im Feld eines Kerns der Ladung Ze . Dieser steht im entfernteren Brennpunkt der Hyperbelbahn (die Sonne würde im näheren Brennpunkt der Kometenbahn stehen, da sie anzieht, während der Kern abstoßt). Wenn das α -Teilchen unabgelenkt, also längs der Asymptote weiterflöge, käme es am Kern im Abstand b , dem **Stoßparameter** vorbei. In Wirklichkeit fliegt es schließlich in Richtung der anderen Asymptote, also um den Winkel φ abgelenkt davon. Wie man aus Abb. 13.32 sieht, spielt b die Rolle der einen Hyperbel-Halbachse.

Die Bahnen von α -Teilchen mit der gleichen Energie W , aber verschiedenem Stoßparameter b , haben den Brennpunkt gemeinsam, in dem der streuende Kern liegt. Außerdem haben sie alle die gleiche Halbachse a , denn diese allein bestimmt die Energie des Teilchens (Abschn. 1.7.4, (1.97)). Wie groß a ist, sieht man am einfachsten aus der speziellen Bahn mit $b = 0$, die zentral auf den Kern zuführt, dann aber im Abstand $2a = 2e$ umkehrt und in sich zurückläuft. Am Umkehrpunkt ist die kinetische Energie Null, also

$$E = \frac{Z'Ze^2}{4\pi\epsilon_0 2a} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 a} \tag{13.19}$$

Wir suchen den Zusammenhang zwischen Streuwinkel $\varphi = \pi - 2\vartheta$ und Stoßparameter b . Nach Abb. 13.34 liegen die Brennpunkte aller Hyperbeln auf dem gleichen Lot zur Einfallrichtung im Abstand $2a$ vom streuenden Kern, die Mittelpunkte aller Hyperbeln auf dem Lot im Abstand a . Dies folgt aus Abb. 13.32 (man betrachte die Dreiecke aus den Stücken a, b, e). Damit liest man ab $\tan \vartheta = b/a$ und wegen $\cot \varphi/2 = \cot(\pi/2 - \vartheta) = \tan \vartheta$:

$$\cot \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a} = \frac{4\pi\epsilon_0 bE}{Ze^2} \tag{13.20}$$

Der Ablenkungswinkel φ ist umso größer, also $\cot \varphi/2$ umso kleiner, je kleiner b und E sind, d. h. je näher am Kern das α -Teilchen vorbeifliegt und je langsamer es ist.

Wir schießen jetzt eine Anzahl N von α -Teilchen auf eine Folie und fragen, wie viele davon unter den verschiedenen Winkeln abgelenkt werden. Genauer: Das Szintillationsmikroskop (Abb. 13.28) bilde mit seiner Achse einen Winkel φ gegen die Einfallrichtung der α -Teilchen. Von der Folie aus gesehen nehme der Leuchtschirm im Blickfeld des Mikroskops einen Raumwinkel $d\Omega$ ein. Wie viele Lichtblitze wird man zählen?

Die Folie habe eine Dicke Δx und enthalte n Kerne/ m^3 . Wir fragen zunächst, wie viele α -Teilchen in einen Hohlkegel abgelenkt werden, der außen den Öffnungswinkel φ , innen $\varphi - d\varphi$ hat (Abb. 13.36). Der Ablenkwinkel φ entspricht nach (13.20) einem gewissen Stoßparameter b , $\varphi - d\varphi$ einem um db größeren Stoßparameter; der Zusammenhang zwischen $d\varphi$ und db ergibt sich durch Differentiation von (13.20):

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \varphi/2} d\varphi = \frac{4\pi\epsilon_0 E}{Ze^2} db. \quad (13.21)$$

Die Teilchen, nach denen wir fragen, sind also die, die an irgendeinem Kern mit einem Stoßparameter zwischen b und $b + db$ vorbeifliegen, d. h. die in den in Abb. 13.35 gezeichneten Ring hineinzielen. Ein solcher Ring hat die Fläche $2\pi b db$. Im m^3 befinden sich n solche Ringe, also präsentiert eine Schicht des Querschnitts σ und der Dicke Δx einen Gesamtstoßquerschnitt $n\sigma \Delta x 2\pi b db$. Teilt man dies durch σ , so erhält man die Wahrscheinlichkeit $P(\varphi) d\varphi$ für eine Ablenkung in den fraglichen Hohlkegel:

$$P(\varphi) d\varphi = n \Delta x 2\pi b db. \quad (13.22)$$

Von den N Teilchen werden $dN' = P(\varphi) d\varphi N$ in den Hohlkegel gestreut. Da b der Messung nicht direkt zugänglich ist, drückt man es in (13.22) mittels (13.20) und (13.21) besser durch φ aus:

$$\begin{aligned} dN' &= N n \Delta x 2\pi \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \cot \frac{\varphi}{2} \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi/2)} \\ &= N n \Delta x \frac{Z^2 e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 E^2} \frac{\cos(\varphi/2)}{\sin^3(\varphi/2)} d\varphi. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Diese Teilchen werden in den Hohlkegel gestreut, dessen Raumwinkel $2\pi \sin \varphi d\varphi$ ist. In den Raumwinkel $d\Omega$ des Mikroskops gelangt nur ein Bruchteil $d\Omega/(2\pi \sin \varphi d\varphi)$ davon, also eine Anzahl

$$dN = dN' \frac{d\Omega}{2\pi \sin \varphi d\varphi} = N n \Delta x \frac{Z^2 e^4}{64\pi^2 \epsilon_0^2 E^2} \frac{d\Omega}{\sin^4(\varphi/2)} \quad (13.24)$$

(die letzte Umwandlung benutzt das Additionstheorem). Der Nenner $\sin^4(\varphi/2)$ bringt den außerordentlich starken Abfall der Streuwahrscheinlichkeit mit wachsendem Streuwinkel zum Ausdruck (Abb. 13.30). Das E^2 im Nenner besagt, dass der Strahl umso „steifer“ wird, je energiereicher er ist. In Analogie mit Abschn. 5.2.7 kann man (13.24) auch schreiben $dN = n \Delta x N d\sigma$, wobei

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^4}{64\pi^2 \epsilon_0^2 E^2} \sin^{-4} \frac{\varphi}{2} d\Omega \quad \text{(Rutherford-Streufornel)} \quad (13.25)$$

der **differentielle Wirkungsquerschnitt** für die Ablenkung in den Raumwinkel $d\Omega$ in Richtung φ ist.

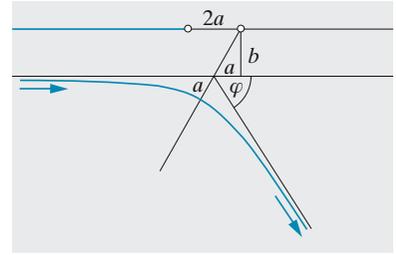


Abb. 13.33. Ablenkung im abstoßenden Coulomb-Feld

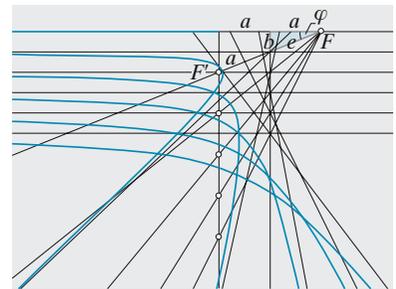


Abb. 13.34. Eine Schar von Hyperbelbahnen mit gleicher großer Halbachse a , also gleicher Gesamtenergie, aber verschiedenen Stoßparametern (kleinen Halbachsen) b und daher verschiedenen Exzentrizitäten $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ und Streuwinkeln φ . Die Bahnen ergeben sich mit einem Abstoßungszentrum in F (positive Ladung), ebenso gut aber auch mit einem Anziehungszentrum (negative Ladung) in F'

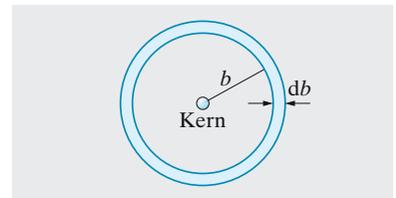


Abb. 13.35. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Ablenkungen der α -Teilchen im Kernfeld unter einem bestimmten Winkel. Die Flugrichtung der α -Teilchen steht senkrecht auf der Papierebene

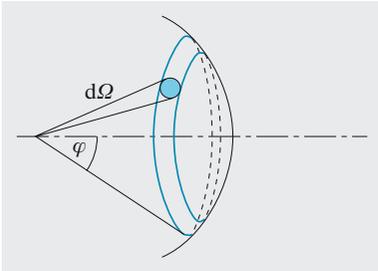


Abb. 13.36. Zur Raumwinkeldefinition in der rutherfordischen Streuformel

Verfeinerte Beobachtungen der **Einzelstreuung von α -Strahlen** durch *Geiger* und *Marsden* (Abb. 13.29) ergaben für mäßige Streuwinkel eine vollständige Bestätigung für (13.25) und überzeugten daher von der Richtigkeit des zugrunde gelegten Atombildes. Erst für sehr große Ablenkwinkel und dementsprechend kleine Werte von b ($\approx 10^{-14}$ m) gehorcht die Streuung nicht mehr (13.25). Das α -Teilchen dringt dann offenbar in Bereiche zu nahe dem Kern ein, wo das Coulomb-Gesetz, das der Ableitung der Rutherford-Streuformel zugrunde liegt, nicht mehr gültig ist. Es ist sinnvoll, hier die Grenze des Atomkerns anzusetzen. Sein Radius ist demnach kleiner als 10^{-14} m, d. h. mehr als 10 000-mal kleiner als der Atomradius. Der Kern ist im Vergleich zum Atom noch viel kleiner als die Sonne im Vergleich zum Sonnensystem.

Derartige Versuche an Folien aus verschiedenen Metallen führten zu der Erkenntnis, dass für die **Kernradien** (r) ziemlich genau gilt:

$$r = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m } \sqrt[3]{A}, \quad (13.26)$$

wobei A die Massenzahl bedeutet. Der Faktor $1,2 \cdot 10^{-15}$ m ist als **Radius eines Nukleons** (Abschn. 18.1.1) aufzufassen. Die Dichte der Kernsubstanz, d. h. der Quotient aus Masse (proportional A) und dem Volumen (proportional r^3) ist daher für alle Kerne nahezu die gleiche. Zahlenmäßig ergibt sich für die Kerndichte der ungeheuer große Wert von etwa $2 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$.

13.6 Grundzüge der Quantenmechanik

13.6.1 Einleitung: Mathematisches Handwerkszeug

Es gibt für den Lernenden mehrere mögliche Zugänge zur Quantentheorie: den historischen, der die Näherungen und Irrtümer nachzeichnet, unter denen man sich an die ausgereifte Theorie herangetastet hat, den empirischen, der durch eine Reihe von experimenta crucis zeigt, wie sich Elektronen und Atome verhalten und wie dementsprechend die klassischen Vorstellungen abzuändern sind, den Hamiltonschen, der von dem hochentwickelten Formalismus der klassischen Mechanik ausgeht und diesen sinngemäß modifiziert, den optischen, der am Analogon der Welle-Teilchen-Dualität des Lichts die gleiche Dualität für die Materie entwickelt, und den axiomatischen. Von allen diesen Zugängen führt der axiomatische weitaus am schnellsten auf ein Niveau, mit dem man etwas anfangen, d. h. wenigstens einige Grundprobleme quantitativ behandeln kann. Dem steht nur das Hindernis einer etwas abstrakten, ungewohnten Sprache entgegen. Vor allem muss man sich dazu einige mathematische Begriffe aneignen. Wir werden diese Begriffe nur kurz plausibel machen. Sicher werden Sie sich dadurch nicht verführen lassen zu glauben, Sie wüssten jetzt alles über diese Dinge.

Schrödingers und Heisenbergs Beschreibungen der Mikrowelt klangen anfangs radikal verschieden, bis Dirac, Born, Jordan ihre mathematische Äquivalenz nachwies. Sie stützten sich dabei auf die Mathematik Hilberts, der auch in Göttingen arbeitete, damals der Hochburg der theoretischen Physik, bis 1936, als Hilbert auf die Frage des NS-Kultusministers

Rust, ob die „Vertreibung der Judenclique“ der deutschen Wissenschaft wirklich so schade, antwortete: „Der schadet nichts mehr, die gibt’s gar nicht mehr.“

13.6.2 Vektoren und Funktionen

Eine der fruchtbarsten Erkenntnisse von *David Hilbert* war, dass Funktionen sich formal genau so verhalten wie Vektoren. Man kann dies logisch verbindlich nachweisen, indem man zeigt, dass beide – Funktionen und Vektoren – den gleichen Axiomen genügen, aus denen sich dann alle Eigenschaften des **Vektorraumes** ergeben. Die Funktionen bilden also auch einen Raum, den **Hilbert-Raum**.

Wir beschränken uns hier auf die folgende Gegenüberstellung, beginnend mit bekannten Tatsachen und aufsteigend zu einigen neuen Begriffsbildungen:

Man kann mit einiger Vorsicht sagen: Eine Funktion verhält sich wie ein Vektor mit unendlich vielen Komponenten. Daher haben z. B. zwei Funktionen sehr viel mehr Möglichkeiten, nichtparallel zu sein, als zwei Vektoren, speziell hat eine Funktion sehr viel mehr Richtungen, in denen sie orthogonal zu einer anderen sein kann.

13.6.3 Matrizen und Operatoren

Eine (quadratische) **Matrix** stellt man gewöhnlich durch ein quadratisches Zahlenschema dar, z. B. für $n = 3$:

$$M = m_{ik} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} .$$

Ein n -dimensionaler **Vektor** \mathbf{a} ist dadurch definiert, dass man zu jedem ganzzahligen Wert des *Index* i ($i = 1, \dots, n$) eine Zahl angibt, die die Komponente a_i des Vektors darstellen soll.

Man *addiert* zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} zu einem neuen Vektor \mathbf{c} , indem man für jeden Index i die Komponenten a_i und b_i addiert und die Summe zur Komponente c_i erklärt.

Man *multipliziert* zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} skalar, indem man für jeden Index die beiden Komponenten a_i und b_i multipliziert: Die Summe aller dieser Produkte ist das **Skalarprodukt**:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i .$$

Eine Funktion f ist dadurch definiert, daß man zu jedem Wert des *Arguments* x (meist $-\infty < x < \infty$) eine Zahl angibt, die den Funktionswert $f(x)$ darstellen soll.

Man *addiert* zwei Funktionen f und g zu einer neuen Funktion h , indem man für jedes Argument x die Funktionswerte $f(x)$ und $g(x)$ addiert und die Summe zum Wert $h(x)$ erklärt.

Man *multipliziert* zwei Funktionen f und g skalar, indem man für jedes Argument x die Funktionswerte multipliziert; das Integral aller dieser Produkte ist das Skalarprodukt:

$$f \cdot g = \int f(x) \cdot g(x) dx , \quad (13.27)$$

Der Integrationsbereich hängt von der physikalischen Anwendung ab.

Man kann dann die Länge oder **Norm eines Vektors** bzw. einer Funktion als die Wurzel aus dem Skalarprodukt mit sich selbst definieren. Wenn die Funktion komplex ist, muss man sie, wie im Komplexen üblich, mit ihrem Konjugiert-Komplexen f^* multiplizieren:

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}, \quad |f| = \sqrt{f^* \cdot f}. \quad (13.28)$$

Der **Winkel** φ zwischen zwei Vektoren bzw. Funktionen ist ebenfalls mittels des Skalarproduktes zu erklären:

$$\cos \varphi = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}, \quad \cos \varphi = \frac{f^* \cdot g}{|f| |g|}. \quad (13.29)$$

Zwei Vektoren bzw. Funktionen sind **orthogonal**, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet:

$$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0, \quad f \perp g \Leftrightarrow f^* \cdot g = 0. \quad (13.30)$$

Zwei Vektoren bzw. Funktionen sind *parallel*, wenn der (die) eine sich aus dem (der) anderen durch Multiplikation mit einem Skalar ergibt:

$$a \parallel b \Leftrightarrow a = cb, \quad f \parallel g \Leftrightarrow f = cg. \quad (13.31)$$

Die wichtigste Matrizenoperation ist die Multiplikation mit einem Vektor a . Dabei kommt ein anderer Vektor heraus: $b = Ma = m_{ik}a_k$ ist zu verstehen als der Vektor b mit den Komponenten $b_i = \sum_{k=1}^n m_{ik}a_k$; die i -te Komponente ist das Skalarprodukt der i -ten Zeile der Matrix mit dem Vektor a .

Man kann auch sagen: Die Matrix M macht aus jedem Vektor a einen anderen Vektor $b = Ma$ eine **lineare Vektorfunktion**; d. h. wie eine Funktion f jeder Zahl x eine andere Zahl $f(x)$ zuordnet, so ordnet die Matrix jedem Vektor a einen Vektor $b = Ma$ zu. *Linear* bedeutet in diesem Zusammenhang, dass allgemein gilt

$$M(a + b) = Ma + Mb.$$

Ein **Operator** ist im Bereich der Funktionen dasselbe, was eine Matrix im Bereich der Vektoren ist. Ein Operator A macht aus jeder Funktion f eine andere Funktion $g = Af$, oder genauer: Ein (linearer) Operator ist eine lineare Funktion höherer Ordnung, denn er ordnet jeder Funktion f eine andere Funktion $g = Af$ zu, wobei

$$A(f_1 + f_2) = Af_1 + Af_2. \quad (13.32)$$

13.6.4 Eigenfunktionen und Eigenwerte

Ein Operator hat auf eine Funktion, ebenso wie eine Matrix auf einen Vektor, im Allgemeinen zwei Wirkungen (Tabelle 13.1): Er streckt sie (ändert ihre Länge) und er dreht sie (ändert ihre Richtung). Für die Drehung gibt es bei unendlich vielen Dimensionen allerdings sehr viele Möglichkeiten. Besonders wichtig sind Fälle, wo diese Drehung ausbleibt, d. h. wo die Funktion Af parallel zur Funktion f ist:

$$Af = af. \quad (13.33)$$

Tabelle 13.1. Beispiele für die Wirkung von Operatoren

Addition einer Konstanten:

$$A f = f + a$$

Multiplikation mit einer Konstanten:

$$A f = a f$$

Multiplikation mit x :

$$A f = x f$$

Differentiation nach x :

$$A f = \frac{d}{dx} f$$

Integraloperator mit „Kern“ $K(x, x')$:

$$A f = \int K(x, x') f(x') dx' = g(x)$$

Funktionen, die von einem gegebenen Operator nicht gedreht werden, heißen seine **Eigenfunktionen**. Die zugehörigen Werte a heißen **Eigenwerte** des Operators.

Wenn zum gleichen Eigenwert mehrere verschiedene Eigenfunktionen gehören, nennt man den Eigenwert und die Eigenfunktion **entartet**.

Eigenwertprobleme haben auch außerhalb der Quantenmechanik zahllose Anwendungen. Die vielleicht bekannteste davon ist die **Hauptachsentransformation** der Kegelschnitte: $r \cdot Ar$ ist die Gleichung einer Kegelschnittfläche (Fläche zweiter Ordnung); die Eigenwerte von A sind die reziproken Längen der Hauptachsen, die Eigenvektoren geben die Richtungen dieser Hauptachsen an. Genau die gleichen Überlegungen treten bei jeder Diskussion komplizierterer Schwingungsprobleme auf, ebenso in der chemischen und elektronischen Kinetik, in Stabilitätsuntersuchungen für Systeme aller Art (Kap. 20), in der Kybernetik und Regeltechnik, bis hin zu den stochastischen Prozessen und Markow-Ketten.

Die Quantenmechanik braucht i. Allg. nur lineare **hermitesche** oder **selbstadjungierte Operatoren**, das sind solche, für die mit zwei beliebigen Funktionen f und g immer gilt

$$A^* f^* \cdot g = f^* \cdot Ag. \quad (13.34)$$

Hierbei können Funktionen und Operator komplex sein. Als Beispiel zeigen wir, dass zwar nicht der Operator $\partial/\partial x$, aber $i\partial/\partial x$ hermitesch ist. Um diesen Nachweis allgemein zu führen, müssten wir zwei beliebige Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ verwenden. Da sich aber alle „vernünftigen“ Funktionen nach *Fourier* in eine Summe oder ein Integral über Funktionen der Art $\varphi = e^{ikx}$ entwickeln lassen, brauchen wir nur diese zu betrachten (der Operator ist ja linear). Das konjugiert Komplexe von e^{ikx} ist einfach e^{-ikx} . Für den Operator $A = \partial/\partial x$ wird dann die linke Seite von (13.34)

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} e^{-ikx} e^{ikx} dx = -ik \int_{x_1}^{x_2} dx = -ik(x_2 - x_1),$$

die rechte

$$\int_{x_1}^{x_2} e^{-ikx} \frac{\partial}{\partial x} e^{ikx} dx = ik(x_2 - x_1).$$

Beide Seiten unterscheiden sich durch das Vorzeichen. Dies wird in Ordnung gebracht, wenn man den Operator $A = i\partial/\partial x$ benutzt, der bei der komplexen Konjugation ebenfalls sein Vorzeichen ändert.

Eigenfunktionen und Eigenwerte hermitescher Operatoren bieten besondere Bequemlichkeiten. Zum Beispiel sind zwei Eigenfunktionen eines hermiteschen Operators, wenn sie zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal zueinander. Ein hermitescher Operator, selbst wenn er auf komplexe Funktionen angewandt wird und selbst komplex ist, hat immer reelle Eigenwerte. Wir beweisen die erste Aussage: f_1 und f_2 seien Eigenfunktionen von A , also $Af_1 = a_1 f_1$, $Af_2 = a_2 f_2$, wobei $a_1 \neq a_2$. Dann ist $A^* f_1^* \cdot f_2 = a_1 f_1^* \cdot f_2$. Weil A hermitesch ist, kann man aber im gleichen Ausdruck A auch auf f_2 hinüberwälzen: $f_1^* \cdot Af_2 = a_2 f_1^* \cdot f_2$. Beide Ergebnisse können angesichts $a_1 \neq a_2$ nur gleich sein, wenn $f_1^* \cdot f_2 = 0$ ist, d. h. f_1 und f_2 orthogonal sind.

× Beispiel...

Beweisen Sie, dass ein **hermitescher Operator** nur reelle Eigenwerte hat.

Der Operator A sei hermitesch, also $f^* \cdot Ag = A^* f^* \cdot g$. Als f und g nehmen wir eine und dieselbe Eigenfunktion von A mit dem Eigenwert a . Dann ist $Af = af$ und $A^* f^* = a^* f^*$. Linksmultiplikation mit f^* bzw. Rechtsmultiplikation mit f liefert $f^* \cdot Af = af^* \cdot f$, $A^* f^* \cdot f = a^* f^* \cdot f$. Weil A hermitesch, sind beide Ausdrücke gleich, was nur sein kann, wenn $a^* = a$, also a reell.

Die Eigenfunktionen der üblichsten hermiteschen Operatoren haben außer ihrer Orthogonalität noch die wichtige Eigenschaft der **Vollständigkeit**: Man kann jede beliebige Funktion nach ihnen entwickeln, ebenso wie man nach den ebenfalls orthogonalen Funktionen $\sin nx$ und $\cos nx$ Fourier-entwickeln kann. Auf dieser Verallgemeinerung der Fourier-Entwicklung beruhen die meisten Näherungsverfahren der Quantenmechanik und anderer Gebiete der Physik.

13.6.5 Zustandsgrößen der Quantenmechanik

Leider werden die physikalischen Größen in der Quantenmechanik nicht mehr durch einfache Variablen wie Ort und Impuls beschrieben wie in Newtons Mechanik, sondern erfordern stattdessen ziemlich abstrakte Zustandsfunktionen und Operatoren. Diese Größen, die die Axiome der Quantenmechanik bereitstellen, stehen der Erfahrung noch ferner als die Felder der Elektrodynamik, die Maxwell ebenso axiomatisch eingeführt hat. Man muss sie zunächst einfach lernen und ihren Sinn durch Anwendung begreifen. Es ist aber lohnend, sich mit der Interpretation dieser Zustandsgrößen auseinander zu setzen und die Analogien zu den Größen der klassischen Physik zu suchen.

Operatoren und Zustandsgrößen der Quantenmechanik tragen vor allem dem wesentlich neuen, experimentell gesicherten Tatbestand Rechnung, dass nicht alle physikalischen Größen unter allen Umständen einen

Tabelle 13.2. Die Axiome der Quantenmechanik

1. Der Zustand eines physikalischen Systems wird durch eine **Zustandsfunktion** ψ dargestellt.
2. Jede physikalische Größe entspricht einem linearen hermiteschen Operator.
3. Ein Zustand eines Systems, in dem eine physikalische Größe a einen scharfen Wert hat, muss durch eine Eigenfunktion des entsprechenden Operators beschrieben sein; der Wert dieser Größe a ist der dazugehörige Eigenwert.
4. Wenn die Zustandsfunktion ψ eines Systems sich aus mehreren anderen Zuständen f_k additiv superponieren lässt, d. h. wenn $\psi = \sum c_k f_k$, dann kann man so tun, als seien diese Zustände f_k alle gleichzeitig vorhanden. Der Anteil der Teilzustände f_k zu messbaren Größen bemisst sich nicht nach ihrem Beitrag zu ψ , sondern zu $\psi^* \cdot \psi$.

scharfen Wert haben. Selbst wenn ein physikalisches System vollständig bestimmt ist, liefert eine Messung an ihm nicht immer den gleichen Wert. Das System sei z. B. ein ^{226}Ra -Kern. Die Messung besteht einfach darin, dass wir nach 1 s kontrollieren, ob dieser Kern noch da ist oder sich umgewandelt hat. Beides kann vorkommen. Trotzdem ist das System durch die Aussage, dass es sich um einen ^{226}Ra -Kern handelt, völlig bestimmt. Man kann dem Kern auf keine Weise ansehen, ob er gleich zerfallen wird oder erst sehr viel später. Diesen Tatbestand kann man verschieden deuten: Entweder sind die Größen, die für eine solche Voraussage nötig wären (Orte und Impulse der Nukleonen im Kern usw.) nicht angemessen zur Beschreibung des wirklichen Wesens des Systems, sondern nur Atavismen aus der klassischen Physik; oder sie sind angemessene Beschreibungen, aber ihre jeweiligen präzisen Werte sind entweder prinzipiell nicht erkennbar oder gar nicht vorhanden. Welche dieser Deutungen man wählt oder ob man sogar die Quantenmechanik nur als ein vorläufiges Begriffssystem ansieht, das einmal einer Renaissance des Determinismus weichen wird, ist mehr oder weniger Ansichtssache.

Wir ziehen eine wichtige Folgerung und betrachten dazu eine Größe a , der der Operator A zugeordnet ist. Das System sei *nicht* in einem Eigenzustand von A . Dann hat a keinen scharfen Wert, sondern bei seiner Messung kann jeder der Eigenwerte von A herauskommen. Messen heißt nämlich Bedingungen schaffen, unter denen sich das System für einen der möglichen scharfen Werte von a entscheiden muss. Wir sprechen hier von einer *guten* Messung, die demnach nur darin besteht, aus dem Gemisch ψ von Eigenzuständen von A einen bestimmten herauszufischen oder zu machen. Es gibt keine Messung, die das System weniger beeinflusst: wenn sie es mehr beeinflusst, ist es eine schlechte Messung.

Wir bauen nun die Zustandsfunktion ψ aus normierten Eigenfunktionen f_k des Operators A auf: $\psi = \sum c_k f_k$. Da alle vernünftigen Operatoren vollständige Eigenfunktionensysteme haben, ist ein solcher Aufbau immer möglich. Als Eigenfunktionen des hermiteschen Operators A sind die f_k orthogonal, also $\psi^* \cdot \psi = \sum_{i,k} c_k^* c_i f_k^* \cdot f_i = \sum_k c_k^* c_k$. Bei der Messung von a wird sich nach Axiom 4 das System mit der Wahrscheinlichkeit $c_k^* c_k$ für den Zustand f_k , d. h. den Wert a_k entscheiden. Unter N Messungen findet man also $c_1^* c_1 N$ -mal den Wert a_1 , $c_2^* c_2 N$ -mal den Wert a_2 usw. Der Mittelwert aller dieser Ergebnisse ist

$$\bar{a} = \sum c_k^* c_k a_k \quad (13.35)$$

Offenbar kommt genau dasselbe heraus, wenn man schreibt

$$\bar{a} = \psi^* \cdot A \psi \quad (13.36)$$

denn $A\psi = \sum A c_k f_k = \sum c_k a_k f_k$, und $\psi^* \cdot A\psi = \sum_{i,k} c_i^* f_i^* \cdot c_k a_k f_k = \sum_k c_k^* c_k a_k$, weil die f_k orthonormal sind.

Man muss jetzt nur noch wissen, wie die Operatoren für die einzelnen physikalischen Größen aussehen. Dies lässt sich nicht im eigentlichen Sinne ableiten, sondern nur aus Analogieschlüssen ermitteln: Der richtige

Operator ist der, für den sich im klassischen Grenzfall das bekannte klassische Verhalten ergibt. Diese Analogien werden am klarsten, wenn man die klassische Mechanik in der Form von *Hamilton* und *Lagrange* darstellt, die in diesem Buch wegen ihrer Abstraktheit nicht behandelt worden ist. Man findet so:

Der **Operator der Lagekoordinate** x eines Teilchens entspricht der Multiplikation mit der Variablen x :

$$x\psi = x\psi . \quad (13.37)$$

Der **Operator der Impulskomponente** p_x entspricht der partiellen Ableitung nach x :

$$p_x\psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi . \quad (13.38)$$

Wie sehen die Zustände aus, in denen das Teilchen einen scharfen Wert der Impulskomponente p_x hat? Ihre Zustandsfunktion ψ muss Eigenfunktion des Impulsoperators sein:

$$p_x\psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi = p_x\psi .$$

Nur die e-Funktion ist proportional ihrer eigenen Ableitung; daher wird ein Zustand mit scharfem Impuls beschrieben durch

$$\psi = \psi_0 e^{i p_x x / \hbar} . \quad (13.39)$$

Der Realteil hiervon ist eine **harmonische Welle**:

$$\psi_0 \cos \frac{p_x}{\hbar} x = \psi_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (13.39')$$

mit der Wellenlänge $\lambda = h/p_x$, wie sie *de Broglie* gefordert hat.

Nur harmonische ψ -Wellen haben einen bestimmten Impuls.

Nützlich ist die Abkürzung $k = 2\pi/\lambda$, womit die Impulseigenfunktion lautet

$$\psi = \psi_0 e^{ikx} . \quad (13.39'')$$

Etwas schwieriger ist die Frage, in welchen Zuständen das Teilchen sich an einem scharf bestimmten *Ort* befindet, z. B. an der Stelle $x = a$. Ihr ψ muss Eigenfunktion des Ortsoperators sein:

$$x\psi = x\psi = a\psi , \quad (13.40)$$

d. h. die Multiplikation mit der Variablen x muss auf eine Multiplikation mit der Konstanten a hinauslaufen. Einiges Probieren zeigt, dass hierzu die Funktion $\psi(x)$ überall Null sein muss, außer bei $x = a$; sowie sie nämlich sonst irgendwo verschieden von Null ist, wird die Beziehung (13.40) gestört. Diese Funktion, die überall Null ist außer bei $x = a$, wo sie

unendlich ist, heißt **δ -Funktion**. Sie ist überhaupt nur im Zusammenhang mit einem Integral definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

Man kann sie sich aus einem Berg, z. B. einer Gauß-Funktion, hervorgegangen denken, die immer schmaler, aber gleichzeitig immer höher wird (Abb. 13.37).

Ist $\psi(x)$ keine δ -Funktion, so hat x keinen scharfen Wert; das Teilchen kann sich also überall befinden. Nach Axiom 4 (Tabelle 13.2) wird sein wahrscheinlichster Ort gegeben durch

$$\bar{x} = \psi^* \cdot x \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi(x)|^2 dx. \tag{13.41}$$

Dieser Ausdruck sieht genauso aus wie der für den Mittelwert oder **Erwartungswert** einer Größe x , von der nur eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$ bekannt ist:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x) dx,$$

vorausgesetzt, dass $P(x)$ richtig normiert ist, d. h. $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1$. Man kann also $|\psi(x)|^2 dx$ deuten als **Aufenthaltswahrscheinlichkeit** des Teilchens im Intervall $(x, x + dx)$.

13.6.6 Die Unbestimmtheitsrelation

Es ist klar, dass eine Eigenfunktion des Impulses (harmonische Welle) nicht zugleich Eigenfunktion des Ortes (δ -Funktion) sein kann. Es gibt also keinen Zustand, in dem ein Teilchen zugleich einen scharfen Impuls p_x und einen scharfen Ort x hat. Man kann sogar zeigen, dass in einem Zustand mit scharfem Impuls der Ort völlig unbestimmt ist und umgekehrt; die nach Axiom 4 gebildeten Erwartungswerte geben nämlich in diesem Fall mathematisch keinen Sinn.

Damit ein Erwartungswert für den Ort überhaupt existiert, muss die ψ -Funktion in einem räumlichen Bereich (oder mehreren) konzentriert sein. Damit ein Erwartungswert für den Impuls existiert, muss sie wenigstens einen Anklang von Wellencharakter zeigen. Es gibt solche Kompromisslösungen; sie sehen aus wie die Interferenzfiguren, die man z. B. hinter einem engen Spalt sieht (Abb. 13.38). Ein solches **Wellenpaket** lässt sich nach der Methode von *Fourier* aus einer großen Anzahl ebener Wellen der Form (13.39), aber mit etwas verschiedenen p -Werten, also verschiedenen Wellenlängen, zusammenbauen. Diese Impulse müssen einen gewissen Bereich Δp möglichst dicht erfüllen, und man hat dann nur noch dafür zu sorgen, dass alle diese Wellen am gewünschten Ort $x = a$ ein Maximum haben. An allen anderen Orten stimmen dann die Phasen nicht mehr überein, sofern man unendlich viele verschiedene p -Werte verwendet (bei endlich vielen kommt es zu periodischen Wiederholungen,

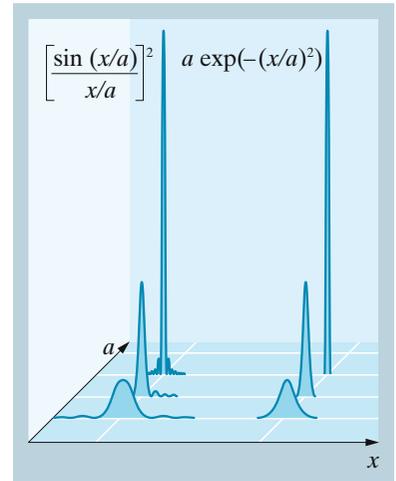


Abb. 13.37. Repräsentationen der δ -Funktion: Links $(\sin(x/a)/(x/a))^2$, rechts $a \exp(-(x/a)^2)$. Von Kurve zu Kurve ist der a -Wert um den Faktor 3 erhöht worden. Die Fläche unter den Kurven ist in allen Fällen identisch

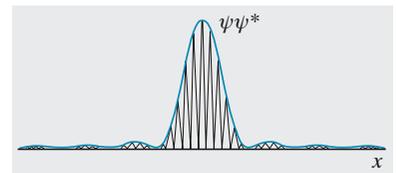


Abb. 13.38. Überlagerung von Wellen aus einem engen Wellenlängenbereich erzeugt eine Wellenfunktion mit einer gewissen Ortsunschärfe

Abschn. 4.1.1d). Zeichnerisch sieht man leicht ein, dass das Hauptmaximum der Interferenzfigur bei einer solchen Überlagerung gerade die Breite Δx hat, die mit der Breite des benutzten Wellenlängenbereiches so zusammenhängt:

$$\Delta x \approx \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}. \quad (13.42)$$

Nach der de Broglie-Beziehung bedeutet das

$$\Delta x \approx \frac{h}{\Delta p_x}. \quad (13.42')$$

Das ist die **heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation**.

Wir führen die Rechnung für den Fall durch, dass der gewünschte Ort des Teilchens $x = 0$, der mittlere Impuls p_x , der zur Überlagerung benutzte Impulsbereich $(p_x - \Delta p/2, p_x + \Delta p/2)$ ist. Alle diese Teilwellen sollen mit gleicher Amplitude vertreten sein, mit anderen Worten: Wir wissen nicht, welcher Impulswert aus diesem Bereich zutrifft, aber darin liegt er, und alle Werte daraus sind gleich wahrscheinlich. Dann ergibt sich die Zustandsfunktion durch Addition, also Integration der Teilwellen:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\sim \int_{p_x - \Delta p/2}^{p_x + \Delta p/2} e^{ixp/\hbar} dp = \frac{\hbar}{ix} e^{ixp_x/\hbar} (e^{ix \Delta p/(2\hbar)} - e^{-ix \Delta p/(2\hbar)}) \\ &= \frac{2\hbar}{x} \sin \frac{x \Delta p}{2\hbar} e^{ixp_x/\hbar}. \end{aligned}$$

Das ist eine ebene Welle, deren Amplitude durch den Faktor $\sin z/z$ moduliert ist ($z = x \Delta p/(2\hbar)$). Diese Funktion hat genau die Form von Abb. 13.38. Ihr Hauptmaximum liegt zwischen $z = -\frac{\pi}{2}$ und $z = +\frac{\pi}{2}$, hat also die Breite

$$\Delta z = \pi, \quad \text{d. h.} \quad \Delta x = \frac{h}{\Delta p},$$

entsprechend der Unschärferelation.

In der Operatorsprache drückt sich die Unbestimmtheitsrelation dadurch aus, dass Orts- und Impulsoperator nicht vertauschbar sind, d. h. dass es zu verschiedenen Resultaten führt, wenn man auf eine Funktion erst den Orts- und dann den Impulsoperator anwendet oder umgekehrt:

$$\begin{aligned} p_x x f &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} (x f) = \frac{\hbar}{i} \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right), \\ x p_x f &= x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

Die Differenz beider Ausdrücke

$$(p_x x - x p_x) f = \frac{\hbar}{i} f$$

zeigt, dass *jede* Funktion Eigenfunktion des Operators $p_x x - x p_x$ mit dem Eigenwert \hbar/i ist. Unabhängig von der Wahl von f kann man also die reine

Operatorgleichung

$$\boxed{p_x x - x p_x = \frac{\hbar}{i}} \quad (13.43)$$

schreiben. Das ist eine der **Vertauschungsrelationen**. Es gibt natürlich drei davon, für jede Koordinate eine, und noch eine vierte zwischen Energie und Zeit. Sie bilden die abstrakte Darstellung der Unbestimmtheitsrelation, die gewöhnlich so formuliert wird:

Es ist unmöglich, Ort und Impuls eines Teilchens oder Zeitpunkt und Energie eines Vorganges, allgemein ein Paar **konjugierter Größen** gleichzeitig genau vorherzusagen. Bei mehrfacher Messung bleiben immer Unschärfen Δx und Δp_x bzw. Δt und ΔE , deren Produkt prinzipiell nicht kleiner gemacht werden kann als \hbar .

13.6.7 Der Energieoperator (Hamilton-Operator)

Wie der Operator aussieht, der einer bestimmten physikalischen Größe entspricht, kann man nicht streng ableiten. Zumindest für einige Grundgrößen muss man diesen Zusammenhang erraten. Als Beispiel für diesen Rate- oder besser Modellbildungsprozess überlegen wir, was wohl der Operator „leite partiell nach der Zeit ab“, kurz $A = \partial/\partial t$, bedeuten mag. Anwendung dieses Operators auf eine Funktion von Ort und Zeit $f(\mathbf{r}, t)$, d. h. auf ein zeitabhängiges Skalarfeld, ergibt das, was man üblicherweise $\dot{f}(\mathbf{r}, t)$ nennt:

$$A f = \frac{\partial}{\partial t} f = \dot{f}.$$

Wenn eine Funktion Eigenfunktion dieses Operators sein soll, d. h. wenn $A f = a f$ gelten soll, muss die Funktion die Differentialgleichung

$$\dot{f} = a f$$

lösen. Ihrer Zeitabhängigkeit nach muss sie also exponentiell sein:

$$f(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) e^{at},$$

wobei die Ortsabhängigkeit $\varphi(\mathbf{r})$ noch beliebig ist. Von einer beliebigen räumlichen Anfangsverteilung an wird eine solche Funktion ständig überall exponentiell anwachsen (positiver Eigenwert a) oder abfallen (negatives a). Positives a führt schließlich zu überall unendlich großen Werten, die solche Funktionen i. Allg. physikalisch unbrauchbar machen. Negatives a führt schließlich zu einem f , das überall verschwindet. Dies gilt für reelle Eigenwerte a . Im Prinzip sind aber auch komplexe denkbar, denn wir wissen noch nicht, ob unser Operator hermitesch ist, d. h. ob

$$\int f^* \frac{\partial}{\partial t} g dt = \int \frac{\partial}{\partial t} f^* g dt.$$

Es ist nicht einzusehen, warum das für beliebige f, g der Fall sein sollte. Anders, wenn wir den Operator durch den Faktor i oder allgemeiner ib

ergänzen, wobei b eine reelle Konstante ist: $\mathbf{B} = ib \partial/\partial t$. Dann geht die Bedingung $f^* \cdot \mathbf{B}g = \mathbf{B}^* f^* \cdot g$ oder $f^* \cdot \mathbf{B}g - \mathbf{B}^* f^* \cdot g = 0$ über in

$$\begin{aligned} \int f^* ib \dot{g} dt - \int -ib \dot{f}^* g dt &= ib \int (f^* \dot{g} + \dot{f}^* g) dt \\ &= ib \frac{\partial}{\partial t} \int f^* g dt = 0. \end{aligned}$$

Das ist immer richtig, denn $\int f^* g dt$ hat als bestimmtes Integral einen ganz bestimmten, nicht mehr zeitabhängigen Wert.

Der Operator $\mathbf{B} = ib \partial/\partial t$ ist also hermitesch. Seine Eigenfunktionen sind die Funktionen $f(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$, d. h. alle Skalarfelder beliebiger räumlicher Verteilung, die überall mit der gleichen Frequenz ω harmonisch schwingen:

$$\mathbf{B}f = ib \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = \omega b \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = \omega b f = b' f.$$

Der Eigenwert b' hängt mit der Kreisfrequenz dieser Schwingung zusammen wie $b' = \omega b$. Die Schwingung macht sich wohl in der Zustandsfunktion f bemerkbar, nicht aber in Größen, die direkte physikalische Bedeutung haben, z. B. in der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $f^* \cdot f$. Hier hebt sich der e-Faktor einfach weg, denn der Exponent wechselt sein Zeichen, wenn man zum konjugiert Komplexen übergeht:

$$f^* \cdot f = \varphi^2(\mathbf{r}).$$

Ein Eigenzustand unseres Operators $\mathbf{B} = ib \partial/\partial t$ ändert sich also zeitlich nicht, er ist stationär.

Wir betrachten jetzt einen Zustand ψ , der kein Eigenzustand von \mathbf{B} ist. \mathbf{B} als „vernünftiger“ Operator hat ein vollständiges Eigenfunktionsystem (der Beweis ist praktisch identisch mit dem Satz von *Fourier*, Abschn. 4.1.1d), d. h. jede vernünftige Funktion, z. B. auch f , lässt sich nach Eigenfunktionen von \mathbf{B} entwickeln, d. h. aus ihnen linearkombinieren. \mathbf{B} hat, wenn wir dem System keine weiteren Bedingungen auferlegen, sämtliche reelle Zahlen $b = c\omega$ als Eigenwerte. Für konkrete Systeme wird dieses Eigenwertspektrum meist erheblich eingengt. In unserem Fall geht also die Summe über den Index i für die i -te Eigenfunktion über in ein Integral über die stetige Indexfunktion $a(\omega)$:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int a(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Offenbar ist dies nichts anderes als die Fourier-Entwicklung der Funktion ψ . $a(\mathbf{r}, \omega)$ ist ihre Fourier-Transformierte oder Amplitudenfunktion oder kurz ihr Spektrum.

Wir betrachten speziell einen Zustand, der sich aus zwei Eigenfunktionen mit den Eigenwerten $c\omega_1$ und $c\omega_2$ aufbauen lässt:

$$\psi = a_1(\mathbf{r}) e^{-i\omega_1 t} + a_2(\mathbf{r}) e^{-i\omega_2 t}.$$

Hat auch ein solcher Zustand die Eigenschaft, dass seine räumliche Verteilung $\psi^* \psi$ nicht von der Zeit abhängt, d. h. ist er auch stationär?

$$\begin{aligned}\psi^* \psi &= (a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t})(a_1 e^{-i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_2 t}) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t.\end{aligned}$$

Offenbar nicht: Es bleibt auch in $\psi^* \psi$ noch eine Zeitabhängigkeit, die Ortsverteilung schwingt harmonisch mit der Kreisfrequenz $\omega_1 - \omega_2$.

Wir haben ein mathematisches Modell für ein System gebaut, das zwei Arten von Zuständen annehmen kann: **Stationäre Zustände**, in denen sich nichts ändert, die Eigenfunktionen von B sind, in denen also die zugehörige Größe b einen scharfen Wert besitzt, die aber durch eine Kreisfrequenz ω_i charakterisiert sind, auch wenn diese nicht als Schwingung in Erscheinung tritt; und nichtstationäre Zustände, speziell aus zwei Eigenfunktionen zusammengesetzt, in denen das System mit der Frequenz $\omega_1 - \omega_2$ schwingt. Genau ein solches System ist aber doch ein Atom. Was wir eben gefunden haben, ist eine direkte Darstellung der **Bohr-Postulate** und des **Ritz-Kombinationsprinzips**. Es gibt Atomzustände, in denen sich (ohne äußere Einwirkung) nichts, speziell nicht die Energie ändert. Es gibt andere Zustände, in denen das Atom mindestens eine Zeit lang Strahlung emittiert, in denen also offenbar die Elektronenverteilung mit der entsprechenden Frequenz schwingt. Die möglichen Frequenzen sind Differenzen einer viel kleineren Anzahl von Ritz-Termen: $\omega_{ik} = \omega_i - \omega_k$.

Die Frequenzen dieser Terme sind, wie z. B. der Franck-Hertz-Versuch direkt zeigt, den Energien der stationären Zustände zugeordnet wie

$$E_i = \hbar \omega_i .$$

Wir können also $B = \hbar i \partial / \partial t$ den Kreisfrequenzoperator nennen. Der **Energieoperator** ergibt sich dann zwangsläufig als

$$H = \hbar i \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{Hamilton-Operator}) .$$

Seine Eigenzustände haben scharfe und konstante Energiewerte und eine zeitlich konstante Ortsverteilung. Alle Überlagerungszustände schwingen mit einer Frequenz $\omega = \omega_i - \omega_k$ oder einem Gemisch solcher Frequenzen, sie strahlen also Energie ab und müssen daher über kurz oder lang in den energetisch tieferen der beiden stationären Zustände übergehen.

Man muss sich klar machen, dass dieses Verfahren des Modellbaus gar nicht so neu ist. Jedes Modell, auch eines aus Kugeln und Federn rechtfertigt sich lediglich durch die Isomorphie mit der Wirklichkeit, die i. Allg. nicht aus Kugeln und Federn besteht, d. h. durch die Übereinstimmung struktureller Beziehungen zwischen bestimmten Elementen des Modells und den entsprechenden Elementen der Wirklichkeit. Auf diese strukturelle Isomorphie kommt es an. Die Entsprechung zwischen den Elementen wird auch im anschaulichsten Modell zunächst willkürlich festgesetzt: „Die blaue Kugel ist der Kern, die roten sind die Elektronen.“ Ungewohnt am

quantenmechanischen Modell ist nur, dass es von vornherein mit rein mathematischen Elementen arbeitet. Sein durchgreifender Erfolg zeigt, dass mathematische Elemente doch viel inhaltsreicher und anpassungsfähiger sind als Kugeln und Federn.

13.6.8 Die Schrödinger-Gleichung

Wir haben in Abschn. 13.6.5 immer nur von einer Impulskomponente gesprochen, während es doch drei gibt. Die ihnen entsprechenden Operatoren $(\hbar/i) \cdot \partial/\partial x$, $(\hbar/i) \cdot \partial/\partial y$, $(\hbar/i) \cdot \partial/\partial z$ lassen sich zu einem Vektor zusammenfassen:

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\hbar}{i} \text{grad} . \quad (13.44)$$

Der Operator für den vollständigen Impulsvektor eines Teilchens ist also der Gradient, multipliziert mit \hbar/i . Den Operator für die kinetische Energie kann man analog zum klassischen Ausdruck $E_{\text{kin}} = p^2/(2m)$ aus dem Impulsoperator aufbauen:

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta . \quad (13.45)$$

Der **Operator der kinetischen Energie** ist bis auf den Faktor $-\hbar^2/(2m)$ der **Laplace-Operator**.

Der Ortsoperator wirkt durch einfache Multiplikation mit der Koordinate oder allgemeiner mit dem Ortsvektor \mathbf{r} . Jede physikalische Größe, die nur eine Funktion der Koordinaten ist, hat ebenfalls einen Operator, dessen Wirkung in einer einfachen Multiplikation mit dieser Funktion besteht. Das ist z. B. der Fall für die **potentielle Energie** $U(\mathbf{r})$ eines konservativen Kraftfeldes. Der Energiesatz, der von der Summe kinetischer und potentieller Energie handelt, übersetzt sich in die Operatorgleichung

$$\mathbf{H} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) . \quad (13.46)$$

Andererseits können wir nach Abschn. 13.6.7 den Energieoperator auch schreiben

$$\mathbf{H} = \hbar i \frac{\partial}{\partial t} . \quad (13.47)$$

Eine Zustandsfunktion, die einem scharfen Energiewert entspricht, führt also an jedem Raumpunkt eine harmonische Schwingung aus, sie ist eine stehende Welle. Um diese Welle vollständig zu kennzeichnen, müsste man noch die räumliche Verteilung ihrer Amplitude angeben:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) e^{i\omega t} . \quad (13.48)$$

Hierüber kann der Energieoperator in der Form (13.47) nichts aussagen, wohl aber in der anderen, aus dem Energiesatz gewonnenen Form (13.46):

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) = \mathbf{H} = \hbar i \frac{\partial}{\partial t} . \quad (13.49)$$

Wenn man eine solche Operatorgleichung hinschreibt, meint man damit, dass die beiderseits des Gleichheitszeichens stehenden Operatoren, angewandt auf jede überhaupt mögliche Funktion, beide das gleiche Ergebnis liefern, d. h. dass jede Zustandsfunktion $\psi(\mathbf{r}, t)$ Lösung der Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t) = \hbar i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (13.50)$$

sein muss. Dies ist die **zeitabhängige Schrödinger-Gleichung**.

Speziell für Zustände mit scharfer Energie, d. h. **stationäre Zustände**, wissen wir aus (13.48) bereits, dass die rechte Seite dieser Gleichung einfach $\mathbf{H}\psi(\mathbf{r}, t) = E\varphi(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$ ergibt. Der zeitlich schwingende Anteil $e^{i\omega t}$ fällt dann beiderseits heraus.

Der Amplitudenanteil $\varphi(\mathbf{r})$ eines stationären Zustandes ist also Lösung der **zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung**:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}) . \quad (13.51)$$

Der Operator links heißt auch **Hamilton-Operator**. Stationäre Zustände sind Eigenfunktionen des Hamilton-Operators.

In dieser Gleichung tritt die Zeit nicht mehr auf. Folglich ändern sich die ψ -Funktionen stationärer Zustände, abgesehen von dem obligaten Faktor $e^{i\omega t}$, nicht mit der Zeit. Das ist der eigentliche Grund, weshalb man sie stationär nennt. *Jeder* stationäre Zustand – und *nur* ein Zustand, der sich mit der Zeit nicht ändert – hat eine scharfe Energie.

Streng genommen werden also die angeregten Zustände der Atome, die ja durch Abgabe von elektromagnetischer Strahlung zerfallen, durch die stationäre Schrödingergleichung gar nicht richtig wiedergegeben. Und in der Tat ist ihre Energie eben nicht scharf definiert sondern hat eine Breite, die durch die Unbestimmtheitsrelation $\Delta E \cdot \tau = h$ mit der Lebensdauer verknüpft ist. Diese zeitliche Änderung ist aber sehr langsam im Vergleich zu den Schwingungsperioden $2\pi/\omega_{ik}$, die beim Übergang von einem Quantenzustand i in einen anderen j auftreten, sodass in diesem Sinne langsam zerfallende Quantenzustände – und das sind die meisten – in sehr guter Näherung von der stationären Schrödingergleichung beschrieben werden.

13.7 Teilchen in Potentialtöpfen

Wir untersuchen das Verhalten eines Teilchens in verschiedenen einfachen Kraftfeldern (Abb. 13.39). Das Wasserstoffatom, das einfachste aller Atome, wird ausführlich in Abschn. 14.2 behandelt.

13.7.1 Stationäre Zustände

Wenn gar keine Kraft herrscht, also die potentielle Energie $U = U_0$ konstant ist, reduziert sich die Schrödinger-Gleichung auf

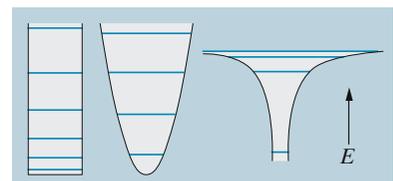


Abb. 13.39. Eigenwerte der Energie im Kasten-, Parabel- und Coulomb-Potential

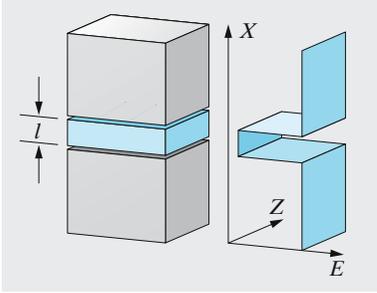


Abb. 13.40. Mit der Molekularstrahl-Epitaxie können atomar glatte dünne Schichten von Halbleitermaterialien hergestellt werden. Durch Variation der Zusammensetzung, z. B. im $(\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x})\text{As}$ -Kristall, kann die Bandstruktur der Elektronen wie ein kastenförmiges Potential geformt werden. In zwei Richtungen bewegen sich die Elektronen dann wie freie Elektronen, in einer Richtung sind sie im Kastential eingesperrt

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi = (E - U_0)\varphi. \quad (13.52)$$

Die Lösung lautet im eindimensionalen Fall

$$\varphi = \varphi_0 e^{\pm(i/\hbar)\cdot\sqrt{2m(E-U_0)}x} = \varphi_0 e^{\pm ikx}. \quad (13.53)$$

Das ist, wie der Vergleich mit (13.39) zeigt, genau ein Zustand mit dem scharfen Impuls $p = \sqrt{2m(E-U_0)}$. Dies ist sehr befriedigend, denn einerseits darf ein kräftefreies Teilchen keine Impulsänderung zeigen, und andererseits entspricht dieser Ausdruck für p genau dem klassischen für den Impuls eines Teilchens mit der kinetischen Energie $E - U_0$. Die φ -Funktion (13.53) stellt eine ebene Welle mit ortsunabhängiger Amplitude dar. Über genügend lange Zeiten gemittelt, kann also das Teilchen überall mit gleicher Wahrscheinlichkeit sein. Von seinem Ort zu sprechen, hat keinen Sinn, denn der Erwartungswert für den Ort existiert mathematisch gar nicht.

Wir sperren jetzt ein Teilchen mit Gewalt in einen endlichen Raumbereich ein, indem wir an dessen Rändern unendlich starke rücktreibende Kräfte aufbauen (Abb. 13.40). Mit anderen Worten: An den Rändern dieses Bereiches soll das Potential eine steile Stufe nach oben machen. Um ganz sicher zu gehen, dass das Teilchen nie dorthin kann, machen wir das Potential außerhalb des erlaubten Bereiches sogar unendlich hoch. Das drückt aus, dass die Gegenkräfte nicht nur direkt am Rand, sondern in einem endlichen Abstand außerhalb davon wirken. Im Innern dieses Topfes soll zunächst, der Einfachheit halber, das Potential konstant sein, speziell, was ja nur eine Frage der Normierung ist, $U = 0$. Im Topfinneren gilt also wieder, wie im vorigen Beispiel,

$$\varphi = \varphi_0 e^{\pm(i/\hbar)\cdot\sqrt{2mE}x}. \quad (13.54)$$

Beide Vorzeichen des Exponenten liefern unabhängige Lösungen. Die allgemeinste Lösung heißt daher

$$\varphi = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (13.55)$$

oder reell ausgedrückt

$$\varphi = A' \cos kx + B' \sin kx \quad (A' = A + B, \quad B' = A - B). \quad (13.56)$$

Diese Lösung gilt aber nur innerhalb des Topfes. Was geschieht außerhalb? Muss φ dort Null sein, weil das Teilchen nicht außerhalb des Topfes sein kann? Solchen von klassischen Analogien abgelesenen Urteilen gegenüber soll uns ja aber die Quantenmechanik gerade misstrauisch machen. Ihre Ergebnisse, wie z. B. der Tunneleffekt (Abschn. 13.7.2) sind manchmal ebenso paradox. Der einzig konsequente Weg, etwas über das Verhalten von φ außerhalb zu erfahren, besteht in einem Grenzübergang von endlich hohen Topfwänden zu unendlich hohen. Dabei ergibt sich dann allerdings, dass außerhalb des Topfes $\varphi = 0$ sein muss.

Ein ähnlicher Grenzübergang zeigt auch, dass φ eine *stetige* Ortsfunktion sein muss (mit leicht zu verstehenden Ausnahmen in einigen schematisierten Fällen). Denn was wäre die Folge, wenn φ irgendwo, sagen wir bei $x = 0$, einen Sprung machte? Die Ableitung $\partial\varphi/\partial x$ wäre dann

bei $x = 0$ unendlich (eine δ -Funktion), $\partial^2\varphi/\partial x^2$ hätte sogar zwei unendlich benachbarte Pole, einen $+\infty$, einen $-\infty$. Die Schrödinger-Gleichung wäre dann nur zu erfüllen, wenn $U(x)$ einen entsprechend pathologischen Verlauf mit zwei unendlich benachbarten Polen hätte. In allen normalen Fällen, selbst wenn das Potential *einmal* nach ∞ springt wie am Rande unseres Topfes, ist φ stetig.

Wenn aber einerseits außerhalb des Topfes $\varphi = 0$, andererseits φ stetig ist, muss auch innen unmittelbar an der Wand $\varphi = 0$ sein. Es ist genau wie bei einer Saite, die an den Enden nicht schwingen kann, weil sie dort eingespannt ist (Abb. 13.41). Genau wie bei der Saite diese Randbedingungen nur eine diskrete Folge möglicher Schwingungen zulassen, nämlich nur solche, bei denen eine ganze Zahl von Halbwellen in die Saitenlänge passen, gibt es auch für das Teilchen im Potentialtopf nur eine diskrete Folge möglicher Zustände. Die Bedingung für diese Eigenzustände ist identisch mit der für die Eigenschwingungen der Saite, wenn man $2\pi/k = \lambda$ als Wellenlänge auffasst:

$$a = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{h}{2p} = \frac{nh}{2\sqrt{2mE}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13.57)$$

Der Zusammenhang zwischen E und λ bzw. p liefert die erlaubten Energiewerte

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} \quad (13.58)$$

Alle anderen Energien kommen wegen der Randbedingungen nicht als stationäre Energiewerte in Frage. Der Zustand mit der niedrigsten Energie

$$E_1 = \frac{h^2}{8ma^2} \quad (13.59)$$

wird durch *einen* Bogen einer Sinuswelle dargestellt. Wichtig ist, dass dieser Grundzustand energetisch nicht etwa direkt am Topfboden sitzt, sondern um den Betrag $h^2/(8ma^2)$, die **Nullpunktenergie**, höher. Dies bleibt auch für Potentialtöpfe komplizierterer Form annähernd richtig (Abb. 13.39); für a tritt dann eine charakteristische Abmessung des Topfes ein. Allgemein treibt eine Abschnürung des Topfes auf die halbe Abmessung (Halbierung von a) die Nullpunktenergie um den Faktor 4 hinauf, und entsprechend folgen alle anderen Energieeigenwerte. Dies ist eine Folgerung von großem Gewicht. Es ergibt sich daraus z. B., dass der Atomkern keine Elektronen (und überhaupt keine Teilchen ähnlich kleiner Masse) enthalten kann. Ihre Nullpunktenergie wäre so hoch, dass sie praktisch ungestört jedes denkbare Potential überschweben würden, das sie in den Kern zu fesseln sucht. Auch die **chemische Bindung** beruht letzten Endes auf dem Verhalten der Nullpunktenergie: Die Vereinigung der Potentialtöpfe zweier Atome zu einem größeren senkt die Energiezustände der Elektronen, und diese Senkung, die nur teilweise durch elektrostatische Abstoßungspotentiale kompensiert wird, tritt als **Bindungsenergie** in Erscheinung (Abschn. 16.4.6).

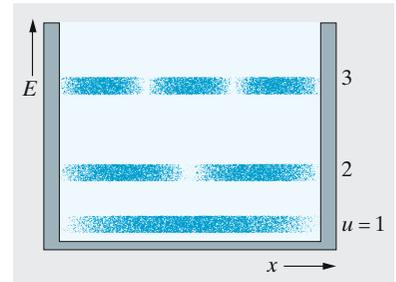


Abb. 13.41. Eigenwerte und Eigenfunktionen eines Teilchens in einem Kastenpotential

Der Potentialtopf eines Atoms hat eine Abmessung von etwa 1 \AA . Allein daraus ergibt sich nach (13.59) die Größenordnung der Elektronenenergien zu etwa 10 eV .

13.7.2 Der Tunneffekt

Ein quantenmechanisches Teilchen verhält sich eigenartig, wenn man es in einen Potentialtopf sperrt:

- Es kann nur eine diskrete Auswahl von Energiewerten besitzen (ein klassisches Teilchen könnte jeden Energiewert oberhalb des Topfbodens haben). Diese Werte liegen umso weiter getrennt, je enger der Topf ist.
- Speziell der tiefste dieser Energiewerte liegt nicht in Höhe des Topfbodens, sondern um einen gewissen Betrag, die Nullpunktsenergie, darüber. Sie ist von der Größenordnung $E_1 = h^2/(8ma^2)$. Jetzt werden wir außerdem feststellen:
- Das Teilchen lässt sich auf die Dauer überhaupt nicht einsperren (außer durch unendlich hohe und unendlich dicke Mauern, die es in Wirklichkeit nicht gibt).

Natürlich denken wir dabei an einen Topf, dessen Wände energetisch höher sind als die Energie, speziell die Nullpunktsenergie des Teilchens; andernfalls ließe sich ja auch ein klassisches Teilchen nicht einsperren. Wir betrachten also folgendes Potential: Ein Topf oder besser Graben der Breite a wird links von einer unendlich hohen Wand, rechts von einer Mauer der Höhe U und der Dicke d begrenzt. Hinter dieser Mauer liegt das Potential z. B. wieder auf dem Niveau des Topfbodens. Unter solchen Umständen könnte ein klassisches Teilchen mit einer Energie $E < U$ offenbar nicht entkommen.

Die quantenmechanische Behandlung muss von der Schrödinger-Gleichung ausgehen, und zwar streng genommen von der schwierigeren zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung, weil ja eine zeitabhängige Lösung untersucht werden soll, bei der die Wellenfunktion im Topf allmählich abnimmt, weil sie nach rechts davonläuft. Das Wesentliche kommt aber auch bei der stationären Betrachtung heraus, wenn man sie richtig interpretiert.

Die stationäre Lösung von (13.51) setzt sich aus den drei Teillösungen für die drei Raumbereiche zusammen (Abb. 13.42). Sie sehen genau aus wie (13.53), nämlich

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{I}} &= \alpha e^{ikx} + \alpha' e^{-ikx}, & \varphi_{\text{II}} &= \beta e^{lx} + \gamma e^{-lx}, & \varphi_{\text{III}} &= \delta e^{ikx}, \\ k &= \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}, & l &= \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}. \end{aligned} \quad (13.60)$$

Da im zweiten Bereich (innerhalb der Schwelle) $E - U$ negativ ist, wird k imaginär, also ist die Lösung dort eine an- oder abklingende e -Funktion. Wir fragen, ob $\varphi_{\text{III}} = 0$ sein kann, obwohl $\varphi_{\text{I}} \neq 0$ ist. Das würde einem wirklich eingesperren Teilchen entsprechen. Aus Stetigkeitsgründen ist dies unmöglich: Das kleinste φ_{III} , das man erreichen kann, entspricht dem Fall, dass im Bereich II nur die abklingende e -Funktion vorhanden ist:

$$\varphi_{\text{II}} = \gamma e^{-lx}.$$

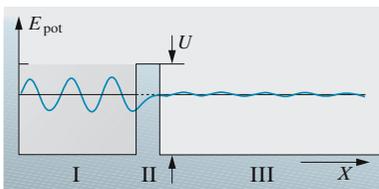


Abb. 13.42. Tunneffekt. Wellenfunktion eines Teilchens in den drei Bereichen: (I) Im Potentialkasten, (II) innerhalb der Wand, (III) im Außenraum

Die Anschlußbedingungen verlangen dann ein Verhältnis der Amplituden in I und III

$$\frac{\varphi_{\text{III}}}{\varphi_{\text{I}}} = e^{-ld}$$

oder, in Aufenthaltswahrscheinlichkeiten ausgedrückt

$$D = \frac{\varphi_{\text{III}}^2}{\varphi_{\text{I}}^2} = e^{-2ld} = e^{-(2d/\hbar) \cdot \sqrt{2m(U-E)}} \quad (13.61)$$

Dies ist gleichzeitig die Durchtrittswahrscheinlichkeit des Teilchens. Genauer gesagt (und etwas unberechtigterweise in die klassische Sprache übersetzt): Jedes Mal, wenn das Teilchen gegen die Schwelle anrennt, hat es die Wahrscheinlichkeit D durchzukommen; mit der Wahrscheinlichkeit $1 - D$ wird es reflektiert.

Wie oft rennt das Teilchen gegen den Wall an? Am anschaulichsten ist wieder das halbklassische Bild: Die kinetische Energie im tiefsten Zustand in I ist $E_{\text{kin}} = \hbar^2/(8ma^2)$, also die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2E_{\text{kin}}/m} = \hbar/(2ma)$. Der Graben der Breite a wird also in der Zeit $\tau = 2ma^2/\hbar$ durchquert. Das Reziproke davon gibt an, wie oft in der Sekunde das Teilchen anrennt:

$$\nu_0 = \frac{\hbar}{2ma^2} \quad (13.62)$$

(was übrigens ungefähr dasselbe ist wie die Frequenz $\nu = E/\hbar$, die dem Eigenzustand nach (13.48) zugeordnet ist).

Wenn N Teilchen in Potentialtöpfen der beschriebenen Art sitzen, entkommt davon innerhalb des nächsten Zeitintervalls dt eine Anzahl, die gegeben ist durch

$$dN = -\nu_0 D N dt = -\frac{\hbar}{2ma^2} e^{-(2d/\hbar) \cdot \sqrt{2m(U-E)}} N dt \quad (13.63)$$

Ein atomarer Potentialtopf hat typische Abmessungen von einem oder einigen Å und typische Wallhöhen von einigen eV. Für Elektronen ($m = 0,9 \cdot 10^{-27}$ g) wird für $a = d = 1$ Å und $U - E = 1$ eV der Exponent in (13.63) gleich 1, der Faktor ν_0 etwa 10^{16} s^{-1} ; bei wenig dickeren und höheren Wällen fällt besonders das e-Glied sehr schnell. Protonen und schwerere Teilchen haben sehr viel kleinere ν_0 und erst recht kleinere D . Für sie sind erst sehr viel dünnere Wände durchlässig, die dann auch etwas höher sein dürfen (durch das Coulomb-Gesetz sind Potential und Abstand gekoppelt, aber der Abstand geht stärker in D ein als die Höhe).

Mittels des Tunneleffekts kann man im nuklearen Bereich den **α -Zerfall** (Abb. 13.43) und seine Umkehrung, das relativ leichte Eindringen von geladenen Teilchen in Kerne verstehen, ebenso das Zustandekommen der **Kernfusion** (Abschn. 18.2.3 und 18.1.5); im atomaren und molekularen Bereich erhält man so das Herausreißen von Elektronen aus Molekülen und auch aus makroskopischen Körpern durch elektrische Felder (**Feldemission**, Abschn. 8.1.3, speziell Feldemissions-

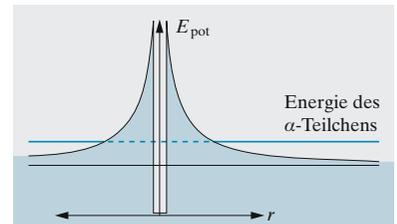


Abb. 13.43. Durchtunnelung des Coulomb-Potentials eines Kerns von innen (α -Zerfall) oder von außen (thermische Kernreaktion)

und Raster-Tunnel-Mikroskopie) und wichtige Effekte in der elektrischen Leitfähigkeit und Lumineszenz von Festkörpern (**Tunnel diode**, **Tunnelhaftleitung**). In allen Fällen würde der Effekt ohne Tunneln gar nicht oder erst bei sehr viel höheren Energien bzw. Feldern eintreten.

Es zeigt sich übrigens, dass ein Teilchen mit $E > U$, das klassisch die Schwelle völlig ungehindert überflüge, quantenmechanisch eine gewisse Wahrscheinlichkeit hat, an ihr reflektiert zu werden. Das Teilchen hat einen viel größeren „Tiefgang“, als man denkt.

Wenn das Hindernis nicht durch einen kastenförmigen Wall, sondern durch ein beliebiges Potential repräsentiert ist, gibt es einen einfachen Trick zur Lösung der Schrödinger-Gleichung: Man ersetzt im Exponenten von (13.60) kx durch $\int_0^d k(x) dx$, wobei wie üblich $k(x) = \hbar^{-1} \sqrt{2m(U-E)}$ ist:

$$D = e^{-(2/\hbar) \cdot \int_0^d \sqrt{2m(U-E)} dx} \quad (13.64)$$

Die Integration erstreckt sich über die Länge des Tunnels, also von da, wo die Höhenlinie E im Berg verschwindet, bis da, wo sie wieder zutage tritt. Ganz allgemein ist

$$D = e^{-(\alpha/\hbar) \cdot \sqrt{2m(U_{\max}-E)} d} \quad (13.65)$$

mit einem Faktor α in der Nähe von 1; bei der Rechteckschwelle ist $\alpha = 2$, bei der Dreieckschwelle $\alpha = \frac{4}{3}$, bei einer Coulomb-Schwelle (Abb. 13.44) $\alpha < \frac{4}{3}$.

13.7.3 Harmonisch gebundene Teilchen

Das lineare Kraftgesetz $F = -m\omega^2 x$ (1.37), das hookesche Gesetz, spielt schon in der klassischen Physik eine herausragende Rolle, denn es ist die Grundform aller Schwingungen und Wellen, denen ein ganzes Kapitel (Kap. 4) gewidmet ist. Der klassische harmonische Oszillator bewegt sich im zugehörigen Potential $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ (Abb. 13.44 zeigt ein Beispiel für makroskopische und mikroskopische Teilchen). In der Quantenphysik spielt der harmonische Oszillator eine mindestens so große, wenn nicht noch bedeutendere Rolle: Wir hatten ja gerade festgestellt, dass Wellen- und damit Schwingungsphänomene auch mikroskopische Teilcheneigenschaften sind und damit den Unterschied zur klassischen Physik markieren.

Die stationäre Schrödingergleichung eines harmonisch gebundenen Teilchens mit Masse m lautet

$$E\varphi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \varphi.$$

Man kann die Mathematik etwas übersichtlicher gestalten, wenn man die dimensionslose Koordinate $\xi = x/x_0 = x/\sqrt{\hbar/m\omega}$ verwendet und dann mit $C = 2E/\hbar\omega$ erhält

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \varphi + (C - \xi^2) \varphi = 0.$$

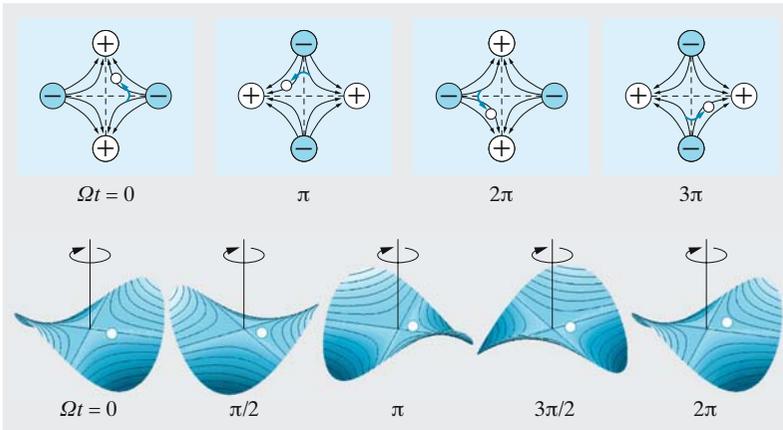


Abb. 13.44. Zweidimensionale Modelle einer Radiofrequenz- oder Paulfalle. Die mittlere Kraft entspricht einem harmonischen Potentialtopf mit $u(\mathbf{r}) = ax^2 + by^2 + cz^2$. Oben: Die Elektroden des Vierpols werden periodisch umgepolt. Bei richtiger Wahl der Frequenz kann für geladene Teilchen stabile Bindung an das Zentrum der Anordnung erreicht werden. Unten: Ein rotierender mechanischer Sattel übt auf eine Kugel eine mittlere Rückstellkraft in Richtung auf das Rotationszentrum aus

Mit dem Ansatz $\varphi(\xi) = c \cdot H(\xi)e^{-\xi^2/2}$ kommt man nach einer kleinen Rechnung auf die hermitesche Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{d\xi^2} H - 2\xi \frac{d}{d\xi} H + (C - 1)H = 0.$$

Diese Gleichung besitzt Lösungen nur für $C_n - 1 = 2n$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$, und die Eigenfunktionen heißen Hermite-Polynome,

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}.$$

Die Energiewerte lassen sich aus $C_n = 2(n + 1/2)$ berechnen,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega.$$

Die Normierungskonstante a_n für die Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators $\varphi_n(\xi) = a_n H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}$ (Abb. 13.45) wird aus den den Orthonormalitätsrelationen gewonnen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(\xi)e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi)H_m(\xi)e^{-\xi^2} d\xi = 0 \quad \text{für } m \neq n.$$

Das Ergebnis lautet $c_n = (\pi^{1/2} 2^n n! x_0)^{-1/2}$.

Tabelle 13.3. Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators

Quantenzahl n	Energie E_n	Hermite-Polynom $H(\xi)$	a_n
0	$\hbar\omega/2$	1	$(\pi^{1/2}x_0)^{-1/2}$
1	$3\hbar\omega/2$	2ξ	$(2\pi^{1/2}x_0)^{-1/2}$
2	$5\hbar\omega/2$	$4\xi^2 - 2$	$(8\pi^{1/2}x_0)^{-1/2}$
3	$7\hbar\omega/2$	$8\xi^3 - 12\xi$	$(48\pi^{1/2}x_0)^{-1/2}$
4	$9\hbar\omega/2$	$16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$	$(384\pi^{1/2}x_0)^{-1/2}$

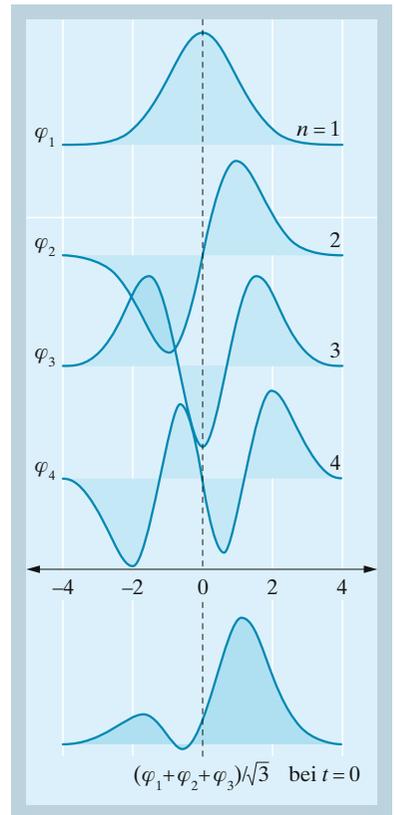


Abb. 13.45. Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators für die Quantenzahlen $n = 1-4$ als Funktion der normierten Koordinate $\xi = x/x_0$. In der untersten Reihe ist die gleichmäßige Überlagerung der ersten drei Wellenfunktionen dargestellt

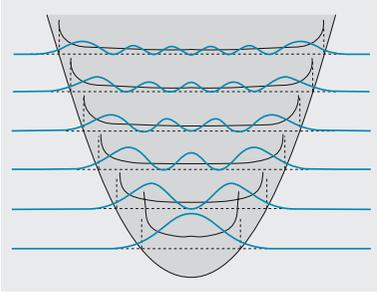


Abb. 13.46. Klassische und quantenmechanische Aufenthaltswahrscheinlichkeiten eines **harmonischen Oszillators** für die sechs tiefsten Energiezustände (klassisch wären auch alle Zwischenzustände möglich; die quantenmechanischen ψ -Funktionen würden aber offenbar nicht am Rand gegen Null gehen). Das quantenmechanische Teilchen kann die klassisch zugelassene Amplitude A_i etwas überschreiten, d. h. in das Gebiet negativer Energie hineintunneln. In den tieferen Zuständen sind quantenmechanische und klassische Verteilung völlig verschieden, in den höheren werden sie entsprechend dem Korrespondenzprinzip ähnlicher

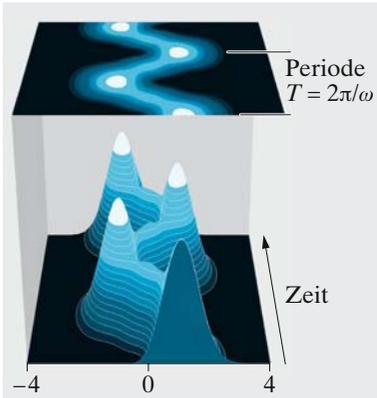


Abb. 13.47. Die zeitliche Dynamik bei der Überlagerung von Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators zeigt die periodische Ortsabhängigkeit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Hier ist das Betragquadrat der Wellenfunktion $|\varphi_1(\xi, t) + \varphi_2(\xi, t) + \varphi_3(\xi, t)|^2/3$ dargestellt, die auch in Abb. 13.45 schon gezeigt wird

Während ein klassischer Oszillator, jedes Pendel, periodisch im harmonischen Potential hin und her schwingt, zeigen die (stationären!) Zustände des Oszillators zunächst keinerlei räumliche Dynamik, es gilt nämlich $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_n^*(x) x \varphi_n(x) = 0$ für alle stationären Wellenfunktionen. Natürlich kann man auch für einen klassischen Oszillator eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit definieren, die dann mit dem Betragsquadrat der Wellenfunktion verglichen werden kann wie in Abb. 13.46. An den Rändern, an den klassischen Umkehrpunkten, treten dabei die höchstem Werte auf. Allerdings reicht der Quantenoszillator bis in das klassisch verbotene Gebiet hinein.

Wenn wir aber Überlagerungen von Wellenfunktionen konstruieren – sie erzeugen wegen der Linearität der Schrödingergleichung weitere gültige Lösungen – dann finden wir die Oszillationsbewegung auch in der Wellenfunktion wieder. Wir betrachten das einfachste Beispiel und überlagern nur zwei verschiedene, benachbarte stationäre Zustände,

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_n(x) e^{-i(n+1/2)\omega t} + \varphi_{n+1}(x) \varphi_n(x) e^{-i(n+3/2)\omega t})$$

Wenn wir das Betragsquadrat $|\psi(x, t)|^2$ dieser Wellenfunktion bilden, dann gilt

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2} (|\varphi_n(x)|^2 + |\varphi_{n+1}(x)|^2 + 2 \operatorname{Re}\{\varphi_n^*(x) \varphi_{n+1}(x) e^{-i\omega t}\})$$

und die Wellenfunktion ist nun wegen des Interferenzterms explizit zeitabhängig. Weil jede Wellenfunktion des harmonischen Oszillators selbst mit einer Frequenz $e^{-i(n+1/2)\omega t}$ oszilliert, ist jede beliebige Überlagerung gerade eine Fourierreihe und muss daher die Periodenlänge $T = 2\pi/\omega$ genau wie beim klassischen Oszillator haben. In Abb. 13.47 haben wir die ersten drei Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators überlagert (s. auch Abb. 13.45) und als Funktion der Zeit das Betragsquadrat der Wellenfunktion gebildet. Die Spur der Wellenfunktion im Ortsraum zeigt die periodische Entwicklung und die Analogie zum klassischen Pendel. Es ist klar, dass man dann auch für $\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x, t) x \psi(x, t)$ eine periodische Zeitentwicklung findet.

13.7.4 Der Knotensatz

Ein Teilchen, das in einem Potentialtopf beliebiger Form sitzt, wird durch eine stehende Welle dargestellt, deren Amplitude am Rand dieses Topfes meist Null ist. Im Innern des Topfes kann ψ Nullstellen oder **Knoten** haben. Im Kastenpotential war der Zustand ohne Knoten der energetisch tiefste, dann folgte der mit einem Knoten usw. Dass dies allgemein richtig ist, auch für andere Formen des Potentials, wird sehr plausibel, wenn man bedenkt, dass in der Schrödinger-Gleichung die Energie E direkt mit der Krümmung des ψ -Profils verknüpft wird, die im wesentlichen durch $\partial^2 \psi(x) / \partial x^2$ gegeben ist. Bei gegebener Normierung, also gegebener Fläche unter der Funktion $\psi^2(x)$, muss jeder der einzelnen Abschnitte der ψ -Funktion umso stärker gekrümmt sein, je mehr solcher Abschnitte es gibt (Abb. 13.42, 13.46). Man kann dies auch streng ganz allgemein zeigen (als Spezialfall der so genannten **Sturm-Liouville-Randwertaufgaben**):

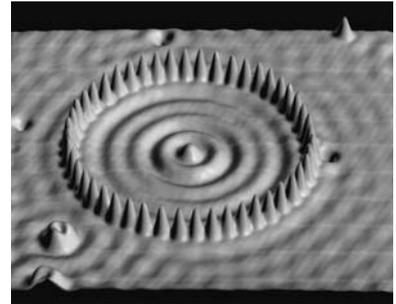
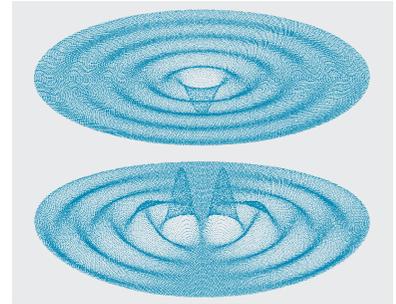
Numeriert man die nichtentarteten Energiezustände, vom tiefsten angefangen, durch eine **Quantenzahl** n ($n = 1, 2, \dots$), dann hat der Zustand mit der Quantenzahl n genau $n - 1$ Knoten (die eventuellen Nullstellen am Rande des Bereichs zählen nicht mit).

▲ Ausblick

Die Atomphysik hat zu Beginn des 20. Jahrhunderts die Verwendung eines neuen Theoriegebäudes erzwungen, bei dessen Einführung das eher heuristische Bohr-Modell eine wichtige Rolle gespielt hat, erlaubt es doch, schon viele wesentliche Eigenschaften wie die Spektren der Atome einzuordnen.

Die Quantenmechanik erklärt uns heute zwanglos nicht nur den Aufbau der Atome, sondern der elektronisch dominierten Materie überhaupt, das heißt von Molekülen und festen Körpern. Sie liefert auch die in der klassischen Physik offene Begründung für die Stabilität der Materie. An ihre teilweise bizarren Eigenschaften müssen wir unsere Intuition noch immer gewöhnen – aber mehr als 80 Jahre intensiver experimenteller Arbeit haben die Quantenmechanik zu dem best untersuchten Theoriegebäude gemacht, und Abweichungen sind bis heute noch nicht festgestellt worden. Selbst die feinsten Effekte wie zum Beispiel die berühmte Lamb-Verschiebung (Lamb-Shift) (s. Abschn. 14.6.4), die erst die Quantenelektrodynamik erklären kann, haben bisher immer nur zu ihrem Siegeszug beigetragen.

Nachdem wir die Quantenphysik sehr gut verstehen, wird sie mehr und mehr für Anwendungen eingesetzt werden. Physiker werden Ingenieure auf atomarer Basis sein, denn es ist abzusehen, dass die Komponenten der Mikroelektronik und anderer miniaturisierter Bauteile unserer technischen Welt durch die Gesetze der Quantenphysik limitiert werden.



Hier wird die ψ -Funktion sichtbar, genauer ihr Quadrat. *Crommie, Lutz* und *Eigler* haben die feine Spitze ihres Raster-Tunnelmikroskops als Pinzette benutzt und 48 Eisenatome säuberlich zu einem Kreis von 143 \AA auf einer Kupfer-Oberfläche aufgereiht. Das RTM, als Mikroskop benutzt, zeigt dann die Dichteverteilung eines in diesem Kral eingesperrten Elektrons. Die Lösung der zweidimensionalen Schrödinger-Gleichung ist hier eine Bessel-Funktion 0-ter Ordnung, ähnlich der Welle auf einem Eimer. *Oben* ist diese Wellenfunktion computergeneriert, darunter die Bessel-Funktion erster Ordnung, die die Dichteverteilung für die nächsthöhere Quantenzahl des eingesperrten Elektrons veranschaulicht

✓ Aufgaben ...

● 13.1.1 Konstante Proportionen

Ein Sultan hatte einen sehr intelligenten, aber mindestens ebenso kurzichtigen Wesir. Eines Tages führte er ihn auf sein Reiterübungsfeld. „Was geschieht dort drüben“, fragte er ihn. „Eine größere braune Masse vereinigt sich mit einer kleineren weißen, nachdem jemand ‚Aufgessen‘ geschrien hat.“ „Und dort links?“ „Ähnliches, obwohl dort die eine Masse schwarz ist und beide kleiner sind.“ Könnte der Wesir durch sorgfältige Beobachtungen Genaueres über die Vorgänge herausbringen?

● 13.1.2 Panspermie

Berechnen Sie den **Strahlungsdruck** des Sonnenlichts auf ein Teilchen vom Radius r . Gibt es Teilchengrößen, bei denen der Strahlungsdruck mit der Gravitation wetteifern kann? Hängt dieser kritische Radius vom Abstand von der Sonne ab? Beschreiben Sie quantitativ die Reise eines Teilchens unter dem Einfluss dieser Kräfte. Diskutieren Sie den Effekt als interstellares Verkehrsmittel von Bakteriosporen u. Ä., besonders hinsichtlich des Fahrplans. Halten Sie danach die von *Arrhenius* vertretene **Panspermie** für eine Möglichkeit zur Lösung der Frage nach der Entstehung des Lebens?

● 13.1.3 Strahlungs- und Gasdruck

Gibt es eine Temperatur, bei der der Strahlungsdruck einer Gasmasse den gaskinetischen Druck überholt? Wird diese Temperatur in der Sonne erreicht? Welchen Strahlungsdruck würde z. B. 1 cm^3 Materie aus dem Sonneninneren etwa in 1 km Abstand ausüben, wenn man sie intakt auf die Erde brächte? Explodieren Atombomben mehr infolge des gaskinetischen oder des Strahlungsdrucks?

● 13.1.4 Compton-Effekt

Wie groß ist die relative Wellenlängenänderung beim **Compton-Effekt** für die K_α -Röntgenstrahlung von Blei?

Wie stellen Sie sich ein Experiment zu Nachweis und Präzisionsmessung dieser Änderung vor?

●● 13.1.5 Seldowitsch-Sunajaw-Effekt

Ein Photon stößt zentral mit einem Elektron. Wer prallt zurück? Wie ändert sich die Frequenz des Photons? Anwendung z. B. auf die 3 K -Photonen der Penzias-Wilson-Strahlung und die 10^6 K -Elektronen des intergalaktischen Plasmas.

●● 13.1.6 Mößbauer-Effekt

Wieso sind manche γ -Linien so scharf? Kommt die geringe relative Breite nach der Theorie der klassischen Strahlungsdämpfung heraus? Was für Teilchen schwingen? Welche Lebensdauern müssen die Ausgangszustände solcher Übergänge haben? Um was für Übergänge muss es sich handeln? Wie dürfte die relative Linienebreite von der Energie des Quants abhängen?

● 13.2.1 De Broglie-Wellenlängen

Wie groß ist die de Broglie-Wellenlänge für verschiedene Objekte bei der mittleren kinetischen Energie der Raumtemperatur: Wasserstoff-Atom, Uran-Atom, C_{60} -Molekül und Bakterium bei thermischen Geschwindigkeiten; ein Gummibärchen (1 g), das vom Tisch fällt, ein Tennisball beim Aufschlag (200 km/h), ein Kleinwagen im Stadtverkehr. Ist die Ausdehnung eines Wellenpaketes $\Delta\lambda \simeq \lambda$ kleiner oder größer als das Objekt selbst?

●● 13.2.2 Düker-Möllenstedt-Versuch

Man findet für 1 eV -Elektronen einen Streifenabstand $\delta = 1 \mu\text{m}$ (Abb. 13.5, 13.6). Welche Ladung trägt der Ablenkdraht? Der Draht sei $5 \mu\text{m}$ dick, der Rest der Apparatur sei etwa 20 cm von ihm entfernt. Welche Spannung hat man an den Draht gelegt? Kann man die Elektronen wesentlich langsamer machen, und wozu wäre das gut?

● 13.2.3 Neutronenbeugung

Welche Neutronenenergien eignen sich zur Aufnahme von Kristallbeugungsbildern? Diskutieren Sie Abb. 13.48. Braucht man einen Reaktor? Wozu dienen die Cd-Spalte? Erhält man auf die dargestellte Weise monochromatische Neutronen? Wenn nein, wie sonst? Müssen sie monochromatisch sein?

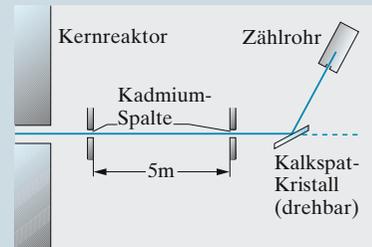


Abb. 13.48. Neutronenspektrometer zur Kristallstrukturanalyse

●● 13.2.4 Wellenpaket

Ein Teilchen muss durch eine Welle dargestellt werden, deren Amplitude die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens an der betreffenden Stelle angibt. Was kann man über den Ort eines Teilchens aussagen, das durch eine harmonische Welle (scharfer Wert von λ) beschrieben wird? Wir überlagern zwei harmonische Wellen mit λ_1 und λ_2 , aber gleicher Phasengeschwindigkeit. Welcher Impulsdifferenz entspricht das, speziell bei $\lambda_1 \approx \lambda_2$? Welche Schwebungsfrequenz tritt auf? Welche räumliche Ausdehnung hat ein Schwebungsmaximum? Wenn wir andere Wellen mit λ zwischen λ_1 und λ_2 hinzufügen, die einander alle in *einem* Schwebungsmaximum verstärken, was wird aus den anderen Schwebungsmaxima? Auf welchen Raumbereich Δx ist das entstehende Wellenpaket lokalisiert? Welcher Zusammenhang besteht zwischen Δx und Δp ?

● 13.2.5 Makroskopische Unbestimmtheit

Spielt die Unbestimmtheitsrelation für makroskopische Objekte eine Rolle?

Sie messen den Ort eines Steins, Sandkorns, Bakteriums so genau, wie das unter dem Mikroskop möglich ist, und überzeugen sich auch, dass die Objekte allem Anschein nach ruhen. Keinerlei äußere Kräfte wirken ein, selbst das Bakterium bewegt sich nicht aktiv. Mit welcher Genauigkeit lässt sich der Ort der Objekte nach einem Tag, 30 Jahren, 10^{10} Jahren voraussagen? Es sei, z. B. durch tiefe Temperatur, gesichert, dass das Bakterium noch da ist.

●● 13.2.6 Unbestimmtheitsrelation

Die Unbestimmtheitsrelation wird zu einem heuristischen Werkzeug von unglaublicher Kraft, wenn man die Worte mindestens und höchstens benutzt. Wenn z. B. der Ort eines Teilchens um *höchstens* Δx unsicher ist, muss die Impulsunschärfe *mindestens* $\Delta p = h/\Delta x$ sein. Wenn der Impuls aber so „verschwimmt“, kann und muss auch eine bestimmte kinetische Energie vorhanden sein (Nullpunktsenergie). Wenden Sie das auf ein Teilchen an, von dem man weiß, dass es in einem Kasten von der Abmessung d sitzt. Anwendungen dieser Idee beherrschen sämtliche folgenden Kapitel. Eine Unbestimmtheitsrelation gilt auch zwischen Drehwinkel und Drehimpuls. Betrachten Sie irgendein rotierendes Objekt. Welchen Höchstfehler kann man in der Lageangabe (Winkel) machen? Welchem Mindest-Drehimpuls entspricht das? Ein System lebt nur eine Zeit Δt . Wie unscharf ist seine Energie? Anwendungen?

●● 13.3.1 Strahlungsdämpfung
Führt die klassische **Strahlungsdämpfung** zu einem exponentiellen zeitlichen Abfall der Amplitude der emittierten Welle?

● 13.3.2 Doppler-Breite
In heißen Gasen beobachtet man eine Linienverbreiterung, die der Wurzel aus der Temperatur proportional ist. Können Sie aus dem Namen **Doppler-Verbreiterung** schließen, wie sie zustande kommt? Wann überwiegt

die Druck-, wann die Doppler-Verbreiterung? Wann beginnen sich beide von der natürlichen Linienbreite abzuheben?

● 13.3.3 Leuchtdauer

W. Wien hat versucht, die Leuchtdauer der Atome an Kanalstrahlionen oder durch deren Umladung entstandenen Atome direkt zu messen. Wie verhindert man, dass die Teilchen nach dem Durchtritt durch die Kathode neu angeregt werden? Bei 30 kV-Wasserstoff-Kanalstrahlen ist die Leuchtdichte des Strahles etwa 1 cm hinter der Kathode auf $1/e$ abgefallen. Schlussfolgerung? Wie könnte man die Teilchengeschwindigkeit direkt aus dem Spektrum messen?

●● 13.3.4 Anregungsfrequenz
Man betrachte ein Atom in einer Gasflamme (1 000 K), in einem Hochofen (2 000 K), in der Sonnenphotosphäre (6 000 K). Wieviel Zeit verstreicht im Durchschnitt zwischen zwei Emissionen von Photonen durch dieses Atom? Man vergleiche mit der Umlaufzeit eines Elektrons im Rutherford- oder Bohr-Modell, die man als „1 Jahr“ im „atomaren Planetensystem“ auffassen kann. Wo herrscht mehr Betrieb, im Sonnensystem oder im Atom?

●● 13.3.5 Linienbreite
Isolierte Atome können nur ganz scharfe Spektrallinien absorbieren, wie die Erfahrung zeigt. Warum wird aber ein Photon mit etwas höherer Energie nicht auch absorbiert, wobei das Atom den Energieüberschuss als kinetische Energie aufnimmt?

●● 13.3.6 Spontane Elektronenemission?
Warum ist in Abb. 13.25 kein Elektronenstoß-Analogon zur spontanen Emission gezeichnet?

●● 13.5.1 Fusionsbedingung
Ein geladenes Teilchen A fliegt auf ein anderes B zu, sodass es, wenn es seine Bahn geradlinig fortsetzte, im Minimalabstand a am Teilchen B vorbeikäme. Welche Kräfte wirken zwischen den Teilchen, welcher Impuls

wird übertragen? Unter welchen Bedingungen bleibt die Bahn praktisch geradlinig (vgl. Aufgabe 18.3.3)? Dies war die klassische Beschreibung der Situation. Unter welchen Bedingungen macht die Unschärferelation diese Beschreibung hinfällig? Kann man sagen, was unter diesen Bedingungen passiert? Erkennen Sie die Bedingung im Bohr-Atom wieder? Welche Energie entspricht dieser Bedingung im Fall zweier stoßender Protonen? Welches ist die entsprechende Temperatur thermischer Protonen (minimale **Fusionstemperatur** T_{fus})?

●● 13.5.2 Fusionstemperatur
Ein Proton fliegt zentral auf ein anderes zu. Bis zu welchem Abstand a kommen sie einander nahe? Bedenken Sie, dass ein Proton eine de Broglie-Wellenlänge λ hat und dass es Potentialwälle durchtunneln kann, wenn deren Dicke nicht zu groß gegen $\lambda = \lambda/(2\pi)$ ist. Von welchen Energien und Temperaturen ab ist Fusion der Protonen möglich?

● 13.6.1 Funktionen als Vektoren
Welche Winkel bilden die Funktionen $\sin nx$, $\sin mx$, $\cos nx$, $\cos mx$ miteinander (n, m ganz, $n = m$ bzw. $n \neq m$), wenn man als Integrationsbereich in der Winkeldefinition $(0, 2\pi)$ zugrundelegt? Hilft die e^{ix} -Darstellung bei der Rechnung? Wenn man den Integrationsbereich auf $(-\infty, +\infty)$ erweitert, kann man dann eine der obigen Voraussetzungen fallen lassen?

●● 13.6.2 Orthogonalität I
Welche Rolle spielt die **Orthogonalität** eines Funktionensystems in der Herleitung der **Fourier-Reihe** für einen periodischen bzw. des **Fourier-Integrals** für einen beliebigen Vorgang? Wie würden die Ausdrücke für die Koeffizienten bzw. Amplituden aussehen, wenn die zugrundegelegten Funktionen nicht orthogonal wären?

● 13.6.3 Lineare Unabhängigkeit
Beweisen Sie: Eigenvektoren einer Matrix, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind linear unabhängig.

● 13.6.4 Orthogonalität II

Beweisen Sie: Zwei Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind orthogonal.

● 13.6.5 Hermitesche Operatoren

Welche der Operatoren in Tabelle 13.2 sind hermitesch? Welche sind linear? Speziell: Wie muss $K(x, x')$ aussehen, damit der Integraloperator hermitesch ist? Versuchen Sie auch Eigenfunktionen und Eigenwerte für die angegebenen Operatoren zu finden.

●● 13.6.6 Entwicklung nach Eigenfunktionen

Ein linearer Operator A habe ein vollständiges Eigenfunktionensystem f_k , d. h. jede Funktion ψ lasse sich nach den f_k entwickeln: $\psi = \sum c_k f_k$. Beschreibt der Vektor der c_k die Funktion ψ ebensogut wie die übliche Art, ψ anzugeben? Vergleichen Sie mit der Darstellung eines dreidimensionalen Vektors als „Pfeil“ bzw. durch seine Komponenten. Wie drücken sich $\psi \cdot \psi$ und $\varphi \cdot \psi$ durch die Koeffizienten aus? Wieso ist die Lage bei einem hermiteschen Operator einfacher? Worin besteht die entsprechende Vereinfachung bei den Dreiervektoren? Bilden Sie auch den Ausdruck $A\psi$ in Koeffizientenschreibweise. Wenn ψ vollständig durch die c_i charakterisiert ist, wie sieht dann die entsprechende Charakterisierung des Operators A aus? Jetzt betrachten Sie *irgendein* vollständiges Orthogonalsystem g_k , das nicht das Eigenfunktionensystem von A zu sein braucht. Was ändert sich an den bisherigen Betrachtungen? Kann man sagen, der Operator sei in dieser „ g_k -Darstellung“ vollständig durch eine Matrix charakterisiert? Wie berechnen sich die Elemente dieser Matrix? Versuchen Sie auch den Ausdruck $\varphi \cdot A\psi$. Welche Besonderheiten ergeben sich, wenn A hermitesch ist?

●● 13.6.7 Eigenwertbestimmung

Beweisen Sie die Richtigkeit einer „klassischen“ und einer „modernen“ Methode zur Bestimmung von Eigenvektoren und Eigenwerten einer Matrix A : (1) Man löse die „Säkulargleichung“ $\|A - \lambda U\| = 0$. $\| \|$

bedeutet die Determinante der darinstehenden Matrix. U ist die Einheitsmatrix. Die Lösungen λ sind die Eigenwerte. Wie viele gibt es? Wie geht man praktisch vor, um sie zu berechnen? (2) Man nehme irgendeinen Vektor x_0 und wende A auf ihn an. Das Ergebnis normiere man durch Division durch den Faktor λ_1 und nenne es x_1 . Dies Verfahren setze man fort, bis sich x_i nicht mehr ändert. Dann ist λ_i der Eigenwert mit dem größten Absolutbetrag und x_i der zugehörige Eigenvektor.

●● 13.6.8 Hilbert-Raum

Die Mathematiker führen den Begriff des **Vektorraums** folgendermaßen ein: Ein metrischer Vektorraum R ist eine Menge von Elementen, genannt Vektoren, zwischen denen folgende Operationen erklärt sind: (1) Addition zweier Vektoren; Ergebnis ein anderer Vektor; (2) Multiplikation von Vektor und (komplexer) Zahl; Ergebnis ein anderer Vektor; (3) skalare Multiplikation zweier Vektoren; Ergebnis eine Zahl. Diese Additionen und Multiplikationen sind wie üblich kommutativ (im Komplexen hermitesch) und distributiv. Zeigen Sie, dass die Menge der quadratisch integrierbaren Funktionen einen Vektorraum (den **Hilbert-Raum**) bildet, wenn man erklärt: $f \cdot g = \int f(x)g(x) dx$. Die Dimension von R ist die Anzahl von Vektoren a_1, \dots, a_n , die man mindestens braucht, um *jeden* Vektor b aus R in der Form $b = \sum c_k a_k$ darstellen zu können. Welche Dimension hat der Hilbert-Raum?

●● 13.6.9 Operator der Standard-Abweichung

Der Operator A gehöre zur physikalischen Größe a . Wie heißt der Operator der **Streuung** von a , d. h. der Operator, dessen Mittelwert (für eine gegebene Zustandsfunktion) gleich der Streuung Δa ist?

●● 13.6.10 Unbestimmtheitsrelation

A und B seien hermitesche Operatoren. Ihr **Minuskommutator** heiße C/i , d. h. $C = i(AB - BA)$. Welche Vertauschungsrelation gilt für die

Operatoren der Streuungen von a und b , d. h. ΔA und ΔB ? Beweisen Sie: $(\Delta A)^2 \cdot (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} C^2$. Welche physikalische Nutzenanwendung können Sie ziehen? Hinweis: Bilden Sie den Operator $D = A + i\alpha B$, α beliebig reell. Untersuchen Sie den Ausdruck $F(\alpha) = D^* \psi^* \cdot D \psi$. Kann man über das Vorzeichen von $F(\alpha)$ unabhängig von ψ und α etwas aussagen? Welche Bedingung folgt daraus für die Koeffizienten von α in dem Ausdruck $F(\alpha)$? Betrachten Sie das Minimum von $F(\alpha)$. Achten Sie bei allen Umformungen genau auf Hermitizität, Komplexheit und Vertauschbarkeit!

● 13.6.11 Teilchen = Welle

In welchem der Axiome kommt besonders deutlich zum Ausdruck, dass alle physikalischen Systeme Welleneigenschaften haben? Bedenken Sie: Bei der Interferenz addieren sich die Amplituden der Teilwellen; erst das Amplitudenquadrat gibt die Energie. Andererseits kann man einen komplizierten Wellenvorgang aus Teilwellen zusammengesetzt denken, wenn das für die Behandlung bequemer erscheint. Gibt es auch Unterschiede zwischen ψ - und gewöhnlichen Wellen?

●● 13.6.12 Vertauschbarkeit

Zeigen Sie: Wenn zwei Größen a und b gleichzeitig, d. h. für die gleichen Zustände scharfe Werte besitzen, müssen die zugehörigen Operatoren A und B vertauschbar sein, d. h. es muss $AB = BA$ gelten.

● 13.6.13 Impulsoperator

Untersuchen Sie die **Vertauschbarkeit** zwischen den Operatoren der Impulskomponenten p_x, p_y, p_z und dem Operator des Gesamtimpulses. Sind diese Ergebnisse physikalisch sinnvoll?

●● 13.6.14 Drehimpuls I

Wir bilden den **Drehimpulsoperator**. Seine x -Komponente L_x verhält sich zum Drehwinkel φ um die x -Achse ebenso wie die x -Komponente p_x des Impulsoperators zur Koordinate x . Geben Sie auch den vollständigen

Ausdruck für L (alle Komponenten). Hätte man auch von der klassischen Vektorformel $L = r \times p$ ausgehen können? Welche Eigenfunktionen und Eigenwerte hat L_x ? Welches ist der wesentliche Unterschied zum Impulsoperator? Was bedeuten die Eigenfunktionen? Ist L_x hermitesch? Sind die einzelnen Komponenten von L miteinander und mit L selbst vertauschbar?

●● 13.6.15 Drehimpuls II

Ein System kann frei um eine feste Achse rotieren, d.h. einer solchen Drehung stehen keine Kräfte entgegen. Suchen Sie physikalisch interessante Beispiele. Wie wird man diesen „raumfesten starren Rotator“ quantenmechanisch behandeln? Für welche Operatoren ist die Zustandsfunktion dieses Systems Eigenfunktion? Welche Drehimpuls- und Rotationsenergiewerte kommen für stationäre Zustände in Frage?

● 13.6.16 Standard-Abweichung

Fast ebenso wichtig wie der Mittelwert einer Größe a ist auch ihre Streuung um diesen Mittelwert (**Standardabweichung**, mittlere Schwankung). Wie lässt sich diese Streuung durch den Operator A ausdrücken? Wie sieht danach ein Zustand mit scharfem Wert von a aus?

●● 13.6.17 Hamilton-Operator

Der Mittelwert einer Größe a kann zeitlich veränderlich sein, auch ohne dass der entsprechende Operator A eine explizite Zeitabhängigkeit enthält. Dann stammt die Zeitabhängigkeit natürlich aus der Zustandsfunktion selbst. Können Sie einen Operator angeben, aus dem sich \dot{a} nach den üblichen Regeln ergibt? Versuchen Sie es mit den Operatoren AH und HA . Wie ändern sich speziell die Mittelwerte von x und p_x ?

●● 13.6.18 Teilchen im Magnetfeld

Konstruieren Sie den Hamilton-Operator H für ein Teilchen im Magnetfeld. Hinweis: Das Feld lässt

sich „wegtransformieren“, indem man das Bezugssystem mit der **Larmor-Frequenz** rotieren lässt. Damit ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Feld und Drehimpulsoperator. Da man H in der üblichen Darstellung aus dem Impulsoperator aufbaut, geht man besser vom Vektorpotential aus (vgl. Aufgabe 7.3.3). Nutzen Sie die formalen Entsprechungen zwischen diesen Größen aus. Welche Rolle spielt dieser Ausdruck in der Theorie der Supraleitung (vgl. Aufgabe 17.7.2)?

● 13.6.19 Unbestimmtheit I

In einer richtig betriebenen **Wilson-Kammer** haben die Tröpfchen, aus denen sich die Teilchenspur zusammensetzt, nicht viel mehr als $1 \mu\text{m}$ Durchmesser. Kann man hier praktisch von einer klassischen Bahn sprechen, oder machen sich Impulsunschärfen bemerkbar (ggf. wie)? Wir sprechen hier nicht von den Stoßprozessen, die die Ionisierung bewirken, sondern nur von der „Bahn als solcher“, die durch die Tröpfchen markiert ist.

●● 13.6.20 Unbestimmtheit II

Spielt die **Unbestimmtheitsrelation** wirklich für makroskopische Systeme keine Rolle? Es gelingt bekanntlich niemandem, einen gut gespitzen Zahnstocher auf harter Unterlage ohne Hilfsmittel so senkrecht auszubalancieren, dass er auf der Spitze stehenbleibt. Liegt das am Ungeschick oder an der Unschärfe? Wie lange dauert es z.B. maximal, bis die quantenmechanischen Unschärfen von Einstellwinkel und Drehimpuls um die Spitze zu einer Neigung von 1° gegen die Senkrechte führen? Das Ergebnis ist verblüffend. Kann man daraus wirklich schließen, die Unbestimmtheitsrelation spiele praktisch hier eine Rolle?

●● 13.7.1 Harmonischer Oszillator

Wie verhält sich ein Teilchen der Masse m in einem parabolischen Potentialtopf $U = \frac{1}{2}Dx^2$? Bestimmen Sie die möglichen stationären Zustände, d.h. Eigenfunktionen und

Eigenwerte des Hamilton-Operators. Die Schrödinger-Gleichung vereinfacht sich, wenn man als Energieeinheit $\frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{D/m}$ benutzt und als x -Einheit die Amplitude, die ein klassischer Oszillator bei dieser Energie hätte. Welche Glieder der Schrödinger-Gleichung bleiben für sehr große x noch übrig? Zeigen Sie, dass der entsprechende asymptotische Verlauf der Lösung durch eine Gauß-Funktion gegeben ist. Diese Gauß-Funktion multipliziert sich noch mit einem Polynom in x , einem Hermite-Polynom $H(x)$. Wie lautet dessen Differentialgleichung? Jetzt kommt das Entscheidende: Für $x \rightarrow \pm\infty$ muss ψ verschwinden (warum?). In einer *unendlichen Potenzreihe* $H(x)$ würden aber die Glieder mit hohen x -Potenzen schließlich sogar das Abklingen der Gauß-Funktion kompensieren. Die Potenzreihe $H(x)$ muss also *abbrechen*. Wie heißt die Bedingung dafür? Bestimmen Sie die ersten Hermite-Polynome. Vergleich mit dem klassischen Verhalten: Wo ist das klassische, wo das quantenmechanische Teilchen am häufigsten anzutreffen (bei geringer und bei hoher Energie)?

●●● 13.7.2 Theorie des α -Zerfalls

Im „Fujiyama-Krater“ eines Kerns liegt ein α -Teilchen energetisch oberhalb des Nullniveaus. Bei welchen Kernen ist das der Fall (vgl. Aufgabe 18.1.7)? Wie kommt das Teilchen aus dem Berg? Wie hängt seine Austrittswahrscheinlichkeit von seiner Energie ab? Kann man den Potentialwall als Rechteck oder Dreieck annähern? Hinweis zur Behandlung des richtigen Potentials:

$$\int_{x_0}^1 \sqrt{x^{-1} - 1} dx \approx \int_0^1 \sqrt{x^{-1} - 1} dx - \int_0^{x_0} x^{-1/2} dx,$$

wenn $x_0 \ll 1$;

beim ersten Integral substituiere man z.B. $x = \sin^2 \alpha$; wie verhalten sich $\int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha$ und $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha$?

Kommen die Daten in Abb. 18.19 richtig heraus? Welcher Parameter muss angepasst werden? Warum gibt es z. B. keine α -Strahler mit 20 MeV? ${}_{144}^{60}\text{Nd}$, der leichteste bekannte α -aktive Kern, hat $E = 1,5$ MeV und $\tau_{1/2} \approx 10^{15}$ Jahre. Kommt das richtig heraus? Liegt dieser Kern auf der Kurve von Abb. 18.19?

●● 13.7.3 Feldemission

An einem Metall liegt ein sehr hohes elektrisches Feld. Wie sieht das Potential für Elektronen dicht an der Metalloberfläche aus? Wie kommen die Elektronen nach draußen? Geben Sie eine Abschätzung für den Feldemissionsstrom. Zeichnen Sie die Bandstruktur für eine Halbleiterdiode mit sehr dünner Übergangsschicht, an der ein starkes Feld liegt. Wie kommen Elektronen vom Valenz- ins Leitungsband?

●● 13.7.4 Potentialgraben

Ein Teilchen sitzt in einem nur von x abhängigen Rechteck-Potentialgraben, der Wände von endlicher Höhe U hat. Diesen Wert hat das Potential außen überall. Wie unterscheiden sich Eigenwerte und Eigenfunktionen von denen im Fall $U = \infty$ bei $E < U$? Was passiert bei $E \geq U$? Die Teillösungen für die drei Gebiete können Sie sofort hinschreiben, aber es bleiben unbestimmte Koeffizienten. Reduzieren Sie deren Anzahl: Was kann die ψ -Funktion im Unendlichen machen? Es bleiben die Anschlussbedingungen

für ψ und ψ' an den Bereichsgrenzen. Warum müssen beide stetig sein? Warum nicht z. B. auch ψ'' ? Beachten Sie weiter: Ein linear-homogenes Gleichungssystem hat nur dann eine nichtverschwindende Lösung, wenn die Determinante Null ist. Die entstehende transzendente Gleichung lässt sich graphisch sehr anschaulich lösen.

●● 13.7.5 Zwei Potentialgräben

Ein Teilchen sitzt in einem nur von x abhängigen Potential, bestehend aus zwei Gräben mit glattem Boden, getrennt durch eine Rechteckschwelle. Überall sonst ist das Potential unendlich hoch. Bestimmen Sie die stationären Zustände und deren Energien, speziell für die symmetrische Anordnung.

●● 13.7.6 Kugelwelle

Die „ebene“ stationäre Zustandsfunktion im kräftefreien Fall heißt $e^{i(kx - \omega t)}$. Zeigen Sie, dass die entsprechende kugelsymmetrische Funktion $r^{-1} e^{i(kr - \omega t)}$ heißt. Vergleichen Sie mit ebener und Kugelwelle, z. B. beim Licht. Was ändert sich am Ergebnis von Aufgabe 13.7.5, wenn die Abszisse r statt x bedeutet ($r = 0$, z. B. an der linken Wand)?

●● 13.7.7 Tunneleffekt

Der Tunneleffekt ist eigentlich ein Fall für die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung. Betrachten Sie das Potential von Aufgabe 13.7.5 und untersuchen Sie, wie sich ein Zustand

entwickelt, bei dem das Teilchen zunächst ganz in einem der Töpfe ist. Wie unterscheiden sich der ebene und der kugelsymmetrische Fall? Wie kann man zu einer Schwelle beliebiger Form übergehen?

●● 13.7.8 Resonanzenergie

Ein System hat zwei „Grenzstände“, zwischen denen es mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit hin- und herspringen kann. Suchen Sie Beispiele. Man kann die Situation manchmal, aber nicht immer, durch zwei räumlich getrennte Potentialtöpfe darstellen. Der wirkliche Zustand ψ des Systems lässt sich aus den beiden Basiszuständen f_i , $i = 1, 2$, „System ist im Zustand i “, aufbauen. Dieser Zustand ψ ist i. Allg. zeitabhängig. Was bedeutet das für die Entwicklungskoeffizienten? Sind f_1 und f_2 Eigenfunktionen des wirklichen Hamilton-Operators H ? Wie lautet die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung? Verwandeln Sie sie in eine Matrixgleichung (üblicher Trick: Skalarmultiplikation mit f_i). Welche physikalische Bedeutung haben die Matrixelemente von H ? Was kann man über sie sagen, wenn die Zustände 1 und 2 symmetrisch sind? Wieso treten zwei Frequenzen auf, wie heißen sie, was bedeuten sie? Welche stationären Zustände hat das System? Achten Sie besonders auf die „Resonanzenergie“. Wie sehen die nichtstationären Zustände aus?

Physik der Atome und ihre Anwendungen

■ Inhalt

14.1	Quantenphysik und Atome	732
14.2	Das Wasserstoffatom nach Schrödinger	735
14.3	Magnetismus von Atomen	744
14.4	Elektronenspin und Feinstruktur	747
14.5	Atome mit zwei Elektronen	755
14.6	Wie strahlen die Atome?	761
14.7	Lichtkräfte	777
14.8	Atomoptik	780
14.9	Der Einfluss der Atomkerne	784
14.10	Kräfte zwischen Atomen	804
14.11	Quantenmaterie	808

▼ Einleitung

Einleitung: Das Versagen der klassischen Physik vor dem Atom.

Um die Jahrhundertwende stellte man sich das Atom als ein hochelastisches Klümpchen von etwa $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ Durchmesser vor. Hierdurch waren seine mechanischen und thermischen Eigenschaften ziemlich vollständig beschrieben. Atome sind elektrisch neutral, enthalten aber zweifellos Elektronen, wie die Elektrolyse und die Gasentladungen beweisen. So kam *J. J. Thomson* zu seinem Bild des Atoms als eines 1 \AA großen Kügelchens, in dem positive Ladung gleichmäßig verteilt ist und in das praktisch punktförmige Elektronen eingebettet sind. Elektronen würden in einer solchen positiven Ladungswolke, wenn sie reibungsfrei schwingen, scharfe Spektrallinien aussenden, nur leider nicht die experimentell beobachteten.

Die α -Streuversuche von *Ernest Rutherford* (Abschn. 13.5) zerstörten dieses Bild, indem sie nachwiesen, dass die positive Ladung des Atoms zusammen mit praktisch seiner ganzen Masse im Kern, d. h. auf einem viel kleineren Raum von weniger als 10^{-14} m Durchmesser konzentriert ist. Da mechanisch und thermisch das Atom als Gebilde von etwa 10^{-10} m Durchmesser erscheint, blieb nichts übrig, als hierfür eine Hülle aus Elektronen verantwortlich zu machen, die den Kern in Abständen von dieser Größenordnung frei umschweben. Nach den Gesetzen der klassischen Mechanik können sie sich dort im Feld des positiven Kerns nur halten, wenn sie Bahnen ähnlich den Kepler-Bahnen beschreiben, im einfachsten Fall Kreise oder Ellipsen. Dabei ist allerdings die gegenseitige Störung der Elektronen sehr viel größer als im sonst analogen Fall der Planeten des Sonnensystems. Wie *Rutherford*, *Geiger* u. A. zeigten, ►



Niels Bohr (rechts) und *Wolfgang Pauli* betrachten einen „Spinumkehr-Kreis“, der sich nach kurzer Rotation von selbst auf den Kopf stellt (Aufnahme: Universität Lund, Schweden 1954)

Niels Bohr kommt mit Frau und Mitarbeitern aus einer langen Nachtsitzung in den Karlsberg-Bierstuben. Da beginnt der Holländer „Cas“ *Casimir*, begeisterter Alpinist, die Rustica-Fassade eines Bankgebäudes zu erklettern. Bohr versucht es nach kurzem Besinnen ebenfalls. Frau Bohrs Augen werden noch besorgter, als sich zwei Polizisten in Eilmärschen nähern, aber plötzlich sagt der eine: „Ach lass, das ist ja bloß der Professor Bohr!“

ist die Kernladung und damit auch die Anzahl der neutralisierenden Hüllenelektronen für die einzelnen Elemente verschieden und steigt mit der Ordnungszahl des Elementes im periodischen System.

Es liegt nahe, dass Wasserstoff, das leichteste Element, nur ein Elektron hat. Es ist sozusagen die Mutter aller Atome und hat bei der Entwicklung der Quantenphysik wegen seiner besonders einfachen Spektralserien eine überragende Rolle gespielt. Heute sind Atome die vielleicht bestverstandenen mikroskopischen Objekte überhaupt, sie bieten dem Experimentator ein reichhaltiges Labor der Quantenphysik.

14.1 Quantenphysik und Atome

14.1.1 Bohr-Sommerfeld-Modelle des Atoms

Die Experimente von *Rutherford* (Abschn. 13.5) hatten ein **Atommodell** nahe gelegt, das auf mikroskopischer Skala wie ein kleines Planetensystem aussah und beim Wasserstoff auf einen schweren Kern (das Proton) und ein einzelnes leichtes Elektron, das sich um den Kern bewegte, reduziert war.

Dieses Modell verursachte aber ein neues Problem, denn die kontinuierlich beschleunigten und oszillierenden Elektronen sollten durch elektromagnetische Strahlung Energie verlieren und immer tiefer in das Coulomb-Potential des Kerns fallen, solche Atome wären nach der klassischen Physik instabil. *Niels Bohr* (1885–1962, Nobelpreis 1922) war allerdings aufgefallen, dass man die Stabilität der Atome und damit der Materie allgemein mit Hilfe des Wirkungsquantums, das *Max Planck* als Folge der Strahlungsgesetze gefordert hatte, „retten“ konnte:

... Wie man die Bewegungsgesetze der Elektronen auch modifizieren mag, man kommt nicht daran vorbei, eine der klassischen Elektrodynamik fremde Größe – nämlich die plancksche Konstante oder, wie sie oft bezeichnet wird, das elementare Wirkungsquantum – in die betreffenden Gesetze einzuführen. Tut man das, so ändert sich die Frage nach der stabilen Konfiguration der Elektronen im Atom wesentlich, da die plancksche Konstante eine Dimension und Größe hat, die sie – in Verbindung mit der Masse und Ladung der Teilchen – befähigt, eine Länge der geforderten Größenordnung zu bestimmen. ...

(N. Bohr, *Über den Aufbau der Atome und Moleküle*, Philos. Mag. **26**, 1 (1913))

Dazu musste man die später **Bohr-Sommerfeld Postulate** genannten Forderungen stellen:

- $h\nu_{ij} = \Delta E_{ij} = E_i - E_j$,
- $2\pi r_n = n \cdot \lambda = n \cdot \frac{h}{m_{el} v_{el}}$.

Das erste Postulat fordert, dass die beobachteten Spektrallinien durch strahlende Übergänge zwischen nur wenigen vorgegebenen Energieniveaus i, j, \dots zustande kommen, die durch eine „Bahn“ charakterisiert

werden. Die zweite Bedingung stellt fest, welche Bahnen erlaubt sind: solche nämlich, deren Länge gerade einem Vielfachen der de Broglie-Wellenlänge entsprechen (Abb. 14.1). Bohr hatte diese Bedingung mit Hilfe des Wirkungsintegrals $\int pdq = n \cdot h$ etwas anders ausgedrückt, die Formulierungen sind aber äquivalent.

Arnold Sommerfeld (1868–1951) erweiterte das bohrsche Modell auf elliptische Bahnen (Abb. 14.2). Beim Studium der relativistischen Einflüsse auf die Elektronenbewegung entdeckte er die Feinstrukturkonstante α (s. Abschn. 14.1.3).

14.1.2 Quanten-Fluktuationen stabilisieren die Atome

Nach dem Versagen der klassischen Mechanik bei mikroskopischen Dimensionen muss die Bewegung des atomaren Elektrons mit Hilfe der Quantenmechanik, also der Schrödingergleichung beschrieben werden. Deren Lösung ergibt eine Wellenfunktion, die wir als Amplitude der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons interpretieren können.

Die Stabilisierung der Elektronenbahn kann man im Wellenbild anschaulich deuten: Die Beschränkung der Elektronenbewegung auf ein immer kleineres Volumen – wenn das Elektron in das Coulomb-Potential fällt – verursacht eine immer kürzere de Broglie-Wellenlänge, die wiederum einer wachsenden kinetischen Energie entspricht. Diese Bewegung bezeichnet man als Schwankungen oder Fluktuationen. Selbst im tiefsten elektronischen Zustand, dem Grundzustand, muss nämlich wenigstens eine (de Broglie)- Halbwelle in den Aufenthaltsbereich „hineinpassen“, der Gewinn an Bindungsenergie wird also durch eine Zunahme der kinetischen Energie abgeschwächt, bis es zu einem Gleichgewicht kommt.

Um die Wirkung der Quantenfluktuationen genauer zu fassen, vereinfachen wir das Problem zunächst auf eine Dimension und betrachten die vereinfachte Schrödinger-Gleichung im Coulomb-Potential,

$$E\psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{e^2/4\pi\epsilon_0}{x} \right) \psi(x).$$

Die kinetische Energie wird darin durch den Operator $-\hbar^2/2m \cdot d^2/dx^2$ beschrieben. Vereinfacht gesprochen ist sie wegen der zweiten Ableitung d^2/dx^2 proportional zur Krümmung der Wellenfunktion und wir nehmen grob an, dass sie sich nach $\hbar^2/2ma^2$, der niedrigsten Energie im Kastenpotential der Breite a , abschätzen lässt. Dann erwarten wir ein Gleichgewicht von Bindungsenergie und kinetischer Energie bei

$$\frac{d}{da} \left(\frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2/4\pi\epsilon_0}{a} \right) = 0.$$

Daraus ergibt sich sofort die nur von den fundamentalen physikalischen Konstanten \hbar, m, e bestimmte charakteristische Länge, die als **Bohrradius** bezeichnet wird, $\lambda = a_0$,

$$\text{Bohrradius: } a_0 = \frac{\hbar^2}{m(e^2/4\pi\epsilon_0)} = 0,529 \text{ \AA} ,$$

(14.1)

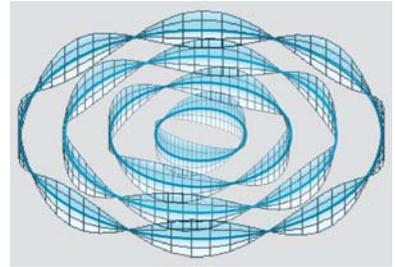


Abb. 14.1. Bohrs Quantenbedingung: Die Trajektorienlänge eines atomaren Elektrons sollte gerade ein Vielfaches seiner de Broglie-Wellenlänge sein. Sommerfeld erweiterte das bohrsche Modell durch Quantenbedingungen für elliptische Bahnen

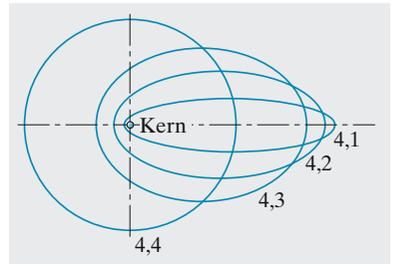


Abb. 14.2. Erweiterung des bohrschen Modells durch Sommerfeld. Zur die Hauptquantenzahl $n = 4$ kommen die Nebenquantenzahlen $n_\phi = 1 - 4$ vor, die die Elliptizität der Bahn charakterisieren. Die Quantenmechanik ergibt $l = 0 - 3$, eine Bahn mit $n_\phi = 0$ würde aber als Strich durch den Kern laufen, klassisch undenkbar

und die mittlere Bindungsenergie $E_{\text{Ryd}} = (e^2/4\pi\epsilon_0)/2a_0$, die als Rydberg-Energie bezeichnet wird:

$$\text{Rydberg-Energie: } E_{\text{Ryd}} = -\frac{m}{2} \frac{(e^2/4\pi\epsilon_0)^2}{\hbar^2} = -13,6 \text{ eV} . \quad (14.2)$$

Noch bekannter ist die **Rydbergkonstante** $R_\infty = E_{\text{Ryd}}/hc$. Der Index ∞ weist daraufhin, dass sie für einen unendlich schweren Atomkern gilt und bei Kernen endlicher Masse entsprechend korrigiert werden muss. Ihr international akzeptierter Wert beträgt derzeit

$$R_\infty = 109\,737,315\,685\,5(8) \text{ cm}^{-1} ,$$

mit einer relativen Unsicherheit $\Delta R_\infty/R_\infty < 10^{-12}$! Sie ist eine **sekundäre Naturkonstante**, weil sie aus anderen, fundamentalen Größen bestimmt werden kann. Sie ist die genauest bekannte physikalische Größe überhaupt und verdankt diesen Umstand allein der Untersuchung des Wasserstoffatoms mit Hilfe der Laser-Präzisionsspektroskopie. Dessen spektrale Linien sind sogar mit noch 1000fach höherer Genauigkeit vermessen worden, jedoch kann die Rydbergkonstante nicht direkt aus diesen Messungen abgeleitet werden, weil die vom Proton verursachte Modifikation des Coulomb-Potentials nicht genau genug bekannt ist (s. Abschn. 14.9.1). In letzter Konsequenz ist also nicht einmal das Wasserstoffatom ein „echtes“ Zweikörperproblem! Hier zeigt sich aber auch, welche große Bedeutung die Spektroskopie in der **Metrologie**, der Wissenschaft von den Präzisionsmessungen besitzt.

14.1.3 Atomare Einheiten und Feinstrukturkonstante α

Rydbergkonstante und Bohr-Radius geben typische atomaren Größen für Bindungsenergie und Atomradius an. Es ist daher häufig sinnvoll, andere Größen in diesen Einheiten auszudrücken, sodass zum Beispiel übersichtliche Gleichungen entstehen. Dazu verwendet man die Naturkonstanten als Einheiten, d. h. wir setzen $e = e^2/4\pi\epsilon_0 = m_{\text{el}} = \hbar = 1$ und erhalten automatisch auch für den Bohr-Radius den Wert 1.

Aus der mittleren kinetischen Energie kann man noch aus $mv^2/2 = \hbar^2/2ma_0^2$ eine Abschätzung für die mittlere quadratische Geschwindigkeit \bar{v} des Elektrons gewinnen:

$$\langle \bar{v}^2 \rangle^{1/2} = \frac{\hbar}{ma_0} = \alpha \cdot c ,$$

die wir mit der berühmten

$$\text{Feinstruktur-Konstante } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \quad (14.3)$$

ins Verhältnis setzen können zur Lichtgeschwindigkeit c . Die Feinstrukturkonstante α ist dimensionslos, und ihr kleiner Wert zeigt, dass man das Wasserstoff-Atom in guter Näherung wegen $\alpha = v/c \ll 1$ ohne Berücksichtigung der Relativitätstheorie betrachten kann. Wir können α auch

Name	Symbol	Formel	SI-Wert
Länge	a_0	$\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
Geschwindigkeit	v_0	$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}$	$2,19 \cdot 10^6 \text{ m/s}$
Lichtgeschwindigkeit $c = v_0/\alpha = 137 \text{ a.e.}$			
Zeit	$\tau_0 = a_0/v_0$	$\frac{\hbar^3(4\pi\epsilon_0)^2}{me^4}$	$2,4 \cdot 10^{-17} \text{ s}$
Energie	$E_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}$	$\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2}$	$27,2 \text{ eV}$
Ruhenergie $mc^2 = E_0/\alpha^2 = 1,87 \cdot 10^4 \text{ a.e.}$			
Drehimpuls	$l_0 = ma_0v_0$	\hbar	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Elekt. Feld	$\mathbf{E}_{\text{at}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2}$	$\frac{m^2 e^5}{(4\pi\epsilon_0)^3 \hbar^4}$	$5,1 \cdot 10^{11} \text{ V/m}$
Elekt. Dipolmoment	$d_0 = ea_0$	$\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me}$	$0,85 \cdot 10^{-29} \text{ C m}$
Magn. Feld	$\mathbf{B}_{\text{at}} = \mathbf{E}_{\text{at}}/v_0$	$\frac{m^2 e^3}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3}$	$2,3 \cdot 10^5 \text{ T}$
B -Feld am Kern $\mathbf{B} = 2\mathbf{E}_{\text{at}}/c = 2\alpha^2 \mathbf{B}_{\text{at}} = 10^{-4} \text{ a.e.}$			
Magn. Dipolmoment	μ_{at}	$e\hbar/m$	$1,85 \cdot 10^{-23} \text{ J/T}$
Bohr-Magneton $\mu_B = \mu_{\text{at}}/2 = 1/2 \text{ a.e.}$			

Tabelle 14.1. Atomare oder natürliche Einheiten (a.e.)

$$e = (e^2/4\pi\epsilon_0)^{1/2} = m_{\text{el}} = \hbar = 1 \text{ und } \alpha = 1/137,04$$

verwenden, um die Rydbergenergie aus (14.2) nach

$$E_{\text{Ryd}} = \frac{1}{2}\alpha^2 mc^2$$

auszudrücken, der Ruhenergie $mc^2 = 511 \text{ keV}$ des Elektrons.

Bohr-Radius und Rydbergenergie geben uns charakteristische Skalen für die physikalischen Größen Länge, Zeit, Geschwindigkeit usw. bei atomaren, d. h. mikroskopischen Dimensionen. Man spricht auch von *natürlichen* oder *atomaren Einheiten*. In Tabelle 14.1 sind wichtige Beispiele zusammengestellt.

14.2 Das Wasserstoffatom nach Schrödinger

14.2.1 Das Kepler-Problem im Coulombfeld

Zwar verliert die klassische Mechanik auf mikroskopischer Skala ihre Gültigkeit, wichtige Grundsätze oder, genauer gesprochen, Erhaltungsgrößen wie z. B. der Drehimpuls behalten aber Ihre Bedeutung. Deshalb lohnt es sich, einige Ergebnisse der Bewegung in Zentralfeldern (s. Abschn. 1.7.4) am Beispiel des Coulomb-Feldes in Erinnerung zu rufen.

Nach dem Rutherford-Modell bewegt sich das atomare Elektron mit der Masse m und Ladung $q = -e$ im Coulombpotential $\Phi(r)$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (14.4)$$

des Atomkerns mit Masse M und Ladung $Q = Ze$, wobei Z die Kernladungszahl ist. Die klassische Physik nach Newton beschreibt die Bewegung des Elektrons nach der Gleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{p}} = -\nabla\Phi(\mathbf{r}),$$

und muss bei mikroskopischen Skalen durch die Schrödinger-Gleichung ersetzt werden. Die Newton-Gleichung kann bekanntlich einmal integriert werden ($m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}m\dot{\mathbf{r}}^2$),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2\right) = -\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}),$$

und drückt darin die Energieerhaltung des Systems aus,

$$\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \Phi(\mathbf{r}) = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{ges}}.$$

Wenn die Gesamtenergie negativ ist, sind die Zustände gebunden und wir gewinnen mit

$$E_{\text{Bin}} = \frac{p^2}{2m} + \Phi(\mathbf{r}) \tag{14.5}$$

eine Form, die ganz analog in der quantenmechanischen Behandlung auftritt.

Aus der klassischen Physik ist ferner bekannt, dass im Zentralfeld ($\mathbf{F}_{\text{Coul}} = -q\nabla\Phi(\mathbf{r}) = -Ze^2/4\pi\epsilon_0 r \cdot \mathbf{e}_r$) der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_\perp$ erhalten ist. Mit $\mathbf{p} = p_r\mathbf{e}_r + \mathbf{p}_\perp$ findet man nach kurzer Rechnung eine überschaubare eindimensionale Bewegungsgleichung für die r -Koordinate,

$$\frac{m}{2}\dot{r} + \frac{L^2}{2mr^2} + \Phi(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \Phi_{\text{eff}}(r) = E_{\text{Bin}}. \tag{14.6}$$

Die Bewegung klassischer gebundener Teilchen im Coulomb-Potential findet also auf Keplerbahnen (Kreisen und Ellipsen) statt. Im eindimensionalen Bild (Abb. 14.3) pendelt das Teilchen zwischen den so genannten **klassischen Umkehrpunkten**.

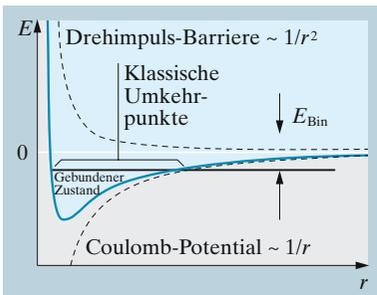


Abb. 14.3. Effektives Potential aus Coulomb-Potential und Drehimpuls-Barriere

14.2.2 Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom

Das Wasserstoffatom muss nach den Regeln der Quantenphysik behandelt werden. Wenn wir die klassischen Größen Energie und Impuls mit den Regeln $E \rightarrow i\hbar\partial/\partial t$ und $\mathbf{p} \rightarrow i\hbar\nabla$ ersetzen, gewinnen wir direkt aus (14.5) die vollständige Schrödinger-Gleichung,

$$i\hbar\dot{\psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\psi(\mathbf{r}, t). \tag{14.7}$$

Während die Koordinaten $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)\}$ als Lösungen der Newton-Gleichung die Trajektorie des Elektrons angeben, bilden $\{\psi(\mathbf{r}, t), \nabla\psi(\mathbf{r}, t)\}$ die Lösungen der Schrödinger-Gleichung. Die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t)$ wird als Amplitude der elektronischen Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\mathbf{r}, t)$

interpretiert,

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = P(\mathbf{r}, t).$$

Da die Gesamtwahrscheinlichkeit, das Elektron im Gesamtvolumen V zu finden, eins sein muss, wird die Wellenfunktion nach

$$\int_V |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = \int_V P(\mathbf{r}, t) dV = 1$$

normiert. Der Gradient der Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\nabla \psi(\mathbf{r}, t)$.

Die Energieerhaltung des klassischen Problems entspricht hier der Separierbarkeit der Zeitabhängigkeit, $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-iEt/\hbar)$. Für stationäre Lösungen erhalten wir das bekannte Eigenwertproblem der Quantenmechanik mit dem Hamilton-Operator \hat{H} ,

$$E\psi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \Phi(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) = \hat{H}\psi(\mathbf{r}), \quad (14.8)$$

dessen Lösungen das Energiespektrum des Wasserstoffatoms ergeben. Wenn die Wellenfunktion eines stationären Zustandes bekannt ist, kann man seine Energie berechnen nach

$$\langle \hat{H} \rangle = \int_V \psi^*(\mathbf{r}) \hat{H} \psi(\mathbf{r}) dV = E \int_V \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) dV = E.$$

Skizze

Reduktion auf ein Einteilchen-Problem Das Wasserstoff-Atom besteht aus zwei Teilchen, und muss im Prinzip durch eine gemeinsame Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}_{\text{el}}, \mathbf{r}_{\text{p}})$ für die Koordinaten von Elektron und Proton beschrieben werden. Man muss die vollständige stationäre Schrödinger-Gleichung lösen mit dem Hamilton-Operator,

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}_{\text{el}}, \mathbf{r}_{\text{p}}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\text{el}}^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\text{p}}^2 + \Phi_{\text{el-p}}(\mathbf{r}_{\text{el}} - \mathbf{r}_{\text{p}}) \right) \psi(\mathbf{r}_{\text{el}}, \mathbf{r}_{\text{p}}),$$

man kann aber ganz analog zur klassischen Mechanik diese Gleichung separieren, indem man auf Schwerpunkts- (\mathbf{r}_{CM}) und Relativkoordinaten (\mathbf{r}) nach

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = (m_{\text{p}}\mathbf{r}_{\text{p}} + m_{\text{el}}\mathbf{r}_{\text{el}}) / (m_{\text{p}} + m_{\text{el}}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{el}} - \mathbf{r}_{\text{p}}$$

transformiert. Im Schwerpunktsystem lautet die Schrödinger-Gleichung nun mit der **reduzierten Masse** $\mu = (m_{\text{el}}^{-1} + m_{\text{p}}^{-1})^{-1}$

$$E\psi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \Phi(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}).$$

Die Rydberg-Energie (14.2) bzw. die zugehörige Rydberg-Konstante R_{∞} wird dann ersetzt durch die Rydberg-Konstante R_{μ} zur reduzierten Masse μ ,

$$R_{\mu} = \frac{\mu e^2}{8\epsilon_0 h^2}. \quad (14.9)$$

Drehimpuls im Wasserstoffatom. Der Differential-Operator $-\hbar^2 \nabla^2 / 2m$, der die kinetische Energie repräsentiert, erschwert mathematisch gesehen die Behandlung der Schrödinger-Gleichung. Das zentralsymmetrische Problem wird sinnvollerweise in Kugelkoordinaten formuliert:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right).$$

Der allein von (θ, ϕ) abhängige Teil entspricht gerade dem **Drehimpulsoperator** $\hat{L} = \hbar \hat{l} = \hat{r} \times \hat{p}$ und

$$\frac{1}{\hbar^2} \hat{L}^2 = \hat{l}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

wie man durch Nachrechnen, etwa durch komponentenweise Transformation von kartesischen auf Kugelkoordinaten, $\hat{L}_{xyz} \rightarrow \hat{L}_{r\theta\phi}$, zeigen kann. Die z -Komponente von \hat{L} , $\hat{L}_z(\phi) = -i\hbar \partial / \partial \phi$, ist besonders einfach und hängt nur von ϕ ab. Zu den Drehimpulsoperatoren gehören Eigenwertgleichungen, die die **Drehimpulsquantenzahlen** l und m festlegen,

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 Y_{lm} &= \hbar^2 l(l+1) Y_{lm} \\ \text{Bahndrehimpuls-Quantenzahl } l &= 0, 1, 2, \dots \\ \hat{L}_z Y_{lm} &= \hbar \hat{l}_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm} \\ \text{Magnetische Quantenzahl } m &= -l, -(l-1), \dots, (l-1), l \end{aligned} \tag{14.10}$$

Lösungen sind die so genannten **Kugelflächenfunktionen** (engl. *spherical harmonics*) (Abb. 14.4)

$$Y_{lm} = C_{lm} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta).$$

Tabelle 14.2. Assoziierte Legendre-Polynome $P_l^m(\cos \theta)$

$l =$	0	1	2
$m = 0$	1	$\cos \theta$	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
$m = \pm 1$		$\sin \theta$	$3 \cos \theta \sin \theta$
$m = \pm 2$			$3 \sin^2 \theta$

Darin bezeichnet $P_l^m(x)$ die **assoziierten Legendre-Polynome**, die für die niedrigsten Quantenzahlen in Tabelle 14.2 gegeben sind. Die Funktionen sind normiert mit

$$C_{lm} = (-)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

(14.11)

und

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d(\cos \theta) Y_{lm}^* Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Sowohl die z -Komponente des Drehimpulses als auch sein Betrag sind Konstanten der Bewegung, denn \hat{L}^2 und \hat{L}_z haben gemeinsame Eigenfunktionen. Das gilt jedoch – im Gegensatz zur klassischen Mechanik – nicht für \hat{L}_x und \hat{L}_y . Die geometrische Form der Wellenfunktionen veranschaulicht man sich am einfachsten mit einem geeigneten Programm der Computeralgebra. Für $l = m = 0$ finden wir eine vollkommen isotrope Verteilung ($Y_{00} = 1$), für alle anderen Drehimpulskonfigurationen eine auch azimuthal modulierte Verteilung. Sie besitzt $l - m$ Knotenflächen auf Kugelflächen. Im Unterschied zur klassischen Physik kann der Drehimpuls

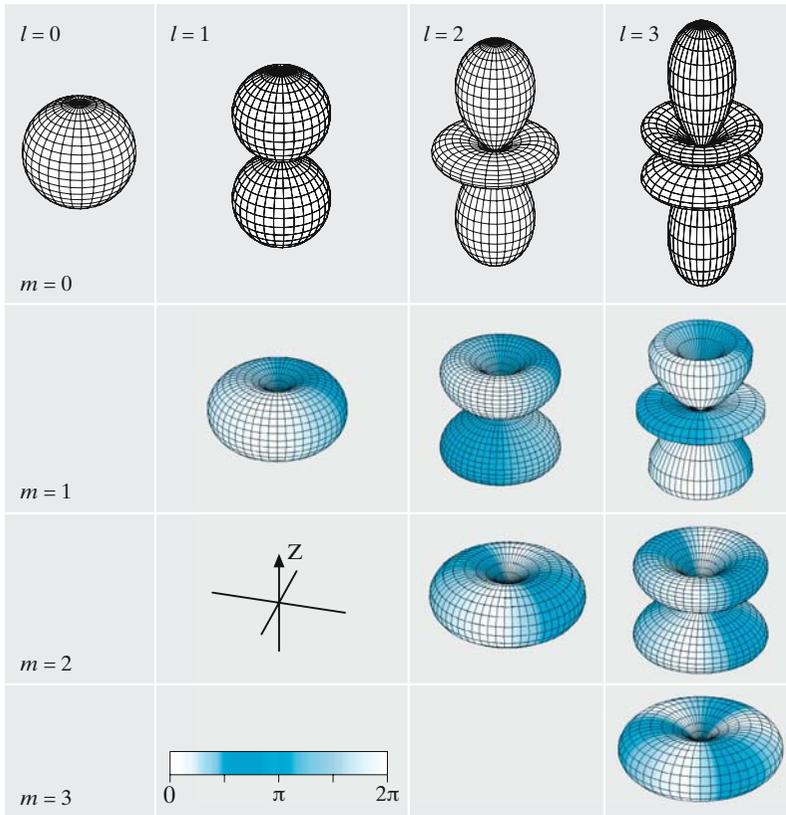


Abb. 14.4. Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi)$. Die Phasenabhängigkeit ist mit der weiß-blauen Farbskala veranschaulicht

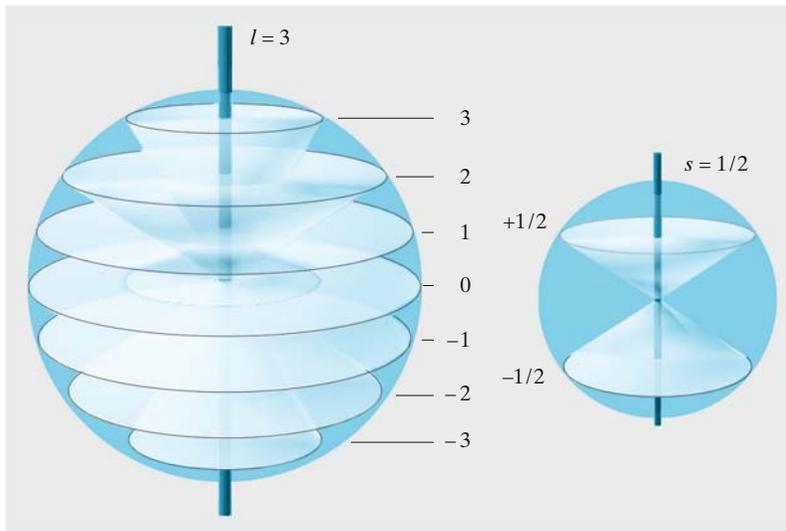


Abb. 14.5. Richtungsquantelung des Drehimpulses im Vektormodell

nicht in beliebige Richtungen zeigen, man spricht von **Richtungsquantelung** (Abb. 14.5), die mit dem Stern-Gerlach-Experiment (s. u.) bewiesen wurde.

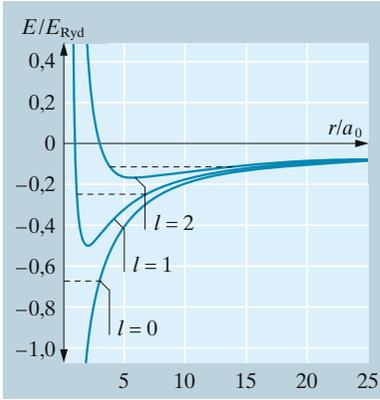


Abb. 14.6. Das effektive Potential des Wasserstoff-Atoms für die niedrigsten Drehimpuls-Quantenzahlen. Die gestrichelten Linien deuten die Lage der energetisch niedrigsten Quantenzustände zu den jeweiligen Drehimpulsquantenzahlen an

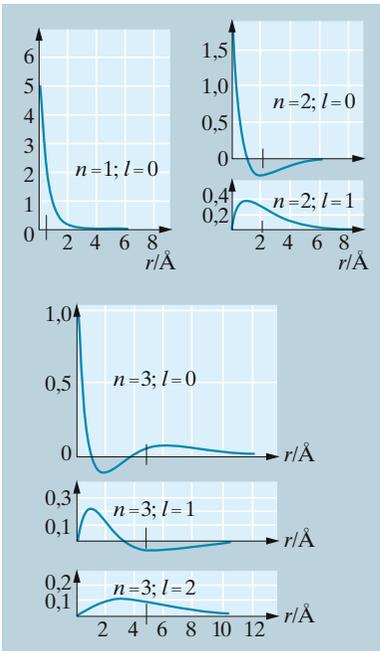


Abb. 14.7. Die Radialwellenfunktionen R_{nl} des Wasserstoffatoms

Tabelle 14.3. Assoziierte Laguerre-Polynome $L_m^k(\rho)$

$$L_0^k = 1 \quad L_1^k = -x + k + 1$$

$$L_2^k = \frac{1}{2} (x^2 - 2(k+2)x + (k+2)(k+1))$$

Die radiale Schrödinger-Gleichung. Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung (14.8) zerfallen nun in ein Produkt aus Radial- und Winkelanteilen, $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$, man sagt, sie sei *separierbar*,

$$ER(r)Y(\theta, \phi) = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + \Phi(r) \right) R(r)Y(\theta, \phi). \quad (14.12)$$

Die Wirkung des Drehimpulsoperators \hat{L}^2 kann nach (14.10) durch dessen Eigenwert ersetzt werden,

$$ER(r) = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + \Phi(r) \right) R(r), \quad (14.13)$$

und wir müssen nur noch die radialen Lösungen finden. Weil das effektive Potential (Abb. 14.6) und daher (14.13) von der Drehimpulsquantenzahl l abhängt, muss auch die **radiale Wellenfunktion** $R_{nl}(r)$ davon abhängen, und um die Lösungen zu nummerieren, haben wir auch schon die **Hauptquantenzahl** n eingeführt.

Üblicherweise vereinfacht man weiter $R_{nl}(r) := u_{nl}(r)/r$ und konstruiert die Gesamtwellenfunktion aus dem Produkt

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (14.14)$$

Die Normierung erhält dann die einfache Form, $\int_0^\infty u^*(r)u(r) dr = 1$. Die radialen Wellenfunktionen können wir wieder als Wahrscheinlichkeitsamplituden interpretieren,

- $|u(r)|^2$: Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einer Kugelschale dr bei r ,
- $|R(r)|^2$: Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem Volumenelement $dr d\theta d\phi$,

und die radialen Lösungen (Abb. 14.7, Tabelle 14.3) lauten

$$R_{nl}(\rho) = u_{nl}(\rho)/\rho = C_{nl} \rho^l e^{-\rho/2} L_{n-l-1}^{2n+1}(\rho) \quad (14.15)$$

mit $n \geq l + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Tabelle 14.4. Radiale Wellenfunktionen für das Wasserstoffatom

l	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0	$R_{10} = \frac{C_0}{1/2} e^{-\rho/2}$	$R_{20} = \frac{C_0}{\sqrt{8}} e^{-\rho/2} (2 - \rho)$	$R_{30} = \frac{C_0}{\sqrt{243}} e^{-\rho/2} ((\rho - 3)^2 - 3)$
1		$R_{21} = \frac{C_0}{\sqrt{24}} e^{-\rho/2} \rho$	$R_{31} = \frac{C_0}{\sqrt{486}} e^{-\rho/2} \rho(4 - \rho)$
2			$R_{32} = \frac{C_0}{\sqrt{2430}} e^{-\rho/2} \rho^2$

$$\rho = 2Zr/na_0, \quad C_0 = (Z/a_0)^{3/2}$$

mit dem normierten Radius ρ und dem Normierungsfaktor C_{nl}

$$\rho = 2r/na_0 \quad \text{und} \quad C_{nl} = \left(\frac{2n(n+l)!}{(n-l-1)!} \right)^{-1/2} .$$

Die Funktionen $L_m^k(\rho)$ heißen (assoziierte) **Laguerre-Polynome** und sind in Tabelle 14.3 und in Tabellenwerken der Mathematik zu finden. In Tabelle 14.4 sind die radialen Wellenfunktionen für die niedrigliegenden **Wasserstoff-Orbitale** angegeben.

14.2.3 Quantenzahlen, Spektrum und Energiediagramm

Wir haben bisher drei **Quantenzahlen des Wasserstoffatoms** gefunden,

- Hauptquantenzahl $n = 1, 2, 3, \dots$,
- Drehimpulsquantenzahl $0 \leq l \leq n - 1$,
- Magnetische Quantenzahl $-l \leq m \leq l$.

Mit der Gesamtlösung wird auch die exakte Lage der Energieniveaus festgelegt. Es ist bemerkenswert, dass die Energieniveaus des Wasserstoffatoms gar nicht von den Drehimpulsquantenzahlen (l, m) abhängen, das **Rydberg-Gesetz** berücksichtigt allein die Hauptquantenzahl n und die Rydberg-Konstante R_μ zur reduzierten Masse μ nach (14.9),

$$E_{nlm} = E_n = -\frac{R_\mu}{n^2} . \tag{14.16}$$

Man sagt, die Lösungen der Schrödinger-Gleichung sind in der Drehimpulsquantenzahl *entartet* (Abb. 14.8); der Entartungsgrad g lässt sich hier

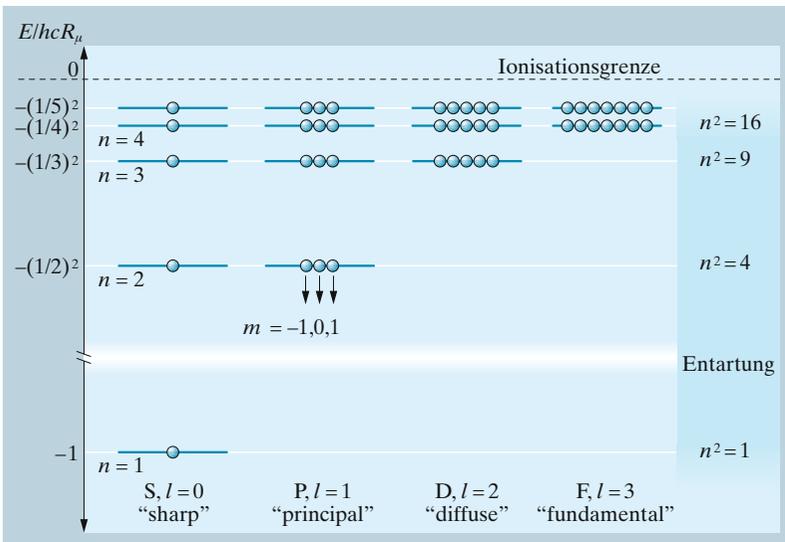
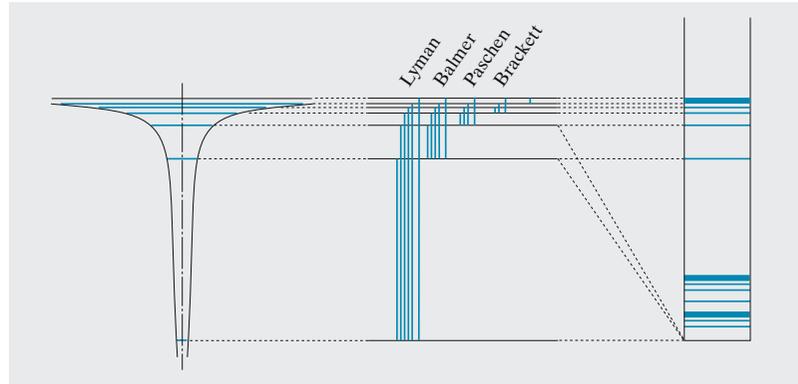


Abb. 14.8. Energiediagramm des Wasserstoffatoms. Die Punkte symbolisieren die jeweils erlaubten magnetischen Quantenzahlen $-l \leq m \leq l$

Abb. 14.9. Spektralserien im Wasserstoffatom. *Links* der Coulomb-Topf mit den stationären Energiezuständen. *In der Mitte* die möglichen Übergänge, nach Spektralserien geordnet. *Rechts* die Spektralserien im Frequenzspektrum



sofort angeben, wobei jeder elektronische Zustand wegen der noch einzuführenden Spinquantenzahl doppelt zu nehmen ist:

$$g = 2n^2.$$

Das Analogon in der klassischen Newton-Gleichung (14.5) ist das Auftreten geschlossener Bahnen.

Wir können aus (14.16) unmittelbar ableiten, dass die spektralen Serien (Abb. 14.9) den Gesetzen

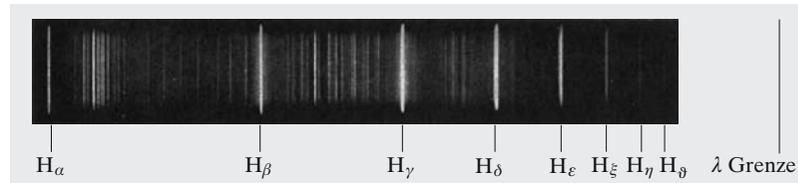
$$\text{Lyman-Serie} \quad \nu_{1n} = \frac{R_H}{h} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad n \geq 2,$$

$$\text{Balmer-Serie} \quad \nu_{1n} = \frac{R_H}{h} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n \geq 3,$$

$$\text{Paschen-Serie} \quad \nu_{1n} = \frac{R_H}{h} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n \geq 4$$

usw. folgen. Im Experiment dominiert die **Spektralserie**, die im Grundzustand endet, für Wasserstoff (Abb. 14.10) die dort allerdings wegen der sehr kurzen Wellenlängen technisch schon schwierig zu beobachtende Lyman-Serie. Die Übergänge der Haupt- oder P-Serie (*principal*) enden in den Zuständen mit $l = 1$, die aus diesen historischen Gründen den Namen „P-Zustände“ erhalten haben. Die Drehimpulszustände mit $l = 0$ werden entsprechend als S-Zustände bezeichnet, weil die Spektralserie von $(n, l) = (2, 1) \rightarrow (n', 0)$ „scharfe“ Linien lieferte, im Gegensatz zur „diffusen“ D-Serie $((2, 1) \rightarrow (n', 2))$. Die F-Serie (*fundamental*) $((3, 2) \rightarrow (n', 3))$ hat den Zuständen mit $l = 3$ den Namen gegeben, für höhere Drehimpulse werden alphabetische Bezeichnungen g, h, \dots verwendet.

Abb. 14.10. Balmer-Spektrum aus einer Hochfrequenzentladung in Wasserstoff. Die Linien zwischen den Balmer-Linien werden von molekularem Wasserstoff (H_2) verursacht. Die Beobachtung der Lyman-Serie, die im Grundzustand des Wasserstoffatoms endet, ist wegen der kurzen UV-Wellenlängen ($\lambda < 121 \text{ nm}$) experimentell sehr viel aufwändiger



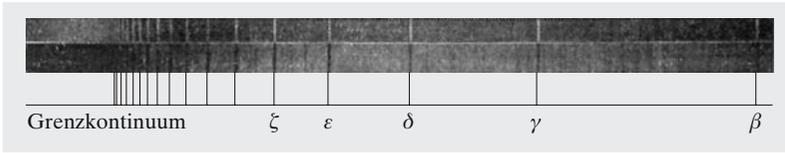


Abb. 14.11. Balmer-Serie (ohne H α) in Emission und Absorption in den Spektren der Sterne γ Cassiopeiae und α Cygni (Deneb). (Aus R. W. Pohl: *Einführung in die Physik*, Band 3: Optik und Atomphysik, 13. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

Bei genauerer Untersuchung atomarer Spektren stellt sich heraus, dass die Linien i. Allg. aus Multipletts bestehen, die in äußeren Feldern aufgespalten werden und die Einführung einer weiteren, drehimpulsartigen Quantenzahl erfordern, nämlich der Spin-Quantenzahl s .

Weil sie die häufigsten Elemente im Kosmos sind, spielen die Spektren von Wasserstoff und Helium in der Astronomie eine große Rolle (Abb. 14.11). Bei genauer Kenntnis der atomaren Spektren kann man zum Beispiel aus der Doppler-Verschiebung Informationen über die Geschwindigkeit von Sternen oder kosmischen Gasen gewinnen.

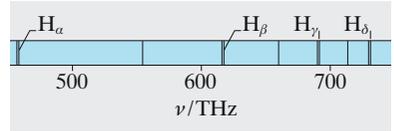


Abb. 14.12. Spektrum einer Funkenentladung in He mit etwas H-Beimischung. Jede zweite Linie der Pickering-Serie des He $^{+}$ wird von einer Balmer-Linie des H begleitet. Der Abstand jedes Linienpaares ist aus zeichnerischen Gründen vervierfacht

14.2.4 Aufhebung der l -Entartung: Einelektronenatome

Die hohe Entartung der l -Quantenzahl (Entartungsfaktor n^2) im Wasserstoff-Spektrum ist eine Folge der hohen Symmetrie des Coulomb-Potentials, die sich auch in der Existenz geschlossener klassischer Bahnen äußert. Jede noch so kleine Störung hebt diese Entartung aber auf, und die Rolle der Drehimpulsquantenzahlen wird schnell deutlich. Das Coulomb-Potential wird zum Beispiel durch den Ionenrumpf der Atome mit $Z > 1$ nachhaltig gestört, sodass dort die l -Entartung vollständig aufgehoben ist.

Die Alkali-Atome (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr) ebenso wie die Edelmetall-Atome (Cu, Ag, Au) sind dem Wasserstoff sehr ähnlich (Abb. 14.13), sie besitzen ein einzelnes „Leucht“-Elektron, das sich im Wesentlichen außerhalb eines viel kleineren Ionenrumpfes aufhält. Die Spektralserien bzw. Energiediagramme dieser Atome folgen in guter Näherung einem Gesetz

$$E_{nl} = -\frac{R_{\text{Atom}}}{(n - \delta_l)^2},$$

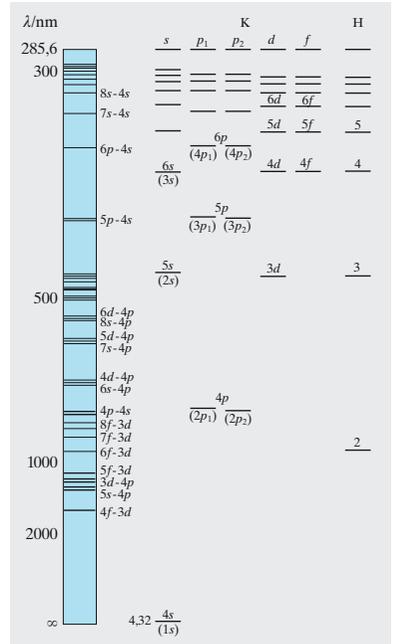


Abb. 14.13. Spektrum und Termleitern des Kaliumatoms. Rechts zum Vergleich die Termleiter des Wasserstoffs

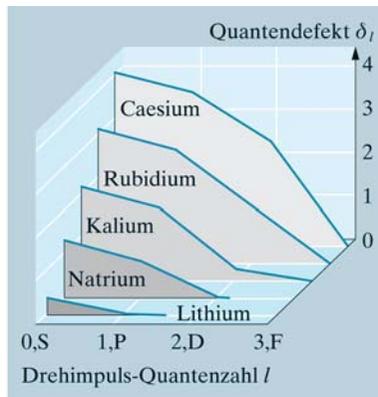
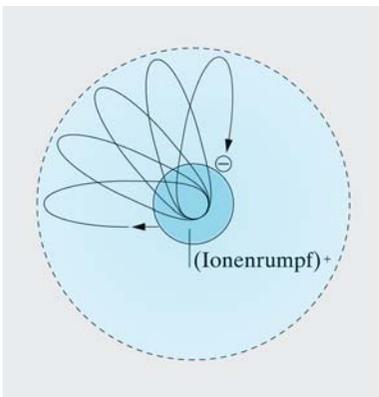


Abb. 14.14. Aufhebung der l -Entartung und Quantendefekte der Alkaliatome. Im linken Trajektorienmodell werden die Kepler-Ellipsen des reinen Coulomb-Potentials durch den Ionenrumpf deformiert

das ganz ähnliche Form wie beim Wasserstoff (14.16) hat. Der Einfluss des Ionenrumpfes ist auf eine Konstante δ_l reduziert, die nur noch von der Drehimpuls-Quantenzahl abhängt (Abb. 14.14).

14.3 Magnetismus von Atomen

14.3.1 Stern-Gerlach-Experiment

Im Jahr 1921 haben *Otto Stern* (1888–1969, Nobelpreis 1943) und *Walter Gerlach* (1889–1979) in Hamburg eines der berühmtesten Experimente zur Atom- und Quantenphysik publiziert, das heute ganz allgemein mit ihrem Namen verknüpft ist. Sie untersuchten die Ablenkung eines Atomstrahls von neutralen Silberatomen – geeignete Vakuum-Apparaturen waren übrigens erst im Jahrzehnt zuvor verfügbar geworden – in einem inhomogenen Magnetfeld (Abb. 14.15). Während die klassische Physik eine breite thermische Verteilung vorhersagt, beobachteten sie eine Aufspaltung des Strahls (Abb. 14.16) in zwei Komponenten.

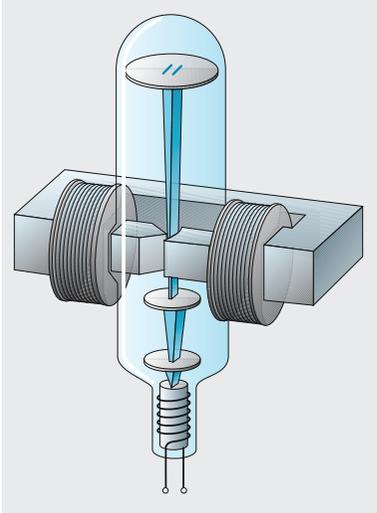


Abb. 14.15. Apparatur zur Untersuchung der Richtungsquantelung von Atomen im inhomogenen Magnetfeld nach *Stern* und *Gerlach* (schematisch)

Ergebnisse des Stern-Gerlach-Experiments sind:

- der Beweis für die **Richtungsquantelung** des Drehimpulses,
- eine Messung des magnetischen Moments des Ag-Atoms.

14.3.2 Magnetisches Moment eines Atoms

Wie in einem klassischen Stromkreis verursachen auch die Bewegungen der atomaren Elektronen ein Magnetfeld. In der klassischen Elektrodynamik ist mit einem ebenen Kreisstrom I bekanntlich ein magnetisches Dipolmoment verknüpft (Abschn. 7.2.5),

$$\mu = I \cdot A .$$

Der Flächenvektor A steht senkrecht auf der Bahnebene und ist parallel und proportional zum Drehimpuls L . Auf dieses Dipolmoment wirkt im äußeren Magnetfeld B das Drehmoment

$$\tau = \mu \times B .$$

Darüber hinaus ist mit dem Dipolmoment eine magnetische Energie („Einstellenergie“) verbunden,

$$V_{\text{mag}} = -\mu \cdot B . \tag{14.17}$$

Mit einer kleinen Analogiebetrachtung können wir den Operator des atomaren magnetischen Moments erraten: Den atomaren Kreisstrom können wir aus der Umlauffrequenz berechnen, $I = q/T_{\text{Umlauf}} = -e\omega/2\pi$, der Drehimpuls wird nach $|L| = m\omega r^2$ berechnet und ist proportional zur Fläche $A = \pi r^2$. Das magnetische Moment beträgt dann $\mu = -e\omega/2\pi \cdot \pi r^2 = -(e/2m)m\omega r^2 = -(e/2m)|L|$.

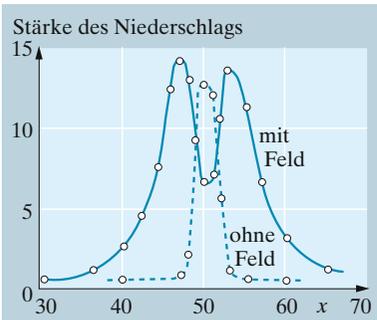


Abb. 14.16. Niederschlagsdichte auf dem Detektor beim Stern-Gerlach-Versuch

Den Operator des **magnetischen Dipolmoments** können wir dann angeben nach

$$\hat{\mu} = -\frac{e}{2m}\hat{L} = -\frac{e\hbar}{2m}\hat{l} . \tag{14.18}$$

Magnetisches Moment und Drehimpuls, deren Verhältnis **Bohr-Magneton** genannt wird,

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$$

sind per Konvention antiparallel ausgerichtet.

Wegen der Verknüpfung des Kreiselobjekts mit dem Magnetismus spricht man auch von einem **Gyromagneten**. Bei genauerer Analyse wird noch ein weiterer Faktor, der so genannte **Landé-** oder **g-Faktor**, benötigt,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = -g\mu_B\hat{\boldsymbol{L}}.$$

Wie wir noch sehen werden, sind die g -Faktoren der Quantenmechanik ganzzahlig oder rational. Erst die Quantenelektrodynamik (QED) kann kleine Abweichungen erklären, die in den berühmten $(g-2)$ -Experimenten beobachtet werden.

14.3.3 Präzession im Magnetfeld

Es ist bekannt, dass klassische Gyromagneten unter der Wirkung eines äußeren, homogenen Magnetfeldes präzedieren, d. h. es ändert sich die Richtung, nicht aber der Betrag des Drehimpulses $|\boldsymbol{L}^2|$:

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B} = -\frac{\mu_B}{\hbar}(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}).$$

Um die Änderungsrate $\omega_L = d\Phi/dt$ zu bestimmen, betrachten wir ein magnetisches Feld in z -Richtung ($\boldsymbol{B} = B_z\boldsymbol{e}_z$) und erhalten komponentenweise

$$\frac{d}{dt}L_x = -\frac{\mu_B}{\hbar}L_yB_z = -\omega_L L_y \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}L_y = \omega_L B_z.$$

Dabei haben wir schon die **Larmor-Frequenz**

$$\omega_L = \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}}{\hbar} = \frac{g_L\mu_B B_z}{\hbar} = \gamma B_z \quad (14.19)$$

verwendet. Der Faktor $\gamma = g_L\mu_B/\hbar$ heißt **gyromagnetisches Verhältnis** und wird uns als magnetische Einstellenergie beim normalen Zeeman-Effekt begegnen.

14.3.4 Spektrum im Magnetfeld, der normale Zeeman-Effekt

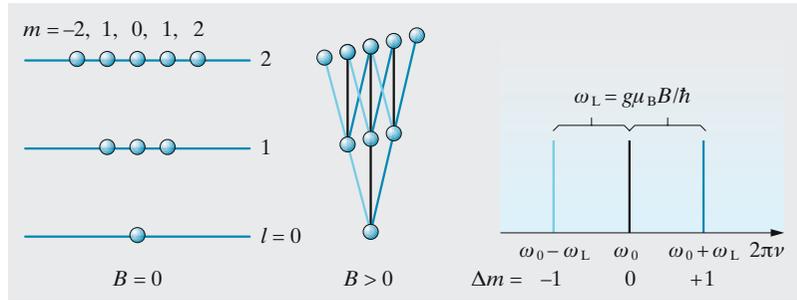
Wir können vermuten, dass der Hamilton-Operator des Atoms ohne äußeres Feld

$$\hat{H}_{\text{frei}} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + \Phi(\boldsymbol{r}),$$

um den Operator der magnetischen Dipolenergie V_{mag} aus (14.17,14.18) ergänzt werden muss,

$$\hat{H}_{\text{B-Feld}} = \hat{H}_{\text{frei}} - \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{B}. \quad (14.20)$$

Abb. 14.17. Aufspaltung einer Spektrallinie beim normalen Zeeman-Effekt



In einer genaueren Theorie müssen wir aber die kanonischen Impulse ($\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{p} + e\mathbf{A})$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) verwenden,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{B-Feld}} &= \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + \Phi(\mathbf{r}) \\ &= \hat{H}_{\text{frei}} + \frac{e}{2m} (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \frac{e^2}{2m} A^2. \end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass wir genau den Operator (14.20) erhalten, wenn wir den diamagnetischen Beitrag (wegen $eA \ll p$ für typische atomare Zustände) vernachlässigen und die Energie des freien Atoms nur noch um den Störungsbeitrag des Zeeman-Operators

$$\hat{V}_{\text{Zee}} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B} = g\mu_B \hat{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{B} = g\mu_B \hat{l}_z B_0$$

ergänzen, wobei wir im letzten Schritt schon die spezielle Wahl $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ getroffen haben. Erfreulicherweise kennen wir die Wellenfunktionen für l_z schon und können die Energieverschiebungen in den atomaren Zuständen (14.14) direkt ausrechnen:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{Zee}} &= \langle g\mu_B \hat{l}_z B_0 \rangle = g\mu_B B_0 \int_V \psi_{nlm}^* \hat{l}_z \psi_{nlm} dV \\ &= g\mu_B B_0 \cdot m_l = \gamma B_0 \cdot m_l = \hbar \omega_L \cdot m_l. \end{aligned} \tag{14.21}$$

In der formalen Quantenmechanik entspricht der Umstand, dass die Eigenfunktionen zum Hamilton-Operator des freien Atoms auch Lösungen des Zeeman-Operator sind, der so genannten **Vertauschbarkeit der Operatoren**:

$$[\hat{H}_{\text{frei}}, \hat{V}_{\text{Zee}}] = 0 = \int_V \psi_{nlm}^* (\hat{H}_{\text{frei}} \hat{V}_{\text{Zee}} - \hat{V}_{\text{Zee}} \hat{H}_{\text{frei}}) \psi_{nlm} dV.$$

Man erwartet nach dieser Theorie des Zeeman-Effekts, die übrigens ganz der klassischen Theorie eines Lorentz-Oszillators Aufgabe 14.3.3 im magnetischen Feld entspricht, eine Aufspaltung der atomaren Übergangsfrequenzen in Triplets. Die Dipol-Auswahlregel, die wir noch diskutieren müssen, erlaubt nämlich nur Übergänge mit $\Delta m = 0, \pm 1$.

Tatsächlich zeigen aber nur ganz wenige Atome wie z. B. Ca oder Yb diesen *normalen Zeeman-Effekt* (Abb. 14.18), Dubletts und Quartetts, die beim *anormalen Zeeman-Effekt* auftreten (s. Abschn. 14.4.4), sind viel häufiger als die Triplets. Diesem Umstand musste man durch zunächst

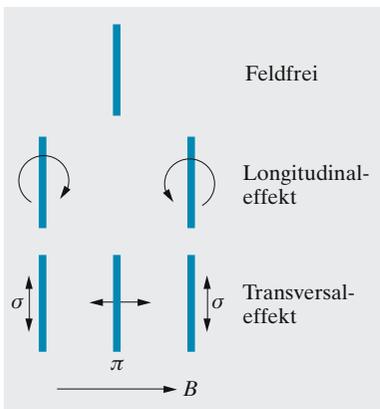


Abb. 14.18. Je nach der Beobachtungsrichtung beobachtet man beim normalen Zeeman-Effekt verschiedene Komponenten mit unterschiedlichen Polarisierungen

phänomenologische Einführung einer weiteren Quantenzahl, des elektronischen Spins, Rechnung tragen. Der Spin oder Eigendrehimpuls des Elektrons ist andererseits eine strenge Konsequenz der relativistischen Quantenmechanik und folgt aus der berühmten Dirac-Gleichung.

14.4 Elektronenspin und Feinstruktur

Es zeigte sich schon im Stern-Gerlach-Experiment, dass der Grundzustand des Silberatoms nicht 1,3 oder 5-fach aufspaltet, sondern in genau zwei Komponenten, die im Magnetfeld gleich stark nach oben und unten verschoben werden. Wir führen phänomenologisch einen Spinfreiheitsgrad ein, der durch die *Spinquantenzahl* (s, m_s) und die **Spinoperatoren** $\hbar\hat{\sigma}$ und $\hbar\hat{\sigma}_z$ charakterisiert wird. Die meisten atomaren Teilchen (Elektron, Positron, Proton, Neutron, Kerne, s. auch Tabelle 14.5) zeigen diesen Freiheitsgrad.

Das Elektron hat die

Spinquantenzahlen des Elektrons: $s = 1/2, \quad m_s = \pm 1/2.$

Der Spinoperator wirkt ausschließlich auf die Spinwellenfunktion χ_s , die wir in der Gesamtwellenfunktion $\psi_{nlm_l m_s} = \psi_{nlm_l} \chi_s$ neu einführen, und besitzt die schon bekannten Eigenschaften eines Drehimpulsoperators,

$$\hat{\sigma}^2 \chi_s = s(s+1) \chi_s \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_z \chi_s = m_s \chi_s.$$

Für den Spin 1/2 kommen nur die zwei m_s -Werte $\pm 1/2$ (kürzer auch einfach \pm) in Frage, wir führen daher die Normierungs- und Orthogonalitätsbedingungen

$$\chi_s(+)^* \chi_s(+) = \chi_s(-)^* \chi_s(-) = 1 \quad \text{und} \quad \chi_s(+)^* \chi_s(-) = 0$$

ein, die hier ohne Integration auskommen.

Das magnetische Moment des Elektrons definieren wir analog zu (14.18),

$$\hat{\mu}_s = -g_s \mu_B \mathbf{B} \cdot \hat{\sigma} \quad \text{mit} \quad g_s = 2,00 \dots \quad (14.22)$$

Der g_s -Faktor des Elektrons wird von der relativistischen Dirac-Gleichung mit exakt $g_s = 2$ vorhergesagt. Die Quantenelektrodynamik führt weitere, sehr kleine Korrekturen ein, die als **anomales magnetisches Moment** des Elektrons eine große Rolle bei der Entstehung der Quantenelektrodynamik gespielt haben. Der Wert $g_s = 2,002\,319\,2$ wurde in so genannten ($g - 2$)-Experimenten mit großer Präzision vermessen.

Mit diesen Definitionen kann man die magnetische Energieverschiebung in den Dubletten der Einelektronen-Atome korrekt beschreiben, wobei wir wieder $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ annehmen:

$$\begin{aligned} \langle -\hat{\mu}_s \cdot \mathbf{B} \rangle &= \int_{V, \Omega_s} \psi_{nlm}^* \chi_s^* \mu_s \cdot \mathbf{B} \psi_{nlm} \chi_s \, dV \\ &= g_s \mu_B B_0 \cdot \chi_s^* \hat{\sigma}_z \chi_s = m_s \cdot g_s \mu_B B. \end{aligned}$$

Tabelle 14.5. Gesamtdrehimpuls und magnetisches Gesamtmoment von Elektron, einfachen Kernen, Atomen und Molekülen

	Spindrehimpuls L_z	Magnetisches Dipolmoment
Elektron	$\frac{1}{2} \hbar$	$-1,001\,14 \mu_B$
Proton	$\frac{1}{2} \hbar$	$+2,79 \mu_K$
Neutron	$\frac{1}{2} \hbar$	$-1,91 \mu_K$
Deuteron	$1 \hbar$	$+0,86 \mu_K$
α -Teilchen	0	0
${}^7_3\text{Li}$ -Kern	$\frac{3}{2} \hbar$	$+3,26 \mu_K$
Ag	$\frac{1}{2} \hbar$	$1 \mu_B$
Dy^{3+}	$\frac{15}{2} \hbar$	$9,9 \mu_B$
O_2	$1 \hbar$	$1 \mu_B$

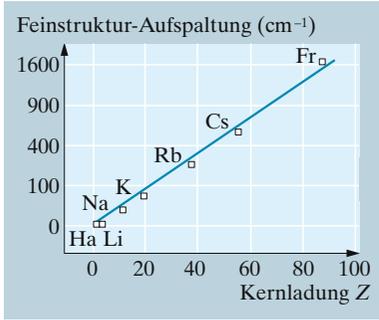


Abb. 14.19. Aufspaltung der Feinstruktur-Dubletten (${}^2P_{3/2}$ und ${}^2P_{1/2}$) von Ein-Elektronen-Atomen. Die gerade Linie zeigt die ungefähre Proportionalität zu Z^2

14.4.1 Magnetische Spin-Bahn-Kopplung

Der spektroskopische Befund für die Alkali-Atome ist in Abb. 14.19 vorgestellt. Die Dubletten in den P-, D- und F-Zuständen sind aufgespalten, und der Energieabstand wächst mit der Kernladungszahl ungefähr proportional zu Z^2 . Dieser ist selbst bei hochgeladenen Atomen ($Z \gg 1$) klein gegen die Energieabstände benachbarter elektronischer Zustände.

Untersuchungen im Magnetfeld zeigen, dass die einzelnen Komponenten im Magnetfeld unterschiedliche Aufspaltungen zeigen (s. Abschn. 14.3.4). Bis zur Entdeckung des Elektronenspins wurden phänomenologische Quantenzahlen $l \pm 1/2$ verwendet.

Homogene äußere Magnetfelder üben bekanntlich ein Drehmoment auf magnetische Momente aus, je nach deren Einstellung relativ zur Richtung des Magnetfeldes. Der Drehimpuls atomarer Elektronen erfährt aber auch schon ohne äußere Felder ein Drehmoment, weil die beiden Freiheitsgrade der Bahn und des Spins magnetisch gekoppelt sind. In einem viel verwendeten Modell mögen wir uns vorstellen, dass im Ruhssystem des Elektrons der Kern (mit seiner positiven Ladung) um das Elektron kreist und dort ein Magnetfeld hervorruft,

$$\mathbf{B}_{\text{SO}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{v} = \frac{1}{mc^2} \mathbf{E} \times \mathbf{p},$$

das gerade dem Bewegungs-Starkfeld entspricht (\mathbf{E} ist das elektrische Feld am Ort des Elektrons, \mathbf{v} seine Geschwindigkeit; dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man das Magnetfeld nach dem Biot-Savart'schen Gesetz ausrechnet.) Das magnetische Moment des Elektrons stellt sich in diesem Feld ein,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{SO}} &= -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B} = g_s \mu_B \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B} \\ &= 2 \frac{e\hbar}{2m} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{1}{mc^2} \mathbf{E} \times \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{E} = -\nabla\Phi(r)$ gilt $-e\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{p}} = -(\text{d}\Phi/\text{d}r)\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}/r = -\hbar(\text{d}\Phi/\text{d}r)\hat{\mathbf{l}}/r$ ($l \neq 0$) und wir finden

$$\hat{H}_{\text{SO}} = \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{\text{d}\Phi}{\text{d}r} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{l}}.$$

Dieses Ergebnis ist doppelt so groß wie der entsprechende Term nach der relativistisch korrekten Dirac-Gleichung. Die Berechnung ist aber noch unvollständig, weil sie im Ruhssystem des bewegten Elektrons ausgeführt wurde. Bei der Rücktransformation findet man aus der Lorentz-Transformation den fehlenden Faktor 1/2, die so genannte **Thomas-Korrektur**. Sie wird als *Thomas-Präzession* interpretiert, weil sich auch der Elektronenspin bei der Bewegung um den Kern gegenüber dem Laborsystem dreht. Die durch *Spin-Bahn-Kopplung* (in Anlehnung an die englische Sprache auch *Spin-Orbit-Kopplung*) verursachte Zusatzenergie nimmt daher die endgültige Form

$$\hat{H}_{\text{SO}} = \hat{\xi}(r) \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{l}} \quad (14.23)$$

an. Der $\hat{\xi}$ -Operator wirkt nur auf die Radialkoordinate und soll daher schon hier durch seinen Erwartungswert ersetzt werden, der dann i. Allg. von den Quantenzahlen $\{n, l\}$ abhängt,

$$\xi_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m^2c^2} \int_0^\infty dr u_{nl}^* \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} u_{nl}$$

an. Den Faktor $\xi_{nl}l/\mu_B$ können wir als effektives Magnetfeld am Ort des Elektrons deuten. Die Spin-Bahn-Kopplung verursacht danach eine Aufspaltung deren Größe proportional ist zu ξ_{nl} . Diesen Wert müssen wir selbst bei Eielektronen-Atomen i. Allg. aus dem Experiment entnehmen, wenn wir die Verschiebung der Zustände berechnen wollen, nur der Wasserstoff (s. Abschn. 14.4.3) bildet eine Ausnahme.

14.4.2 Gesamtdrehimpuls

Im ungestörten Atom (ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung) sind Energie, Drehimpuls und elektronischer Spin „gute“ Quantenzahlen $\{n, l, m_l, s, m_s\}$ mit Wellenfunktionen $\psi_{nlm_l}\chi_s$. Anders ausgedrückt vertauschen die zugehörigen Operatoren, d. h. $[\hat{H}_{\text{frei}}, \{\hat{l}^2, \hat{\sigma}^2, \hat{l}_z, \hat{\sigma}_z\}] = 0$. Die Störung durch die Spin-Bahn-Kopplung verursacht aber – wie erwartet – eine Präzession der Drehimpulskomponenten, d. h. wegen $[\hat{\sigma} \cdot \hat{l}, \hat{l}_z] \neq 0$ und $[\hat{\sigma} \cdot \hat{l}, \hat{\sigma}_z] \neq 0$ sind weder m_l noch m_s gute Quantenzahlen.

Wie man ohne Probleme nachrechnet, vertauscht aber die Summe der z-Komponenten $\hat{l}_z + \hat{\sigma}_z$ durchaus mit $\hat{\sigma} \cdot \hat{l}$ und legt es nahe, den Gesamtdrehimpuls $\hat{j} = \hat{l} + \hat{\sigma}$ als neue Erhaltungsgröße einzuführen:

Operator	Quantenzahlen
$\hat{j} = \hat{l} + \hat{\sigma}$	$\langle \hat{j}^2 \rangle = j(j+1)$
$\hat{j}_z = \hat{l}_z + \hat{\sigma}_z$	$\langle \hat{j}_z \rangle = m_j$ mit $-j \leq m_j \leq j$.

Die neuen Eigenfunktionen sind lineare Kombinationen (Superpositionen, Abb. 14.20) der schon bekannten Wellenfunktionen,

$$\psi_{nlsjm_j} = \sum_{m_l, m_s} C_{m_l, m_s}^j \psi_{nlm_l m_s} \quad \text{mit} \quad m_j = m_l + m_s. \quad (14.24)$$

Die Koeffizienten c_{m_l, m_s}^j heißen **Clebsch-Gordon-Koeffizienten**, sie sind tabelliert oder können mit geeigneten Programmen der Computeralgebra wie Maple[®] oder Mathematica[®] bestimmt werden.

Die Energieverschiebung durch die Spin-Bahn-Kopplung können wir aber ohne explizite Verwendung dieser Linearkombinationen gewinnen. Es gilt nämlich

$$\hat{j}^2 = (\hat{l} + \hat{\sigma})(\hat{l} + \hat{\sigma}) = \hat{l}^2 + \hat{\sigma}^2 + 2\hat{\sigma} \cdot \hat{l}$$

und damit kann die Spin-Bahn-Wechselwirkung auch nach

$$\xi_{nl} \hat{\sigma} \cdot \hat{l} = \frac{\xi_{nl}}{2} (\hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{\sigma}^2) \quad (14.25)$$

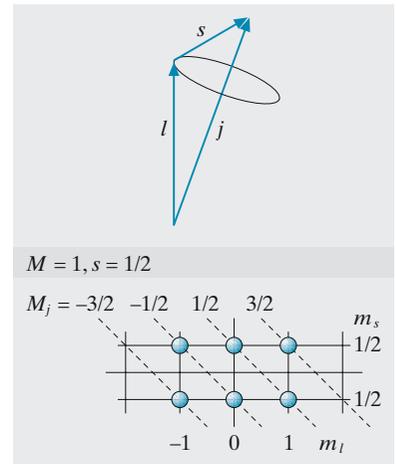


Abb. 14.20. Vektormodell der Spin-Bahn-Kopplung (links). Bei der l-s-Kopplung präzedieren Spin- und Bahndrehimpuls um den Gesamtdrehimpuls. Rechts: Erlaubte m_j -Zustände für einen $\{l = 1, s = 1/2\}$ -Zustand

berechnet werden. Die Energieverschiebung durch Spin-Bahn-Wechselwirkung ist proportional zu $\xi_{nl}\hat{\sigma} \cdot \hat{l}$ und kann allein mit den bekannten Quantenzahlen ausgerechnet werden,

$$\int \psi_{nlsjm_j}^* \xi_{nl} \hat{\sigma} \cdot \hat{l} \psi_{nlsjm_j} dV = \frac{\xi_{nl}}{2} (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)). \quad (14.26)$$

14.4.3 Feinstruktur im Einelektronen-Atom

Wir müssen nun feststellen, welche j -Werte bei gegebenen $\{l, s\}$ -Werten erlaubt sind, wobei ein klassisches Vektormodell die Resultate schon nahe legt:

$$\boxed{|l - s| \leq j \leq l + s}.$$

Offensichtlich tritt bei $l = 0$ gar keine Aufspaltung ein, es gibt nur einen möglichen Wert $j = s$. Bei allen anderen Werten sind im Einelektronen-Atom die beiden Werte $j = l \pm 1/2$ möglich.

Die spektroskopische Nomenklatur atomarer und anderer Energiezustände folgt weitgehend dem hier vorgestellten Schema, indem die drei wichtigen Drehimpulsgrößen $\{L, S, J\}$ zu einem Symbol zusammengefasst sind:

$$^{2S+1}L_J,$$

sodass wir für die Einelektronen-Atome folgende typische Bezeichnungen finden:

$$\begin{aligned} l = 0, \quad s = 1/2, \quad j = 1/2, \quad &^2S_{1/2}, \\ l = 1, \quad s = 1/2, \quad j = 1/2, \quad &^2P_{1/2}, \\ & \quad \quad \quad s = 1/2, \quad j = 3/2, \quad &^2P_{3/2}, \\ l = 2, \quad s = 1/2, \quad j = 3/2, \quad &^2D_{3/2}, \\ & \quad \quad \quad s = 1/2, \quad j = 5/2, \quad &^2D_{5/2}. \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad & \dots \end{aligned}$$

Bei Atomen mit mehr Elektronen werden die Drehimpulse ähnlich gekoppelt und nach demselben Schema benannt. Wir können nun auch den Wert der Aufspaltung nach Einsetzen in (14.26) angeben:

$$\begin{aligned} \langle \xi \hat{\sigma} \cdot \hat{l} \rangle_{j=l-1/2} &= -\frac{\xi_{nl}}{2} (l+1), \\ \langle \xi \hat{\sigma} \cdot \hat{l} \rangle_{j=l+1/2} &= \frac{\xi_{nl}}{2} l. \end{aligned}$$

Feinstruktur im Wasserstoff. Die Feinstruktur der Atome ist dem Grunde nach relativistischen Ursprungs und ergibt sich als direkte Konsequenz bei der Behandlung des Wasserstoffatoms nach der Dirac-Gleichung.

Skizze

Die Dirac-Gleichung. Die nach *Paul A. M. Dirac* (1902–1984) benannte Gleichung spielt in der Physik eine bemerkenswerte Rolle. Sie beschreibt relativistisch korrekt die Dynamik des Elektrons und damit insbesondere das Wasserstoff-Atom. Die Schrödinger-Gleichung (14.7) behandelt Raum- und Zeitkoordinaten nicht gleichmäßig, wie von einer relativistisch korrekten Behandlung zu fordern ist. *Dirac* hat die mathematisch einfachste Form verwendet, die nicht nur in der Zeit sondern auch in den Impulsoperatoren $\hat{p}_i = i\hbar\partial/\partial x_i$ und im Massenterm mc^2 linear ist,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -i c \hbar \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta m c^2 .$$

Der Energieeigenwert muss außerdem die relativistische Relation (12.33) $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ erfüllen und legt dadurch die algebraischen Eigenschaften der Koeffizienten α_i und β fest. Allein mit diesem Forderungen wird festgelegt, dass es sich um 4×4 -Matrizen handelt, und dass auch die Wellenfunktion ψ ein Spaltenvektor mit 4 Komponenten, ein so genannter **Spinor** sein muss. Mit der Ersetzung $\beta \rightarrow \gamma^0$ und $\beta\alpha_i \rightarrow \gamma^i$, den nach *Dirac* benannten Matrizen, findet man die Form der Dirac-Gleichung, die auch auf seiner Gedenktafel (Abb. 14.21) verwendet wurde.

Die Dirac-Gleichung besticht nicht nur durch ihre einfache Eleganz, die (fast) alle Details des gebundenen Elektrons beschreibt, den Spin und sein magnetisches Moment vorhersagt. Sie hat weitere, unvorhergesehene Konsequenzen, unter denen die Vorhersage der **Antiteilchen**, z. B. des Positrons und des negativ geladenen Antiprotons, noch einmal hervorragen.

Die nichtrelativistische Schrödingergleichung muss durch die relativistischen Korrekturen ergänzt werden, die man nach *Dirac* begründen und interpretieren, für Wasserstoff sogar analytisch ausrechnen kann. Die Spin-Bahn-Kopplung, die wir gerade behandelt haben (\hat{H}_{SO} , (14.26)), liefert nur einen von drei Beiträgen zur Feinstruktur:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{frei}} + \hat{H}_{SO} + \hat{H}_{\text{rel}} + \hat{H}_{\text{Dar}} .$$

Die übrigen Beiträge sind von der gleichen Größenordnung:

- Spin-Bahn-Kopplung nach (14.26), $l > 0$, $j = l \pm 1/2$:

$$\hat{H}_{SO} = \hat{\xi}(r) \hat{\sigma} \cdot \hat{L} ,$$

$$\Delta E_{SO} = -\alpha^2 \frac{E_{\text{Ryd}}}{n^3} \frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1/2)(l+1)} .$$

- Relativistische Korrektur der kinetischen Energie:

$$\hat{H}_{\text{rel}} = -\frac{1}{8} \frac{\hat{p}^4}{m^3 c^2} ,$$

$$\Delta E_{\text{rel}} = -\alpha^2 \frac{E_{\text{Ryd}}}{n^3} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l+1/2} \right) .$$



„Es ist ziemlich klar, dass Schönheit abhängt von der eigenen Kultur und wie jemand aufgewachsen ist, bestimmte Formen von Schönheit, Bilder, Literatur, Poesie und so weiter ... Aber mathematische Schönheit ist von ganz anderer Art. Ich würde vielleicht sagen, sie ist von gänzlich anderer Art und überwindet diese persönlichen Faktoren. Sie ist dieselbe in allen Ländern und zu allen Zeiten.“

Paul Dirac

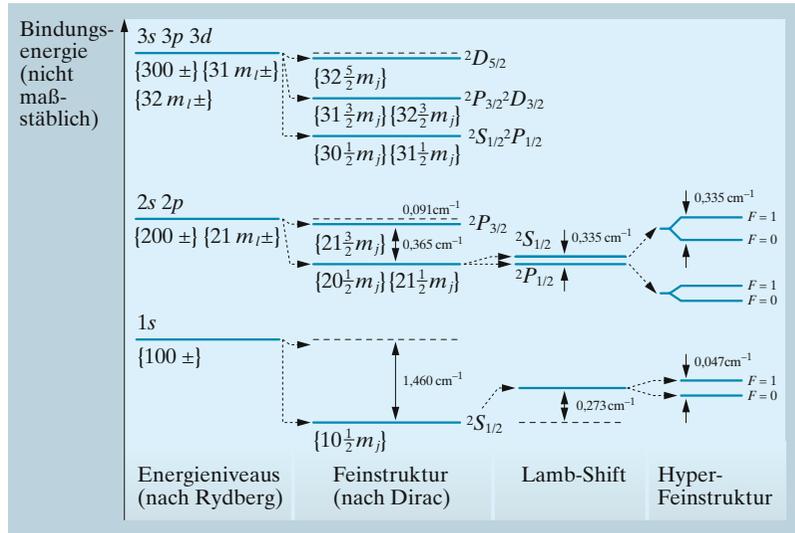
Das Bild zeigt Paul Dirac und Richard Feynman 1962 in Warschau.

(Mit freundlicher Genehmigung. © AIP Emilio Segrè Visual Archives, Physics Today Collection)



Abb. 14.21. Diese Gedenktafel wurde in den Boden der Londoner Westminster Abtei gleich neben dem Grab von I. Newton eingelassen. Die linke Seite der Gleichung ist so zu verstehen, dass über alle Komponenten $\gamma^i \partial_i$ summiert wird. (Mit freundlicher Genehmigung. © Dean and Chapter of Westminster)

Abb. 14.22. Feinstrukturen im Wasserstoff-Atom



- Bei $l = 0$ verschwindet der Beitrag von \hat{H}_{SO} . Dafür tritt der Darwin-Term nur bei $l = 0$ auf:

$$\hat{H}_{\text{Dar}} = -\frac{\hbar^2}{4m^2 c^2} ee \cdot \nabla,$$

$$\Delta E_{\text{Dar}} = -\alpha^2 \frac{E_{\text{Ryd}}}{n^3}.$$

Um das Gesamtergebnis auszuwerten, müssen wir $\Delta E_{\text{FS}} = \Delta E_{\text{SO}} + \Delta E_{\text{rel}}$ für $l \neq 0$ und $\Delta E_{\text{FS}} = \Delta E_{\text{rel}} + \Delta E_{\text{Dar}}$ für $l = 0$ bestimmen. Das Ergebnis (Abb. 14.22) lässt sich in beiden Fällen ausdrücken nach

$$\Delta E_{\text{FS}} = -\frac{\alpha^2 E_{\text{Ryd}} Z^4}{n^3} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j + 1/2} \right). \quad (14.27)$$

Es ist bemerkenswert, dass nach der Dirac-Gleichung die Energie der Feinstrukturniveaus nur vom Gesamtdrehimpuls j abhängt, das heißt, z. B. ${}^2S_{1/2}$ und ${}^2P_{1/2}$ sind entartet. Diese Entartung wird allerdings durch die berühmte **Lamb-Shift** (Abschn. 14.6.4) wieder aufgehoben. Über die elektronische Feinstruktur hinaus finden wir auch noch die *Hyperfeinstruktur* (Abschn. 14.9.2), die auf das magnetische Moment des Kerns und damit einen zusätzlichen Freiheitsgrad zurück zu führen ist.

14.4.4 Zeeman-Effekt von Einelektronen-Atomen

Zu den magnetischen Wechselwirkungen der Atome tragen sowohl effektive innere Felder (die Spin-Bahn-Wechselwirkung \hat{H}_{SO}) als auch äußere Felder bei:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{frei}} + \hat{\xi} \hat{\sigma} \cdot \hat{l} - \hat{\mu} \cdot \mathbf{B}.$$

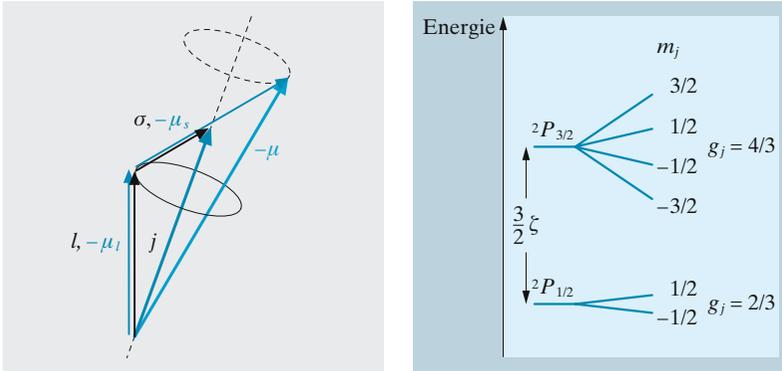


Abb. 14.23. Links: Vektormodell der Kopplung des magnetischen Moments. Rechts: Anomaler Zeeman-Effekt am Beispiel des ${}^2P_{3/2}, {}^2P_{1/2}$ -Dubletts, wie er zum Beispiel bei der bekannten gelben Na-D-Linie bei 589 nm auftritt

Je nachdem welche der beiden Wechselwirkungen überwiegt, ist die Aufspaltung durch das äußere Feld verschieden geformt, bei kleinen Feldern ($\xi \sigma \cdot l \gg \mu \cdot B$) spricht man vom **anomalen Zeeman-Effekt**, bei großen Feldern ($\xi \sigma \cdot l \ll \mu \cdot B$) vom **Paschen-Back-Effekt**.

Schwache Felder: Anomaler Zeeman-Effekt. Es ist schon bekannt, dass $\hat{H}_{\text{frei}} + \xi \hat{\sigma} \cdot \hat{l}$ Eigenzustände ψ_{nljm_j} (14.24) besitzt. Allerdings ist der Vektor(-Operator) des magnetischen Moments wegen $\hat{\mu} = \hat{\mu}_l + \hat{\mu}_s = g_l \mu_B \hat{l} + g_s \mu_B \hat{\sigma} = \mu_B (\hat{l} + 2\hat{\sigma})$ nicht parallel zum Gesamtdrehimpuls $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{\sigma}$ (s. Abb. 14.23).

Für schwache Felder erwarten wir, dass der Gesamtdrehimpuls j und seine z -Komponente j_z „gute“ Quantenzahlen bleiben. Wir wollen die kleine Störung durch das äußere Magnetfeld berechnen, $\hat{\mu} \cdot B = \hat{\mu}_z \cdot B_0$. Nun kann man zeigen, dass die Wirkung eines beliebigen Vektoroperators \hat{v} auf Eigenzustände $\psi_{\gamma jm_j}$ (γ steht für alle übrigen Quantenzahlen) zum Drehimpuls \hat{j} nach

$$\int dV \psi_{\gamma jm_j}^* \hat{v} \psi_{\gamma jm_j} = \int dV \psi_{\gamma jm_j}^* \frac{\hat{v} \cdot \hat{j}}{j(j+1)} \hat{j} \psi_{\gamma jm_j} \quad (14.28)$$

berechnet werden kann.

Ein kurzes Plausibilitätsargument folgt dieser Argumentation: Falls $\int dV \psi^* \hat{v} \psi = \text{const} \times \int dV \psi^* \hat{j} \psi$, dann muss auch $\int dV \psi^* \hat{v} \cdot \hat{j} \psi = \text{const} \times j(j+1)$ gelten, oder $\text{const} = \int dV \psi^* \hat{v} \cdot \hat{j} \psi / (j(j+1))$. Im klassischen Analogon kann man diesen Zusammenhang als Projektion der Vektorgröße \mathbf{v} auf die Erhaltungsgröße \mathbf{j} interpretieren: Die zu \mathbf{j} senkrechte Komponente fällt nämlich bei der Mittelwertbildung heraus.

Dabei handelt es sich um einen Spezialfall des in der Drehimpulsbehandlung wichtigen **Wigner-Eckart-Theorems**. Die Energieverschiebungen im Schwachfeld können wir nun nach

$$\Delta E_{jm_j} = \mu_B B_0 \langle \hat{l}_z + 2\hat{\sigma}_z \rangle = \mu_B B_0 \int dV \psi_{\gamma jm_j}^* (\hat{l}_z + 2\hat{\sigma}_z) \psi_{\gamma jm_j}$$

Tabelle 14.6. Elektronische g_j -Faktoren wichtiger Einelektronen-Atome. Die g -Faktoren zeigen kleine Abweichungen von 2, die eine Folge der Quanteneigenschaften des elektromagnetischen Feldes sind

Atom	g_j
H	2,002 284
^{23}Na	2,002 296
^{85}Rb	2,002 331
^{87}Rb	2,002 331
^{133}Cs	2,002 540

berechnen. Nach (14.28) ersetzen wir $\hat{\sigma}_z$ durch seine Projektion,

$$\hat{l}_z + 2\hat{\sigma}_z = \hat{j}_z + \hat{\sigma}_z = \hat{j}_z \left(1 + \frac{\hat{\sigma} \cdot \hat{j}}{j(j+1)} \right),$$

und in (14.25) haben wir schon gesehen, wie man das Skalarprodukt nun elegant durch Verwendung von $\hat{l} = \hat{j} - \hat{\sigma}$ aus den Quantenzahlen berechnet. Wir erhalten das Endergebnis mit dem **Landéfaktor** g_j :

$$\Delta E_{jm_j} = g_j m_j \mu_B B_0 \tag{14.29}$$

$$\text{mit } g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}.$$

Insbesondere für Einelektronen-Atome mit $l = 0$ erhält man wieder den reinen Faktor des Elektrons $g_j = 2$. Bei Präzisionsmessungen (Tabelle 14.6) stellt man fest, dass der Faktor geringfügig von 2 abweicht, weil das magnetische Moment durch die Vakuumfluktuationen des elektromagnetischen Feldes modifiziert wird.

Starke Felder: Paschen-Back-Effekt. Im starken äußeren Feld ($\xi \sigma \cdot l \ll \mu \cdot B$) ist es wieder sinnvoll, die $\psi_{nlm_l m_s}$ -Eigenzustände zu $\hat{H}_{\text{frei}} + \mu_B B_0 (\hat{l}_z + 2\hat{\sigma}_z)$ zu verwenden. Man spricht davon, dass Bahndrehimpuls und Spin entkoppelt werden und bestimmt ohne Probleme wie in (14.21)

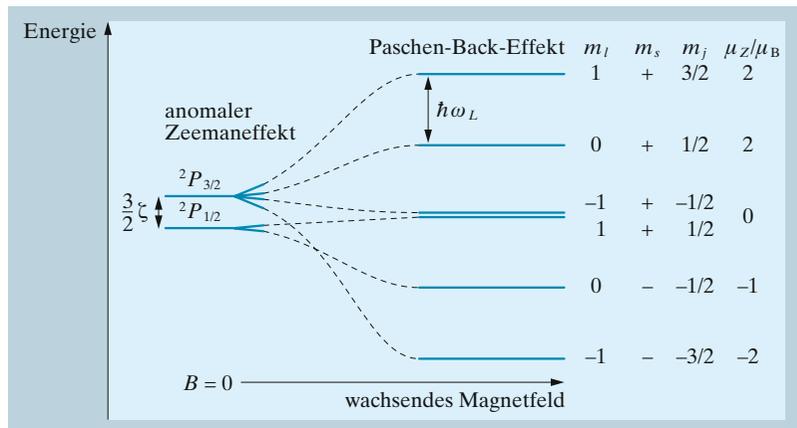
$$\Delta E_{m_l m_s} = \hbar \omega_L (m_l + 2m_s).$$

Die Spin-Bahn-Wechselwirkung verursacht noch eine zusätzliche Verschiebung,

$$\Delta E_{ls} = \int \psi_{nlm_l m_s}^* \hat{\xi}(r) \hat{l} \cdot \hat{\sigma} \psi_{nlm_l m_s} dV = \zeta_{nl} m_l m_s.$$

Den Übergang vom anomalen Zeeman-Effekt zum Paschen-Back-Effekt (Abb. 14.24) kann man in einigen einfachen Fällen analytisch behandeln (z. B. $J = 0, 1$), im Allgemeinen nur numerisch.

Abb. 14.24. Paschen-Back-Effekt in starken Magnetfeldern. Der Übergangsbereich lässt sich nur für kleine Drehimpulsquantenzahlen (z. B. $J = (1, 0)$ nach der Breit-Rabi-Formel (14.63)) analytisch auswerten. Hier ist nur qualitativ gezeigt, welche Zustände des anomalen Zeeman-Effekts zu welchen Zuständen des Paschen-Back-Effekts werden. Dazu muss man lediglich beachten, dass sich Zustände zum gleichen m_j nicht kreuzen dürfen



14.4.5 Stark-Effekt

1913 fand *J. Stark* das elektrische Analogon zum Zeeman-Effekt. Auch ein starkes E -Feld spaltet Spektrallinien in scharfe Komponenten auf. Man beobachtet dies, wenn man Kanalstrahlen (Abschn. 8.3.7) unmittelbar hinter der Kathode in ein starkes Kondensatorfeld eintreten lässt. Dabei kann man, ohne dass das Feld durch eine Glimmentladung zusammenbricht, Felder bis 1 MV/cm erreichen. Bei longitudinaler Beobachtung (in Feldrichtung) sind die Linien unpolarisiert, bei transversaler in Feldrichtung oder senkrecht dazu polarisiert. Im Gegensatz zum Zeeman-Effekt ist das Aufspaltungsbild nicht für alle Linien derselben Serie das gleiche, vielmehr wächst die Anzahl der Komponenten mit dem Laufterm der Serie. Im Allgemeinen ist die Aufspaltung proportional zum Quadrat der Feldstärke (**quadratischer Stark-Effekt**). Nur bei Wasserstoff und wasserstoffähnlichen Ionen ist sie linear, ebenso manchmal in sehr großen Feldern. Die Aufspaltung und ihr quadratischer Charakter erklären sich so, dass das Feld die Elektronenverteilung der einzelnen Zustände in verschiedenem Maß verzerrt (verschiedene Polarisierbarkeit α). Dabei entsteht ein Dipolmoment $p = \alpha E$, dessen Wechselwirkungsenergie mit dem Feld $pE = \alpha E^2$ ist. Nur wenn infolge besonderer Umstände ein feldunabhängiges permanentes Dipolmoment vorliegt, ist der Effekt linear.

Eine größere Rolle spielt heute der **AC-Stark-Effekt** in elektrischen Wechselfeldern, besonders bei optischen Frequenzen. Er wird in Abschn. 14.6.4 näher behandelt und ist der Ursprung optischer Dipolkräfte (Abschn. 14.7.2).

14.5 Atome mit zwei Elektronen

Es ist nahe liegend, Atome mit zwei und mehr Elektronen nach einem Baukastenprinzip zu füllen und damit ihre Eigenschaften zu deuten. Das Verfahren ist auch sehr erfolgreich, schließlich ergibt sich so das gesamte Periodensystem der Elemente. Formal gesehen verwenden wir dazu unsere Kenntnis des Wasserstoff-Atoms, genauer gesagt seine Ein-Elektron-Wellenfunktionen. Allerdings gibt es auch zahlreiche Eigenschaften, die mit diesem einfachen Modell nicht erklärt werden.

Am Helium-Atom, dem „Zweielektronen-Atom“ lassen sich alle wichtigen Eigenschaften eines Mehrelektronen-Atoms modellhaft vorstellen. Das Spektrum des He-Atoms ist viel komplizierter als das von Einelektron-Atomen, Ähnlichkeiten zum Wasserstoff-Spektrum (Abb. 14.12) legen aber nahe, dessen Eigenschaften auf das He-Atom zu erweitern.

14.5.1 Das Helium-Atom

Das Helium-Atom besitzt zwei Elektronen. Seine Bewegungsgleichungen gehören zu den Drei-Körper-Problemen, die bekanntlich keine Separierung und Rückführung auf Einteilchen-Probleme erlauben. Auch eine geschlossenen relativistische Behandlung analog zur Dirac-Gleichung für das Wasserstoffatom ist beim He-Atom nicht bekannt.

Alle mathematischen Modelle sind also Näherungen, die allerdings heute eine enorme Qualität besitzen und Eigenschaften des He-Atoms mit hoher Genauigkeit vorhersagen. Wir werden hier nur die einfachsten Modelle verwenden, in denen die Bewegung der Elektronen nichtrelativistisch behandelt wird.

Wir betrachten den Kern als unendlich schwer und sammeln die Beiträge zum

Hamiltonoperator des He-Atoms:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_1^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_2^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \\ &= \underbrace{\quad}_{\hat{H}_1} + \underbrace{\quad}_{\hat{H}_2} + \hat{H}_{12} \\ &= \hat{H}_0 + \hat{H}_{12}.\end{aligned}\quad (14.30)$$

Die beiden ersten Beiträge sind genau die Wasserstoff-Einteilchen-Operatoren für die Elektronen „1“ und „2“, hinzu kommt aber hier deren Coulomb-Abstoßung $e^2/4\pi\epsilon_0 r_{12}$. Für dieses Problem, für diesen Hamilton-Operator sind keine analytischen Lösungen bekannt.

Wenn wir die mathematisch unangenehme Elektron-Elektron-Wechselwirkung \hat{H}_{12} einfach weglassen, kann man Lösungen zu $\hat{H}_0 = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$ leicht aus Wasserstoff-Wellenfunktionen konstruieren, $\Psi_{ab} = \psi_{nlm}(\mathbf{r}_1)\psi_{n'l'm'}(\mathbf{r}_2) = \psi_a(1)\psi_b(2)$. Die Energie-Eigenwerte sind $E_0 = E_n + E_{n'}$, und der Grundzustand hat den Wert $E_0^{(1)} = -54,4$ eV für $\text{He} \rightarrow \text{He}^+$ bzw. $E_0^{(2)} = -108,8$ eV für $\text{He} \rightarrow \text{He}^{++}$. Beobachtet werden aber nur $E_0^{(1)} = -24,58$ eV, d. h. die Coulomb-Abstoßung kann keine kleine Störung sein!

Außerdem haben wir noch gar nicht berücksichtigt, dass die Elektronen gar nicht unterscheidbar sind. Neben $\Psi_\alpha = \psi_a(1)\psi_b(2)$ ist nämlich auch $\Psi_\beta = \psi_a(2)\psi_b(1)$ eine Lösung zu \hat{H}_0 , ebenso wie alle Linearkombinationen $c_1\Psi_\alpha + c_2\Psi_\beta$. Diese „**Austauschentartung**“ wird durch \hat{H}_{12} aufgehoben, und um die Eigenwerte von \hat{H}_0 zu bestimmen müssen wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} H_{12}^{\alpha\alpha} & H_{12}^{\alpha\beta} \\ H_{12}^{\beta\alpha} & H_{12}^{\beta\beta} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad H_{12}^{\alpha\beta} = \int \Psi_\alpha^* \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \Psi_\beta \, dV_1 \, dV_2$$

diagonalisieren. Die Beiträge

$$J = H_{12}^{\alpha\alpha} = H_{12}^{\beta\beta} = \int \frac{\rho_a(r_1)\rho_b(r_2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \, dV_1 \, dV_2 \quad \text{mit} \quad \rho_a(r) = |\psi_a(r)|^2$$

kann man direkt als Coulomb-Abstoßung interpretieren, J wird als **Coulomb-Integral** bezeichnet und tritt auch bei unterscheidbaren Teilchen auf. Die Ununterscheidbarkeit verursacht aber das so genannte **Austauschintegral** K ,

$$H_{12}^{\alpha\beta} = H_{12}^{\beta\alpha*} = K = \int \frac{\psi_a^*(1)\psi_b^*(2)\psi_a(2)\psi_b(1)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \, dV_1 \, dV_2,$$

zu welchem es kein klassisches Analogon gibt. Zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} J & K \\ K & J \end{pmatrix} \quad \text{mit Eigenwerten:} \quad \Delta E = J \pm K$$

finden wir eine *symmetrische* und eine *antisymmetrische* Kombination von $\Psi_{a,b}$ als neue Wellenfunktionen:

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \frac{1}{2^{1/2}}(\psi_a + \psi_b) & \text{mit} & \int \Psi_s^* \hat{H}_{12} \Psi_s dV_1 dV_2 = J + K, \\ \Psi_{as} &= \frac{1}{2^{1/2}}(\psi_a - \psi_b) & \text{mit} & \int \Psi_{as}^* \hat{H}_{12} \Psi_{as} dV_1 dV_2 = J - K. \end{aligned}$$

Die Eigenfunktionen sind orthogonal, $\int \Psi_{as}^* \Psi_s dV_1 dV_2 = 0$.

14.5.2 Der Grundzustand des Helium-Atoms

Wir gewinnen den Grundzustand des Helium-Atoms aus den niedrigst liegenden Wasserstoffwellenfunktionen ψ_{1s_i} , wobei wir nun die Nomenklatur $1s_i, 2s_i, 3s_i, \dots$ für das i -te Elektron im ($l=0$)-Zustand, $2p_i, 3p_i, \dots$ im ($l=1$)-Zustand etc. verwenden. Für identische Elektronenwellenfunktionen $1s$ verschwindet die antisymmetrische Kombination,

$$\Psi_{as} = \psi_{1s_1} \psi_{1s_2} - \psi_{1s_2} \psi_{1s_1} \equiv 0.$$

Die symmetrische Kombination kann für zwei identische Einteilchen-Zustände vereinfacht werden,

$$\Psi_s = \frac{1}{2}(\psi_{1s_1} \psi_{1s_2} + \psi_{1s_2} \psi_{1s_1}) = \psi_{1s_1} \psi_{1s_2}.$$

Wir verwenden die Wellenfunktionen des Grundzustandes von Wasserstoff (s. Tabelle 14.4) mit $\Psi_s = (Z^3/\pi a_0^3) \times e^{-(z^*/a_0)(r_1+r_2)}$, wobei wir zulassen wollen, dass das einzelne Elektron wegen der Abschirmung durch das andere Elektron einer *effektiven Ladung* Z^* , vom Wert 2 für Helium abweichenden Kernladung ausgesetzt ist. Wir errechnen die Beiträge der einzelnen Terme nach (14.30):

Kinetische Energie E_{kin} :

$$\int dV_1 dV_2 \Psi_s^* \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \nabla_2^2}{2m} \right) \Psi_s = 2Z^* 2E_{\text{Ryd}},$$

Potentielle Energie E_{pot} :

$$\int dV_1 dV_2 \Psi_s^* \left(-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \right) \Psi_s = -4ZZ^* E_{\text{Ryd}},$$

Coulomb- und Austauschenergie $J + K$:

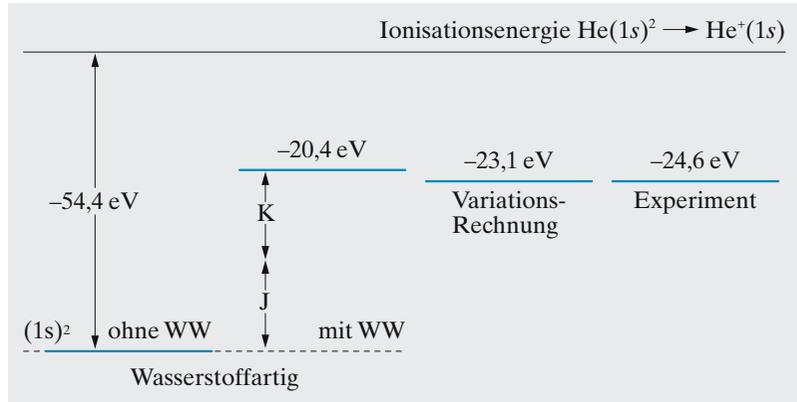
$$\int dV_1 dV_2 \Psi_s^* \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \Psi_s = \frac{5Z^*}{4} E_{\text{Ryd}} = 2J = 2K \quad (14.31)$$

mit dem Gesamtergebnis

$$E_0 = 2E_{\text{Ryd}} \left(Z^{*2} - 2ZZ^* + \frac{5}{8}Z^* \right). \quad (14.32)$$

Für $Z^* = 2$ berechnet man $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -54,4 \text{ eV}$ (gegenüber He^+) aus den ungestörten Wasserstoff-Zuständen. Die Berücksichtigung der Elektron-Elektron-Wechselwirkung liefert $J + K = 34,0 \text{ eV}$. Die Grundzustandsenergie wird daher zu $-20,4 \text{ eV}$ berechnet.

Abb. 14.25. Berechnung der Grundzustandsenergie von Helium mit Wasserstoff-Einelektron-Wellenfunktionen. WW: Elektron-Elektron-Wechselwirkung



Skizze

Die Grundzustandsenergie ist minimal! Man kann zeigen, dass die Energie des Grundzustands jeden Quantensystems einem **Minimalprinzip** gehorcht. Nehmen wir an, die Eigenfunktionen seien bekannt, $\hat{H}\psi_i = E_i\psi_i$. Und insbesondere muss die Grundzustandsenergie kleiner sein als alle anderen, $E_0 \leq E_i$. Den Energiewert einer beliebigen Testwellenfunktion $\psi_T = \sum_i c_i\psi_i$ berechnet man nach

$$\langle \hat{H} \rangle = \int dV \psi_T^* \hat{H} \psi_T = \sum_i |c_i|^2 E_i \geq E_0 \sum_i |c_i|^2 = E_0.$$

Offenbar verbessert man die Berechnung der Grundzustandsenergie, wenn man den Minimalwert sucht (Abb. 14.25). Beispielsweise können wir den Minimalwert des Ergebnisses (14.32) bezüglich der Ladung Z^* ermitteln und finden

$$Z^* = Z - \frac{5}{16} = \frac{27}{16} < 2!$$

Das Resultat können wir interpretieren: Hiernach wird die effektive Kernladung des Heliumkerns für ein Elektron durch das jeweils andere „abgeschirmt“ oder reduziert.

Die hier angedeutete Methode lässt sich auch für angeregte Zustände einsetzen, wenn man zusätzlich verlangt, dass diese zu den schon gefundenen niedrigeren Zuständen orthogonal sind.

14.5.3 Angeregte Zustände des Helium-Atoms

Wir können zunächst verschiedene Typen von Anregungen unterscheiden, die wir wieder auf der Basis von Einteilchen-Wasserstoffzuständen nl klassifizieren:

- 1-Elektronen-Anregungen $1s\ nl$,
- 2-Elektronen-Anregungen $nl\ n'l'$.

Die Energiewerte in unserer vereinfachten Theorie werden wieder nach

$$E = E_{nl} + E_{n'l'} + J_{nl n'l'} \pm K_{nl n'l'}$$

berechnet. Im Gegensatz zur $1s^2$ -Konfiguration existieren nun sowohl der symmetrische (Para-Helium) und der energetisch tieferliegende, asymmetrische Zustand (Ortho-Helium). Wir werden noch sehen, dass die Spin-Freiheitsgrade diese beiden Systeme des Helium-Atoms sehr streng von einander trennen.

14.5.4 Drehimpulse im Helium-Atom

Die beiden Elektronen des Helium-Atoms besitzen jeweils einen Bahndrehimpuls und einen Spin, die alle untereinander durch magnetische Wechselwirkung koppeln. Das Helium-Atom zeigt wie alle leichteren Atome den Fall der so genannten *LS-Kopplung*: Sowohl die Bahndrehimpulse l_i wie auch die Spins σ_i koppeln zunächst untereinander zum Gesamtdrehimpuls L und Gesamtspin S :

$$\hat{L} = \hat{l}_1 + \hat{l}_2, \quad \langle \hat{L} \rangle = L(L+1), \quad \hat{L}_z = \hat{l}_{z1} + \hat{l}_{z2}, \quad -L \leq L_z \leq L,$$

$$\hat{S} = \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2, \quad \langle \hat{S} \rangle = S(S+1), \quad \hat{S}_z = \hat{\sigma}_{z1} + \hat{\sigma}_{z2}, \quad -S \leq S_z \leq S.$$

Bahndrehimpulse. Der Gesamtdrehimpuls (L, L_z) des Helium-Atoms wird bei $(1s nl)$ -Anregungen durch die (l, l_z) -Quantenzahlen des angeregten Elektrons bestimmt.

Elektronen-Spin und Pauli-Prinzip.

Nach den Regeln der Drehimpulsalgebra können zwei Spin-1/2-Elektronen entweder einen Zustand mit Gesamtspin 0 oder 1 formen:

$$\chi_{as} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_+(2)\chi_-(1) \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{Singulett} \\ S = 0, \quad S_z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\chi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_+(1)\chi_+(2) \\ \chi_+(1)\chi_-(2) + \chi_+(2)\chi_-(1) \\ \chi_-(1)\chi_-(2) \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{Triplet} \\ S = 1, \quad \begin{cases} S_z = 1 \\ S_z = 0 \\ S_z = -1 \end{cases} \end{array} \right\}$$

Nach dem Pauli-Prinzip der Quantenmechanik muss die Gesamtwellenfunktion Ψ_{tot} für Elektronen (und andere Teilchen mit halbzahligem Spin) immer antisymmetrisch sein, d. h. nur die Wellenfunktionen

$$\Psi_{tot} = \Psi_s \chi_{as} \quad \text{oder} \quad \Psi_{tot} = \Psi_{as} \chi_s$$

sind zulässig. Das Niveaudiagramm des Helium-Atoms (Abb. 14.26) zeigt deshalb zwei Systeme: Die Singulett-Zustände ($^1L = ^1S, ^1P, \dots$) werden als Par- oder **Para-Helium** bezeichnet, die Triplet-Zustände (3L) als **Ortho-Helium**. Wir haben schon gesehen, dass der Grundzustand ein Singulett- oder 1S_0 -Zustand ist. Die Triplet-Zustände liegen

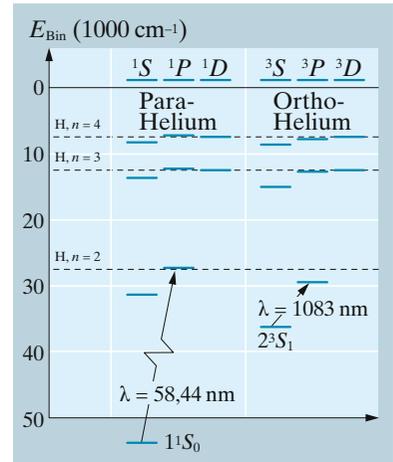
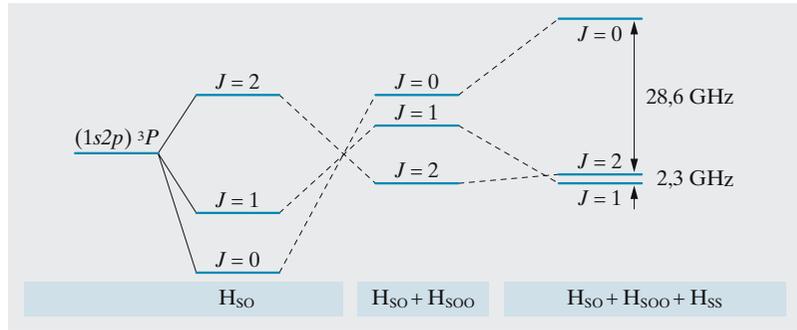


Abb. 14.26. Energie-Diagramm des Helium-Atoms. Zustände mit symmetrischer Spinwellen- und antisymmetrischer Ortswellenfunktion werden allgemein Orthozustände, ihre komplementären Parazustände genannt

Abb. 14.27. Feinstruktur-Aufspaltung im Helium-Atom: Der Einfluss der Spin-Bahn-Wechselwirkung (SO), Spin-Andere Bahn (SOO) und Spin-Spin (SS)-Kopplung. Die eingetragenen Frequenzen sind die experimentell bekannten Abstände



zur gleichen Elektronenkonfiguration energetisch unter den zugehörigen Singulett-Zuständen, weil die dabei erforderliche antisymmetrische Ortswellenfunktion eine geringere Austausch-Energie begünstigt: „Elektronen mit gleichem Spin stoßen sich ab.“ ist zu einer verbreiteten Redeweise geworden.

Optische Übergänge finden nur als Kombinationen von para-para- oder ortho-ortho-Zuständen statt, zwischen den beiden Systemen herrscht das so genannte **Interkombinationsverbot**. Die elektrischen Felder optischer Übergänge können nämlich die magnetischen Spin-Zustände nicht ändern.

Feinstruktur im Helium-Atom (Abb. 14.27). Wie im Einelektronen-Atom zeigen alle leichteren Atome die so genannte **LS-Kopplung**, d. h. zu dem effektiven Operator

$$\hat{H}_{SO} = \hat{\xi} \hat{L} \cdot \hat{S}$$

sind wie zuvor weder \hat{L} noch \hat{S} , wohl aber $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ Erhaltungsgrößen mit $J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|$. Im Helium-Atom zeigen dann Singulett- und Triplett-System die Feinstruktur

$$\begin{aligned} {}^1L : \quad & S = 0 \quad J = L & {}^1S_0, {}^1P_0, {}^1D_0, \dots \\ {}^3L : \text{(i)} \quad & L = 0 \quad J = S = 1 & {}^3S_1 \\ & \text{(ii)} \quad L \neq 0 \quad J = L + 1, L, L - 1 & \{ {}^3P_2, {}^3P_1, {}^3P_0 \}, \\ & & \{ {}^3D_3, {}^3D_2, {}^3D_1 \}, \dots \end{aligned}$$

Diese Notation ist selbstverständlich vollkommen konsistent mit derjenigen, die wir beim Wasserstoffatom angewendet haben.

14.5.5 Andere Zweielektronen-Atome

Die Gruppe der Erdalkali-Elemente (Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra) sind die natürlichen Äquivalente zum Helium-Atom und zeigen das gleiche Singulett/Triplett-Schema. Allerdings wird das Interkombinations-Verbot mit zunehmender Ladungszahl Z immer mehr aufgeweicht und die so genannten Interkombinationslinien sind schon beim Mg und Ca-Atom mit der Laserspektroskopie gut zu beobachten. Sie sind sehr viel schwächer als die üblichen atomaren Resonanzlinien, besitzen daher eine sehr geringe Linienbreite und sind gute Referenzübergänge für optische Frequenznormale.

14.6 Wie strahlen die Atome?

Die scharfen Linienspektren von Atomen, insbesondere beim Wasserstoff, haben ganz wesentlich zur Entwicklung der Quantenmechanik und unserer Vorstellung von mikroskopischen Teilchen beigetragen. Die stationäre Schrödinger-Gleichung sagt die Linienspektren mit unübertroffener Perfektion vorher, sie enthält aber keine Information über deren Strahlungseigenschaften, auch angeregte Zustände sind danach erst einmal stabil und zerfallen gar nicht.

Wir wissen aus der klassischen Elektrodynamik, dass von beschleunigten Ladungen elektromagnetische Strahlung emittiert wird, zum Beispiel von makroskopischen Antennen, oder abstrakter von **hertzischen Dipolen**.

Ein wichtiges Ergebnis ist die **Larmorformel**,

$$P_{\text{rad}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}^2, \quad (14.33)$$

die den Energieverlust des Systems durch die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ der Ladung $q = -e$ beschreibt.

Diese Analogie werden wir auf Atome übertragen, um ihre Strahlungseigenschaften zu deuten. Eine strenge Analyse erfordert die quantenphysikalische Behandlung auch des elektromagnetischen Feldes (*Quantenelektrodynamik*, QED) und bleibt fortgeschrittenen Lehrbüchern überlassen.

14.6.1 Atomare Antennen

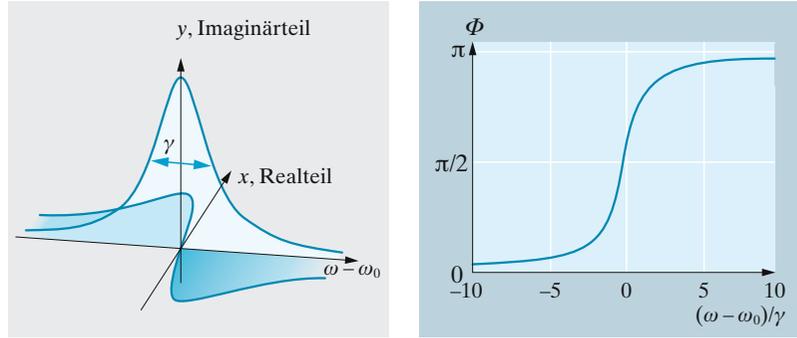
Lorentz-Oszillatoren. Ein einfaches und doch sehr erfolgreiches Modell für die Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung mit polarisierbarer Materie geht auf *H. Lorentz* (1853–1928) zurück. Darin betrachten wir Atome mit Elektronen, die wie mit einer Feder als kleine Planeten harmonisch an den ionischen Rumpf gebunden sind und Schwingungen bei optischen Frequenzen ω_0 ausführen. Den tieferen Grund für den Erfolg des Lorentz-Modells finden wir in der Analogie zur Zeitentwicklung der Quantenzustände, die wir als „Quanten-Oszillatoren“ auffassen können.

Die klassische Dynamik eines solchen Systems ist wohlbekannt, und der Einfluss des Lichtfeldes äußert sich als treibende elektrische oder magnetische Kraft, die zusätzlich zur Bindungskraft $\mathbf{F}_B = -m\omega_0^2\mathbf{x}$ wirkt. Die Dämpfung des Oszillators wird durch die Abgabe von Strahlungsenergie verursacht, die wir zunächst durch die Reibungskraft $\mathbf{F}_R = -m\gamma(d\mathbf{x}/dt)$ phänomenologisch berücksichtigen. Die Atome werden in diesem Modell wie mikroskopische Antennen behandelt.

Zur Vereinfachung benutzen wir die komplexe Schreibweise für den Bahnradius, $r = x + iy$. Wir betrachten die Bewegungsgleichung des getriebenen Oszillators,

$$\ddot{r} + \gamma\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{q}{m} E e^{-i\omega t}, \quad (14.34)$$

Abb. 14.28. *Links:* „Quadratur“-Komponenten des Lorentz-Oszillators, die in Phase (x , dispersiv) bzw. 90° außer Phase (y , absorptiv) mit dem treibenden Feld schwingen. Die Auslenkung ist auf den Maximalwert im Resonanzfall bei $\delta = 0$ normiert. *Rechts:* Phasenlage des Lorentz-Oszillators im eingeschwungenen Zustand: Bei kleinen Frequenzen schwingen treibendes Feld und Dipol in Phase, im Resonanzfall läuft der Dipol dem Feld um 90° nach, bei großen Frequenzen schwingt er gegenphasig



unter dem Einfluss eines treibenden Lichtfeldes $E e^{-i\omega t}$, das zirkular polarisiert sei. Mit der Versuchsfunktion $r(t) = \rho(t)e^{-i\omega t}$ findet man aus der Säkulargleichung $\rho(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2) = qE/m$ die Gleichgewichtslösung $\rho(t) = r_0 = \text{const}$ und

$$r_0 = \frac{qE/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma} \quad (14.35)$$

In **nahresonanter Näherung** ersetzen wir $(\omega_0^2 - \omega^2) \simeq 2\omega(\omega_0 - \omega) = 2\omega\delta$, führen den maximalen Radius $r_{\text{max}} = qE/m\omega_0\gamma$ ein und erhalten

$$r(t) = r_0 e^{-i\omega t} = r_{\text{max}} \frac{\gamma/2}{\delta - i\gamma/2} e^{-i\omega t}.$$

Für die x - und die y -Koordinaten des getriebenen Oszillators gilt

$$r(t) = x + iy = r_{\text{max}} \frac{\gamma}{2} \frac{\delta + i\gamma/2}{\delta^2 + (\gamma/2)^2} e^{-i\omega t}. \quad (14.36)$$

Wir werden noch sehen, dass x und y im Hinblick auf die Ausbreitung von Licht in polarisierbarer Materie genau den „dispersiven“ (x) bzw. „absorptiven“ (y) Anteil der Strahlungswechselwirkung angeben. Die Form der „normalen Dispersion“ und die **Lorentz-Kurve** der Absorption sind in Abb. 14.28 vorgestellt. Sowohl in der x - als auch der y -Komponente tritt eine Phasenverzögerung ϕ auf, die nur von der Dämpfungsrate γ und der Verstimmung $\delta = -(\omega_0 - \omega)$ abhängt (Abb. 14.28),

$$\phi = \arctan \gamma/2\delta. \quad (14.37)$$

Die Phasenlage zeigt das bekannte Verhalten eines getriebenen Oszillators, nämlich gleichphasige Anregung bei zu kleinen („roten“) Frequenzen, 90° Nachlauf im Resonanzfall und Gegentakt bei zu hohen („blauen“) Frequenzen.

Dämpfung des Lorentz-Oszillators. Der Lorentz-Oszillator verliert kinetische Energie durch die Abgabe von Strahlungsenergie, und die Strahlungsleistung wird gerade nach der Larmorformel (14.33) bestimmt. Es ist bekannt, dass man die Rate der Energieänderung auch aus der Bewegungsgleichung des Lorentz-Oszillators (14.34) bestimmen kann (durch

Multiplikation mit \dot{r}),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 r^2}{2} \right) + m\gamma\dot{r}^2 = 0 = P_{\text{rad}} + m\gamma\dot{r}^2.$$

Wenn die gespeicherte Energie allein durch Abstrahlung verloren geht, können wir die Strahlungsleistung mit der Leistung der Reibungskraft identifizieren, $P_{\text{rad}} = -m\gamma\dot{r}^2$.

Im Fall schwacher Dämpfung ($\omega_0 \gg \gamma$) können wir annehmen, dass sich während einer Oszillationsperiode $2\pi/\omega_0$ die Amplitude r nur wenig ändert, und die Ersetzung $\ddot{r} = \omega_0^2 r$ und $\dot{r} = \omega_0 r$ vornehmen. Dann erhalten wir mit (14.33)

$$\gamma = \frac{q^2 \omega_0^2}{6\pi \epsilon_0 c^3 m} \quad \text{und} \quad r_{\text{max}} = \frac{3\epsilon_0 \lambda^3}{4\pi^2 q} E. \quad (14.38)$$

Häufig wird in diesem Zusammenhang auch der so genannte *klassische Elektronenradius* eingeführt,

$$r_{\text{el}} = \frac{e^2 / 4\pi \epsilon_0}{mc^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{2}{3} \frac{r_{\text{el}} c}{\lambda^2}.$$

Soweit wir aber bisher aus Streuexperimenten der Hochenergiephysik wissen, ist das Elektron punktförmig bis zur Grenze von 10^{-18} m, diese Größe scheint also keinerlei physikalische Signifikanz zu besitzen.

Mikroskopische Dipole, makroskopischer Brechungsindex. Das komplexe Dipolmoment eines einzelnen Teilchens gewinnen wir aus $d(t) = qr(t)$ nach (14.36, 14.38)

$$d(t) = d_0 e^{-i\omega t} = q r_0 e^{-i\omega t} = \frac{3\lambda^3}{4\pi^2} \frac{i + 2\delta/\gamma}{1 + (2\delta/\gamma)^2} \epsilon_0 E e^{-i\omega t}. \quad (14.39)$$

Häufig wird auch die komplexe Polarisierbarkeit $\alpha_P = \alpha'_P + i\alpha''_P$ verwendet. Sie ist definiert durch

$$\alpha_P = \frac{\partial}{\partial E} d_0 = \epsilon_0 \frac{3\lambda^3}{4\pi^2} \frac{\gamma}{2} \frac{\delta + i(\gamma/2)}{\delta^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (14.40)$$

In einer Probe, z. B. einer Gaszelle oder einem Kristall, können wir die makroskopische Polarisierung \mathbf{P} im einfachsten Fall durch die mittlere Dipoldichte angeben. Mit der Teilchendichte N gilt dann ($\langle \dots \rangle$ zeigt hier die räumliche Mittelung an.)

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{d} \rangle = N \alpha_P \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}.$$

Der lineare Zusammenhang der Polarisierung mit der elektrischen Feldstärke gilt für monochromatische Lichtfelder. Allgemein wird die Polarisierung auch durch Einschwing-Prozesse gekennzeichnet, sie hängt von der Feldstärke auch zu früheren Zeiten ab. Das wird im Zeitbild deutlicher,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt',$$

wobei $\chi(t-t') = 0$ für $(t-t') < 0$ gelten muss, damit die Kausalität nicht verletzt wird. Dabei zeigt sich auch die wörtliche Bedeutung von „Suszeptibilität“ oder „Nachwirkung“. Nach dem Faltungstheorem der Fouriertransformation ist der Zusammenhang im Frequenzraum nach (14.40) oder für monochromatische Wellen im Gleichgewicht viel einfacher.

Wir haben auch gleich den Zusammenhang mit der **dielektrischen Suszeptibilität** hergestellt, Real- und Imaginärteil betragen danach:

$$\begin{aligned}\chi'(\delta) &= N\alpha'_P/\varepsilon_0 = N \cdot \frac{3\lambda^3}{4\pi^2} \frac{2\delta/\gamma}{1+(2\delta/\gamma)^2}, \\ \chi''(\delta) &= N\alpha''_P/\varepsilon_0 = N \cdot \frac{3\lambda^3}{4\pi^2} \frac{1}{1+(2\delta/\gamma)^2}.\end{aligned}\quad (14.41)$$

Wichtige Messgrößen der Licht-Materie-Wechselwirkung sind **Brechungsindex** und **Absorptionskoeffizient**, sie charakterisieren die pauschalen Eigenschaften der Polarisierung. Die Polarisierung wird in der Wellengleichung bekanntlich als Modifikation der Ausbreitungsgeschwindigkeit im Dielektrikum, $1/c^2 \rightarrow n^2(\omega)/c^2$, mit dem makroskopischen Brechungsindex $n^2(\omega) = 1 + \chi(\omega)$ berücksichtigt,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2(\omega)}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0.$$

Die Lösung für eine ebene Welle lautet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - n' \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} e^{-n'' \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}},$$

und Ausbreitung findet nicht nur bei veränderter Phasen-Geschwindigkeit $v_{\text{Ph}} = c/n'$ statt, sondern wird außerdem nach dem beerschen Gesetz in z -Richtung mit dem Absorptionskoeffizienten $a = 2n''k_z$ exponentiell gedämpft,

$$I(z) = I(0) e^{-2n''k_z z} = I(0) e^{-az}. \quad (14.42)$$

Der Zusammenhang zwischen dem komplexen Brechungsindex $n = n' + in''$ und der Suszeptibilität χ vereinfacht sich erheblich, wenn z. B. in verdünnter Materie wie in einem Gas die Polarisierung sehr klein, der Brechungsindex nahe bei 1 ist, $|\chi(\omega)| \ll 1$:

$$n' \simeq 1 + \chi'/2, \quad n'' \simeq \chi''/2.$$

Es kommt also darauf an, die Suszeptibilität aus den mikroskopischen Eigenschaften der Probe zu bestimmen. Für den klassischen Lorentz-Oszillator brauchen wir das Ergebnis nur nach (14.41) zu zitieren:

$$n \simeq 1 + \frac{N}{2} \frac{3\lambda^3}{4\pi^2} \frac{i + 2\delta/\gamma}{1 + (2\delta/\gamma)^2}. \quad (14.43)$$

Wenn wir daraus nach (14.42) den Absorptionskoeffizienten bestimmen, erhalten wir das transparente Ergebnis

$$a = \frac{4\pi n''}{\lambda} = \frac{N\sigma_Q}{1 + (2\delta/\gamma)^2} \quad \text{mit} \quad \sigma_Q = \frac{3\lambda^2}{2\pi}. \quad (14.44)$$

Diese Formulierung verwendet den resonanten Absorptionsquerschnitt σ_Q , der erstaunlicherweise nicht nur allein von der Resonanzwellenlänge abhängt, sondern selbst von der Größenordnung λ^2 und damit sehr viel größer ist als das Atom.

Es ist darüberhinaus nützlich, auch die vollständigere Form aus der direkten Lösung von (14.34,14.35) zu verwenden,

$$n \simeq 1 + \frac{N}{2} \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}.$$

Diese Form, die ohne die nahresonante Näherung auskommt (s. S. 762), entspricht nämlich direkt dem Ergebnis der Quantenmechanik:

$$n \simeq 1 + \frac{N}{2} \sum_k \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \frac{f_{if}}{(\omega_{ik}^2 - \omega^2) - i\omega\gamma_{if}}.$$

Ein reales Atom besitzt zahlreiche Übergänge vom Anfangszustand i in verschiedene Endzustände f , seine Antwort auf ein treibendes Feld wird durch mehrere Oszillatoren mit Frequenzen ω_{if} und Zerfallsraten γ_{if} bestimmt. Die dimensionslose so genannte **Oszillatorstärke**

$$f_{if} = \frac{2m\omega_{if} |\mathbf{r}_{if}|^2}{\hbar} \quad (14.45)$$

hängt vom **Dipol-Matrixelement** \mathbf{r}_{if} ab und bestimmt die relative Stärke der beteiligten Übergänge. Es stellt sich heraus, dass die niedrigst liegenden atomaren Übergänge, z. B. die prominente gelbe D-Linie des Natrium-Atoms, Oszillatorstärken $f_{if} \simeq 1$ besitzen. Daher gelten in der Nähe dieser Resonanzlinien auch die klassisch begründeten Gesetze in sehr guter Näherung. Es ist interessant, dass auch die Rate der spontanen Emission, die wir im Abschn. 14.6.3 genauer betrachten, gerade das Produkt aus der klassischen Dämpfungsrate γ aus (14.38) und der Oszillatorstärke (14.45) ist,

$$\gamma_{if} = \gamma \cdot f_{if}. \quad (14.46)$$

14.6.2 Quantentheorie der atomaren Strahlung

Durch eine Messung des makroskopischen Brechungsindex können mikroskopische Eigenschaften des Dielektrikums bestimmt werden (ω_{if} , γ_{if} , f_{if}), die eine theoretische Behandlung nach der Quantenmechanik erfordern. Allein die Quantenmechanik klärt auch, welche Übergänge überhaupt zu erwarten sind.

Schon das bohrsche Atommodell orientierte sich an **atomaren Übergängen**, die zwischen verschiedenen Bahnen oder, wie wir heute vorzugsweise sagen, atomaren Zuständen stattfinden. Die stationäre Schrödinger-Gleichung ($\hat{H}_0\psi = E\psi$) gibt zwar die Lage der Energieniveaus und damit der Resonanzen an, liefert jedoch keinen Hinweis darauf,

welche von den zahlreichen möglichen Übergängen überhaupt vorkommen oder mit welcher Rate bzw. Intensität sie stattfinden. Diese dynamischen Prozesse können wir z. B. studieren, indem wir die von externen Feldern verursachte kleine Störung mit der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung untersuchen,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) = (\hat{H}_0 + \hat{H}'(t)) \psi(t). \quad (14.47)$$

Sie verursacht die zeitliche Variation der ursprünglichen Zustände, die jetzt eben keine Eigenzustände mehr sind, und führt zu „Übergängen“ von einem Anfangszustand ψ_i in verschiedene Endzustände ψ_f . Die elektromagnetische Strahlung von Atomen ist eines der wichtigsten Beispiele für dynamische Quantenprozesse.

$p \cdot A$ - und $r \cdot E$ -Kopplung.

Die Kopplung von Atomen an elektrische, z. B. optische Felder, können wir versuchsweise in Analogie zur elektrischen Dipolenergie $E_{\text{dip}} = -q\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$ formulieren,

$$\hat{H}'_{r \cdot E}(t) = -q\hat{\mathbf{r}} \cdot \text{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - k\mathbf{r})}\}. \quad (14.48)$$

Dabei haben wir die so genannte *semiklassische* Beschreibung verwendet, in der das Atom nach der Quantenphysik (elektronischer Ortsoperator $\hat{\mathbf{r}}$), das elektromagnetische Feld aber nach der klassischen Physik (mit Amplitude und Phase, $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, immer als Realteil der komplexen Größe zu verstehen) beschrieben wird.

Während diese Formulierung unserer Anschauung nahe liegt, muss eine strenge theoretische Begründung vom kanonischen Impuls ($\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + q\mathbf{A}$) des Elektrons und vom Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes ($\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 e^{-i(\omega t - k\mathbf{r})}$, $\mathbf{E}(t) = -i\omega\mathbf{A}(t)$) ausgehen,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{(\hat{\mathbf{p}} + q\mathbf{A})^2}{2m} + V_{\text{Coul}}(\mathbf{r}) \\ &= \hat{H}_0 + \frac{q}{2m}(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}}) + \frac{q^2 \mathbf{A}^2}{2m}. \end{aligned}$$

Der Beitrag $q^2 \mathbf{A}^2 / 2m$ beschreibt den Diamagnetismus und ist hier vernachlässigbar. In den Lehrbüchern der Quantentheorie wird ferner gezeigt, dass $\hat{\mathbf{p}}$ und \mathbf{A} in der so genannten *Coulomb-Eichung* wegen $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ vertauschen, also $\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}} = 2\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}$. Der Operator

$$\hat{H}'(t) = (q/m) \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}_0 e^{-i(\omega t - k\mathbf{r})}$$

beschreibt in dieser Näherung die Strahlungswechselwirkung. Weil die Abmessungen des Atoms klein sind gegen die Wellenlänge ($ka_0 = 2\pi a_0 / \lambda \ll 1$) können wir außerdem die räumliche Variation von \hat{H}' in der so genannten *Dipol-Näherung* vernachlässigen,

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 1 + i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \dots \simeq 1 \quad (14.49)$$

und erhalten schließlich den Dipol-Operator

$$\hat{H}'_{p,A}(t) = (q/m) \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}. \quad (14.50)$$

Der Zusammenhang mit dem Operator aus (14.48) wird sichtbar, wenn man Matrixelemente zu $\hat{H}'_{p,A}$ und $\hat{H}'_{r,E}$ auswertet. Wegen $\int \psi_f^* \hat{\mathbf{p}} \psi_i dV = -im\omega_{if} \int \psi_f^* \hat{\mathbf{r}} \psi_i dV$ und weil in der Nähe von Resonanzen stets $\omega_{if}/\omega \approx 1$ gilt, können wir in sehr guter Näherung auch den gerateten **Dipol-Operator** (14.48) verwenden:

$$\hat{H}'(t) = \hat{H}'_{p,A}(t) = \frac{\omega_{if}}{\omega} \hat{H}'_{r,E}(t) \simeq \hat{H}'_{r,E}(t).$$

Es ist offensichtlich, dass strahlende Übergänge nur zwischen Zuständen ψ_i und ψ_f stattfinden können, die durch die Störung \hat{H}' verknüpft werden, wenn also $\int \psi_f^* \hat{H}' \psi_i dV = H'_{if}$ nicht verschwindet,

$$\begin{aligned} H'_{if} &= -q \int_V dV \psi_f^* e^{iE_f t/\hbar} \hat{\mathbf{r}} \cdot \Re\{\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\} \psi_i e^{-iE_i t/\hbar}, \\ &= -q \int_V dV \psi_f^*(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_0 \psi_i(\mathbf{r}) e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})/2. \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst nur den ersten Faktor, der die erlaubten Übergänge dadurch identifiziert, dass er von Null verschieden ist und die so genannten **Auswahlregeln** für Dipolübergänge liefert. Der zweite, zeitabhängige Faktor wird von Bedeutung sein, wenn man Übergangsraten (s. Abschn. 14.6.3) bestimmt werden sollen.

Dipol-Matrixelemente und Auswahlregeln.

Der Faktor

$$\mathbf{d}_{if} = -q \mathbf{r}_{if} = e \mathbf{r}_{if} = e \int_V dV \psi_f^*(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r})$$

heißt **Dipol-Matrixelement** und kann für atomare Wellenfunktionen $\psi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$ unmittelbar mit $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ ausgewertet werden,

$$\begin{aligned} e \mathbf{r}_{if} &= e \int_V dV \psi_{nlm}^* \hat{\mathbf{r}} \psi_{n'l'm'} \\ &= e \int_0^\infty dr R_{nl}^* r R_{n'l'} \int_{4\pi} d\Omega Y_{lm}^* \mathbf{e}_r Y_{l'm'}. \end{aligned}$$

Das radiale Matrixelement,

$$r_{if} = r_{nn'l'l'} = \int_0^\infty dr R_{nl}^* r R_{n'l'},$$

ist generell von Null verschieden, sein Wert wird vom „Überlapp“ der radialen Wellenfunktionen bestimmt. Den Winkelanteil $\int Y_{lm}^* \mathbf{e}_r Y_{l'm'}$ bestimmen wir komponentenweise nach

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{11} + Y_{1-1}) \mathbf{e}_x + \frac{-i}{\sqrt{2}} (Y_{11} - Y_{1-1}) \mathbf{e}_y + Y_{10} \mathbf{e}_z \right\}. \end{aligned}$$

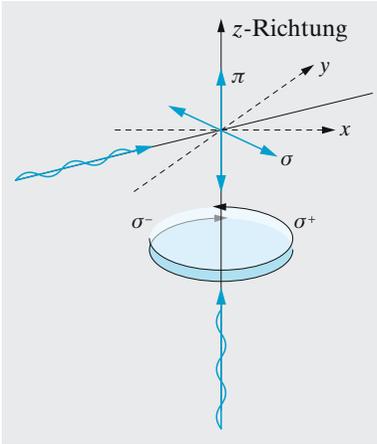


Abb. 14.29. Definition der z-Achse durch Wahl von π - und σ -Polarisation. Es ist immer notwendig, die z-Achse festzulegen, zum Beispiel durch Vorgabe der Polarisation oder durch ein äußeres Magnetfeld

Tabelle 14.7. Polarisationszustände elektrischer Felder

Polarisation	Polarisationsrichtung	Propagation
π , linear	\parallel zur z-Achse	\perp zur z-Achse
σ , allgemein	\perp zur z-Achse	\parallel zur z-Achse
σ^+ , zirkular rechtshändig	\perp zur z-Achse	\parallel zur z-Achse
σ^- , zirkular linkshändig	\perp zur z-Achse	\parallel zur z-Achse

Statt der kartesischen Komponenten (e_x, e_y, e_z) kann man alternativ auch die Basis (e_+, e_-, e_z) verwenden mit

$$e_{\pm} = (e_x \pm ie_y) / \sqrt{2} \quad \text{mit} \quad e_+ e_+^* = e_- e_-^* = 1, \quad e_+ e_-^* = 0.$$

Der radiale Einheitsvektor e_r nimmt darin eine sehr transparente Form an,

$$e_r = \sqrt{4\pi/3} (\sin\theta(e^{i\phi}e_+ + e^{-i\phi}e_-) + \cos\theta e_z) \\ = \sqrt{4\pi/3} (Y_{11}e_+ + Y_{1-1}e_- + Y_{10}e_z).$$

Die Komponenten des elektromagnetischen Feldes werden in dieser Basis auf die Anteile mit π -Polarisation (parallel zur z-Achse, Abb. 14.29) und σ -Polarisation (senkrecht zur z-Achse) projiziert: $E = E_+e_+ + E_-e_- + E_z e_z$. Dabei werden zwei zirkuläre Anteile unterschieden, die je nach Händigkeit als σ^+ - bzw. σ^- -Polarisation bezeichnet werden. Die polarisationsabhängigen Auswahlregeln lassen sich dann gut zuordnen (Tabelle 14.7 und Abb. 14.29).

Dipolübergänge können offenbar nur dann vorkommen, wenn das Integral, dessen Ergebnis hier mit Hilfe eines so genannten *3j-Symbols* formuliert wird,

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int_{4\pi} d\Omega Y_{lm}^* Y_{1q} Y_{l'm'} = (-)^m \underbrace{\begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ -m & q & m' \end{pmatrix}}_{3j\text{-Symbol}},$$

von Null verschieden ist. Die *3j-Symbole* sind tabelliert oder können mit Programmen der Computeralgebra (Mathematica[®], Maple[®]) berechnet werden. Für $q = 0, \pm 1$ ist das Integral nur für die in Tabelle 14.8 gesammelten **Dipol-Auswahlregeln** ungleich Null.

Weil der Dipoloperator gar nicht auf die Spin-Koordinaten der atomaren Elektronen wirkt, ist die Auswahlregel $\Delta s = 0$ leicht einzusehen. Im

Tabelle 14.8. Dipol-Auswahlregeln

l	Bahndrehimpuls	$\Delta l = l - l' = \pm 1$
m	Magnetische Quantenzahl	$\Delta m = m - m' = 0, \pm 1$
s	Spin-Quantenzahl	$\Delta s = s - s' = 0$
j	Gesamtdrehimpuls	$\Delta j = j - j' = 0, \pm 1$
	verboten:	$j = 0 \rightarrow j' = 0$
m_j	m -Quantenzahl	$\Delta m_j = m_j - m'_j = 0, \pm 1$
	verboten:	$\Delta m_j = 0$ bei $\Delta j = 0$

Gesamtdrehimpuls j sind aber Bahndrehimpuls und Spin gekoppelt, und dort gilt $\Delta j = 0, \pm 1$. Andererseits gilt die Drehimpulserhaltung und ganz allgemein muss das Photon bei der Kopplung zweier beliebiger Drehimpulse durch Dipolstrahlung gerade einen Drehimpuls von der Größe \hbar in Emission oder Absorption übernehmen. Daher ist nicht nur $j = 0 \rightarrow j' = 0$ sondern für $\Delta j = 0$ auch der Spezialfall $\Delta m_j = 0$ ebenfalls verboten.

Parität. Atomare Wellenfunktionen sind entweder symmetrisch (*gerade*) oder antisymmetrisch (*ungerade*),

$$\begin{aligned} \psi_{nlm}(r\theta\phi) &= R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi) \xrightarrow{r \rightarrow -r} R_{nl}(r)Y_{lm}(\pi - \theta, \phi + \pi) \\ &= (-)^l \psi_{nlm}(r\theta\phi), \end{aligned}$$

je nachdem ob l gerade oder ungerade ist. In der Quantenmechanik kann man dazu den Paritätsoperator \hat{P} definieren,

$$\hat{P}\psi_{nlm} = (-)^l \psi_{nlm}.$$

Der Dipoloperator ist selbst ungerade und verknüpft nur Zustände mit verschiedener Parität. Insbesondere ist damit unmittelbar klar, dass ein atomarer Eigenzustand selbst kein Dipolmoment besitzen kann, es kommen nur Übergangs-Dipolmomente vor.

14.6.3 Absorption und Emission

Atome können elektromagnetische Strahlung absorbieren oder aus einem angeregten Zustand heraus emittieren (Abb. 14.30). Atomare Emission wurde zur Zeit der großen Entdeckungen in der Quantenmechanik durch Anregung in einer Gasentladung hervorgerufen. Für Absorptionsspektren wurden i. Allg. thermische Lichtquellen mit einem breiten, kontinuierlichen Spektrum verwendet, die nur geringe spektrale Energiedichte zur Verfügung stellten und daher auch nur schwache Anregung erzielen konnten. Seit der Erfindung des Lasers um 1960 ist diese Situation aber

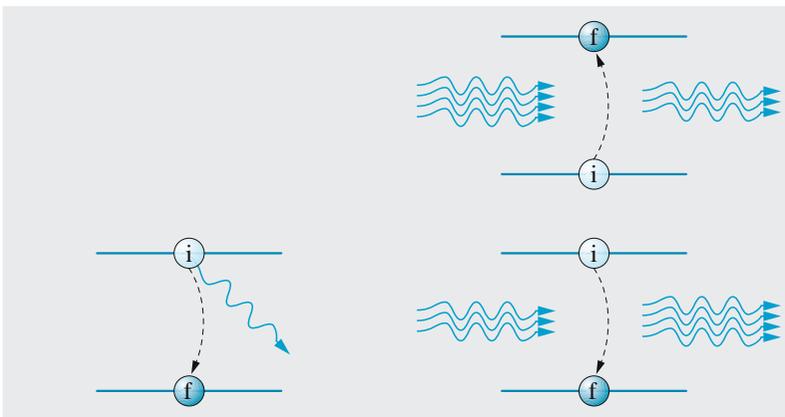


Abb. 14.30. Strahlungsprozesse von Atomen. Bei der spontanen Emission (*links unten*) wird genau ein Photon in einen großen Raumwinkel abgestrahlt. Absorption (*rechts oben*) entfernt ein Photon aus dem Strahlungsfeld, stimulierte Emission (*links unten*) fügt ein Photon hinzu, das exakt synchron mit dem einfallenden Strahlungsfeld schwingt

grundsätzlich verändert worden, denn mit intensivem, monochromatischem Laserlicht können die Quantenzustände eines Atoms beliebig stark manipuliert werden. Wir werden hier die Grenzfälle der stimulierten Absorption und Emission und der spontanen Emission untersuchen.

Spontane Emission. Ohne Umschweife und bis auf einen Faktor 2 liefert die Larmorformel (14.33) das korrekte Ergebnis für die Rate der spontanen Emission γ_{if} , wenn wir die nahe liegende Ersetzung $\ddot{r} \rightarrow \omega_{if}^2 r_{if}$ vornehmen und berücksichtigen, dass die gesamte abgegebene Strahlungsenergie gerade $\hbar\omega_{if}$ beträgt,

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \gamma_{if} \hbar \omega_{if} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\omega_{if}^4 |r_{if}|^2}{3c^3}.$$

Die so gewonnene Zerfallsrate

$$\gamma_{if} = \frac{e^2 |r_{if}|^2 \omega_{if}^3}{3\pi \hbar \epsilon_0 c^3} \quad (14.51)$$

ist identisch mit dem **Einstein-A-Koeffizienten** der spontanen Emission. Von besonderer Bedeutung in dieser Formel ist der ω^3 -Faktor: Die Rate der spontanen Emission bei optischen Frequenzen (10^{14} – 10^{15} Hz) ist danach um 10–15 Größenordnungen größer als bei Mikrowellenfrequenzen (10^9 – 10^{11} Hz).

Skizze

Spontane Emission und Vakuumfluktuationen. Wer sich mit der Analogiebetrachtung nicht zufrieden gibt, muss die korrekte Berechnung der Rate der spontanen Emission nach der Quantenelektrodynamik, der von *Dirac* (1902–1984) eingeführten Quantisierung des elektromagnetischen Feldes (manchmal „zweite Quantisierung“ genannt) nachvollziehen. Im Jahr 1930 hatten *V. Weisskopf* (1908–2002) und *E. Wigner* (1902–1995) mit der erstmaligen Berechnung dieser Zerfallsrate den ersten großen Erfolg einer umfassenderen Quantentheorie begründet.

Die diracsche Vorstellung des elektromagnetischen Quantenfeldes können wir hier in naiver Weise verwenden: Wir betrachten auch das elektromagnetische Feld des Photons als Quantenzustand. Im Anfangszustand befindet sich das Atom im angeregten Zustand ψ_i^{At} , das elektromagnetische Feld im „leeren“ oder so genannten *Vakuuzustand* $\psi^{\text{F}}(0)$. Der Gesamtzustand ist der Produktzustand $\psi_{i,0} = \psi_i^{\text{At}} \psi^{\text{F}}(0)$ mit Gesamtenergie E_i . Im Endzustand befindet sich das Atom im Grundzustand ψ_f^{At} . Der Endzustand des elektromagnetischen Feldes $\psi^{\text{F}}(1_{\mathbf{k}})$ enthält genau ein Photon mit der Energie $\hbar\omega = \hbar c|\mathbf{k}|$, kann aber zahlreiche verschiedene und energetisch erlaubte Wellenvektoren \mathbf{k} als Quantenzahlen besitzen. Die Gesamtenergie des Endzustandes ►

$\Psi_f = \psi_f^{\text{At}} \psi^{\text{F}}(1_k)$ beträgt $E_f + \hbar\omega$. Die beiden Zustände sind energetisch entartet ($E_i = E_f + \hbar\omega$) und werden durch den leicht abgewandelten Dipoloperator $\hat{H}'_{\text{QED}} = -e\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_k^{\text{Vac}}$ gekoppelt. Der *Feldoperator* $\hat{\mathbf{E}}_k^{\text{Vac}}$ erzeugt im elektromagnetischen Vakuum ein Photon mit Polarisation $\boldsymbol{\epsilon}$ und Wellenvektor \mathbf{k} : $\hat{\mathbf{E}}_k^{\text{Vac}} \psi^{\text{F}}(0) = \boldsymbol{\epsilon} E^{\text{Vac}} \psi^{\text{F}}(1_k)$.

Für kurze Zeiten (wenn das Atom noch wenig Anregung verloren hat) kann man die Rate der spontanen Emission $W_{i \rightarrow f}$ z. B. nach der von *Fermi* so genannten *Goldenen Regel* (die eigentlich von *Dirac* erfunden wurde) gewinnen,

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_k |H'_{if}|^2 \delta(E_i - (E_f + \hbar\omega))$$

mit $H'_{if} = \int \Psi_f^* H'_{\text{QED}} \Psi_i dV$.

Weisskopf und *Wigner* haben gezeigt, dass genau diese Rate als Zerfallskonstante $\gamma = W_{if}$ eines Exponentialgesetzes für die Anregungswahrscheinlichkeit $P_i(t)$ gilt,

$$P_i(t) = P_0 e^{-\gamma t}.$$

Nach Diracs Theorie haben auch die leeren Zustände, das *elektromagnetische Vakuum*, schon eine „fluktuierende“ Feldstärke. Sie löst in dieser Vorstellung die spontane Emission überhaupt erst aus, denn ein stationärer atomarer Zustand besitzt kein Dipolmoment und könnte daher gar nicht zu strahlen beginnen! Man kann diesen Schwankungen eine Energiedichte von $\hbar\omega/2$ pro Schwingung zuordnen, der eine Feldstärke $E^{\text{Vac}} = (\hbar\omega/2\epsilon_0)^{1/2}$ im Einheitsvolumen entspricht. Die Dichte der elektromagnetischen Zustände mit verschiedenen Wellenvektoren, \sum_k , zur Frequenz ω beträgt bekanntlich $\rho(\omega) = 2 \int d^3k \rho(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_{if}) = \omega_{if}^2 / \pi^2 c^3$ (Ein Faktor 2 tritt wegen der zwei Polarisationsmöglichkeiten auf, $\rho(\mathbf{k}) = 1/(2\pi)^3$ gibt die Phasenraumdichte an.) und wir erhalten mit $\langle \hat{H}' \rangle \langle e\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} E^{\text{Vac}} \rangle_{er_{if}(\hbar\omega_{if}/2\epsilon_0)}$ exakt das Ergebnis aus (14.51), wobei wir über die drei Raumrichtungen mitteln müssen (Faktor 1/3).

Stimulierte Prozesse – Absorption und Emission. Wir beschränken uns darauf, die Kopplung von zwei atomaren Zuständen ψ_i und ψ_f durch ein elektrisches Feld in der Dipolnäherung zu betrachten. Das Atom befindet sich in einer Überlagerung der beiden Zustände,

$$\Psi(t) = c_i(t) \psi_i + c_f(t) \psi_f,$$

und die Schrödinger-Gleichung lautet nun

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) &= i\hbar (\dot{c}_i + c_i E_i) \psi_i + i\hbar (\dot{c}_f + c_f E_f) \psi_f \\ &= (c_i E_i + c_i \hat{H}') \psi_i + (c_f E_f + c_f \hat{H}') \psi_f. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit ψ_i bzw. ψ_f erhalten wir die Gleichungen für die Koeffizienten $c_{i,f}$, wobei wir identische Terme streichen. Außerdem kürzen

wir die Energiedifferenz mit der *Resonanzfrequenz* $(E_f - E_i)/\hbar = \omega_0$ ab und finden

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} c_i &= \int \psi_f^* \hat{H}' \psi_i dV \cdot c_f \\ &= (q r_{if} E_0/2) \left(e^{i(\omega_0 + \omega)t} + e^{i(\omega_0 - \omega)t} \right) c_f, \end{aligned} \quad (14.52)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} c_f &= \int \psi_i^* \hat{H}' \psi_f dV \cdot c_i \\ &= (q r_{if} E_0/2)^* \left(e^{-i(\omega_0 - \omega)t} + e^{-i(\omega_0 + \omega)t} \right) c_i. \end{aligned}$$

Die Kopplung zwischen den beiden Zuständen oszilliert mit den Frequenzen $\omega_0 \pm \omega$, und bei optischen Frequenzen erwarten wir deshalb überhaupt nur dann einen signifikanten Einfluss, wenn der *Resonanzfall* vorliegt, $\omega_0 \approx \omega$. Dort können wir den mit $\simeq 2\omega_0$ oszillierenden Beitrag ignorieren und die vereinfachten Gleichungen verwenden,

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_i = (q r_{if} E_0/2) e^{i(\omega_0 - \omega)t} c_f, \quad (14.53)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_f = (q r_{if} E_0/2)^* e^{-i(\omega_0 - \omega)t} c_i.$$

Sie lassen sich sogar geschlossen lösen, wir beschränken uns aber auf zwei physikalisch wichtige Grenzfälle: Auf der einen Seite steht im folgenden Abschnitt die Erregung eines atomaren Übergang durch ein schmalbandiges monochromatisches Lichtfeld, wie es nur ein abstimmbarer Laser liefern kann. Auf der anderen Seite betrachten wir danach klassische Lichtquellen, die ein im Vergleich zu den atomaren Resonanzen breites Spektrum besitzen. Das gilt für alle thermischen „Lampen“, auch die relativ schmalbandigen Spektrallampen, die manchmal noch für die Interferometrie eingesetzt werden.

Resonante Absorption und Emission im monochromatischen Lichtfeld. Wir betrachten hier den Fall eines monochromatischen Lichtfeldes, das exakt auf die atomare Resonanz abgestimmt ist: $\omega_0 = \omega$. In diesem Fall gehorchen beide Koeffizienten $c_{i,f}$ der Gleichung

$$\frac{d^2}{dt^2} c_{i,f} = -|e r_{if} E_0/2\hbar|^2 c_{i,f}.$$

Befindet sich das Atom zu Beginn im Grundzustand ψ_i , gilt

$$c_i = \cos(e r_{if} E_0/2\hbar)t \quad \text{und} \quad c_f = \sin(e r_{if} E_0/2\hbar)t,$$

und das Atom schwingt zwischen den beiden Zuständen mit den Wahrscheinlichkeiten $P_{i,f} = |c_{i,f}|^2$ hin und her, $P_i = \cos^2 \Omega_R t$ und $P_f = \sin^2 \Omega_R t$ Abb. 14.31. Die Oszillationsfrequenz

$$\boxed{\Omega_R = e r_{if} E_0/\hbar} \quad (14.54)$$

wird in Anlehnung an die Mikrowellenspektroskopie an Atomen und Molekülen (Abschn. 14.9.5) als **Rabi-Frequenz** bezeichnet. Dort werden

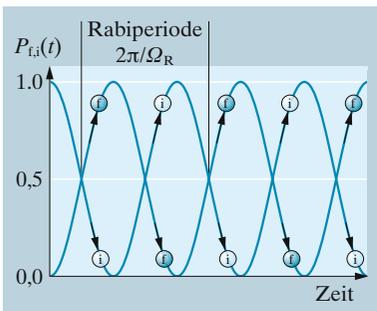


Abb. 14.31. Rabi-Oszillation der Besetzungswahrscheinlichkeiten des Anfangszustandes (i) und Endzustandes (f) bei monochromatischer Anregung eines Atoms

magnetische Dipolübergänge zwischen Fein- und Hyperfeinstrukturzuständen induziert, die demselben Formalismus, nur einer anderen Strahlungskopplung gehorchen. Bei Mikrowellen ist die spontane Emission, die bei freien Atomen und Molekülen immer auftritt, wegen des ω^3 -Faktors im Einstein-A-Koeffizienten stets vernachlässigbar klein (z. B. $< 1 \text{ s}^{-1}$), bei optischen Frequenzen dominiert sie dagegen weitgehend. Erst mit monochromatischer, intensiver Laserstrahlung wurde es möglich, Rabifrequenzen $\Omega_R > \gamma$ zu erzeugen. Bei optischen Übergängen muss man allerdings den Zerfall durch die spontane Emission immer berücksichtigen.

Schwache Absorption aus einer klassischen Lampe. Klassische Lichtquellen sind thermischer Natur und besitzen in einem schmalen Frequenzintervall eine kontinuierliche spektrale Leistungsdichte $i(\omega)$ bzw. Energiedichte $u(\omega) = i(\omega)/c$, deren Variation im Bereich der Resonanz bei ω_0 vernachlässigt werden kann. Wir müssen daher die elektrische Feldamplitude ersetzen durch $E \rightarrow \sqrt{(2i(\omega)/c\epsilon_0) d\omega} = \sqrt{(2u(\omega)/\epsilon_0) d\omega}$. Wenn der Anfangszustand nur geringfügig verändert wird, können wir $c_i \simeq 1$ annehmen und die zweite Gleichung aus (14.52) direkt integrieren,

$$\begin{aligned} c_f(\omega) &= -\frac{i}{\hbar} \left(\int_0^t dt' (qr_{if} \sqrt{u(\omega) d\omega / 2\epsilon_0}) e^{-i(\omega_0 - \omega)t'} \right) \\ &= \frac{qr_{if}}{\hbar} \sqrt{\frac{u(\omega) d\omega}{2\epsilon_0}} \left[\frac{e^{-i(\omega_0 - \omega)t} - 1}{\omega_0 - \omega} \right]. \end{aligned}$$

Das Strahlungsfeld zwischen ω und $\omega + d\omega$ verursacht eine Anregungswahrscheinlichkeit

$$|c_f(\omega)|^2 = \frac{(qr_{if})^2}{\epsilon_0 \hbar^2} \left[\frac{\sin((\omega_0 - \omega)t/2)}{(\omega_0 - \omega)t/2} \right]^2 u(\omega) d\omega,$$

in völliger Übereinstimmung mit (14.54) für $\omega = \omega_0$ und kurze Zeiten. Weil es sich um breitbandige, inkohärente Anregung handelt, können wir alle spektralen Beiträge aufsummieren, um die gesamte Besetzungswahrscheinlichkeit im angeregten Zustand zu berechnen, $P_f = \int |c_f|^2$. Weil sich die Energiedichte im Bereich der Resonanz praktisch nicht ändert, können wir $u(\omega) \rightarrow u(\omega_0)$ vor das Integral ziehen (Abb. 14.32). Wegen der schmalen Resonanz können wir die Grenzen ferner nach $\pm\infty$ ausdehnen und erhalten mit $(\omega_0 - \omega)t/2 \rightarrow x$

$$P_f \simeq \frac{(qr_{if})^2}{\epsilon_0 \hbar^2} u(\omega_0) t \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\sin(x)}{x} \right]^2 = \frac{\pi (qr_{if})^2}{\epsilon_0 \hbar^2} u(\omega_0) t.$$

Als Ergebnis erhalten wir daraus die Übergangsrates $W_{i \rightarrow f} = dP_f/dt$, wobei wir noch die Kopplung an ein unpolarisiertes Strahlungsfeld mit einem Faktor 1/3 berücksichtigen,

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{\pi (qr_{if})^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} u(\omega_0) = B_{if} u(\omega_0).$$

Sie entspricht gerade den bekannten **Einstein-B-Koeffizienten** für stimulierte Prozesse.

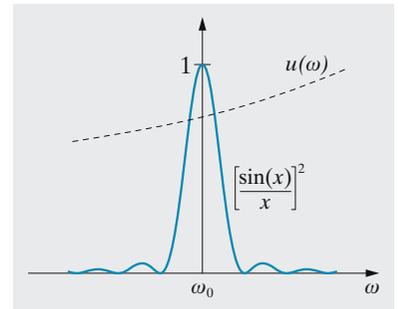


Abb. 14.32. Energiedichte und normierte frequenzabhängige Übergangswahrscheinlichkeit im Bereich der Resonanzfrequenz ω_0 . Die gestrichelte Linie $u(\omega) \propto \omega^2$ deutet die spektralen Eigenschaften einer klassischen Lichtquelle an, im Bereich einer Resonanz nur wenig variiert

14.6.4 Strahlungsverschiebungen

Die Strahlungswechselwirkung wird bei der Absorption und Emission elektromagnetischer Strahlung buchstäblich sichtbar. Sie ist aber keineswegs auf diese mit Energieaustausch verbundenen Phänomene beschränkt: Ein elektromagnetisches Wechselfeld verursacht ein induziertes Dipolmoment, das sich seinerseits im Treiberfeld einstellt – die atomaren Niveaus erfahren eine Energieverschiebung, die in Analogie zur Verschiebung durch elektrostatische Felder (Abschn. 14.4.5) als *AC-Stark-Effekt* bezeichnet wird.

AC-Stark-Effekt. Wir wollen die Einstellenergie des induzierten Dipolmoments in einem monochromatischen elektrischen Wechselfeld (AC-Feld) $E = E_0 \cos \omega t$ berechnen, $\Delta E = \langle \hat{H}' \rangle = \langle \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \rangle$. Der ungestörte Eigenzustand ψ_i besitzt bekanntlich selbst kein Dipolmoment, erfährt aber durch das elektrische Wechselfeld mit der Frequenz ω eine kleine Beimischung anderer Zustände $|\psi_f\rangle$, von denen im einfachsten Fall einer dominiert: $\Psi \simeq \psi_i + \delta c_f \cdot \psi_f$ mit $\delta c_f \ll 1$. Um den Koeffizienten δc_f zu gewinnen, greifen wir auf (14.52) mit $c_i \simeq 1$ zurück und erhalten mit der Rabi-Frequenz aus (14.54)

$$\begin{aligned} \delta c_f &\simeq 2\hbar\Omega_R \int_0^t \left(e^{-i(\omega_0-\omega)t} + e^{-i(\omega_0+\omega)t} \right) \\ &= 2i\hbar\Omega_R \left[\frac{1 - e^{-i(\omega_0-\omega)t}}{\omega_0 - \omega} + \frac{1 - e^{-i(\omega_0+\omega)t}}{\omega_0 + \omega} \right]. \end{aligned}$$

Die Energieverschiebung ΔE bestimmen wir nach

$$\begin{aligned} E + \Delta E &= \int \Psi^* (\hat{H}_0 + \hat{H}') \Psi \, dV \\ &= \int (\psi_i^* + \delta c_f \psi_f^*) (\hat{H}_0 + \hat{H}') (\psi_i + \delta c_f \psi_f) \, dV \end{aligned}$$

und finden nach kurzer Rechnung

$$\Delta E = \delta c_f^* \int \psi_f^* \hat{H}' \psi_i \, dV + \delta c_f \int \psi_i^* \hat{H}' \psi_f \, dV + O(\delta c_f^2),$$

bzw. nach Ausmultiplizieren und Vernachlässigung aller schnell oszillierenden Beiträge

$$\boxed{\Delta E = 4\hbar|\Omega_R|^2 \left[\frac{1}{\omega_0 - \omega} + \frac{1}{\omega_0 + \omega} \right] \simeq \frac{4\hbar|\Omega_R|^2}{\Delta}}. \quad (14.55)$$

Nur der erste Korrekturterm ist in Resonanznähe $\Delta = \omega_0 - \omega \simeq 0$ von Bedeutung. Das Resultat (14.55), divergiert im Resonanzfall und gilt daher nur bei Abständen $|\Delta| \gg \gamma$, der Linienbreite der Resonanz, die den Energieaustausch beschreibt. In Abb. 14.33 wird der Einfluss eines Wechselfeldes auf eine atomare Resonanz vorgestellt: Rot verstimmt Treiberfelder „drücken“ die Energieniveaus auseinander, blau verstimmt zusammen. Um den AC-Stark-Effekt experimentell zu beobachten, muss man ein drittes, schwaches Wechselfeld verwenden, das selbst keine wahrnehmbaren Verschiebungen verursacht. Übrigens liefert (14.55) für $\omega \rightarrow 0$ auch das Resultat für den quadratischen Stark-Effekt in elektrostatischen Feldern.

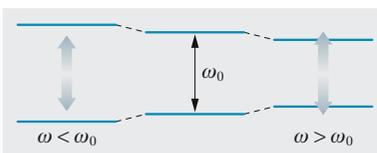


Abb. 14.33. AC-Stark-Effekt für ein rot ($\omega < \omega_0$) und ein blau ($\omega > \omega_0$) verstimmtes elektrisches Wechselfeld

Strahlungskorrekturen und Lamb-Shift. Im vorausgegangenen Abschnitt haben wir Verschiebung eines atomaren Energieniveaus durch ein monochromatisches Wechselfeld studiert und gesehen, dass rot und blau verstimte Felder eine Verschiebung in entgegengesetzter Richtung verursachen. Eine Verschiebung wird auch durch Felder mit einem kontinuierlichen Spektrum verursacht, weil Kopplungsstärke und Zustandsdichte auf den beiden Seiten einer Resonanz i. Allg. verschieden sind (s. Abschn. 14.4.3). Die berühmte *Lamb-Shift* bezeichnet die Frequenzverschiebung zwischen dem $2^2S_{1/2}$ und dem $2^2P_{1/2}$ des Wasserstoff-Atoms, die nach der Dirac-Theorie perfekt entartet sind. Sie wird von den Schwankungen des elektromagnetischen Feldes hervorgerufen, die auch am „Nullpunkt“ der Amplitude auftreten und als *Vakuum-Fluktuationen* bezeichnet werden. Die genaue Berechnung dieser Frequenzverschiebung nach der Quantenelektrodynamik gehört zu den großen Erfolgen der theoretischen Physik und ist für die Ideengeschichte der modernen Physik von kaum zu überschätzender Bedeutung. Die Frequenzverschiebungen werden wegen ihres Ursprungs auch *Strahlungskorrekturen* genannt.

Die Lamb-Shift zählt als ein Beweis für die Existenz dieser Nullpunkt-Fluktuationen, die ihrerseits eine Behandlung des elektromagnetischen Feldes nach der Quantentheorie („Quantenfeldtheorie“) erfordern. In der Quantenelektrodynamik wird das elektromagnetische Feld als eine Summe von Quantenoszillatoren mit Frequenz ω aufgefasst. Es ist bekannt, dass einerseits der Mittelwert des elektrischen Feldes im Vakuumzustand $\psi^F(0)$ verschwindet, $\int \psi^{F*}(0) \hat{E} \psi^F(0) dV = 0$, nicht aber die Varianz $\int \psi^{F*}(0) \hat{E} \hat{E}^\dagger \psi^F(0) dV > 0$.

Welton hat sich um eine anschauliche Interpretation der Lamb-Shift bemüht und angenommen, dass das atomare Elektron den Feldschwankungen des Vakuums mit sehr kleinen Positionsschwankungen folgt, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, und dass zwar $\langle \Delta\mathbf{r} \rangle$, nicht aber $\langle \Delta\mathbf{r}^2 \rangle$ verschwindet. Die Positionsschwankungen verursachen eine Modifikation der Coulomb-Kraft, mit $\Delta V = V(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) \simeq (\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla)V + (1/2)(\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 V + \dots$. Mit $\langle \Delta\mathbf{r} \cdot \nabla \rangle = 0$ bzw. $\langle (\Delta\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 \rangle = (1/3)\langle \Delta\mathbf{r}^2 \rangle \nabla^2$ wegen der isotropen Fluktuationen gilt

$$\Delta V \simeq \frac{1}{6} \langle \Delta\mathbf{r}^2 \rangle \nabla^2 V(\mathbf{r}) = \frac{Ze^2}{6\epsilon_0} \langle \Delta\mathbf{r}^2 \rangle \delta(\mathbf{r})$$

und man findet für ψ_S - und ψ_P -Wellenfunktionen in dieser Näherung wegen der Deltafunktion leicht

$$\int \psi_S^* \Delta V \psi_S dV = \frac{e^2}{6\epsilon_0} \langle \Delta\mathbf{r}^2 \rangle |\psi_S(0)|^2 \quad \text{und} \quad \int \psi_P^* \Delta V \psi_P dV = 0.$$

Die Auswertung hat *Bethe* 1947 zuerst ausgeführt und das Resultat

$$\int dV \psi_{2s}^* \Delta V \psi_{2s} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{2}{3mc^2} \frac{\hbar^2 e^2}{2\epsilon_0} |\psi_{2s}(0)|^2 \log \frac{mc^2}{\hbar\omega_H}$$

erzielt, das der Namensgeber für den **Bethe-Logarithmus** geworden ist. Wenn man eine sinnvolle Wasserstoff-Energie einsetzt, $\hbar\omega_H = 13,6 \text{ eV}/\hbar$, erhält man den Wert von 1 047 MHz, der schon erstaunlich nahe beim experimentellen Wert *Lamb* und *Retherford* liegt.

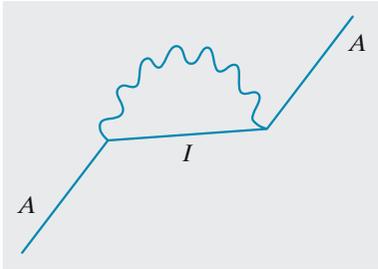


Abb. 14.34. Der Feynman-Graph für die Selbstenergie eines Elektrons. Das Elektron emittiert „virtuelle“ Photonen, die es nach kurzer Zeit wieder reabsorbiert

Die Lamb-Shift hat *Richard Feynman, Julian Schwinger* und *Sin-Itiro Tomonaga* zur Erfindung der theoretischen Methoden angeregt, die Grundlage der modernen theoretischen Physik geworden sind und ihnen 1965 den Nobelpreis eingetragen hat. In Abb. 14.34 ist ein einfaches Beispiel dieser Theorie gezeigt, ein Feynman-Graph, der eine Rechenvorschrift symbolisiert: Ein gebundenes oder freies Elektron im Zustand *A* bewegt sich entlang seiner Zeitlinie. Es emittiert ein („virtuell“ genanntes) Photon, das es nach kurzer Zeit wieder reabsorbiert. Wenn der Zwischenzustand *I* nicht zu lange andauert, wird die Energieerhaltung dabei nicht verletzt. Das Elektron tritt mit seinem eigenen dynamischen Feld in Wechselwirkung und erfährt einen Beitrag zu seiner „Selbstenergie“.

Bei der Berechnung stellt sich heraus, dass die Energie der gebundenen atomaren Niveaus wie die des freien Elektrons unendlich weit abgesenkt wird! Erstaunlicherweise stellt aber die Quantenelektrodynamik (QED) Rechenregeln zur Verfügung, die die allein beobachtbaren, endlichen Differenzen z. B. zwischen den Selbstenergien des freien und des gebundenen Elektrons mit höchster Präzision zu berechnen erlauben.

Wenn man die Lamb-Shift an hochgeladenen, wasserstoffähnlichen Ionen (das heißt sie sind bis auf ein Elektron vollständig ionisiert; s. Tabelle 14.9) untersucht, wird eine sehr starke Z^4 -Abhängigkeit deutlich,

$$\Delta E = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\alpha Z^4}{n^3} F(\alpha Z) m_e c^2 . \tag{14.56}$$

Die Funktion $F(\alpha Z)$ variiert nur langsam mit Z , sie fasst verschiedene Effekte (die Selbstenergie, die Vakuumpolarisation, den Einfluss des Kern und Effekte höherer Ordnung) zusammen, die zur Lamb-Shift beitragen. Schon beim Schwefel liegt die Feinstruktur (der Abstand zwischen $^2P_{1/2}$ und $^2P_{3/2}$) im sichtbaren Spektralbereich und die Lamb-Shift kann direkt mit Laserspektroskopie vermessen werden! Der gegenwärtige Stand der Messungen und theoretischen Vorhersagen zur Lamb-Shift ist in Tabelle 14.9 zusammengestellt.

Tabelle 14.9. Lamb-Shift von ausgewählten Atomen. Die hervorragende Übereinstimmung von Experiment und Theorie gehört zu den Triumphen der modernen Physik

Atom	Z	Zustand	$\Delta\nu_{\text{Exp}}$ (MHz)	$\Delta\nu_{\text{Th}}$ (MHz)
^1H	1	$2S_{1/2}$	1 057,77(6)	1 047
<i>Neutrale Atome</i>				
^1H	1	$1S_{1/2}$	8 172,837(22)	8 172,816(10)
^1H	1	$2S_{1/2}$	1 057,845(9)	1 057,840(10)
^4He	2	1^1S_0	41 224(45)	41 233(35)
<i>Wasserstoffähnliche Ionen</i>				
$^4\text{He}^+$	2	$2S_{1/2}$	14 042,52(16)	14 041,3(2)
$^{16}\text{O}^{7+}$	8	$2S_{1/2}$	$2 203(11) \cdot 10^3$	$2 196,0(9) \cdot 10^3$
$^{32}\text{S}^{15+}$	16	$2S_{1/2}$	$25 266(63) \cdot 10^3$	$25 374(15) \cdot 10^3$
			$\Delta\nu_{\text{Exp}}$ (eV)	$\Delta\nu_{\text{Th}}$ (eV)
$^{233}\text{U}^{91+}$	92	$2S_{1/2}$	468(13)	465,59

14.7 Lichtkräfte

Atome absorbieren und reemittieren Licht. Bei diesen Prozessen wird aber nicht nur der innere Zustand verändert, sondern auch der äußere: Wie beim Compton-Effekt (Abschn. 13.1.3) führen nämlich sowohl Absorption als auch Emission zu einem Rückstoß mit dem Impulsübertrag $\Delta \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$, wobei \mathbf{k} der Wellenvektor des Lichtfeldes ist. Dieser Rückstoß, diese mechanische Wirkung von Licht ist übrigens von *R. Frisch* schon 1933 mit einer Na-Dampflampe am Na-Atomstrahl beobachtet worden (Abb. 14.35), aber erst mit der Verfügbarkeit intensiver und monochromatischer Laserstrahlung konnte daraus eine wichtige experimentelle Methode werden.

14.7.1 Strahlungsdruck

Die Grundlage der Lichtkräfte kann man durch den Impulsübertrag direkt verstehen: Bei jeder Absorption eines Photons aus einem gerichteten Laserstrahl wird der Impuls $\hbar \mathbf{k}$ übertragen, während die spontane Reemission ungerichtet ist und deshalb im Mittel über viele Prozesse keine gerichtete Kraft ausübt. Um die Kraft $\langle \mathbf{F}_{\text{SD}} \rangle = M \mathbf{a}$ zu bestimmen, die ein Laserstrahl auf ein Atom der Masse M ausübt, müssen wir also lediglich die Rate der Absorptionsprozesse R mit dem Impulsübertrag $\Delta \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ multiplizieren,

$$\langle \mathbf{F}_{\text{SD}} \rangle = R \hbar \mathbf{k}. \quad (14.57)$$

Die Kraft, die der Strahlungsdruck ausübt, wird auch **Spontankraft** genannt, weil sie auf der spontanen Reemission der absorbierten Energie beruht. Um die Rate der spontanen Absorptionsprozesse eines einzelnen Atoms zu bestimmen, betrachten wir die aus einem Laserstrahl der Intensität I absorbierte Leistung mit Hilfe des Absorptionskoeffizienten und Wirkungsquerschnitts σ_Q aus (14.44): $P_{\text{abs}} = \sigma_Q \cdot I / (1 + (2\delta/\gamma)^2)$, wobei wir wieder die Verstimmung von Laserfrequenz und Atom $\delta = \omega - \omega_0$ und die atomare Zerfallsrate γ verwenden. Der Überlegung liegt das Lorentz-Oszillator-Modell aus Abschn. 14.6.1 zugrunde, und man findet

$$\tilde{R} = \frac{P_{\text{abs}}}{\hbar \omega} = \frac{\sigma_Q I / \hbar \omega}{1 + (2\delta/\gamma)^2}. \quad (14.58)$$

Die Streurrate R eines realen Atoms kann aber nicht beliebig mit I ansteigen, wie nach dieser von der klassischen Physik inspirierten Gleichung zu erwarten wäre. Ein angeregtes Atom muss seine Energie nämlich erst wieder loswerden, bevor der nächste Streuprozess eintreten kann. Wenn wir annehmen, dass das Atom durch spontane Strahlung die Energie $\hbar \omega$ in der Zeit γ^{-1} abgibt und bei dieser charakteristischen **Sättigungs-Intensität** I_{sat} gerade mit gleicher Rate wieder aufnimmt, dann muss gelten

$$I_{\text{sat}} = \frac{\hbar \omega \cdot \gamma / 2}{\sigma_Q} = \frac{\pi \hbar c \gamma}{3 \lambda^3}. \quad (14.59)$$

Dann gilt ebenfalls für $\delta = 0$ in (14.58): $R_{\text{sat}} = \sigma_Q I_{\text{sat}} / \hbar \omega = \gamma / 2$. In der Spezialliteratur findet man für die Streurrate unter Berücksichtigung der Sättigung die Absorptionsrate

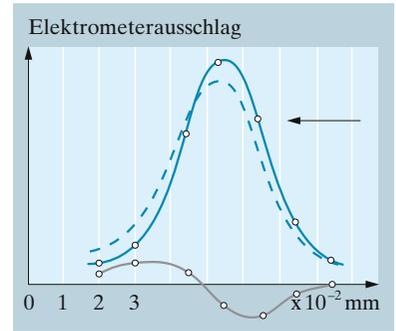
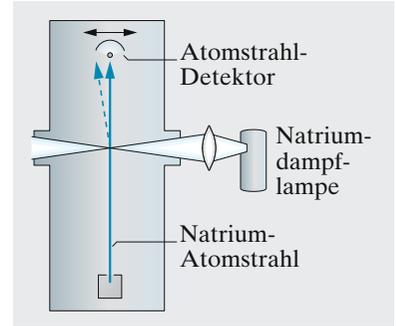


Abb. 14.35. Nachweis der Lichtkraft am Atomstrahl. Der Natrium-Atomstrahl wird mit einer Natriumdampf-Lampe resonant und unter rechtem Winkel beleuchtet. Auf einem Detektor kann die Ablenkung des Atomstrahls nachgewiesen werden. Die durchgezogene Messkurve zeigt das Intensitätsprofil des Atomstrahls ohne Beleuchtung, die gestrichelte Kurve mit Beleuchtung. Darunter ist die Differenz eingezeichnet. Die Zeichnung stammt aus der Originalarbeit von *R. Frisch*, *Z. Physik* **86**, 42 (1933)

$$R = \frac{\gamma}{2} \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + I/I_{\text{sat}} + (2\delta/\gamma)^2}, \quad (14.60)$$

deren genaue Form sich nicht sofort erraten lässt, die aber leicht zu verstehen ist: Für kleine Intensitäten ($I/I_{\text{sat}} \ll 1$) gilt $R \simeq \bar{R}$ wie in (14.58), während für große Intensitäten ($I/I_{\text{sat}} \gg 1$) der konstante Wert $R = \gamma/2$ erreicht wird. Nun können wir auch die Lichtkraft für ein Atom angeben, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt und daher zur eingestellten Verstimmung $\delta_0 = \omega - \omega_0$ auch noch den **Doppler-Effekt** erfährt: $\delta = \delta_0 + kv$. Im eindimensionalen Fall gilt dann

$$F_{\text{SD}} = \frac{\hbar k \gamma}{2} \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + I/I_{\text{sat}} + (2(\delta_0 + kv)/\gamma)^2}. \quad (14.61)$$

14.7.2 Optische Dipolkräfte

Neben der spontanen und dissipativen Strahlungsdruck-Kraft gibt es noch die optische Dipolkraft, die durch den dispersiven Anteil der Licht-Materie-Wechselwirkung verursacht wird: Das Lichtfeld $E = E_0 e^{-i\omega t}$ induziert einen elektrischen Dipol $d = d_0 e^{-i\omega t}$ (AC-Stark-Effekt, Abschn. 14.6.4), der sich im elektrischen Feld einstellt und eine Dipolenergie erfährt. Wenn das treibende Feld inhomogen ist, z. B. vereinfachend nur in z -Richtung, tritt eine Kraft auf:

$$F_{\text{dip}} = -\frac{d}{dz} U_{\text{dip}} = -\frac{d}{dz} \frac{1}{2} \text{Re}\{d^* \cdot E\}.$$

Das Dipolmoment können wir aus (14.39) entnehmen, und wir nutzen wieder die Sättigungsintensität I_{sat} (14.59) und den Absorptionsquerschnitt σ_Q (14.44). Dann rechnet man aus

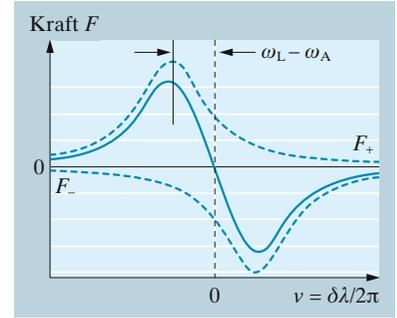
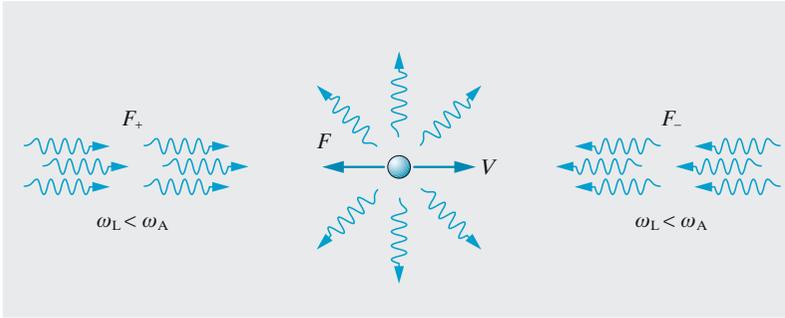
$$U_{\text{dip}} = \frac{\hbar \gamma}{2} \frac{2\delta/\gamma}{1 + (2\delta/\gamma)^2} \frac{I(z)}{I_{\text{sat}}}.$$

Bei genauerer Berücksichtigung der Sättigung, also für höhere Intensitäten $I/I_{\text{sat}} > 1$ muss dieses Resultat wieder korrigiert werden, dann gilt $U_{\text{dip}} = (\hbar\delta/2) \ln(1 + I/I_{\text{sat}})$. Dipolkräfte sind vor allem dann interessant, wenn die Verstimmung so groß ist, dass kaum Streuprozesse auftreten, $2\delta/\gamma \gg 1$. Dann erfahren die Atome ein in guter Näherung konservatives Potential

$$U_{\text{dip}} = \frac{\hbar \gamma^2}{2\delta} \frac{I}{I_{\text{sat}}}.$$

14.7.3 Laserkühlung

Das Geschwindigkeitsprofil der Strahlungsdruck-Kraft ist in Abb. 14.36 gezeigt für Laserstrahlen, die „rot“ verstimmt sind zur atomaren Resonanzfrequenz, d. h. $\delta = \omega - \omega_0 < 0$. Läuft ein Atom in $-z$ -Richtung, erfährt es die maximale Kraft F_+ aus dem in $+z$ -Richtung propagierenden Laserstrahl, wenn es in $+z$ -Richtung läuft, aus dem entgegenkommenden Strahl F_- . Werden beide Laserstrahlen gleichzeitig eingestrahlt, dann



ergibt die Summe der Kräfte (solange wir Interferenzeffekte, die bei größeren Intensitäten auftreten, vernachlässigen können) das asymmetrische Kraftprofil aus Abb. 14.36: Wohin das Atom auch läuft, es erfährt immer eine abbremsende Kraft! Wäre die Verstimmung „blau“ verstimmt ($\delta > 0$), dann wäre das Verhältnis gerade umgekehrt, das Atom würde immer beschleunigt. Diese Situation lässt sich auch aus energetischen Gründen gut verstehen: Bei Rotverstimmung wird das Atom am stärksten abgebremst, wenn das Atom dem Laser entgegen läuft und dabei die fehlende Energie zur Resonanzabsorption aus seiner kinetischen Energie aufbringt. In der Nähe von $\nu = 0$ erkennen wir einen linearen Kraftverlauf mit negativer Steigung: Die Atome erfahren eine Reibungskraft $F = -\alpha m v$. Man kann aus der Summe der Kräfte nach (14.61) den Koeffizienten durch Taylor-Entwicklung bestimmen ($\delta_0 = \omega - \omega_0 < 0$):

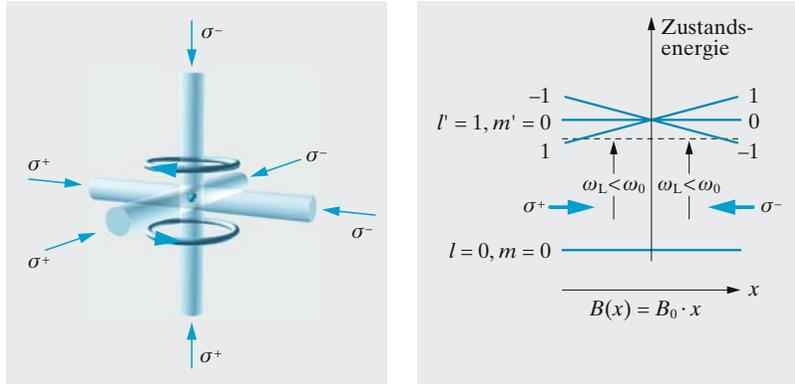
$$F = -\alpha m v = \frac{8\hbar k^2 \delta_0}{\gamma} \frac{I/I_{\text{sat}}}{(1 + I/I_{\text{sat}} + (2\delta_0/\gamma)^2)^2} \cdot v \quad (14.62)$$

Erst diese Reibungskraft, die alle Atome eines Gases abbremst, macht aus den Lichtkräften die dissipative Kraft der Laserkühlung.

Optische Melasse In der so genannten optischen Melasse strahlt man auf den drei Raumachsen je ein gegenläufiges Paar von Laserstrahlen ein, um das Atom in allen Raumrichtungen zu bremsen. Die Atome bewegen sich dabei wie in einem hochviskosen Sirup, daher die Bezeichnung „optische Melasse“. Die Reibungskraft $F = -\alpha m v$ würde die Atome solange bremsen, bis sie bei der Geschwindigkeit $v = 0$ angekommen wären. Der Kühlwirkung steht aber eine Heizkraft entgegen, die durch die zufällige Natur der Impulsüberträge $\mathbf{p}_{\text{em}} = \hbar \mathbf{k}_{\text{em}}$ bei der spontanen Emission verursacht wird. Zwar verschwindet der mittlere Impulsübertrag bei der spontanen Emission, die in alle Richtungen stattfindet ($\langle \mathbf{p}_{\text{em}} \rangle = 0$), nicht aber deren Schwankungsquadrat, das nach $N = R \cdot t$ Absorptionszyklen den Wert $\Delta p_{\text{em}}^2 = N \hbar^2 k^2$ annimmt, ganz analog zur brownischen Bewegung, also einer Diffusionsbewegung gleicht. Es entspricht wegen $\Delta p_{\text{em}}^2 = \langle p_{\text{em}}^2 \rangle - \langle p_{\text{em}} \rangle^2 = \langle p_{\text{em}}^2 \rangle$ der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = \langle p_{\text{em}}^2 \rangle / 2m$, die mit der Rate $dE_{\text{kin}}/dt = R \hbar^2 k^2 / 2m$ wächst. Gleichzeitig verursacht die Reibungskraft (14.62) aber eine Abnahme der kinetischen Energie nach $dE_{\text{kin}}/dt = -2\alpha E_{\text{kin}}$, sodass wir im Gleichgewicht die mittlere Energie $E_{\text{kin}} = R \hbar^2 k^2 / 4\alpha m = k_B T_D / 2$ erwarten. Diese

Abb. 14.36. Geschwindigkeitsprofil der Strahlungsdruck-Lichtkraft für ein Paar rot verstimmter und gegenläufiger Laserstrahlen. Die gestrichelten Kurven zeigen die Wirkung des von links bzw. von rechts kommenden Laserstrahls einzeln, die durchgezogene Linie die Summe der Lichtkräfte

Abb. 14.37. Magneto-optische Falle. *Links:* Drei Paare von gegenläufigen Laserstrahlen beleuchten das Speichervolumen im Zentrum der beiden Magnetspulen. Sie werden von gegensinnigen Strömen durchflossen, um ein Quadrupolfeld zu erzeugen. *Rechts:* Bei rotverstimmttem Laserlicht werden die Atome immer zum Zentrum des magnetischen Quadrupolfeldes getrieben



Energie entspricht einer Temperatur, für die man nach Einsetzen von R und α die so genannte **Doppler-Temperatur** findet (das Minuszeichen taucht wegen der Rotverstimmung auf, $\delta < 0$):

$$k_B T_D = \frac{\hbar \gamma}{2} \frac{1 + (2\delta/\gamma)^2}{-4\delta/\gamma}.$$

Sie nimmt ihren geringsten Wert bei $-2\delta/\gamma = 1$ an, $k_B T_D = \hbar \gamma/2$.

Magneto-optische Falle. Die optische Melasse hat den Nachteil, dass sie kein Zentrum definiert, an dem sich die kalten Atome sammeln, es gibt keine Potentialkraft. Durch Überlagerung der optischen Melasse mit einem magnetischen Quadrupolfeld wie in Abb. 14.37 kann man die Strahlungsdruck räumlich so modifizieren, dass seine Kraft immer auf das Zentrum des Quadrupolfeldes gerichtet ist. Das Quadrupolfeld wird durch zwei Spulen erzeugt, die mit gegensinnigen Strömen betrieben werden. Im Zentrum heben sich die Magnetfelder gerade auf.

An einem $J = 0 \rightarrow J = 1$ -Übergang kann man sich die Wirkung für einen rotverstimmtten Laserstrahl klar machen: Das Quadrupolfeld erzeugt eine ortsabhängige Zeeman-Verstimmung der Atome, und wenn das nach rechts laufende Laserlicht rechts-zirkular (σ^+)-polarisiert ist, dann wird es von den Atomen auf der linken Seite stärker absorbiert als das σ^- -polarisierte Licht aus der anderen Richtung, weil die Resonanzbedingung für $\Delta m = 1$ besser erfüllt ist. Für Atome auf der rechten Seite gilt entsprechendes.

14.8 Atomoptik

Die Kontrolle der atomaren Bewegung durch Laserkühlung hat die Möglichkeit eröffnet, Atomoptik zu treiben. Magnetische und optische Dipolkräfte sind zwar relativ schwach, reichen bei genügend langsamen Atomen aber aus, geeignete atom-optische Elemente zu realisieren, die die Ausbreitung von Atomstrahlen beeinflussen: Spiegel, Linsen, und wenn es zur Atom-Wellenoptik kommt, Beugungsgitter und andere Elemente.

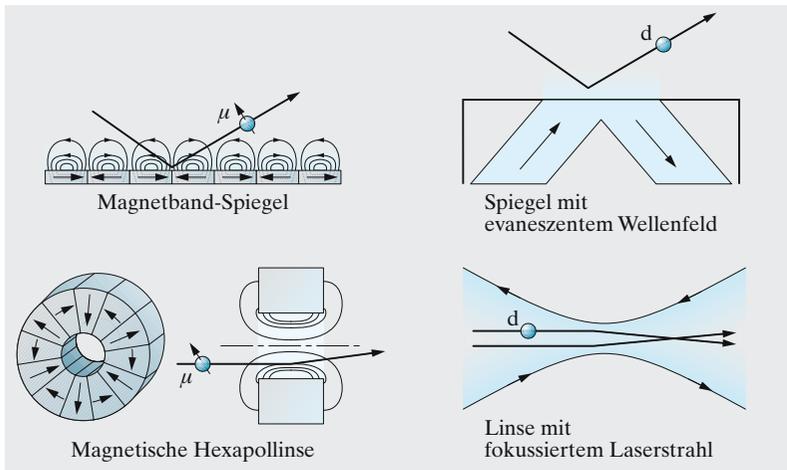


Abb. 14.38. Geometrische Atomoptik: Spiegel, Linsen und andere Elemente können durch magnetische oder optische Dipol-Kräfte realisiert werden. *Links:* Das periodisch magnetisierte Tonband erzeugt ein Magnetfeld, dessen Richtung sich schnell ändert, dessen Betrag aber exponentiell von der Oberfläche weg abfällt und einen steilen Potentialwall bildet. Der Betrag des Magnetfeldes der magnetischen Hexapollinse steigt von der Achse quadratisch an. *Rechts:* Optische Dipolkräfte können mit einem evaneszenten Wellenfeld und einem fokussierten Laserstrahl zur Realisierung von Spiegel bzw. Linse verwendet werden

In der „richtigen“ Optik werden Materiekomponenten – Gläser etc. – verwendet, um die Ausbreitung von Lichtstrahlen zu kontrollieren, hier werden elektromagnetische Felder eingesetzt, um die Propagation von Teilchenstrahlen zu beeinflussen.

In Abb. 14.38 sind Spiegel und Linsen vorgestellt, mit denen sich die geometrische Atomoptik für einigermaßen langsame Atome realisieren lässt. Magnetische Komponenten beruhen auf der Kraft inhomogener Magnetfelder auf paramagnetische Atome (ganz wie beim Stern-Gerlach-Effekt, Abschn. 14.3.1) mit Dipolmoment μ , das stets so orientiert sein muss, dass die Atome eine Kraft in Richtung kleinerer Feldstärken erfahren. Wenn die Atome sich langsam bewegen, behalten sie diese Orientierung bei und es kommt nur auf den Betrag, nicht die Richtung der magnetischen Feldstärke an.

Optische Dipolkräfte (Abschn. 14.7.2) wirken in evaneszenten Wellenfeldern, fokussierten Laserstrahlen (Abb. 14.38) oder Stehwellenfeldern (Abb. 14.39).

Abb. 14.39. Ein Beispiel für eine Anwendung optischer Dipolkräfte: Bei der Atomlithographie wird ein Stehwellenfeld direkt über einer Oberfläche erzeugt. Jede Halbwelle wirkt wie eine kleine Linse, die im gezeigten Beispiel Caesium-Atome mit 852 nm Laserlicht in scharfe Linien fokussiert. Die Atome verursachen chemische Veränderungen der beschichteten Oberfläche die danach durch Ätzprozesse der Oberfläche als Linien eingeschrieben werden können. Die Breite der Linien beträgt nur wenig mehr als 100 nm

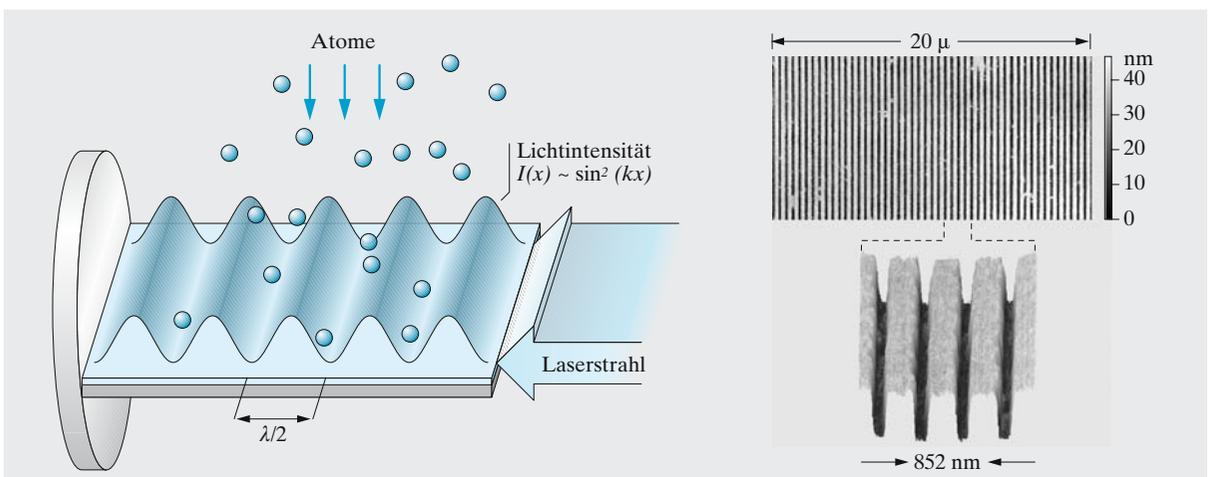


Abb. 14.40. Skizze eines Beugungs-experiments mit He-Atomstrahlen an einem SiN_x Transmissionsgitter mit 100 nm Dicke. Die Gitterperiode beträgt nur 100 nm. Weil das Massenspektrometer andere Atome stark unterdrückt, reicht die Nachweisefizienz von 10^{-6} /He-Atom hier aus. Diese Gitter wurden von Hank Smith und Tim Savas am MIT in Cambridge, Massachusetts, U.S.A., hergestellt

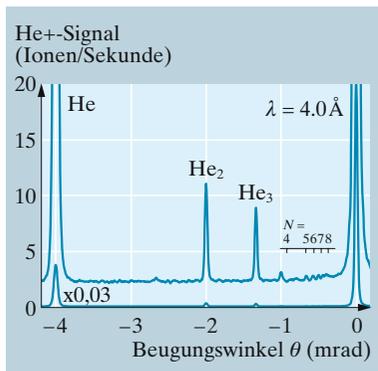
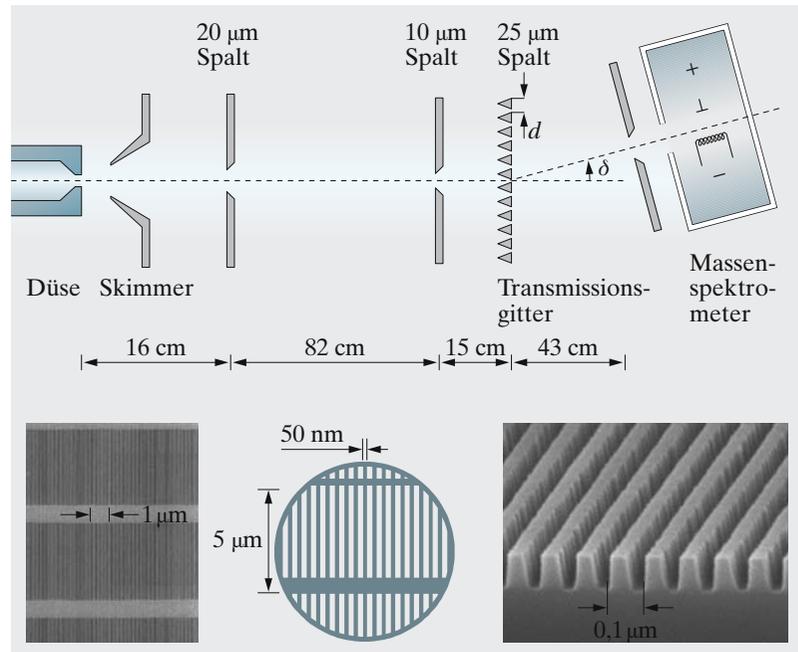


Abb. 14.41. Mit dem Beugungsgitter ist es möglich, den Nachweis für exotische Objekte aus He-Atomen zu führen: Zwischen der 0. und der 1. Beugungsordnung sind weitere Beugungsmaxima zu erkennen. Das stärkste Zwischenmaximum tritt gerade beim halben Beugungswinkel auf. Weil die Teilchen alle die gleiche Geschwindigkeit haben, deutet das bei der halben de Broglie-Wellenlänge auf die doppelte Masse hin – das He-Dimer. Entsprechend können weitere Maxima mit dem He-Trimer usw. gedeutet werden. Mit freundlicher Erlaubnis von J. Peter Toennies, Anton Kalinine und Oleg Kornilov

14.8.1 Atomare Beugung

Die **geometrische Atomoptik**, die sich mit der Ausbreitung von Strahlen beschäftigt, ist wie die geometrische Licht-Optik (Kap. 9) lediglich eine Näherung der Wellenoptik. Sie verliert hier wie dort ihre Gültigkeit, wenn **Beugungsphänomene** oder die Superposition kohärenter Wellenfelder eine wichtige Rolle spielen. Die Bedingungen für transversale und longitudinale Kohärenz (s. Abschn. 10.1.1) sind dieselben, wegen der i. Allg. viel kürzeren de Broglie-Wellenlängen (Abschn. 13.2.1) sind aber die Anforderungen an die atomoptischen Elemente (Spalte, Gitter etc.) viel schwieriger zu erfüllen.

Atomare Beugungsexperimente werden gern mit metastabilen Edelgas-Atomen ausgeführt, weil diese mit an Eins heranreichender Wahrscheinlichkeit detektiert werden können, also auch bei extrem kleinen Flüssen, wie sie durch die hier erforderlichen engen Spalte erzwungen werden. Ferner kann man aus einem Düsenstrahl einen Edelgas-Atomstrahl (z. B. He) mit sehr kleiner Geschwindigkeitsbreite ($\sim 1\%$) formen, sodass auch ohne den Aufwand der Laserkühlung eine ausreichende Kohärenzlänge erwartet werden kann. Allerdings müssen die geometrischen Dimensionen dieser Experimente extrem klein im Sub-Mikrometerbereich gewählt werden.

Die Beugungsgitter können grundsätzlich mechanischer Natur sein aber auch durch optische Dipolkräfte realisiert werden, ähnlich dem Stehwellenfeld aus Abb. 14.39. Das Beugungsbild in Abb. 14.41 enthält nicht nur die erwarteten Beugungsordnungen des He-Atoms (die man über 10–20 Ordnungen beobachten kann), sondern weitere Linien, die als direkter Nachweis des schwach gebundenen He-Dimers gelten können.

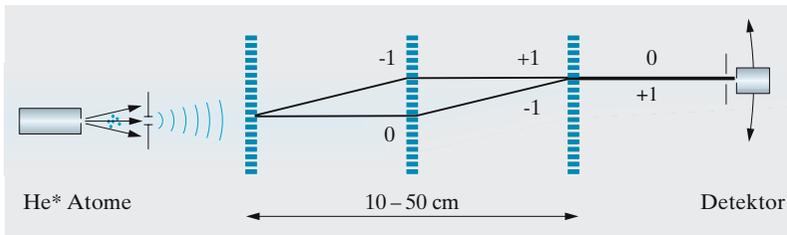


Abb. 14.42. Atomares Mach-Zehnder-Interferometer mit drei Transmissionsgittern. Die Zahlen an den beiden Teilstrahlen kennzeichnen die Ordnung der jeweils letzten Beugung. Die transversalen und die longitudinalen Abmessungen sind extrem unterschiedlich

14.8.2 Atominterferometer

Interferometer beruhen auf dem Superpositionsprinzip für Wellen, und atomare Interferometer benötigen wie in der Lichtoptik Strahlteiler, um kohärente Teilstrahlen zunächst einmal herzustellen. Obwohl halbdurchlässige Spiegel für Atome gesucht und studiert werden, haben sich Transmissionsgitter, bei denen die Beugungsordnungen die Interferometerarme erzeugen, beim Bau von Atom-Interferometern bisher als erfolgreicher erwiesen. Das 3-Gitter-Interferometer für Atome aus Abb. 14.42 entspricht einem Mach-Zehnder-Interferometer (Abschn. 10.1.13, 13.2.5). An jedem der identischen Gitter wird der einlaufende Atomstrahl in die -1 ., 0 ., 1 . und höhere, aber schon schwächere Ordnungen aufgespalten. Deshalb kann man die Anordnung von Abb. 14.42 zurecht als Interferometer bezeichnen. In jedem Experiment werden dabei mehrere Interferometerzweige realisiert, die sich alle überlagern. Nützliche Messungen mit Interferometern beruhen immer darauf, dass in einem Arm eine systematische Änderung stattfindet, während der andere als Referenzarm dient. Für die Messung aus Abb. 14.43 wurde in einem Interferometerarm (der einen Abstand von nur $100\ \mu\text{m}$ zum ande-

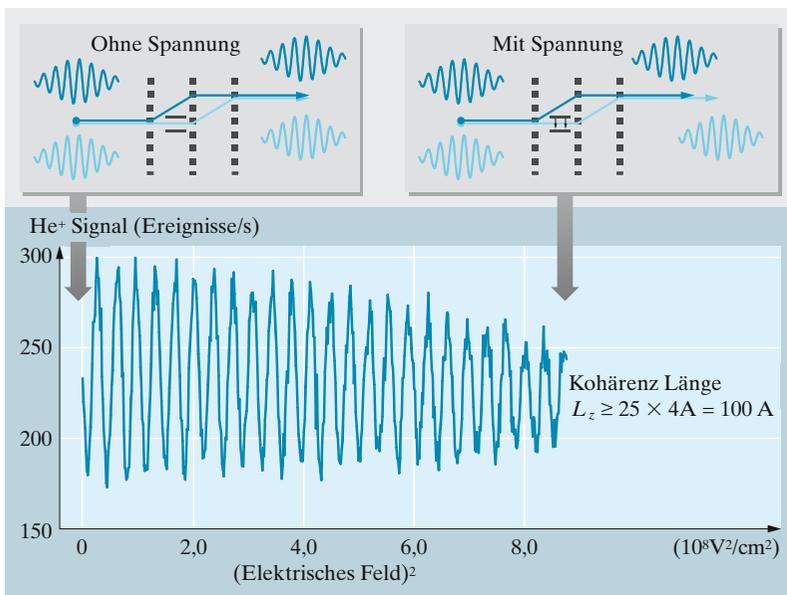


Abb. 14.43. Messung der Polarisierbarkeit von He-Atomen (de Broglie-Wellenlänge $\lambda = 4\ \text{\AA}$) mit dem Stark-Effekt in einem Atominterferometer. Mit freundlicher Erlaubnis von J. Peter Tönnies und Rüdiger Brühl

ren Arm hat!) ein elektrisches Feld angelegt und die dadurch verursachte Phasenverschiebung als Funktion der Feldstärke gemessen. Das Atom unterliegt dabei dem quadratischen Stark-Effekt (Abschn. 14.4.5), deshalb beobachtet man in der Auftragung gegen E^2 eine periodische Variation des Interferometersignals. Der Kontrast des Interferometers nimmt mit zunehmendem elektrischen Feld ab. Das elektrische Feld verursacht eine Verzögerung des Wellenpaketes des He-Atoms in einem Interferometerarm. Wenn die beiden Wellenpakete nicht mehr überlappen, kann keine Interferenz mehr auftreten, die Grenze der longitudinalen Kohärenz ist überschritten.

14.9 Der Einfluss der Atomkerne

Der Atomkern ist sehr viel massereicher als die Elektronen, und wäre er unendlich schwer, würden die atomaren Energiezustände nur geringfügig verändert. Die kleinen Energieverschiebungen geben aber Aufschluss über die Wechselwirkung der Elektronen mit dem Kern, insbesondere bei den Zuständen der s -Elektronen, die in Kernnähe eine hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeit besitzen. Die Wechselwirkung hängt von den spezifischen Eigenschaften des Atomkerns ab, am auffälligsten sind *Isotopieverschiebung* (mit Kernmitbewegung und Kernvolumeneffekt) und *Hyperfeinstruktur*.

14.9.1 Isotopieverschiebungen

Unterschiedliche Kernmassen verursachen bei gleicher Ladungszahl Z die Isotopieverschiebung von atomaren Spektrallinien. Bei leichten Elementen nimmt die **Kernmitbewegung** wesentliche Teile der kinetischen Energie auf; bei schweren Elementen dominiert die Modifikation des Coulomb-Potentials durch den **Kernvolumeneffekt**.

Kernmitbewegung. Atomkerne werden durch die Dynamik der Elektronen mitbewegt, weil ihre Masse endlich ist. Es ist bekannt, dass diese *Kernmitbewegung* bei Einelektronen-Atomen zu einer Verschiebung des

Tabelle 14.10. Wechselwirkungen zwischen Elektron und Kern

Effekt	Kraft
Coulombkraft	elektrostatisch
<i>Kinematische und elektromagnetische Störungen</i>	
Kernmitbewegung	mechanisch
Kernvolumeneffekt	elektrostatisch
Hyperfeinstruktur	magnetisch
<i>Nicht-elektromagnetische Störungen</i>	
Paritätsverletzung	elektroschwach

gesamten Energiespektrums um ungefähr das Massenverhältnis des Elektrons zum Kern führt und sich in der reduzierten Masse und der korrigierten Rydbergkonstanten R_μ ausdrückt,

$$R_\mu = R_\infty \frac{1}{1 + m_{el}/M} \simeq R_\infty \left(1 - \frac{m_{el}}{M} + \dots \right).$$

Der abgeschlossene ionische Rumpf in Einelektronen-Atomen verursacht keinen Einfluss auf die Kernmitbewegung, die auch *einfache Kernmitbewegung* (engl. *normal mass shift*) genannt wird. In Atomen mit teilweise gefüllter Schale sind die Verhältnisse viel komplizierter, weil sich z. B. der Einfluss von Elektronen, die sich in entgegengesetzten Richtungen bewegen, auf die Kernbewegung aufhebt. Dieses Phänomen wird als **Kopplungseffekt** (engl. *specific mass shift*) bezeichnet. Der Beitrag der kinetischen Energie \hat{T} zum Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ wird im Einteilchen-Modell in die Beiträge der einzelnen Elektronen \hat{p}_i und des Kerns $\hat{P} = -\sum_i \hat{p}_i$ zerlegt. Bei der Ausformulierung findet man dann neben den Beiträgen, die mit $\mu^{-1} = m_{el}^{-1} + M^{-1}$ wie die schon bekannte einfache Kernmitbewegung aussehen, einen weiteren Term, der die Kopplung der Elektronen untereinander berücksichtigt,

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{\hat{P}^2}{2M} + \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m_{el}} = \frac{(-\sum_i \hat{p}_i)^2}{2M} + \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m_{el}} \\ &= \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2\mu} + \sum_{i < j} \frac{\hat{p}_i \hat{p}_j}{M}. \end{aligned}$$

Einfache Rechnungen zeigen, dass der Kopplungseffekt im Singulett-System des He-Atoms zu einer Energieerhöhung führt und die einfache Kernmitbewegung verstärkt, während im Triplett-System eine Absenkung stattfindet. Im Singulett-System neigen die Elektronen danach eher zur Bewegung in gleichsinnigen, im Triplett-System eher in entgegengesetzten Richtungen, in Übereinstimmung mit der Pauli-Abstoßung in diesem Zustand (Abschn. 14.5.4).

Kernvolumeneffekt. Die elektrische Ladung des Kerns ist nicht in einem Punkt konzentriert, sondern durch seine Konstituenten in einem Volumen, dessen Radius im Tröpfchenmodell mit $r_N = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-13}$ cm phänomenologisch beschrieben werden kann (Abschn. 18.1.3). Zur Analyse nehmen wir eine homogene Ladungsverteilung in einer Kugel mit dem Radius r_N an (s. Abb. 14.44), die eine Abweichung des atomaren Potentials von einem idealen Coulomb-Potential verursacht,

$$V(r) = \begin{cases} V_{Coul} & r \geq r_N, \\ \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_N} \left(-\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2r_N^2} \right) & 0 \leq r \leq r_N. \end{cases}$$

Die Energieverschiebung berechnet man dann als Störung nach

$$\Delta E \simeq |\psi_{nlm}(0)|^2 \int_0^{r_N} (V(r) - V_{Coul}) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{10} |\psi_{nlm}(0)|^2 \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} r_N^2,$$

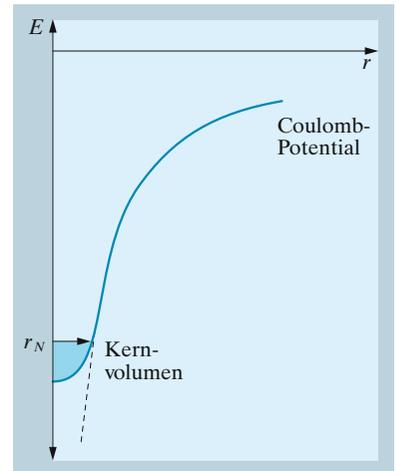
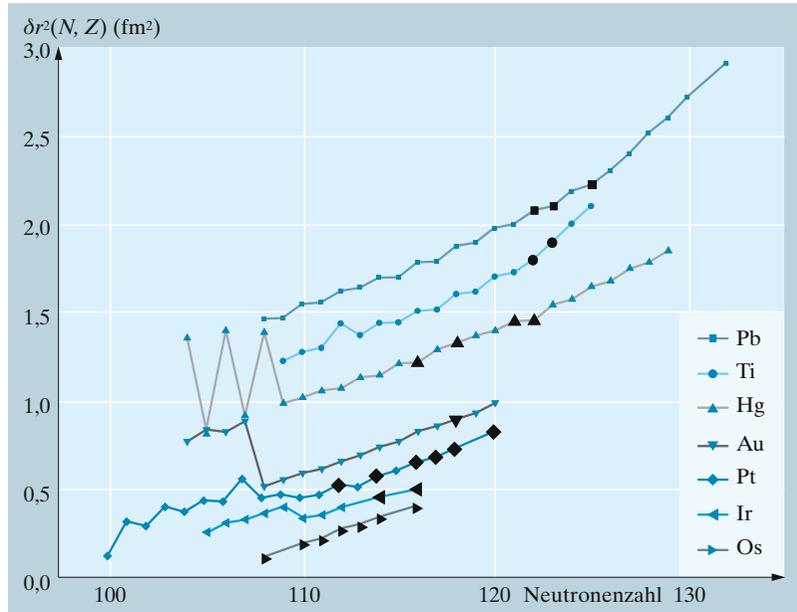


Abb. 14.44. Das atomare Potential weicht im Bereich des Kernvolumens von einem idealen Coulomb-Potential ab und hebt die Energiezustände geringfügig an

Abb. 14.45. Aus der Isotopieverschiebung gemessene Ladungsradien (relativ zum jeweils häufigsten Isotop eines Elements). Die stabilen Kerne sind schwarz markiert. Sie skalieren wie erwartet im Wesentlichen mit $(A = N + Z)^{1/3}$. Der Schalenabschluss (Abschn. 18.1.3) ist am Knick bei $N = 126$ in den Pb-Daten zu erkennen. Au und Hg zeigen starke Kerndeformationen bei $N = 104$. Die Daten wurden von Jürgen Kluge, Darmstadt, und Gerhard Huber, Mainz, zur Verfügung gestellt



wobei im Experiment nur Differenzen $\delta(\Delta E)$ durch Vergleich verschiedener Isotope eines Atoms zu beobachten sind, wie in der Zusammenstellung von Abb. 14.45.

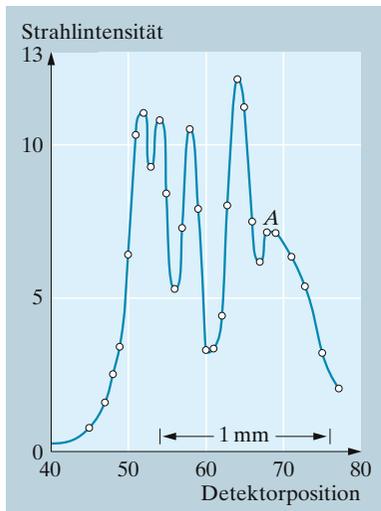


Abb. 14.46. Hyperfeinstruktur-Multiplett des Natrium-Atoms im Stern-Gerlach-Experiment. Die mit A bezeichnete Linie gehört nicht zum Signal. Aus diesen Daten haben Isaac Rabi und Victor Cohen 1933 erstmals den Kernspin $I = 3/2$ von Natrium bestimmt (Phys. Rev. **43**, 582 (1933))

14.9.2 Kernmagnetismus und Hyperfeinstruktur

Abbildung 14.46 zeigt das Signal eines Stern-Gerlach-Experiments mit Natrium-Atomen im $^2S_{1/2}$ -Zustand. Der elektronische $J = 1/2$ Gesamtspin würde nur zwei Komponenten erwarten lassen, die Multiplizität ($M = (2J + 1)(2I + 1)$) der vier beobachteten Komponenten lässt sich mit dem Kernspin $I = 3/2$ deuten.

Die magnetische Wechselwirkung zwischen magnetischen Bahn- und Spinmomenten der Hüllenelektronen verursacht bekanntlich die Feinstruktur. Ihre Deutung mit Hilfe des Vektormodells ist eine gute Vorlage auch für die Beschreibung der Hyperfeinstruktur.

Zum magnetischen Moment des Kerns,

$$\mu_K = \mu_I = \mu_I \mathbf{I} = g_I \mu_K \mathbf{I} = g_I' \mu_B \mathbf{I},$$

können wir in Analogie zum bohrschen Magneton das *Kernmagneton* definieren,

$$\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p} = \frac{m_e}{m_p} \mu_B,$$

das um den Faktor $1/1836$ kleiner ist, sodass man auch eine entsprechend reduzierte Wechselwirkungsstärke erwartet. Ausgewählte Kern-g-Faktoren sind in Tabelle 14.11 zusammengestellt.

Atom	I	μ_I/μ_N	g_I
^1H	1/2	2,279 278	5,585 52(12)
^2D	1	0,857 42	0,857 42
^3He	1/2	-2,1275	-4,2550
^4He	0	-	-
^6Li	1	0,822 02	0,822 02
^7Li	3/2	3,2564	2,1709
^{13}C	1/2	0,7024	1,4048
^{23}Na	3/2	2,2175	1,478
^{29}Si	1/2	-0,5553	-1,1106
^{31}P	1/2	1,1317	2,2634
^{85}Rb	5/2	1,352	0,5408
^{87}Rb	3/2	2,750	1,833

Tabelle 14.11. Kernspin, Kernmoment und g_I -Faktoren ausgewählter Kerne. Kerne mit einer geraden Anzahl von sowohl Protonen als auch Neutronen (gg-Kerne) tragen wegen des Paarungseffektes grundsätzlich keinen Spin

Mit den hochauflösenden Methoden der **Laserspektroskopie** ist es heute kein Problem mehr, die Hyperfeinstruktur optisch mit guter Auflösung ($\Delta\nu \simeq 1$ MHz) zu beobachten (Abb. 14.47). Höhere Genauigkeit wird aber nach wie vor mit Radiofrequenz- oder Mikrowellenspektroskopie erzielt.

Wie bei der Feinstruktur können wir auch hier von einer magnetischen Kopplung zwischen dem elektronischen Gesamtdrehimpuls \mathbf{J} (effektives Magnetfeld $\mathbf{B}_{\text{eff}} \simeq \mathbf{J}$) und dem Kerndrehimpuls \mathbf{I} ausgehen. Wir lehnen die Analyse an die Spin-Bahn-Kopplung (Abschn. 14.4.1) an und formen den Gesamtdrehimpuls

$$\hat{F} = \hat{I} + \hat{J} \quad \text{mit} \quad |I - J| \leq F \leq |I + J|.$$

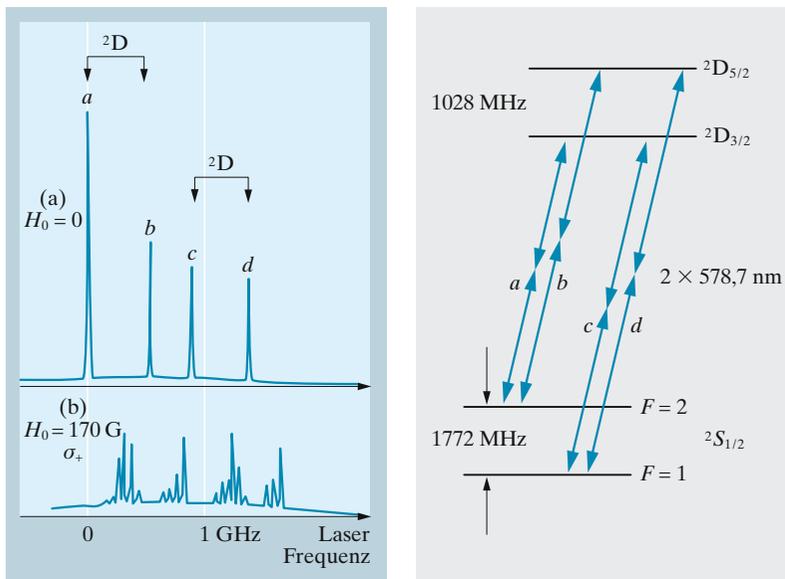


Abb. 14.47. Zwei-Photonen-Spektrum des 3S-4D-Übergangs im Natriumatom. Das Bild zeigt die Hyperfeinstruktur-Aufspaltung im 3S-Grundzustand (1 772 MHz) und die Feinstruktur-Aufspaltung im 4D-Zustand (1 028 MHz). Bei der Absorption von zwei Photonen aus gegenläufigen Laserstrahlen wird der Dopplereffekt unterdrückt, die scharfen Resonanzen sind dann nur durch die natürliche Linienbreite begrenzt. Absorption von zwei Photonen aus demselben Strahl erzeugt den breiten Untergrund, der ebenfalls sichtbar ist. (Mit freundlicher Erlaubnis von François Biraben)

Die Wellenfunktionen und Quantenzustände besitzen die neuen Quantenzahlen

$$(nlsJm_J), (Im_I) \rightarrow (nlsJIFm_F)$$

und sind Eigenzustände zum Operator

$$\hat{H}_{\text{hfs}} = -\hat{\boldsymbol{\mu}}_I \cdot \mathbf{B}_{\text{eff}} = A(J) \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = \frac{A}{2} [\hat{F}^2 - \hat{I}^2 - \hat{J}^2].$$

Daraus erhält man ohne Umstände die Energieverschiebungen

$$\Delta E(J, I, F) = \frac{A}{2} [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)].$$

Insbesondere gilt für $J = 1/2$ die Intervallregel

$$\Delta E(1/2, I, I+1/2) = \frac{A}{2} I,$$

$$\Delta E(1/2, I, I-1/2) = -\frac{A}{2}(I+1) \quad \text{und}$$

$$\Delta E_{\text{hfs}} = A(I+1/2).$$

Die Berechnung des A -Faktors, der mit hoher Genauigkeit gemessen werden kann (s. Abschn. 14.9.5), überlassen wir der Spezialliteratur, sie kann ohnehin mit einfacher Aussagekraft nur für das Wasserstoffatom ausgeführt werden. Einige Hyperfeinstruktur-Aufspaltungen besitzen große technische Bedeutung (s. Abschn. 14.9.4, 14.9.7, Tabelle 14.12).

Auch den Einfluss eines externen Magnetfeldes $B_0 \mathbf{e}_z$ kann man wie bei der Feinstruktur behandeln. Und wie dort muss man schwache Felder ($\mu_B B_0 / \hbar \ll \Delta E_{\text{hfs}}$) und starke Felder unterscheiden, bei denen die Hyperfeinkopplung aufgehoben wird. Bei schwachen Feldern kann man den Zeeman-Effekt der Hyperfeinstruktur zu $\hat{H}_{\text{hfs,Zee}} = A \hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{J}} + g_J \mu_B \hat{J}_z B_0 - g'_I \mu_B \hat{I}_z B_0$ mit

$$\Delta E = g_F \mu_B B_0 m_F$$

Tabelle 14.12. Wichtige Hyperfeinstrukturen. Der geklammerte Wert am Ende der Frequenzangabe gibt die statistische, ein zweiter Wert die systematische Unsicherheit

Atom	J	I	F	$\Delta \nu$ [Hz]	Anwendung
^1H	1/2	1/2	0, 1	1 420 405 751,770(3)	Wasserstoff-Maser 21 cm-Linie
^2D	1/2	1	1/2, 3/2	327 384 352,5222(17)	
^{23}Na	1/2	3/2	1, 2	1 776 626 128,8(10)	
^{85}Rb	1/2	5/2	2, 3	3 035 732 440(3)	
^{87}Rb	1/2	3/2	1, 2	6 834 682 610,904 29(9)	Frequenznormal Magnetometer
^{133}Cs	1/2	7/2	3, 4	9 192 631 770 (exakt)	Def. der Sekunde Atomuhr
$^{171}\text{Yb}^+$	1/2	1/2	0, 1	12 642 812 118,4685(7) (6)	Frequenznormal
$^{199}\text{Hg}^+$	1/2	1/2	0, 1	40 507 347 996,8416(4)	Frequenznormal

angeben. Der Landéfaktor beträgt

$$g_F = g_J \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} - g_I \frac{F(F+1) - J(J+1) + I(I+1)}{2F(F+1)}$$

Der zweite Beitrag ist wegen $g'_I/g_J \ll 1$ i. Allg. vernachlässigbar. Für $J = 1/2$ und beliebigen Kernspin I , also gerade für die wichtigen Alkali-Hyperfeinstrukturen, lässt sich sogar ein analytisches Resultat für alle Feldstärken angeben (Abb. 14.48), die berühmte **Breit-Rabi-Formel**:

$$\Delta E_{F,m_F} = -\frac{A}{4} \left[1 - \frac{g'_I(I+1/2)}{g_J - g'_I} m_F x \pm (2I+1) \left\{ 1 + \frac{4m_F}{2I+1} x + x^2 \right\}^{1/2} \right] \tag{14.63}$$

mit $x = (g_J - g'_I)\mu_B B/A(I+1/2)$.

14.9.3 Magnetische Resonanz

Unter dem Namen **Magnetische Resonanz** (MR), die schon mehr als 50 Jahre alt ist, werden heute eine Reihe von Methoden zusammen gefasst, denen ein gemeinsames experimentelles Konzept zugrunde liegt: Die Drehung mikroskopischer Gyromagneten in einem periodisch veränderlichen magnetischen Feld. In Tabelle 14.13 haben wir wichtige Beispiele aufgezählt. Zur Vorstellung werden wir die Methode verwenden, die in erster Linie gemeint ist, die **Kernmagnetische Resonanz** oder **NMR** (von engl. *Nuclear Magnetic Resonance*), die in Festkörperphysik, Chemie und Medizin ein ungewöhnlich breites Anwendungsfeld gefunden hat. Die Atomkerne sind in allen Systemen hervorragend von der Umgebung abgeschirmt, sodass Ihre Eigenschaften qualitativ immer gleich sind. Geringe, aber dennoch ausgesprochen gut beobachtbare Modifikationen dieser Eigenschaften haben der MR andererseits zu ihrem großen Erfolg in Anwendungen verholfen, weil sie Informationen über die Umgebung der Kernmomente liefern. Insbesondere in organischen Substanzen ist dabei das Proton von besonderer Bedeutung und soll daher hier als Modell dienen, denn weder ^{12}C noch ^{16}O , die auch sehr häufig sind, besitzen ein magnetisches Moment.

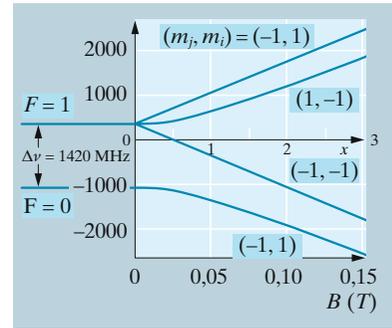


Abb. 14.48. Zeeman-Effekt der Hyperfeinstruktur von Wasserstoff nach der Breit-Rabi-Formel (14.63)

Tabelle 14.13. Methoden der Magnetischen Resonanz

Bezeichnung	Kürzel	Magnetisches Moment
Kernmagnetische Resonanz (engl. Nuclear Magnetic Resonance)	NMR	Kernspin
Elektronen-Spinresonanz	ESR, EPR	Elektronenspin
Hyperfeinresonanz	Rabi-Resonanz	Pseudospin
Ferromagnetische Resonanz	FMR	Magnetisierung

Tabelle 14.14. Wichtige Kerne für die NMR

Kern	Spin	μ/μ_K	$\gamma/2\pi$ (MHz/T ⁻¹)
¹ H	1/2	2,792 78	42,573
² D	1	0,857 42	6,535
¹³ C	1/2	0,7024	10,705
¹⁹ F	1/2	2,6288	40,059
²³ Na	3/2	2,2175	11,263
²⁹ Si	1/2	-0,5553	8,458
³¹ P	1/2	1,1317	17,237

Kernmagnetische Resonanz (NMR).

Die Bewegung eines Drehimpulses, der mit einem magnetischen Moment $\mu = \gamma J$ verknüpft ist, erfährt im magnetischen Feld ein Drehmoment $T = \mu \times B$ (s. Abschn. 14.3.3) und gehorcht der **Kreiselgleichung**,

$$\frac{d}{dt} J = \mu \times B = \gamma J \times B. \tag{14.64}$$

Liegt ein longitudinales Magnetfeld in z-Richtung an, $B = B_0 e_z$, präzediert der Kreisler mit der Larmorfrequenz (14.19) $\omega_L = \gamma B_0 = g_L \mu_B B_0 / \hbar$. In Abb. 14.49 sind die mit der m-Quantenzahl bestimmten zugehörigen Energieniveaus für das wichtige Beispiel des Protons gezeigt. Die Präzessionsfrequenz von Protonen beträgt nach Tabelle 14.14 $\omega_L = 2\pi \cdot 42,6$ MHz bei $B_0 = 1$ T.

Ein transversales magnetisches Wechselfeld $B_{\perp}(t) = B_{\perp} e_{\perp} \cos(\omega t)$ oszilliert bei der Larmorfrequenz ($\omega = \omega_L$) genau im Takt mit der Präzessionsfrequenz. Zwar oszilliert das zugehörige Drehmoment, es wirkt aber immer in der gleichen Richtung (senkrecht zum Drehimpuls J und zur Richtung von B_{\perp}) und verursacht eine Rotation des Drehimpulses, kann ihn sogar zum vollständigen Umklappen bringen. Durch die Umklappprozesse ändert sich die Einstellenergie $-\mu \cdot B$ der magnetischen Momente, und der Probe in Abb. 14.50 muss deshalb mit der Hf-Spule Energie zugeführt oder entzogen werden. Die Rotation der mikroskopischen Drehimpulse findet ganz unabhängig von ihrer anfänglichen Orientierung und mit gleicher Rate statt, Zufuhr und Entnahme von Energie finden also in einer makroskopischen Probe, die aus 10^{18} oder mehr mikroskopischen Spins besteht, gleichzeitig statt.

In der Apparatur muss deshalb zuerst mit Hilfe des Gleichfeldes B_0 eine makroskopische Magnetisierung erzeugt werden. Die Einstellenergie beträgt bei einer Larmorfrequenz $\Delta E = -m\hbar\gamma B_0$. Bei einem Magnetfeld von 1 T beträgt der Energieunterschied für die beiden Orientierungen $m = \pm 1/2$ von Protonen gerade einmal $\Delta E \simeq 0,2 \mu\text{eV}$,

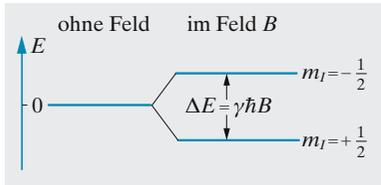
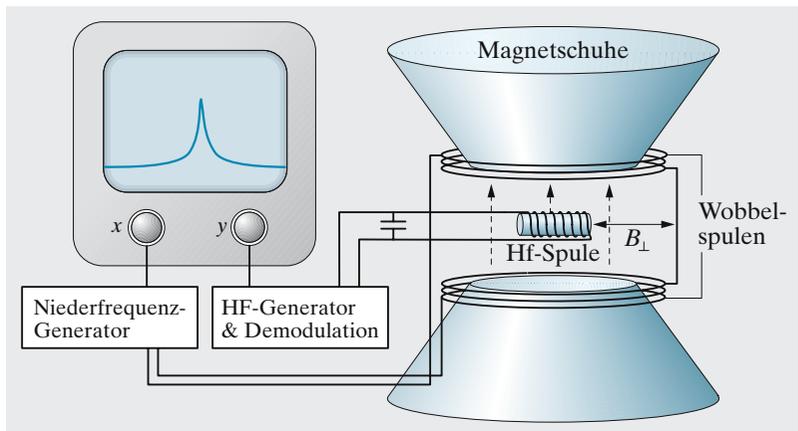


Abb. 14.49. Energieniveaus eines Kerns mit Drehimpuls $J = 1/2$ (z. B. der Spin des Protons) im Magnetfeld

Abb. 14.50. Schema einer Magnetresonanz-Apparatur, wie sie von E. Purcell mit R. Pound sowie F. Bloch 1946 bei der Entdeckung der NMR verwendet wurde. Die Resonanzfrequenz der Kerne im Probenröhrchen wird durch niederfrequente Modulation des homogenen Magnetfeldes B_0 verändert, während die Hochfrequenz des anregenden transversalen Feldes konstant gehalten wird. Heute wird fast immer ein zeitliches Induktionssignal der Magnetisierung gemessen. Die spektralen Eigenschaften können dann jederzeit durch Fouriertransformation gewonnen werden



weniger als 1/100 000 der mittleren thermischen Energie $kT = 25$ meV bei Raumtemperatur. Im thermischen Gleichgewicht – das sich je nach Probe nach einigen ms einstellt – erwarten wir daher nur einen sehr kleinen Besetzungszahlunterschied $\Delta n/n_0 = (n_+ - n_-)/n_0 = 1 - \exp(\hbar\omega_L/kT) \simeq 10^{-5}$. Die große Zahl von Kernspins (10^{19} cm^{-3}) in einer festen oder flüssigen Probe macht den Nachweis dieser Magnetisierung und ihrer Dynamik dennoch möglich. In Abb. 14.51 ist das Resonanzsignal von Protonen in Eis gezeigt, das mit einer Apparatur ähnlich zu Abb. 14.50 gewonnen wurde und direkt auf einem Oszillographen dargestellt werden kann.

Statt die Frequenz zu ändern war es in der Vergangenheit einfacher, dem Magnetfeld B_0 mit Wobbelspulen ein schwaches niederfrequentes Magnetfeld zu überlagern, also $B = B_0 + B_1 \sin(\omega_{\text{mod}}t)$ mit $\omega_{\text{mod}} \ll \omega_L$. Der Detektorkreis ist als Schwingkreis ausgelegt, dessen Resonanzfrequenz und Güte durch die Magnetisierung der Probe verändert wird. Genau auf der Resonanz ist die Verstimmung 0, aber dem Schwingkreis wird mehr Energie entzogen. Sowohl das Absorptionssignal als auch die Frequenzverstimmung können mit einer geeigneten Schaltung demoduliert werden und dann direkt auf dem y-Eingang des Oszillographen dargestellt werden.

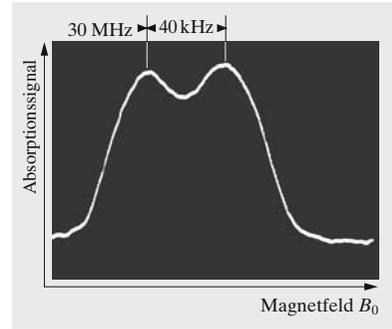


Abb. 14.51. Resonanzkurve von Protonen in Eis bei einer Magnetfeldstärke $H = 0,7$ T entsprechend einer Resonanzfrequenz von etwa 30 MHz. Die beiden Protonen des H_2O -Moleküls können entweder parallel oder antiparallel ausgerichtet sein. Je nach Einstellung wird das äußere Feld etwas verringert oder erhöht, daher werden zwei leicht aufgespaltene Linien beobachtet

Tabelle 14.15. Wichtige Relaxationszeiten der Magnetresonanz

<i>Energierelaxation, „longitudinal“</i>		
T_1	Spin-Gitter-Relaxation	
<i>Phasenrelaxation, „transversal“</i>		
T_2	Spin-Spin-Relaxation	Dekohärenz, irreversibel
T_2'	Dephasierungszeit	reversibel
T_2^*	$T_2^{*-1} = T_2^{-1} + T_2'^{-1}$	Zerfallszeit des FID

Bloch-Gleichungen. Die Dynamik der makroskopischen Magnetisierung wird mit den nach *Felix Bloch* (1905–1983, Nobelpreis 1952) benannten Gleichungen beschrieben. Dazu werden die Komponenten der Kreisgleichung (14.64) verwendet, wobei die makroskopische Magnetisierung $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z) \propto \mathbf{J}$ verwendet und um phänomenologische Relaxationsterme erweitert wird:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \frac{d}{dt} M_x = -\omega_L M_y - \frac{M_x}{T_2}, \\
 \text{(ii)} \quad & \frac{d}{dt} M_y = \omega_L M_x - \frac{\mu B_{\perp}}{\hbar} \cos \omega t M_z - \frac{M_y}{T_2}, \\
 \text{(iii)} \quad & \frac{d}{dt} M_z = \frac{\mu B_{\perp}}{\hbar} \cos \omega t M_y - \frac{M_z - M_0}{T_1}.
 \end{aligned} \tag{14.65}$$

Longitudinale (M_z) und transversale Komponenten (M_x, M_y) und unterliegen im Allgemeinen verschiedenen transversalen und longitudinalen Relaxationszeiten T_1 bzw. T_2 : Bei der Relaxation der M_z -Komponente findet ein Energieaustausch mit der Umgebung statt, zum Beispiel mit

dem Gitter eines Festkörpers, daher existiert aus historischen Gründen die Bezeichnung **Spin-Gitter-Relaxation**. Der Zerfall der auch *Polarisation* genannten transversalen Komponenten kennzeichnet den in Festkörpern sehr viel schnelleren Verlust der Phasenbeziehung („**Dephasierung**“, $T_2 \ll T_1$) der mikroskopischen Dipole untereinander, der zum Beispiel durch Wechselwirkungen der magnetischen Momente untereinander verursacht wird (**Spin-Spin-Relaxation**). In Flüssigkeiten beobachtet man interessanterweise sehr scharfe NMR-Linien und $T_2 \simeq T_1$: Die Umgebung eines Spins ist dort ständigen und sehr schnellen Fluktuationen ausgesetzt, deren Phasenstörung im Mittel für alle Spins gleich ist.

Die Blochgleichungen sind wegen ihrer großen Bedeutung intensiv studiert worden, und im Gleichgewicht erkennt man sofort, dass für $B_{\perp} = 0$ $M_x = M_y = 0$ und $M_z = M_0$ gelten muss: Die effektiv verfügbare Größe der Magnetisierung für N_0 Teilchen mit magnetischen Moment μ ist im thermischen Gleichgewicht in z -Richtung orientiert: $M_z = M_0 \simeq N_0 \mu \hbar \gamma B_0 / kT$. Die dynamische Entwicklung lässt sich in den einfachsten Fällen mit harmonischen gedämpften Schwingungen interpretieren.

Freier Induktionszerfall. Nehmen wir an, dass die Magnetisierung aus der z - in die y -Richtung gedreht worden ist, $\mathbf{M}(t=0) = (0, M_0, 0)$. Wenn die Dämpfung keine Rolle spielt, z. B. kurz nach dem Anstoßen dieser Bewegung, wird aus (14.65)

$$\frac{d}{dt}M_x = -\omega_L M_y - M_x/T_2 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}M_y = \omega_L M_x - M_y/T_2 \quad (14.66)$$

und die Magnetisierung schwingt mit $M_x = -M_0 \sin(\omega_L t)e^{-t/T_2}$ und $M_y = M_0 \cos(\omega_L t)e^{-t/T_2}$. In Abb. 14.52 ist das Beispiel von Protonen in Wasser gezeigt, deren Magnetisierung innerhalb von ca. 10 ms auf die Hälfte abnimmt. Die rotierende Magnetisierung induziert dabei in der Hf-Spule eine Wechselspannung bei der Larmorfrequenz ω_L . Der Zerfall dieses Signals wird Freier Induktionszerfall oder FID (von engl. *Free Induction Decay*) genannt und durch die so genannte T_2^* -Zeit charakterisiert. Inhomogenitäten der Umgebung verursachen die Dephasierung der mikroskopischen magnetischen Momente und daher den Zerfall der messbaren makroskopischen Magnetisierung. Mit der im folgenden Abschnitt behandelte Spin-Echo-Methode ist es aber möglich, eine Rephasierung und ein Wiederaufleben des Induktionssignals zu erreichen.

Wie kommt die in z -Richtung orientierte Gleichgewichts-Magnetisierung in die xy -Ebene? Dazu wendet man starke Hf-Pulse $B_{\perp} \sin(\omega_L t)$ in x -Richtung an. Wir betrachten eine Amplitude M für die mit ω_L rotierende transversale Magnetisierung, $M_x(t) = M(t) \sin(\omega_L t)$ und $M_y(t) = M(t) \cos(\omega_L t)$, die sich langsam im Vergleich zur Larmorfrequenz, aber schnell im Vergleich zu den Relaxationszeiten ändert, $\omega_L \gg (dM)/dt/M \gg 1/T_{1,2}$. Wir setzen in (14.65) ein und addieren die ersten beiden Gleichungen mit (i) $\times \cos(\omega_L t)$ + (ii) $\times \sin(\omega_L t)$. Weil die Oszillation mit ω_L sehr viel schneller stattfindet als die Amplitudenänderung, können wir näherungsweise $\langle \cos^2(\omega_L t) \rangle \simeq 1/2$ setzen und erhalten mit $\Omega = \mu B_{\perp} / 2\hbar$ die beiden Gleichungen

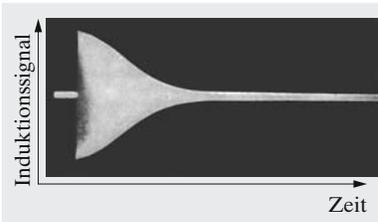


Abb. 14.52. Freier Induktionszerfall von Protonen in Wasser, Halbwertszeit ca. 10 ms. Der 90° -Hf-Impuls von $10 \mu\text{s}$ Dauer, der das Signal „anstößt“, ist nicht gezeigt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}M &= \frac{\mu B_{\perp}}{\hbar} \cos^2(\omega_L t) M_z \simeq \Omega M_z, \\ \frac{d}{dt}M_z &= -\frac{\mu B_{\perp}}{\hbar} \cos^2(\omega_L t) M \simeq -\Omega M, \end{aligned} \tag{14.67}$$

die wiederum eine Drehung, diesmal in der xz -Ebene, beschreiben (Abb. 14.53). Mit kräftigen kurzen Pulsen ($\mu B_{\perp}/\hbar \gg T_{1,2}$) kann man also die Magnetisierung M_0 ohne wesentliche Verluste aus der z -Achse herausdrehen und z. B. bei $\mu B_{\perp}/\hbar \cdot t = \pi/2$ um genau 90° in xy -Ebene klappen.

Vom apparativen Standpunkt ist die Aufnahme eines zeitlich veränderlichen Signals vorteilhaft gegenüber der Amplitudenmessung wie in Abb. 14.50, die spektralen Eigenschaften können dann nachträglich und ohne Schwierigkeiten durch Fouriertransformation gewonnen werden. Heute verwendet man in NMR-Apparaturen komplexe Pulssequenzen, die optimale Auflösung garantieren.

Spin-Echos. In einem perfekt homogenen Magnetfeld sollten alle magnetischen Momente mit derselben Frequenz präzedieren. Wegen der unterschiedlichen Umgebungen, der die Kerne in Molekülen, im Festkörper oder in biologischen Substanzen ausgesetzt sind, weichen aber z. B. die lokalen magnetischen Felder geringfügig (im ppm-Bereich) voneinander ab, sodass die makroskopische Magnetisierung durch „Dephasierung“ zerfällt. Weil aber jedes Teilchen weiterhin mit seiner eigenen lokalen Frequenz weiterpräzediert, lässt sich dieser Zerfall mit der Spin-Echo-Technik umkehren: Ein 180° -Impuls (Abb. 14.54; er entspricht einem doppelt so langen oder doppelt so intensiven 90° -Impuls) invertiert die Phasenlage der einzelnen Spins und verursacht so das Wiederaufleben der makroskopischen Polarisation nach genau derselben Zeit, die zwischen den beiden Anregungsimpulsen vergangen ist (Abb. 14.55).

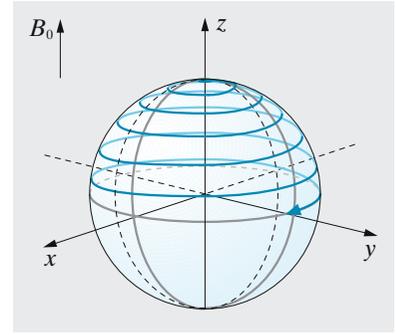


Abb. 14.53. Ein $\pi/2$ -Impuls des transversalen und resonanten Hf-Feldes dreht die Magnetisierung in die xy -Ebene. Die Rotation um die z -Achse entspricht der Larmorpräzession, während die langsamere Drehung in die xy -Ebene vom transversalen Hf-Feld verursacht wird. Die Amplitude der Magnetisierung ändert sich dabei nicht, sie bewegt sich auf der Oberfläche der Bloch-Kugel

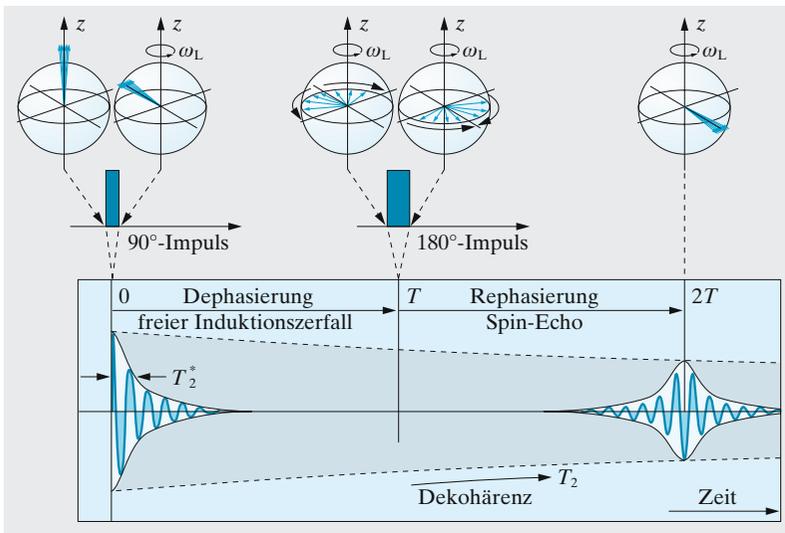


Abb. 14.54. Vektormodell des freien Induktionszerfalls (FID) und des Spin-Echos. Die Pfeile veranschaulichen mikroskopische magnetische Momente, die sich zur makroskopischen Magnetisierung addieren. In einem Koordinatensystem, das mit der Larmorfrequenz ω_L um die z -Achse rotiert, sollten die magnetischen Momente bei perfekter Resonanz ihre Position nach dem 90° -Impuls beibehalten. Kleine Abweichungen lassen sie jedoch vom Mittelwert weg auseinander laufen. Nach dem 180° -Impuls setzen die Momente ihre Präzession an gespiegelter Position mit gleicher Geschwindigkeit fort und treffen daher alle gleichzeitig am gegenüberliegenden Ort ein, sodass erneut eine makroskopische Magnetisierung und damit ein messbares Induktionssignal entsteht

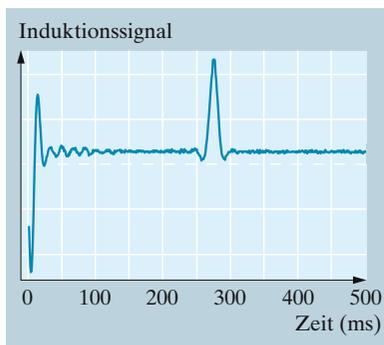


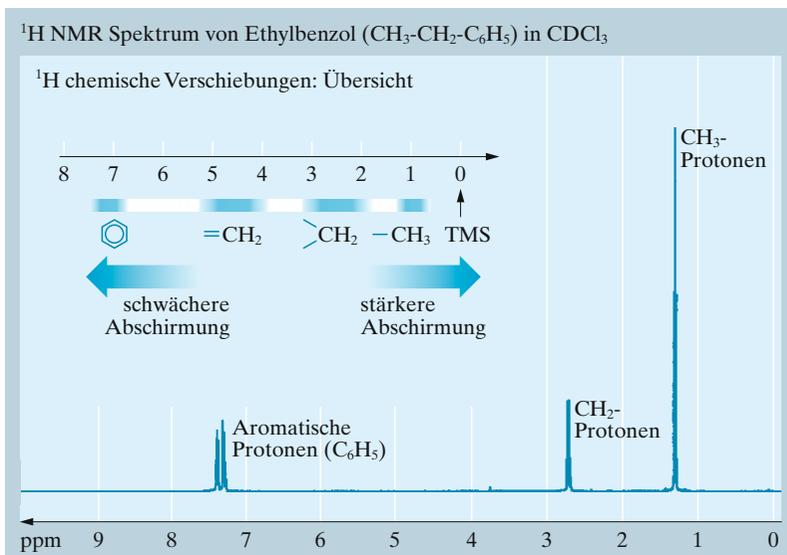
Abb. 14.55. Stimuliertes Spin-Echo an Wasser. Dabei wird der 180° -Impuls aus Abb. 14.54 in zwei 90° -Impulse aufgeteilt. Dabei wird ein Teil der Magnetisierung entlang dem statischen Magnetfeld gespeichert. Die Rephasierung beginnt erst nach dem dritten Impuls. Mit freundlicher Erlaubnis von Dieter Suter, Dortmund

14.9.4 Magnetische Resonanz in Chemie und Medizin

Die magnetischen Momente der Kerne liegen einerseits sehr gut geschützt im Inneren der atomaren Hüllen, andererseits zeigen sie doch eine deutlich messbare Wirkung ihrer unmittelbaren Umgebung auf die genaue Lage der Resonanzfrequenzen und die Zerfallszeiten T_1 , T_2 , T_2^* . Dieser Umstand hat die NMR zu einer wichtigen Methode bei der Strukturaufklärung in Festkörpern, in der Chemie, vor allem der organischen Chemie und daher auch biologischen Proben bis hin zur Medizin gemacht: Die nunmehr bekannten Eigenschaften machen die Kerne zu einer empfindlichen Sonde für ihre Umgebung, und insbesondere sind z. B. Protonen gerade auch in organischer Materie in großer Dichte vorhanden. Wir führen mit wenigen Beispielen zwei Grundkonzepte von Anwendungen der NMR ein: Die so genannte *chemische Verschiebung* und die *Kernspin-Tomographie*.

Chemische Verschiebung. Ein äußeres Magnetfeld beeinflusst ein Atom mit einem magnetischen Kern auf zweifache Art und Weise: Einerseits wird das magnetische Moment des Kerns direkt zu Präzessionsbewegungen angestoßen. Andererseits schirmen die Elektronenwolken, die den Atomkern umgeben, das äußere Magnetfeld B_0 durch ein geringes Gegenfeld B' ab – wie bei der lenzschen Regel aus Abschn. 7.1.3. Während die Eigenschaften des Kerns immer unverändert bleiben, hängt das genaue Feld am Kernort $B = B_0 - B'$ also von der Elektronenstruktur der Umgebung und damit in erster Linie von der chemischen Bindung ab, die durch die Elektronenkonfiguration zustande kommt (s. Kap. 16). Es ist ein Unterschied, ob eine Einfach- oder Doppelbindung vorliegt, ob z. B. Stickstoff-Atome oder ob Phosphor-Atome an der Bindung beteiligt sind. Die NMR-Frequenzen der Protonen in typischen Baugruppen organischer Moleküle wie z. B. CH_2 und CH_3 sind daher geringfügig gegeneinander verschoben und können umgekehrt zu deren Identifikation dienen.

Abb. 14.56. Chemische Verschiebung am Beispiel von gelöstem Äthylbenzol. Es besteht aus drei charakteristischen Baugruppen, $\text{CH}_3\text{—CH}_2\text{—C}_6\text{H}_5$, die durch eine entsprechende Verschiebung identifiziert werden können. Der Nullpunkt wird mit der häufig verwendeten Eichsubstanz TMS (Tetramethylsilan) festgelegt. Mit freundlicher Erlaubnis von Dieter Suter, Dortmund



In NMR-Spektrometern wird die relative Frequenzverschiebung einer Probesubstanz relativ zu einer Eichsubstanz gemessen. Die relative Verschiebung heißt chemische Verschiebung und hängt nicht vom angelegten Magnetfeld ab. Sie lässt sich sehr genau vermessen,

$$\delta = \frac{\nu_i - \nu_{\text{ref}}}{\nu_{\text{ref}}} \times 10^6,$$

und wird in ppm (parts per million) angegeben wie am Beispiel von Abb. 14.56 gezeigt.

Kernspin-Tomographie. Ihren Erfolg verdankt die Kernspintomographie mindestens zwei Umständen: Mit diesem Verfahren kann man in lebende Substanzen „hineinsehen“, denn Hf-Strahlung dringt in menschliches Gewebe zwischen 3 und 300 MHz sehr gut ein. Im Unterschied zur Röntgendiagnostik werden außerdem kontrastreiche Bilder nicht nur von harten Substanzen, sondern auch von dem dominierenden weichen Gewebe erzeugt, sodass neue diagnostische Erkenntnisse gewonnen werden. Dabei wird das Bild allerdings nicht wie in einem Mikroskop erzeugt, sondern Punkt für Punkt (Voxel für Voxel) werden Grauwerte aus den Rohdaten des Induktionssignals errechnet und zu einem Bild zusammen gesetzt. Es ist offensichtlich, dass diese Methode von der Verfügbarkeit leistungsfähiger Rechner abhängt und profitiert. Technisch gesprochen werden die verschiedenen Grauwerten, die Kontraste aus den Eigenschaften der Volumenelemente der Probe erzeugt, die sich im Induktionssignal in Frequenzverschiebungen, durch Änderungen der Relaxationszeiten, insbesondere von T_2 , oder durch die unterschiedliche Protonendichte der Probe äußern. Aus dem zeitabhängigen Messsignal werden diese Werte durch Fouriertransformation ermittelt.

Räumlich inhomogene Magnetfelder werden verwendet, um aus den Eigenschaften des Induktionssignals nicht nur die Probeneigenschaften, sondern zusätzlich eine Ortskodierung zu gewinnen. Dazu wird das homogene Magnetfeld (bei medizinischen Anwendungen typisch 1–1,5 T) zusätzlich mit Gradienten $G_x = \partial/\partial x B_z$ etc. überlagert (Abb. 14.57): $B(\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}) = B_0\mathbf{e}_z + (G_x\Delta x, G_y\Delta y, G_z\Delta z) \cdot \mathbf{e}_z$. Die dabei auftretenden Modifikationen der Richtung können vernachlässigt werden.

Tabelle 14.16. Protonen-Relaxationszeiten im Gewebe

Gewebe	T_1 (ms)	T_2 (ms)
Graue Substanz	920	101
Weißer Substanz	790	92
Nieren	650	58
Leber	490	43
Muskeln	870	47

Abb. 14.57. Schematischer Aufbau einer Magnetresonanzapparatur wie er auch in der medizinischen Diagnose verwendet wird. Die ringförmigen Spulen erzeugen ein homogenes Feld von 1–1,5 T in z -Richtung. Sie bestehen aus Supraleitern (typischerweise NbSn₃) und werden von ineinander geschichteten Kühltanks für flüssigen Stickstoff und flüssiges Helium umgeben. Als Gradientenspulen (dunkelblau, nur für den Gradienten G_x in x -Richtung dargestellt; die Pfeile zeigen die Stromrichtung an; Gradienten in y - und z -Richtung werden durch weitere Gradientenspulen erzeugt.) sind hier so genannte Golay-Spulen gezeigt, bei denen nur die Kreisbögen zum Feld in der Messzone beitragen, nicht aber die stabförmigen Zuleitungen. In der Sattelspule (dunkelgrau) wird von der rotierenden Magnetisierung der Kernspins das Hf-Messsignal induziert

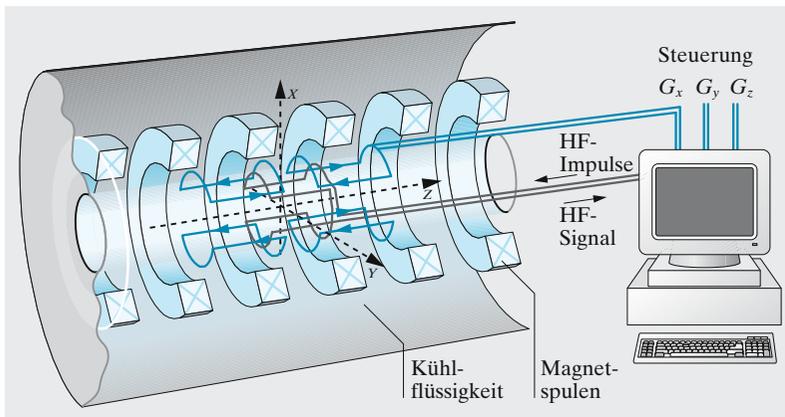
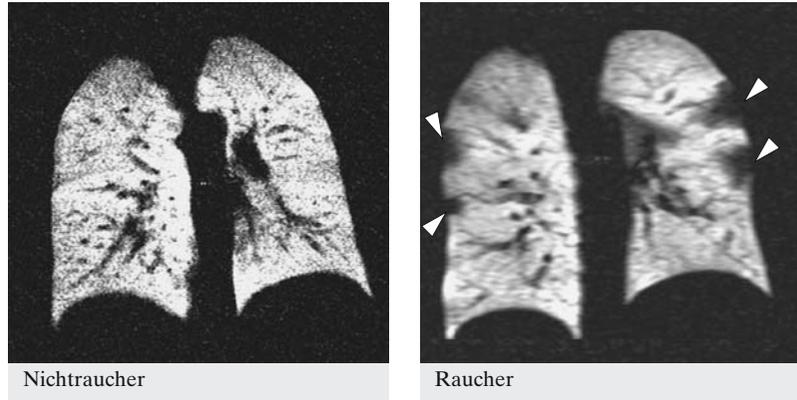


Abb. 14.58. Die Magnetresonanz(MR)-Bilder der Lunge wurden nach Einatmung von 0,3 Liter kernspinpolarisierten ^3He -Gases an der Universitätsklinik Mainz aufgenommen. Das Bild zeigt die Verteilung des ^3He -Gases in der Lunge eines Nichtrauchers und eines Rauchers und erlaubt pathologische Befunde. (Mit freundlicher Erlaubnis von W. Heil)



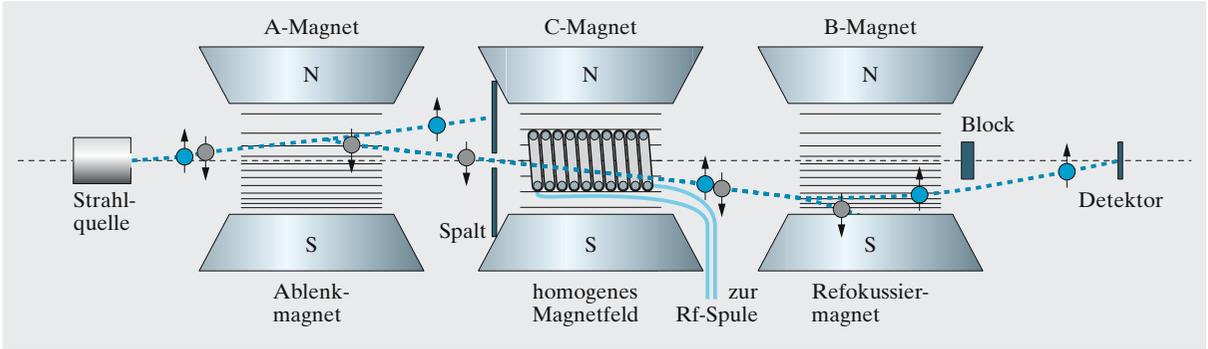
In einer Messsequenz kann z. B. zunächst durch einen Gradienten in z -Richtung nur eine ausgewählte xy -Schicht angeregt werden, deren Dicke man wegen $\Delta z = \Delta\nu/\gamma G_z$ durch die Steilheit des Gradienten oder die Bandbreite des anregenden Hf-Impulses $\Delta\nu$ einstellen kann. Beim Auslesen des FID-Impulses kann der z -Gradient abgeschaltet und stattdessen durch Gradienten in x - oder y -Richtung die Phasenentwicklung der präzedierenden Spins ortsabhängig so beeinflusst werden, dass aus der Fouriertransformation die Ortsinformation gewonnen werden kann.

Die Entwicklung der bildgebenden Magnetresonanzverfahren ist keineswegs abgeschlossen. Ein Beispiel für eine neuere Entwicklung ist in Abb. 14.58 gezeigt. In den Hohlräumen der Lunge ist die effektive Spindichte eines paramagnetischen Gases (das natürlich unbedenklich sein muss wie z. B. ein Edelgas) mit thermischer magnetischer Polarisierung normalerweise viel zu gering, um ein nachweisbares Kernspinsignal zu induzieren. Dieses Problem kann überwunden werden, indem man ein anderes, unschädliches Gas einatmet, dessen Polarisierung zuvor durch optisches Pumpen (s. Abschn. 14.9.8) auf fast ideale Werte erhöht worden ist. Kernspinpolarisiertes ^3He -Gas kann in geeigneten relaxationsarmen Glasbehältern zwischen 50 und 100 Stunden gespeichert werden.

In der *funktionalen Magnetresonanz* versucht man, lokale Veränderungen der Messgrößen auch dynamisch zu erfassen. Zum Beispiel ändert sich die Magnetisierungsdichte in der Lunge beim Atmen, oder T_2 wird durch kleine lokale Magnetfelder im Gehirn verändert und erlaubt es, die Neuronenaktivität darzustellen.

14.9.5 Rabi-Atomstrahlresonanz

Die auch nach *I. I. Rabi* (1898–1988, Nobelpreis 1944) benannte Anordnung zur **Atomstrahlresonanz** kann man als natürliche Erweiterung des Stern-Gerlach-Experiments ansehen. Darin wird zwischen zwei ablenkenden Stern-Gerlach-Magneten (A und B in Abb. 14.59) mit einem inhomogenen Magnetfeld ein weiteres, homogenes Magnetfeld (C-Magnet in Abb. 14.59) eingerichtet, um dort Radiofrequenz-Übergänge zwischen magnetischen atomaren Zuständen zu induzieren.



Das C-Magnetfeld kann ganz in Analogie zur zuvor behandelten NMR (Abschn. 14.9.3) dazu dienen, die atomaren Zustände aufzuspalten; es können aber auch Übergänge zwischen Hyperfeinzuständen (Abschn. 14.9.2) mit Drehimpulsquantenzahlen F und F' induziert werden. Dabei wird i. Allg. ein geringes externes Magnetfeld verwendet, um die m_F -Zustände durch den Zeeman-Effekt aufzuspalten (Abb. 14.60). Wenn der Frequenzabstand zwischen zwei Niveaus ω_0 beträgt, sind die beiden Energieniveaus um $\pm \hbar\omega_0/2$ verschoben.

In einem vereinfachten Modell reicht es dann, nur die zwei Zustände ψ_a und ψ_b zu berücksichtigen, die durch das Hochfrequenzfeld zu Überlagerungen angeregt werden,

$$\Psi = c_a \psi_a + c_b \psi_b .$$

Die Zeitentwicklung der komplexen Koeffizienten $c_{a,b}$ kann aus der Schrödinger-Gleichung $i\hbar \partial/\partial t \psi = \hat{H} \psi = (\hat{H}_0 + \hat{H}') \psi$ gewonnen werden. Hier gilt für den ungestörten Fall, d. h. in Abwesenheit des transversalen Rf-Feldes, $\hat{H}_0 \psi_a = \hbar\omega_0/2 \psi_a$ bzw. $\hat{H}_0 \psi_b = -\hbar\omega_0/2 \psi_b$. Das Radiofrequenzfeld koppelt die beiden Zustände (a, b) durch das magnetische Moment und es gelte $\hat{H}' \psi_a = \hat{\mu} B_{\perp} \cos \omega t \psi_a = \mu_{ab} B_{\perp} \cos \omega t \psi_b$ und entsprechend für $\hat{H}' \psi_b$. Dann findet man mit $\Omega_0 = 2\mu_{ab} B_{\perp}$:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} c_a &= \frac{\omega_0}{2} c_a + \frac{\Omega_0}{2} \cos \omega t c_b, & c_a(t=0) &= 0, \\ i \frac{d}{dt} c_b &= \frac{\Omega_0}{2} \cos \omega t c_a - \frac{\omega_0}{2} c_b, & c_b(t=0) &= 1. \end{aligned} \tag{14.68}$$

Zur Beschreibung der Lösungen ist es sinnvoll, die verallgemeinerte **Rabi-Frequenz** $\Omega = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \Omega_0^2}$ einzuführen. Ferner lassen wir die Lösungen fallen, die mit $\omega + \omega_0 \simeq 2\omega$ oszillieren (Diese verursachen die kleine Bloch-Siegert-Verschiebung der Resonanzfrequenz.) und finden

$$\begin{aligned} c_a(t) &= -i \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin(\Omega t/2) e^{-i(\omega - \omega_0)t/2}, \\ c_b(t) &= \left(i \frac{\omega_0 - \omega}{\Omega} \sin(\Omega t/2) + \cos(\Omega t/2) \right) e^{i(\omega - \omega_0)t/2}. \end{aligned} \tag{14.69}$$

Wir interessieren uns vornehmlich für die Besetzung des angeregten Zustandes

Abb. 14.59. Atomstrahlresonanz in der so genannten Rabi-Apparatur. In den A- und B-Magneten herrscht ein inhomogenes Magnetfeld (angedeutet durch die horizontalen Linien), in C ein homogenes Magnetfeld B_0 . Der A-Magnet lenkt eine ausgewählte m_F -Komponente in den C-Magneten, wo mit einer Spule ein zu B_0 orthogonales Radiofrequenz-Magnetfeld angelegt wird. Der B-Magnet fokussiert wiederum nur Atome mit ausgewählten m_F -Zuständen auf den Detektor

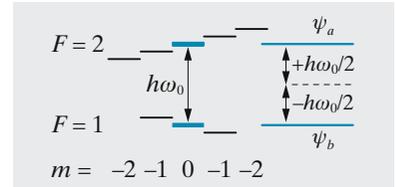


Abb. 14.60. Pseudo-Spin-1/2-System in einem magnetischen Hyperfeindublett mit Drehimpulsquantenzahlen $F = 2$ und $F' = 1$. Die Zustände sind mit einem kleinen Magnetfeld durch den Zeeman-Effekt aufgespalten. Das Hf-Feld induziert wegen der Resonanzbedingung nur Übergänge zwischen den beiden ausgewählten Zuständen mit $(F = 1, m_F = 0)$ und $(F' = 2, m'_F = 0)$. Das System verhält sich formal genau wie ein Spin-1/2-System mit Zuständen $m = \pm 1/2$. Das Beispiel trifft für das ^{87}Rb -Atom zu

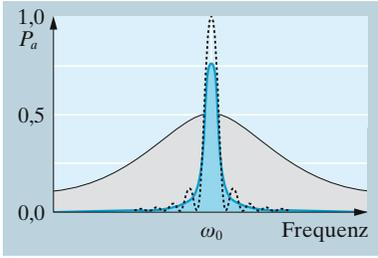


Abb. 14.61. Berechnetes Spektrum der magnetischen Resonanz. *Gestrichelt:* Für einen monochromatischen Atomstrahl mit wahrscheinlichster Geschwindigkeit v_w , bei dem $\Omega_0 l / v_{th} = \pi$ eingestellt wurde; *ausgezogen:* Thermischer Atomstrahl und optimale Bedingungen bei $\Omega_0 l / v_{th} = 1,2 \cdot \pi$; *schattiert:* desgleichen, aber 10fache Rabi-Frequenz

$$P_a(t) = |c_a(t)|^2 = \frac{\Omega_0^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Omega_0^2} \sin^2 \left[((\omega_0 - \omega)^2 + \Omega_0^2)^{1/2} t / 2 \right] \\ = \frac{\Omega_0^2}{2\Omega^2} (1 - \cos \Omega t)$$

Im Atomstrahl wird die Dauer der Hf-Einwirkung durch die Durchflugszeit bestimmt, $t = l/v$ für die Länge der Anregungszone l und die Geschwindigkeit v . In Abb. 14.61 ist das Anregungsspektrum für verschiedene wichtige Situationen aufgetragen: Bei monochromatischem Atomstrahl wird im Resonanzfall bei $\Omega_0 = \pi v/l$ gerade perfekte Anregung erreicht, die mit der Verstimmung oszillierend abnimmt. Beim thermischen Atomstrahl mit der charakteristischen Geschwindigkeit $v_{th} = \sqrt{2kT/m}$ muss man über alle Geschwindigkeiten summieren. Die Oszillationen werden dabei ausgewaschen und man erreicht optimale Anregung für $\Omega_0 l / v_{th} = 1,2 \cdot \pi$. Lässt man die Magnetfeldstärke und damit die Rabi-Frequenz weiter wachsen, nimmt die Breite der Resonanz zu. Die maximale Anregungswahrscheinlichkeit nimmt den Wert 1/2 an, weil angesichts schneller Rabi-Oszillationen die Besetzungswahrscheinlichkeit in Resonanznähe für beide Zustände gleich wird.

Von besonderem Interesse ist die Frequenzbreite $\Delta\nu$ der magnetischen Resonanz, und für den thermischen Atomstrahl berechnet man durch Integration über die Geschwindigkeitsverteilung (Abschn. 5.2.10):

$$\Delta\nu = \Delta\omega / 2\pi = 1,072 v_{th} / l \tag{14.70}$$

Bis auf einen konstanten Faktor entspricht dieses Resultat der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation $\Delta\nu \cdot \Delta t \simeq 1$. Man kann sich nun leicht vorstellen, dass die Resonanzfrequenz um so genauer bestimmt ist, je schmaler die Resonanz ist, der Q -Faktor dieser Resonanz $Q = \nu / \Delta\nu$ soll möglichst groß sein. Weil die spontane Emission der Mikrowellenübergänge vernachlässigt werden kann, und weil der Atomstrahl unter stoßfreien Bedingungen im Vakuum propagiert, hängt diese Breite nach (14.70) interessanterweise gar nicht von atomaren Eigenschaften ab, sondern nur von apparativen Gegebenheiten, hier der Länge der Anregungszone l und der Geschwindigkeit v_{th} . Daher sind magnetische Resonanzübergänge ideale Kandidaten für **Frequenznormale**, die man überall auf der Erde aufstellen kann, um möglichst synchrone Zeittakte zu erzeugen.

14.9.6 Ramseys Methode der getrennten oszillierenden Felder

Gleichung (14.70) scheint zu versprechen, dass man die Resonanzbreite durch schlichte Verlängerung der Übergangsregion immer weiter verringern könnte. Diese Annahme setzt allerdings sowohl eine extrem hohe Feldhomogenität als auch identische Phasenlagen des Mikrowellenfeldes für alle möglichen Atomstrahltrajektorien voraus, die in der Praxis nicht erreicht wird. *Ramsey* hat mit der nach ihm benannten Methode der getrennten oszillierenden Felder (engl. *separated oscillating fields*), für die er 1989 (zusammen mit *H. Dehmelt* und *W. Paul*) den Nobelpreis erhielt, einen Weg gefunden, lange Wechselwirkungszeiten T zu realisieren, die von den Feldinhomogenitäten und Phasenlagen weniger stark beeinträchtigt werden. Das Konzept der **Atomuhr** hängt ganz eng

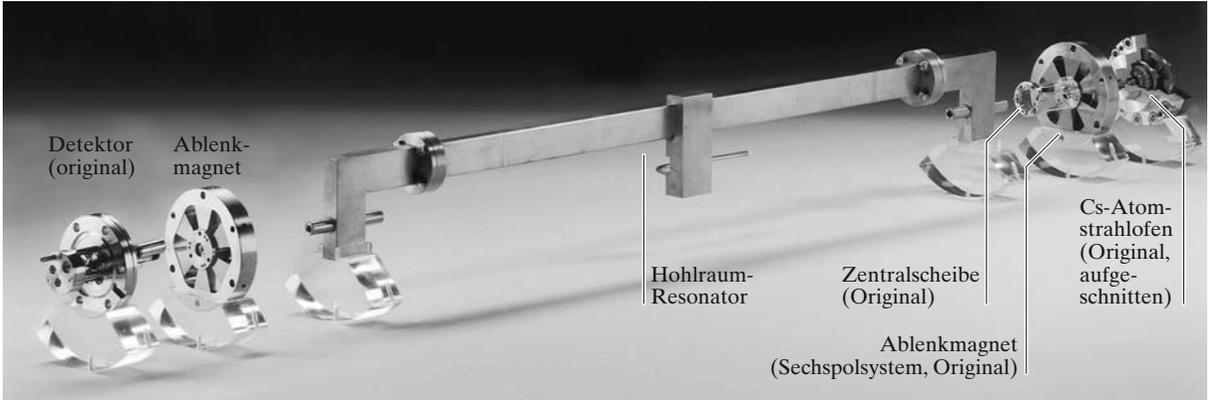


Abb. 14.62. Caesium-Atomuhr nach der Methode der getrennten oszillierenden Felder nach N. Ramsey (Physikalisch-Technische Bundesanstalt Braunschweig, Andreas Bauch). Der Atomstrahl propagiert von rechts nach links. Die Ablenkmagnete entsprechen den A- und B-Magneten der Rabi-Apparatur (Abb. 14.59). Die Rf-Übergänge werden in den beiden rechtwinklig angeordneten Stücken des Mikrowellen-Resonators induziert. Der Hohlraum-Resonator wird von einer langen Spule umgeben, die das C-Feld erzeugt (nicht eingezeichnet)

mit Ramseys Methode zusammen und entspricht im Wesentlichen der Anordnung aus Abb. 14.62. Die magnetische Resonanz wird darin auf zwei vergleichsweise kurze Wegstrecken (Durchflugszeit τ) am Anfang und am Ende der Flugstrecke beschränkt, die durch eine längere Strecke (Flugzeit T) voneinander getrennt sind. Der Mikrowellenresonator ist symmetrisch aufgebaut, um für alle Atomstrahltrajektorien hinweg eine möglichst identische Phasenlage der beiden Anregungszonen zu erzielen. Die Wirkung der Ramsey-Methode beruht auf der Phasenkohärenz zwischen den beiden Wechselwirkungs-zonen – zwischen den beiden Zonen sollen Atome und Mikrowellenoszillator im Idealfall perfekt synchron zueinander weiterschwingen.

Um die Wirkung auf die atomaren Zustände zu verstehen, können wir uns an (14.68) und (14.69) orientieren, müssen aber nun berücksichtigen, dass sich das Atom beim Eintritt in die jeweils nächste Zone bereits in einer Überlagerung (c_a, c_b) befindet. Die allgemeine Lösung besteht aus Drehungen im Zustandsraum $\psi_{a,b}$,

$$\begin{pmatrix} c_a(t) \\ c_b(t) \end{pmatrix} = M(t - t_0) \begin{pmatrix} c_a(t_0) \\ c_b(t_0) \end{pmatrix}$$

mit

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} - i \frac{\omega_0 - \omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} & -i \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \\ -i \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} & \cos \frac{\Omega t}{2} + i \frac{\omega_0 - \omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \end{pmatrix}.$$

In den Zonen 1 und 3 gilt $\Omega_0 = 2\mu B/\hbar$, $t = \tau$ in Zone 2 $\Omega_0 = 0$, $t = T$. Die kombinierte Wirkung der drei Zonen wird nach

$$\begin{pmatrix} c_a(T + 2\tau) \\ c_b(T + 2\tau) \end{pmatrix} = M^{(3)}(\tau) M^{(2)}(T) M^{(1)}(\tau) \begin{pmatrix} c_a(0) \\ c_b(0) \end{pmatrix}$$

Abb. 14.63. Entwicklung des atomaren Zustands beim Durchqueren einer Ramsey-Apparatur. Zu Beginn sind alle Atome im Zustand b

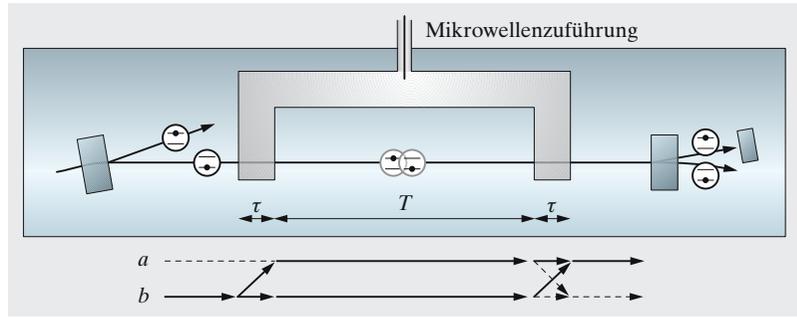
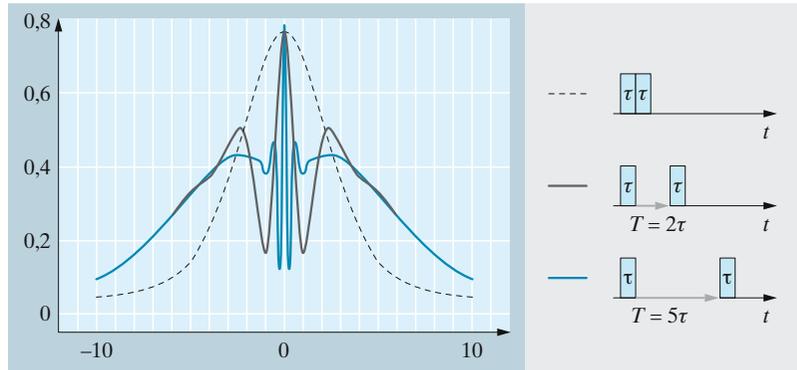


Abb. 14.64. Spektrum der atomaren Anregungswahrscheinlichkeit P_a bei der Methode der getrennten oszillierenden Felder („Ramsey-Methode“) an einem thermischen Atomstrahl. *Gestrichelt*: Anregung durch nur einen Puls wie in Abb. 14.61



berechnet. Wenn der reine Zustand in die Apparatur injiziert wird $((c_a, c_b) = (0, 1))$, dann berechnet man die Anregungswahrscheinlichkeit in a nach

$$P_a = |c_a(2\tau + T)|^2 = \left| M_{11}^{(3)} M_{11}^{(2)} M_{12}^{(1)} + M_{12}^{(3)} M_{22}^{(2)} M_{22}^{(1)} \right|^2. \quad (14.71)$$

An dieser Schreibweise erkennt man deutlich die auch in Abb. 14.63 unten illustrierte Quanteninterferenz: Die Übergangsamplituden von Zustand b nach a aus der Zone 1 und 2 interferieren analog zu einem Zwei-Spalt-Experiment (Abschn. 10.1.2). Wertet man (14.71) aus, erhält man

$$P_a(\tau, T) = 4 \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^2 \sin^2 \frac{\Omega \tau}{2} \times \left(\cos \frac{\Omega \tau}{2} \cos \frac{(\omega_0 - \omega) T}{2} - \frac{\omega_0 - \omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega \tau}{2} \sin \frac{(\omega_0 - \omega) T}{2} \right)^2.$$

In Abb. 14.64 ist der Einfluss der Ramsey-Methode auf das Spektrum der Rabi-Resonanz vorgestellt.

14.9.7 Atomuhren, atomare Springbrunnen und GPS

Atomuhren. Atomuhren waren geradezu eine natürliche technische Folge der Ramsey-Methode, die hohe spektrale Auflösung für Atome als absolut reproduzierbare Oszillatoren verfügbar machte. Die so genannten primären Uhren dienen der Realisierung der Sekunde, alle größeren Industrieländer unterhalten zu diesem Zweck eigene Laboratorien, Deutschland an der

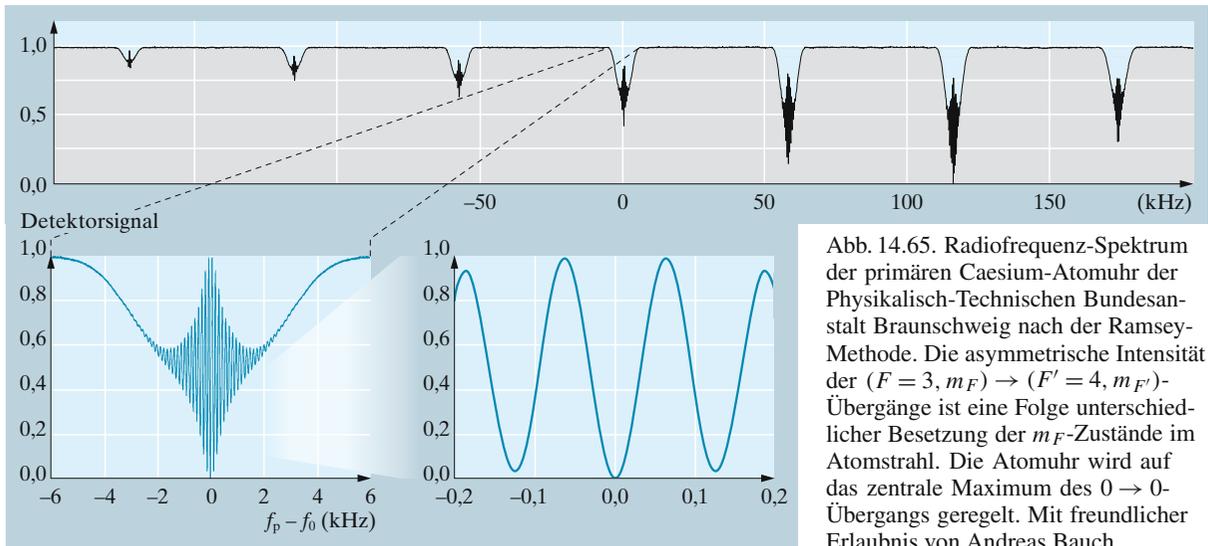


Abb. 14.65. Radiofrequenz-Spektrum der primären Caesium-Atomuhr der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt Braunschweig nach der Ramsey-Methode. Die asymmetrische Intensität der $(F = 3, m_F) \rightarrow (F' = 4, m_{F'})$ -Übergänge ist eine Folge unterschiedlicher Besetzung der m_F -Zustände im Atomstrahl. Die Atomuhr wird auf das zentrale Maximum des $0 \rightarrow 0$ -Übergangs geregelt. Mit freundlicher Erlaubnis von Andreas Bauch

Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB). Sie geben durch internationalen Vergleich den Zeittakt vor, mit dem alle anderen Uhren z. B. durch Funkübertragung synchronisiert werden. Frequenznormale dienen dazu, extrem genaue Frequenzen für verschiedenste Anwendungen zu realisieren, zum Beispiel ist jeder Satellit des GPS-Systems (s. u.) mit einem Frequenznormal ausgestattet.

Caesium hat sich als besonders vorteilhaftes Atom für Frequenznormale erwiesen, weil seine Resonanzfrequenz ν bei 9,2 GHz schon relativ groß ist, die Geschwindigkeit des schweren Atoms im Strahl relativ klein und wegen (14.70) der Q -Faktor groß, und weil es ferner einfach zu handhaben ist. Das Spektrum einer primären Caesium-Uhr ist in Abb. 14.65 gezeigt. Der Q -Wert der Caesium-Hyperfeinresonanz beträgt für Ramsey-Apparaturen mit einer Baulänge von 0,3 m $Q = \nu/\Delta\nu \simeq 3 \cdot 10^7$, und nach Jahrzehnten systematischer Untersuchungen konnte der Mittenwert dieser Resonanz bei den primären Uhren mit einer absoluten Unsicherheit von weniger als 10^{-14} realisiert werden.

Heute ist die Caesium-Frequenz zur Grundlage der Zeitmessung weltweit geworden und ihr Wert legt die Zeiteinheit der Sekunde definitionsgemäß fest:

Die **Sekunde** (s) ist das 9 192 631 770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

Atomuhren und Frequenznormale werden sorgfältig hinsichtlich ihrer Unsicherheiten charakterisiert. Neben der statistischen Unsicherheit, die bei jeder Messeinrichtung auftritt (Abschn. 1.1.7), ist die systematische Unsicherheit besonders wichtig, sie beschreibt die Variationen von Uhr zu Uhr, die auch bei identischer Bauart immer kleine Abweichungen zeigen.

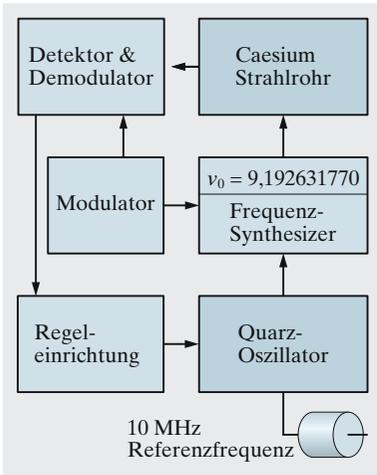


Abb. 14.66. Wichtige Komponenten einer Atomuhr. Neben elektronischen Regeleinrichtungen gibt es zwei Oszillatoren: Der Quarz-Oszillator dient als „Schwungrad“, das bei kurzen Zeiten für hohe Stabilität sorgt. Auf längerer Zeitskala wird die Schwingung des Quarz-Kristalls mit der Schwingung der Caesium-Atome synchronisiert

In einer Atomuhr wird die Caesium-Resonanz für die Langzeitstabilität eingesetzt, die Kurzzeitstabilität (< 1 s) liefert ein anderer Oszillator, der als „Schwungrad“ dient, typischerweise ein Quarz-Oszillator (Abb. 14.66).

Atomare Springbrunnen. Weil die Resonanzbreite (der Q -Wert) die Ganggenauigkeit der Atomuhr bestimmt, wurde schon um 1950 von *Zacharias* am Massachusetts Institute of Technology versucht, die Ramsey-Anordnung mit sehr langsamen Atomen (wenige m/s) zu realisieren. Er konstruierte dazu eine Vakuum-Apparatur, die 7 m hoch war, sodass langsame Atome gegen die Schwerkraft aufsteigen, umkehren und wieder herunterfallen sollten. Diese „Springbrunnen“-Idee war ihrer Zeit weit voraus, denn langsame Atome wurden damals nicht gefunden: In der Öffnung eines Atomstrahlrofens erfahren die sehr langsamen Atome fast immer einen Impulsübertrag durch einen Stoß mit schnellen Atomen, sodass die sowieso wenig intensive Gruppe der langsamen Atome im Strahl gar nicht vorkommt (s. auch Abschn. 5.2). Erst die Entwicklung der **Laserkühlung** (Abschn. 14.7.3), die die kontrollierte Manipulation von Atomen bei Geschwindigkeiten von cm/s oder sogar mm/s ermöglicht hat, hat die atomaren Springbrunnen Wirklichkeit werden lassen (Abb. 14.67). Die nationalen Labors, die an der Realisierung der Zeit arbeiten, haben mit dieser Methode (Abb. 14.67) die Ganggenauigkeit der Caesium-Atomuhr mittlerweile um eine weitere Größenordnung auf $\nu/\Delta\nu \simeq 10^{15}$ steigern können.

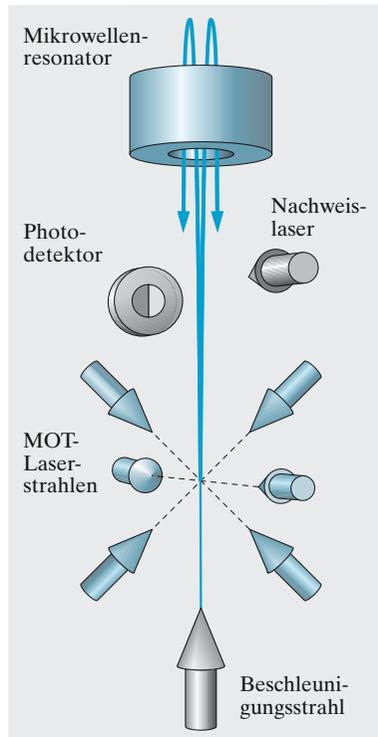
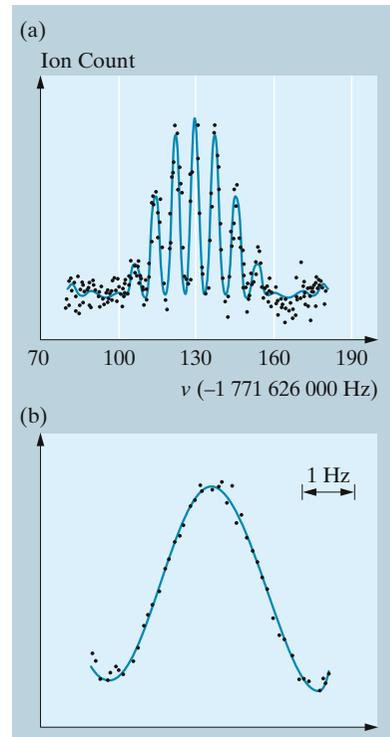


Abb. 14.67. Links: Schema einer atomaren Fontäne. Mit den MOT-Laserstrahlen wird zuerst eine Wolke kalter Atome im Zentrum der Strahlen präpariert. Die Atome werden anschließend mit einem Laserstrahl beschleunigt und durchqueren den Mikrowellenresonator zweimal, beim Aufsteigen und beim Herabfallen. Ein Nachweislaser verursacht zustandsselektive Fluoreszenz, die mit einem Photodetektor registriert wird. Rechts: Ramsey-Signal einer Natrium-Fontäne. In diesem Fall wurde zustandsselektive Ionisation zum Nachweis verwendet. Mit freundlicher Erlaubnis von Steve Chu



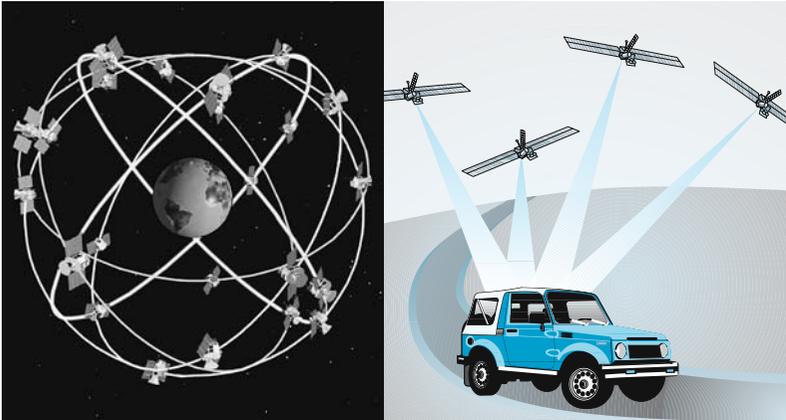


Abb. 14.68. Das Global Positioning System verwendet 24 Satelliten, von denen an jedem Punkt der Erde stets mindestens vier Exemplare sichtbar sind

Global Positioning System (GPS). Zeitmessung hat schon seit langem eine wichtige Rolle bei der Kontrolle von Verkehrsströmen gespielt – erst wegen der Einführung von Fahrplänen für den Eisenbahnverkehr war es im 19. Jahrhundert notwendig geworden, die Uhren in den verbundenen Orten zu synchronisieren. Das GPS, die modernste Form der **Navigation** ist seit 1993 mit 24 geostationären Satelliten vollständig. Die Satelliten des NAVStar-Systems umkreisen die Erde in 12 Stunden in einer Höhe von 20 200 km. An Bord befinden sich Atomuhren, deren Stand relativ zu einer gemeinsamen Systemzeit von fünf weltweit verteilten Bodenstationen kontrolliert wird. Die Satelliten senden kontinuierlich Signale mit ihrer genauen Position und Zeit, deren Differenz mit einer Genauigkeit von $3 \cdot 10^{-9}$ s bekannt sind. Der Empfänger vergleicht die Empfangszeit mit der gesendeten Zeit und kann aus den Verzögerungen $\Delta t_i/c' = s_i$ die Entfernungen berechnen, wobei atmosphärische und andere Verzerrungen korrigiert werden können.

Drei derartige Entfernungsmessungen reichen im Prinzip aus, um geographische Länge, Breite und Höhe zu ermitteln. Allerdings setzt dieses Verfahren voraus, dass auch der Empfänger (Abb. 14.68) über eine (Atom-)Uhr mit gleicher Ganggenauigkeit verfügt. Dieser Aufwand wird vermieden, indem mit Hilfe eines vierten Satelliten auch die weniger präzise Uhr des Empfängers korrigiert wird.

14.9.8 Optisches Pumpen und Magnetometer

Die i. Allg. zahlreichen Unterzustände Hyperfeinstruktur (Drehimpulsquantenzahlen F und magnetische Quantenzahlen m_F) eines atomaren Gases sind im thermischen Gleichgewicht gleichförmig besetzt. Mit polarisiertem Licht und dem so genannten *optischen Pumpen* lässt sich diese Gleichverteilung aber durch zyklische Anregung stören und sogar in einen einzigen Quantenzustand überführen. In Abb. 14.69 sind einige Beispiele für dieses Verfahren abgegeben. Es beruht auf dem Umstand, dass bei polarisiertem Licht in Absorption nur ausgewählte Übergänge (s. Auswahlregeln Tabelle 14.8) getrieben werden, während bei der spontanen Emission alle erlaubten Übergänge stattfinden.

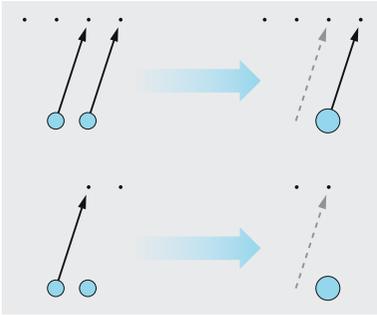
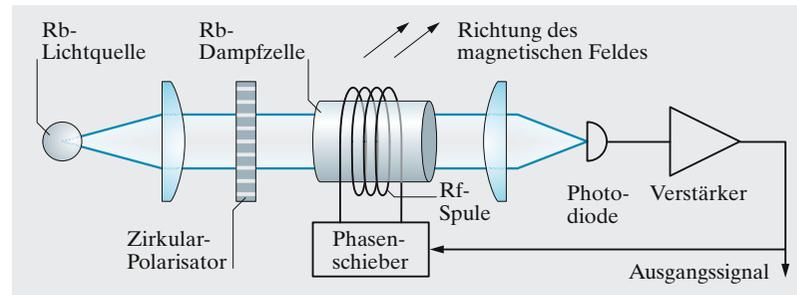


Abb. 14.69. Optisches Pumpen. Die blauen Kreise geben die relativen Besetzungszahlen der m -Zustände vor (*links*) und nach (*rechts*) dem optischen Pumpen mit zirkular polarisiertem Licht an. *Oben*: Beim $J \rightarrow J + 1$ -Übergang wird die gesamte Population in die äußersten m -Zustände befördert. *Unten*: Beim $J \rightarrow J$ -Übergang wird die Population ebenfalls in die äußeren Zustände befördert, die aber nun nicht mehr fluoreszieren können

Abb. 14.70. Aufbau eines Rubidium-Magnetometers. In diesem Konzept wird die Rf-Spule durch Rückkopplung zu selbsterregten Schwingungen veranlasst

Weil die Aufspaltung der Zeeman-Zustände von Atomen empfindlich vom äußeren Magnetfeld abhängt, liegt es nahe, sie umgekehrt zum Bau von Magnetfeldsensoren einzusetzen. Das NMR-Signal von Protonen wird zu diesem Zweck eingesetzt, ist aber vor allem für hohe Feldstärken geeignet. Elektronische Momente erlauben die präzise Messung schwacher Magnetfelder wie zum Beispiel dem Erdmagnetfeld.

Das Rb-Magnetometer besteht – wie analog andere Alkalidampf-Magnetometer – aus einer Dampfzelle, einer resonanten Rb-Lichtquelle, die einen zirkular polarisierten Lichtstrahl durch die Zelle schickt, einer Radiofrequenz-(Rf)-Spule und einem Photodetektor. Wenn durch optisches Pumpen die absorbierenden Zustände entleert werden, wie im unteren Beispiel von Abb. 14.69, sinkt die Lichtabsorption. Wenn aber ein Rf-Feld Übergänge zwischen den Zeeman-Zuständen verursacht, wird die Absorption wieder ansteigen. In Abb. 14.70 ist ein Konzept für ein Rb-Magnetometer gezeigt, bei dem durch Rückkopplung eine Schwingung angefacht wird, deren Frequenz zum Betrag des Magnetfeldes proportional ist. Derartige Magnetometer erreichen eine Empfindlichkeit von weniger als 10 nT und finden breite Anwendung bei geophysikalischen Anwendungen, in denen Anomalien des Erdmagnetfeldes studiert werden. Es handelt sich um skalare Magnetometer, denn die Larmorfrequenz hängt nur vom Betrag, nicht der Richtung des Magnetfeldes ab. Allerdings hängt die Signalamplitude von der Orientierung des äußeren Magnetfeldes ab.



14.10 Kräfte zwischen Atomen

Atome und Ionen gehören zu den bestverstandenen mikroskopischen Objekten der Physik überhaupt, sie sind gewissermassen ein „Baukasten der Quantenphysik“. Allerdings haben wir die Atome bisher immer isoliert betrachtet, frei von Wechselwirkungen untereinander wie sie andererseits in jedem Gas mit hoher Rate stattfinden. In diesem Abschnitt sollen Grundzüge atomarer Wechselwirkungen vorgestellt werden. Besonders starke Kräfte führen zur Molekülbildung, der ein eigenes Kapitel gewidmet ist.

14.10.1 Van der Waals-Kräfte

In der klassischen Physik beschreibt die van der Waals-Gleichung die Abweichungen realer Gase von idealen Gasen. Diese Abweichungen

können durch interatomar bzw. intermolekular wirksame Kräfte interpretiert werden (s. Abschn. 5.6.4). Zwar besitzen neutrale Atome in einem quantenmechanischen Eigenzustand ψ kein permanentes elektrisches Dipolmoment, es gilt $\langle d \rangle = -e \int \psi^* x \psi dV = 0$. Sie üben aber dennoch Kräfte aufeinander aus, weil sie polarisierbar sind: die Bewegung der Elektronen ist Schwankungen unterworfen, die ein instantanes Dipolmoment zur Folge haben. Dessen elektrisches Feld fällt typischerweise mit $E_{\text{inst}} \propto 1/R^3$ ab, es induziert in benachbarten Atomen ein Dipolmoment der Größe $d_{\text{ind}} \propto 1/R^3$, sodass man die charakteristische van der Waals-Kraft erhält, die von einem Potential $U_{\text{vdW}} = -C_6/R^6 \propto d_{\text{ind}} E_{\text{inst}}$ herzurühren scheint. Andererseits stoßen sich die atomaren Hüllen untereinander ab, wenn sich die Atome zu nahe kommen. Das Lennard-Jones-Potential berücksichtigt diese Eigenschaft durch ein schnell ansteigendes und abstoßendes Potential,

$$U_{\text{LJ}} = \frac{C_{12}}{R^{12}} - \frac{C_6}{R^6} \tag{14.72}$$

Das **Lennard-Jones-Potential** in Abb. 14.71 beschreibt gut die Wechselwirkung von zwei schwach wechselwirkenden Atomen, die keine kovalente chemische Bindung eingehen. Generell ist die $1/R^6$ -Form des Wechselwirkungspotentials typisch für die langreichweitige Wechselwirkung zwischen Atomen. Allerdings fällt das Potential bei Abständen, die größer sind als die Wellenlängen typischer Anregungen, also für etwa $1 \mu\text{m}$ oder mehr, wie $1/R^7$ ab. Diese Reduktion wird wie die Lamb-Shift (Abschn. 14.6.4) durch die Fluktuationen des elektromagnetischen Vakuums verursacht, wie *H. Casimir* 1948 vorhergesagt hat.

Selbst Edelgasatome oder spinpolarisierte Alkaliatome können dann schwach gebundene Systeme oder auch so genannte Cluster bilden. Die Beschreibung der interatomaren Wechselwirkungen mit Potentialen setzt die Gültigkeit der **Born-Oppenheimer-Näherung** voraus: Wenn die Kernbewegung langsam ist im Vergleich zur Bewegung der Hüllenelektronen, dann passen sich die Elektronenkonfigurationen der Atome dieser Änderung adiabatisch und instantan an. Die zugehörigen Energiezustände hängen dann vom Kernabstand ab und wirken wie ein effektives Potential.

14.10.2 Atomare Stöße

Stoßprozesse von Atomen mit anderen Atomen, Ionen, Molekülen sind häufige Ereignisse, und insbesondere die Stoßanregung von Atomen durch Elektronen spielt in Entladungen, bei der Plasmabildung eine ganz entscheidende Rolle. Im Frank-Hertz-Versuch (Abschn. 13.4) wurden dabei inelastische Anregungen entdeckt, welche die Quantisierung der Energieniveaus bestätigten. **Stoßprozesse** spielen eine große Rolle auch für die chemische Reaktionskinetik, denn die stoffliche Umsetzung setzt genau diese Prozesse voraus. Hier sollen wichtige Charakteristika von Stoßprozessen (Tabelle 14.18) zusammen gestellt werden.

Elastische Stöße. Bei Raumtemperatur finden in einem Gas i. Allg. nur elastische Stöße statt, denn innere Anregungen kosten zu viel Energie.

Tabelle 14.17. Berechnete \tilde{C}_6 -Koeffizienten von atomaren Lennard-Jones-Potentialen. Der Koeffizient aus (14.72) wird aus $C_6 = \tilde{C}_6 \cdot a_0^5 \cdot (e^2/4\pi\epsilon_0)$ berechnet

Atome	\tilde{C}_6
H-H	6,5
Li-Li	1 393
Na-Na	1 556
K-K	3 897
Rb-Rb	4 691
Cs-Cs	6 851

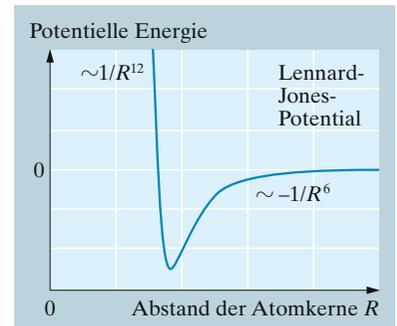


Abb. 14.71. Das Lennard-Jones-Potential

Tabelle 14.18. Atomare Stoßprozesse

Prozess	Vorkommen und Bedeutung
Elastische Stöße	Thermalisierung von Gasen
Inelastische Stöße	Anregung metastabiler Zustände
Lichtinduzierte Stöße	Stoßprozess unter Beteiligung von Licht
Stoßionisation	Entladungen, Plasmaerzeugung
Kalte Stöße	Wechselwirkung in Materiewellen
Reaktive Stöße	Gaschemie

Bei den elastischen Stößen werden Energie und Impuls umverteilt, aber in den kinematischen Größen der Stoßpartner erhalten. Elastische Stöße beeinflussen andererseits das Spektrum der Atome (Abschn. 13.3), denn während des Stoßes wird die Elektronenstruktur des Atoms kurzfristig verzerrt, sodass Dipolschwingungen leichte Phasenänderungen erfahren.

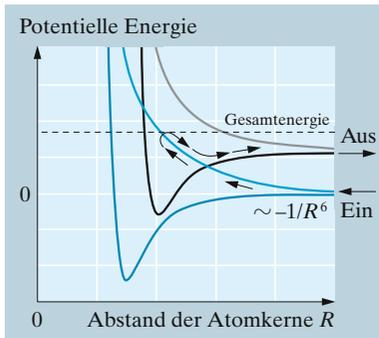


Abb. 14.72. Potentialkurvenmodell für Stoßprozesse von zwei Atomen im gemeinsamen Schwerpunktsystem. Hier sind zwei verschiedene Systeme mit je einem bindenden und einem antibindenden Potential angenommen

Inelastische Stöße und lichtinduzierte Stöße. Wenn die relative kinetische Energie der Stoßpartner ausreicht, um innere Freiheitsgrade der beteiligten Teilchen anzuregen, kann den Bewegungsfreiheitsgraden der stoßenden Teilchen Energie entzogen (oder im Umkehrprozess hinzugefügt) werden. Zur Beschreibung solcher Prozesse zieht man **Potentialkurven-Modelle** heran (Abb. 14.72), die qualitativ meistens wie das Lennard-Jones-Potential aus Abb. 14.71 aussehen, aber mehrere Potentialkurven besitzen. Bei einem Stoß läuft dann das System aus zwei Atomen im Schwerpunktsystem von außen nach innen und kehrt spätestens am abstoßenden Rumpf um. Wenn Kreuzungspunkte mit anderen Potentialkurven auftreten, die zu anderen inneren Zuständen gehören, dann kann es zum Übergang von einer in die andere Konfiguration kommen, sodass das System den Stoßprozess auf einer anderen Potentialkurve („in einem anderen Kanal“) beendet und dabei kinetische Energie gewinnt oder verliert.

Auch die Anwesenheit von Licht ändert Stoßvorgänge: Angeregte Zustände können an der Wechselwirkung zwischen den Atomen beteiligt werden, dabei kann es auch zu einem inelastischen Austausch von Energie kommen, der durch das Lichtfeld überhaupt erst initiiert wird, z. B. indem durch eine optische Anregung das System auf ein höheres elektronisches Niveau und Molekülpotential gehoben wird.

Kalte Stöße. Die Eigenschaften der Stoßprozesse hängen ganz entscheidend von der relativen kinetischen Energie der Stoßpartner ab. Wenn die Atome immer langsamer werden, z. B. durch Laserkühlung (Abschn. 14.7.2), dann werden ihre de Broglie-Wellenlänge immer länger, die zugehörigen $k = 2\pi/\lambda$ -Werte immer kleiner. Spätestens wenn die effektive Reichweite des Potentials klein wird gegen λ , erwarten wir Abweichungen von klassischen Trajektorien.

Zur Beschreibung der Stoßprozesse verwendet man gerne die Einteilung der kinematischen Bedingungen in Partialwellen je nach dem Anfangsdrehimpuls $l = 0, 1, 2, \dots$ des Systems. Man kann nun zeigen, dass für kurzreichweitige Potentiale, die schneller als r^{-3} abfallen, und dazu gehören die interatomaren Wechselwirkungspotentiale, nur die $l = 0$

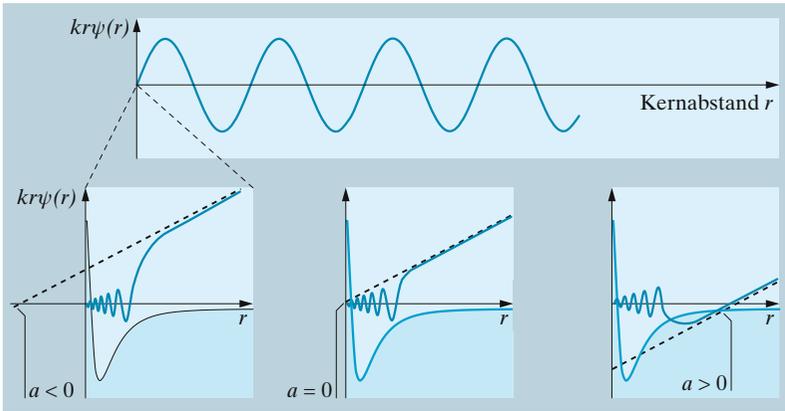


Abb. 14.73. Die s-Wellen-Streulänge. Die Wirkung des atomaren Wechselwirkungspotentials lässt sich auf eine effektive Phasenverschiebung reduzieren, die für $k \rightarrow 0$ nicht mehr von der kinetischen Energie abhängt. Die „wirkliche“ Wellenfunktion ist aber bis an den Ursprung ausgedehnt

oder s-Wellen-Streuung für $k \rightarrow 0$ übrigbleibt, alle anderen Streuwellenfunktionen verschwinden nämlich mit $(kr)^l$ für $k \rightarrow 0$. Das kann man auch anschaulich verstehen, denn bei immer geringeren Geschwindigkeiten wird die **Drehimpulsbarriere** (s. Abschn. 14.2.1) schon bei sehr kleinen Drehimpulsen $l \geq 1$ verhindern, dass die Teilchen überhaupt in die Nähe des Wechselwirkungspotentials kommen.

Für $l = 0$ erhalten wir eine Streuwellenfunktion im Schwerpunktsystem der Form

$$\psi(r) = C \cdot \frac{\sin k(r-a)}{kr}, \tag{14.73}$$

worin a die s-Wellen-**Streulänge** bezeichnet. Man kann zeigen, dass der Streuquerschnitt $\sigma = 2\pi \int d\theta \sin(\theta) |f(\theta)|^2$ aus der Streuamplitude $f(\theta)$ mit $\psi(r) = e^{ikz} + f(\theta)e^{ikr}/r$ durch Vergleich gewonnen wird. Für reine s-Wellenstreuung gilt $f(\theta) = -e^{-ika} \sin(ka)/k$.

In Abb. 14.73 wird die Rolle der Streulänge näher erläutert: Positive (negative) Streulänge entspricht einer effektiv abstoßenden (anziehenden) Wechselwirkung. Im abstoßenden Fall würde eine harte Kugel mit Radius a zum selben Ergebnis führen, der Streuquerschnitt beträgt in beiden Fällen $\sigma = 4\pi a^2$. Man kann ferner zeigen, dass die zugehörige effektive Wechselwirkungsenergie den Wert annimmt

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \tag{14.74}$$

14.10.3 Streuung ununterscheidbarer Teilchen

Wenn die Stoßpartner identische mikroskopische Teilchen sind, dann müssen die beiden Streuamplituden aus Abb. 14.74 interferieren. Weil die beiden Teilchen dabei vertauscht werden, müssen sie auch die Symmetrisierungsvorschriften erfüllen, symmetrisch („+“) für Bosonen und antisymmetrisch („-“) für Fermionen:

$$\psi(\theta) \propto f(\theta) \pm f(\pi - \theta).$$

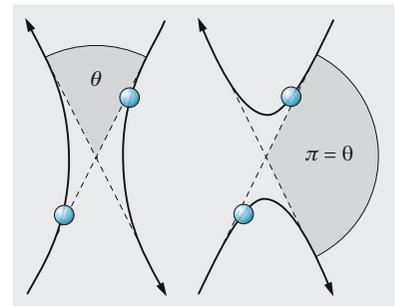


Abb. 14.74. Interferenz von Streuprozessen. Bei ununterscheidbaren Teilchen müssen die Streuamplituden $f(\theta)$ und $f(\pi - \theta)$ für die beiden Prozesse interferieren

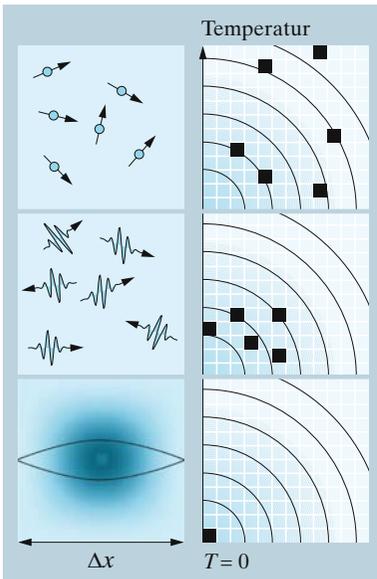


Abb. 14.75. Links: Momentaufnahmen bosonischer Teilchen in einem homogenen Kasten. Die Ausdehnung der de Broglie-Wellenpakete nimmt mit fallender Temperatur von oben nach unten zu. Bei $T = 0$ haben alle Teilchen die gleiche Wellenfunktion. Rechts: Zweidimensionaler Querschnitt des sechsdimensionalen Phasenraums, der in Phasenraumzellen der Größe h^3 unterteilt ist. Die Phasenraumzellen sind so angeordnet, dass die Energie der Teilchen, die sich in einer Zelle befinden, mit dem Abstand vom Ursprung anwächst. Bei $T = 0$ befinden sich alle Bose-Teilchen in derselben, energetisch niedrigstliegenden Phasenraumzelle

Bei $\theta = \pi/2$ erwarten wir für Fermionen bei allen l vollständige Unterdrückung der Streuprozesse. Bei $l = 0$ ist aber die Streuamplitude isotrop:

- Für identische Fermionen ist die s-Wellen-Streuung vollständig unterdrückt! Dieser Umstand spielt bei der Erzeugung atomarer Fermi-Gase (Abschn. 14.11.6) eine wichtige Rolle.
- Für identische Bosonen ist der Streuquerschnitt der s-Wellenstreuung durch konstruktive Interferenz verdoppelt: $\sigma = 8\pi a^2$. Dieser Streuquerschnitt spielt die entscheidende Rolle für Wechselwirkungen in einem Bose-Einstein-Kondensat (Abschn. 14.11.2).

14.11 Quantenmaterie

Die atomare de Broglie-Wellenlänge λ_{dB} Abschn. 13.2.1 nimmt mit sinkender Geschwindigkeit der Atome offenbar zu. Bei entsprechend sinkender kinetischer Energie bzw. Temperatur des Gases müssen sich die Wellenpakete, die zu den einzelnen Atomen gehören, berühren, wenn die de Broglie-Wellenlänge ungefähr dem Abstand zwischen den Atomen entspricht, $\lambda_{dB} \simeq n^{1/3}$ (n : Teilchendichte). Dann müssen Quanteneigenschaften in diesem Vielteilchen-System aus Atomen eine wachsende Rolle spielen. Weil die vielen Teilchen bei Abkühlung alle versuchen, den gleichen, nämlich energetisch niedrigstliegenden Quantenzustand zu besetzen, spricht man von entarteten Quantengasen (Abb. 14.75).

Sie bestehen aus vielen mikroskopischen Teilchen und ziehen außerordentlich viel Aufmerksamkeit auf sich, weil sie auf makroskopischer Skala gleichzeitig eindeutige Quanteneigenschaften zeigen. Man spricht von **makroskopischen Quantenzuständen**, zu denen auch der supraflüssige und der supraleitende Zustand gehören. Makroskopische Quantenzustände werden mit einer einzigen, gemeinsamen Wellenfunktion für das gesamte System beschrieben.

Der Bereich der Quantenentartung wird ungefähr dann erreicht, wenn das Produkt aus de Broglie-Wellenlänge und Teilchendichte größer wird als eins,

$$n\lambda_{de\ Broglie}^3 \geq 1. \quad (14.75)$$

Das Produkt $n\lambda_{de\ Broglie}^3$ wird normierte „Phasenraumdichte“ genannt und beschreibt den Raum der Zustände $\propto (\Delta x \Delta p)^3$, der einem beliebigen physikalischen System zur Verfügung steht.

In drei Dimensionen ist er in Einheiten von h^3 unterteilt. Eine **Phasenraumzelle** kann wegen des **Pauli-Prinzips** (s. Abschn. 14.5.4) nur mit einem fermionischen Teilchen (halbzahliger Spin) bevölkert werden, bosonische Teilchen (ganzzahliger Spin) können sich darin aber in unbeschränkter Zahl versammeln. Bei genauer Betrachtung stellt man fest, dass Bosonen die gemeinsame Besetzung einer Phasenraumzelle sogar bevorzugen. Diese **bosonische „Stimulierung“** findet auch bei der stimulierten Emission im Laserprozess statt (s. Abschn. 15.1.2)

Die Quantenstatistik bestimmt im Detail, wie der Phasenraum von den Teilchen eines Gases besetzt wird. Dazu müssen wir die Anzahl der Zustände bei der Energie E kennen, die wir aus der **Zustandsdichte** $\rho(E) dE$ bestimmen.

× Beispiel...

Wir bestimmen die Dichte der Zustände $\rho(E) dE$ zwischen E und $E + dE$ für zwei wichtige Spezialfälle. Wir wissen, dass sie im Phasenraum konstant ist, und verwenden dazu den Zusammenhang $p = p(E, r)$.

Im ersten Fall betrachten wir einen homogenen Kasten mit unendlich steilen Wänden. Dann müssen wir berechnen

$$\rho_\infty(E) dE = \frac{1}{h^3} \int_{p(E)}^{p(E+dE)} d^3 p d^3 r = \frac{4\pi V}{h^3} \int_{p(E)}^{p(E+dE)} p^2 dp .$$

Die Integration über $d^3 r$ ergibt einfach das Gesamtvolumen V , und im isotropen Raum haben wir $d^3 p = p^2 dp d\Omega$ mit Raumwinkelelement $d\Omega$ ersetzt. Wir verwenden dazu $p^2 = 2mE$, ersetzen $\int_{p(E)}^{p(E+dE)} f(p(E)) p dp \rightarrow f(E)m dE$ und erhalten

$$\rho_\infty(E) dE = C_\infty E^{1/2} dE \quad \text{mit} \quad C_\infty = 4\sqrt{2\pi} V m^{3/2} / h^3 .$$

Ganz analog können wir den zweiten Fall des isotropen harmonischen Potentials $V(r) = m\omega_0^2 r^2 / 2$ betrachten, nur ist die Integration etwas aufwändiger, weil Energie und Impuls nun auch durch das Potential beeinflusst sind, $p^2 = 2m(E - m\omega_0^2 r^2 / 2)$ und wieder $\int_{p(E)}^{p(E+dE)} f(p(E)) p dp \rightarrow f(E)m dE$:

$$\rho_2(E) dE = \frac{(4\pi)^2 \sqrt{2} m^{3/2}}{h^3} \left[\int_0^{r_{\max}(E)} dr r^2 (E - m\omega_0^2 r^2 / 2) \right] dE .$$

Der Maximalwert ist $r_{\max}^2 = 2E / m\omega_0^2$, das Integral kann dimensionslos gemacht werden ($x = r / r_{\max}$) und man erhält

$$\begin{aligned} \rho_2(E) dE &= (4\pi)^2 \sqrt{2} m^{3/2} h^{-3} E^{1/2} r_{\max}^3 \left[\int_0^1 dx x^2 (1 - x^2)^{1/2} \right] dE \\ &= C_2 E^2 dE \quad \text{mit} \quad C_2 = 1/2 (\hbar\omega_0)^3 . \end{aligned}$$

Die Besetzungswahrscheinlichkeit $f(E)$ der Quantenzustände bei der Energie E gehorcht entweder der Bose-Einstein- oder der Fermi-Dirac-Statistik (s. Abschn. 19.3),

$$\text{Bose-Einstein} \quad f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} - 1} , \tag{14.76}$$

$$\text{Fermi-Dirac} \quad f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} . \tag{14.77}$$

Bei hohen Temperaturen gehen beide Verteilungen bekanntlich wieder in die klassische Maxwell-Boltzmann-Verteilung über.

Tabelle 14.19. Phasenraum-dichten

Substanz	Phasenraum-dichte/ h^3
Luft bei Raumtemperatur	10^{-7}
Magneto-optische Falle (Abschn. 14.7.3)	10^{-6}
Atomares Bose-Einstein-Kondensat	1
Flüssiges Helium bei 2 K	1

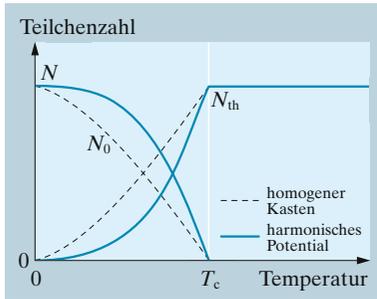


Abb. 14.76. Bose-Einstein-Kondensation: Teilchenzahl im Kondensat N_0 und im thermischen Gas N_{th} für einen homogenen Kasten und ein harmonisches Potential

14.11.1 Bose-Einstein-Kondensation

In der Bose-Einstein-Statistik spielt das **chemische Potential** μ in (14.76) eine ganz besondere Rolle. Es kann nicht größer werden als die Energie des niedrig liegendsten Zustands, $\mu \leq E_0$, damit die Besetzungswahrscheinlichkeit immer positiv ist. Wie man später sehen wird, kann das chemische Potential μ als die Mindestenergie interpretiert werden, die erforderlich ist, um ein einzelnes Teilchen aus dem Grundzustand zu entfernen.

Bei $T = 0$ erwarten wir, dass sich alle Bose-Teilchen in demselben, niedrigsten Quantenzustand aufhalten. Andererseits weist die Zustandsdichte, wie im Beispiel zu sehen, diesem Grundzustand gar kein Gewicht zu, $\rho(E \rightarrow E_0) \rightarrow 0!$ Der mit N_0 Teilchen bevölkerte Grundzustand bei E_0 muss deshalb gesondert behandelt werden, wie zuerst A. Einstein 1924 erkannte.

Die Gesamtzahl der Teilchen N teilt sich deshalb auf in einen Anteil, der sich im niedrigsten Zustand befindet und einen anderen, thermischen Anteil, der angeregte Zustände bevölkert und $N_{\text{th}}^{\text{max}}$ genannt wird:

$$N = N_0 + \int_0^\infty \rho(E) f(E) dE = N_0 + N_{\text{th}}. \quad (14.78)$$

Der thermische Anteil nimmt die größte überhaupt mögliche Zahl von Teilchen bei $\mu = 0$ auf, die berechnet wird aus $N_{\text{th}}^{\text{max}} = \int_0^\infty dE \rho(E) / (e^{E/kT} - 1)$:

$$N_{\text{th}}^{\text{max}} = C_\infty (kT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1} \quad \text{im homogenen Raum,} \quad (14.79)$$

$$N_{\text{th}}^{\text{max}} = C_2 (kT)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \quad \text{im harmonischen Potential.} \quad (14.80)$$

Da μ nicht verringert werden kann, legen (14.79,14.80) für $N = N_{\text{th}}^{\text{max}}$ genau die Übergangstemperatur T_c fest, unterhalb derer alle überschüssigen Teilchen in den tiefsten Zustand eintreten müssen. Wir können die Temperatur für den homogenen Behälter und das harmonische Potential ausrechnen. Im Einklang mit (14.75) finden wir das Ergebnis $\int x^{\alpha-1} dx / (e^x - 1) = \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)$ mit den tabellierten Werten der Gammafunktion $\Gamma(\alpha)$ und der riemannschen Zetafunktion $\zeta(\alpha)$:

	homogener Kasten	harmonisches Potential
$T_c =$	$\frac{N^{2/3}}{k(C_\infty \Gamma(3/2) \zeta(3/2))^{2/3}}$	$\frac{N^{1/3}}{k(C_2 \Gamma(3) \zeta(3))^{1/3}}$
$=$	$\frac{h^2}{2\pi m k} \left(\frac{N/V}{2,612} \right)^{2/3}$	$\hbar \omega_0 \left(\frac{N}{1,202} \right)^{1/3}$
$N_0(T)/N =$	$1 - (T/T_c)^{3/2}$	$1 - (T/T_c)^3$

Der Anteil $N_0 = N - N_{\text{th}}$ wird als Bose-Einstein-Kondensat bezeichnet (Abb. 14.76) und kann mit Hilfe von (14.79,14.80) geschickt dargestellt werden.

Bemerkenswerterweise tritt die Bose-Einstein-Kondensation ohne jede Wechselwirkung zwischen den Teilchen auf, ganz anders als bei einem gewöhnlichen gasförmig–flüssig-Übergang! Interatomare Wechselwirkungen spielen dennoch eine herausragende Rolle: Erst durch diese Wechselwirkungen nämlich kommt es zu neuartigen Vielteilchen-Phänomenen wie **Suprafluidität** u.A. Ohne die Wechselwirkungen würden die Atome wieder die schon bekannten Einteilchen-Effekte zeigen.

14.11.2 Atomare Bose-Kondensate

Um das interessante Quantenregime experimentell zu erreichen, kann man nach (14.75) die Dichte n stark erhöhen und die Temperatur extrem stark absenken. Ein schon lange bekanntes Modellsystem ist das flüssige Helium, das am berühmten λ -**Punkt** bei 2,17 K (bei Normaldruck) zu einer Quanten- oder **Supraflüssigkeit** wird. Allerdings ist die Dichte im Helium so groß, dass die Atome starken elektromagnetischen Wechselwirkungen ausgesetzt sind, die auch die Eigenschaften der Flüssigkeit dominieren. Viel geringere Dichten werden in Gasen kalter Atome erzielt, sodass dort die atomaren Wechselwirkungen nur eine kleine Störung verursachen. Durch eine Kombination aus Laserkühlung und so genanntem Verdampfungskühlen können solche Gase trotz der geringen Dichte bis zur Entartung im Phasenraum getrieben werden.

E. Cornell und *C. Wieman* ist es 1995 erstmals gelungen, ein entartetes atomares Quantengas aus Rubidium-Atomen herzustellen. Sie haben dazu ein Rubidium-Gas mit Hilfe der Laserkühlung in einer magneto-optischen Falle (Abschn. 14.7.3) vorgekühlt und anschließend in eine Magnetfalle (Abb. 14.77) umgeladen. Vorher werden die Rb-Atome durch optisches Pumpen (Abschn. 14.9.8) spinpolarisiert, weil man sie daran hindern muss, ein konventionelles Kondensat, d. h. in diesem Fall Rubidium-Metall zu bilden, und weil sie natürlich alle im selben inneren Quantenzustand präpariert sein müssen, um als ununterscheidbare Teilchen ein Bose-Kondensat zu bilden.

Das **Verdampfungskühlen** erzeugt auf sicherem Weg ein Bose-Einstein-Kondensat. Dazu werden sehr energiereiche Atome (die die Ränder des Speicherbereiches erreichen) durch Radiofrequenzübergänge in ein antibindendes Potential befördert und dadurch aus dem gespeicherten Gas entfernt (Abb. 14.78, 14.79). Die Temperatur des Gases sinkt, wenn

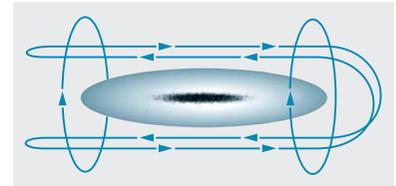


Abb. 14.77. Eine magnetische Falle für paramagnetische neutrale Atome kann durch diese Anordnung erzeugt werden. Die Pfeile geben die Stromrichtung in den Leiterschleifen an. Der schattierte Bereich deutet das ellipsenförmige effektive Potential $V = \mu \cdot B$ an

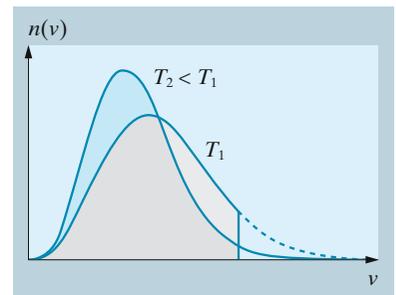


Abb. 14.78. Durch das Verdampfungskühlen wird der hochenergetische Teil der Maxwellverteilung abgeschnitten. Nach der Rethermalisierung entspricht die Geschwindigkeits-Verteilung $n(v)$ einer geringeren Temperatur

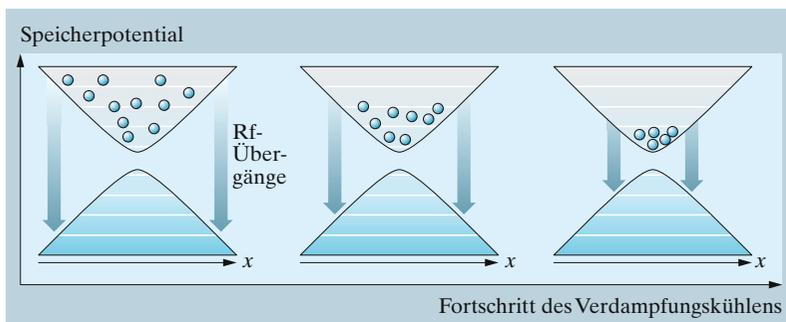
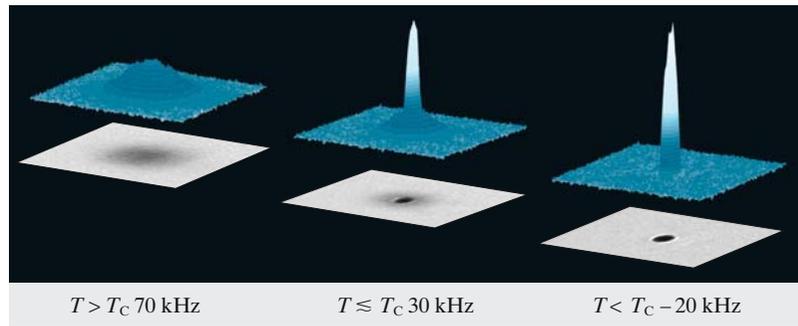


Abb. 14.79. Verdampfungskühlen: Das spinpolarisierte atomare Gas ist in einem magnetischen oder optischen Speicherpotential gefangen. Radiofrequenzübergänge befördern die energiereichsten Atome in ein antibindendes Potential. Die Verstimmungsrate der Radiofrequenz muss genügend Zeit lassen, um eine Rethermalisierung des Gases und damit Kühlung zu erreichen

Abb. 14.80. Schattenbilder von der Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats durch Verdampfungskühlen. *Obere Reihe:* Fehlfarbfendarstellung der Schattenbilder nach dem Beerschen Gesetz (4.79), $z(x, y) = -\ln(I(x, y)/I_0)$. Die Endtemperatur wird durch den Abbruch des Verdampfungskühlens eingestellt, die hier durch die Endfrequenz angegeben ist. Unterhalb der Übergangstemperatur T_c tritt ein schmales Maximum im Zentrum der thermischen Wolke auf. Das hier gezeigte Bild wurde mit Rubidium-Atomen von I. Bloch, München, aufgenommen



elastische Stöße rechtzeitig für die Rethermalisierung sorgen. Bei dieser Prozedur gehen zwar die meisten der ursprünglich 10^9 – 10^{10} Atome verloren, am Ende wird aber ein gut beobachtbares atomares Kondensat mit 10 000 bis 10 Millionen Atomen erzeugt Abb. 14.80. Zur Beobachtung des Kondensats benötigt man eine empfindliche Beobachtungsmethode, die in Abb. 14.81 vorgestellt ist. Die Atome können sowohl im gespeicherten Zustand als auch bis zu einige 10 ms später im freien Fall per Schattenwurf photographiert werden. Schaltet man die optischen oder magnetischen Speicherkäfige plötzlich ab, dann expandiert die zuvor gespeicherte Atomwolke und der Ort der Atome gibt dann Auskunft über ihre Geschwindigkeit. Das geometrische Bild der Atome ist also ein Bild des Impulsraums!

Im homogenen Kasten durchdringen sich das Kondensat und die thermische Wolke vollständig, die Kondensation findet allein im Impulsraum statt. Im harmonischen Speicher findet die Kondensation auch räumlich lokalisiert beim Potentialminimum statt.

Atome sind übrigens zusammengesetzte, so genannte Komposit-Bosonen oder -Fermionen, bei ihnen zählt der Gesamtspin und nicht der Spin seiner Bestandteile. Sowohl Bose-artige wie Fermi-artige Modellsysteme sind mit den Atomen aus Tabelle 14.20 hergestellt worden. Sie stellen den Experimentalphysikern ein Labor der Quantenphysik von Vielteilchen-Systemen zur Verfügung, in denen sich insbesondere die interatomaren Wechselwirkungen hervorragend kontrollieren lassen. E. Cornell, C. Wieman und W. Ketterle (s. Abschn. 14.11.4) haben den Nobelpreis 2001 für ihre bahnbrechenden Arbeiten zur Bose-Einstein-Kondensation erhalten.

Abb. 14.81. Abbildung von kalten Atomen: Ein nahresonanter Laserstrahl wird absorbiert und verursacht einen Schattenwurf auf der Kamera. Die kalten Atome können nicht nur im gespeicherten Zustand abgebildet werden. Sie sind so langsam, dass man sie nach Abschalten der Speicherkräfte für einige 10 ms auch im freien Fall beobachten kann. Der Ort der Atome gibt dann Auskunft über ihre Geschwindigkeit, man erzeugt also eine Abbildung des Impulsraums

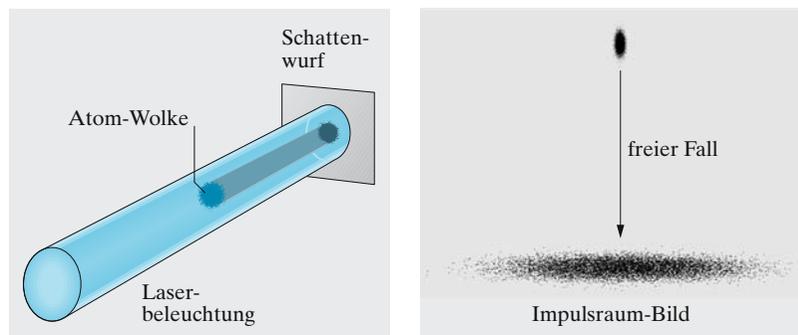


Tabelle 14.20. Atomare Quantengase

Isotop	I	Statistik		Streulänge a_t/a_0
		B-E	F-D	
^1H	1/2	✓		1,23
^6Li	1		✓	$-2\,160 \pm 250$
^7Li	3/2	✓		$-27,6 \pm 5$
^{23}Na	3/2	✓		85 ± 3
^{39}K	3/2	✓		-17 ± 25
^{40}K	4		✓	194
^{85}Rb	5/2	✓		-369 ± 16
^{87}Rb	3/2	✓		106 ± 4
^{133}Cs	7/2	✓		-350

B-E: Bose-Einstein; F-D: Fermi-Dirac
 a_t : Streulänge im Triplett-System
 a_0 : Bohr-Radius

14.11.3 Einteilchen- und Vielteilchen-Quantenzustände

Bisher haben wir nur Einteilchen-Quantenzustände ψ_i betrachtet, und jedes gehorcht einzeln der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_i = \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V(\mathbf{r}_i) + U_0 \sum_j \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) \psi_i .$$

Hier berücksichtigen wir die interatomare Wechselwirkung durch den $U_0\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ -Beitrag, der die interatomaren Kräfte durch eine effektive Wechselwirkung beschreibt (14.74). Die Gesamtenergie von N Teilchen, die sich alle im selben Einteilchen-Quantenzustand $\psi(\mathbf{r})$ befinden, beträgt

$$E_0 = N \int d^3r \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{N-1}{2} U_0 |\psi(\mathbf{r})|^4 \right) .$$

An dieser Stelle ist es bequem, die makroskopische Wellenfunktion

$$\Psi(\mathbf{r}) := \sqrt{N} \psi(\mathbf{r}) \tag{14.81}$$

einzuführen. Wenn wir bei großen Zahlen $N(N-1) \simeq N^2$ verwenden, erhalten wir

$$E_0 = \int d^3r \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r})|\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} U_0 |\Psi(\mathbf{r})|^4 \right) ,$$

wobei die Normierung nun lautet $\int d^3r |\Psi(\mathbf{r})|^2 = N$.

Die makroskopische Wellenfunktion stellt sich in selbstkonsistenter Weise so ein, dass die Energie im Grundzustand minimal wird. Mit thermodynamischen Argumenten kann man zeigen, dass die Wellenfunktion die **Gross-Pitaevski-Gleichung** mit dem chemischen Potential μ als Eigenwert erfüllen muss:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \mu \Psi(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\Psi(\mathbf{r})|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}) . \tag{14.82}$$

Es ist nicht überraschend, dass die Energie des Grundzustands mit dem chemischen Potential zusammenhängt, denn wir hatten schon gesehen,

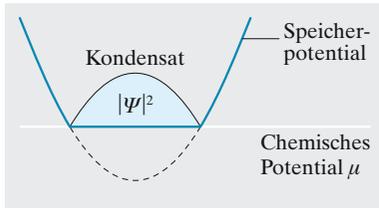


Abb. 14.82. In der Thomas-Fermi-Näherung reflektiert die makroskopische Wellenfunktion des Bose-Einstein-Kondensats genau den Verlauf des Speicherpotentials

dass es für $\mu = E_0$ gerade die maximale Teilchenzahl im thermischen Gas angibt. In (14.82) haben wir das Wechselwirkungspotential der Bose-Teilchen nach (14.74) eingesetzt.

Die Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{r})$ beschreibt eine mittlere Amplitude, die als Molekularfeld (engl. *mean field*) bezeichnet wird. Das Molekularfeld ist nur unterhalb von T_c von Null verschieden, daher wird es auch Ordnungsparameter genannt, der die kondensierte Phase charakterisiert.

Wenn im harmonischen Potential sehr viele Teilchen gefangen sind, kann man den Beitrag der kinetischen Energie im Vergleich zur potentiellen und zur interatomaren Wechselwirkungsenergie vernachlässigen. Dann wird (14.82) in der Thomas-Fermi-Näherung von der Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{r})$ mit

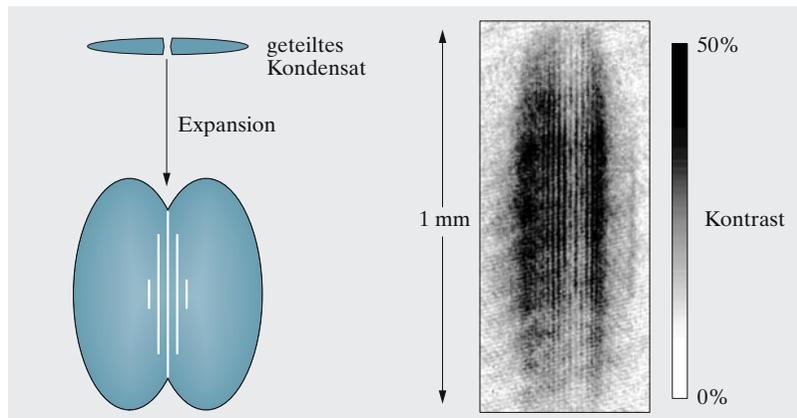
$$|\Psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{U_0}(\mu - V(\mathbf{r}))$$

gelöst (Abb. 14.82). Sie reflektiert den Verlauf des Speicherpotentials. In Abb. 14.81 ist der erwartete Verhalten der Impulskomponenten in einem asymmetrischen Potential (angedeutet durch die elliptische Form) vorgestellt: Die Impulskomponenten sind proportional zu $\nabla\Psi(\mathbf{r})$, daher werden die stärker eingeschränkten Komponenten nach Abschalten der Speicherkräfte einer stärkeren Expansion unterliegen – das Verhältnis der Ellipsenachsen der gespeicherten Wolke wird dabei invertiert.

14.11.4 Materiewellen

Von Materiewellen erwarten wir, dass sie ganz wie optische Wellen Interferenzfähigkeit zeigen. Das Bose-Einstein-Kondensat ist das erste Beispiel einer Materiewelle, die aus vielen Teilchen besteht, ganz analog zum Laserlicht, das ebenfalls nicht aus einzelnen, sondern aus sehr vielen Photonen besteht. In Abb. 14.83 bedeutet also das Auftreten von weißen Streifen in dem Überlagerungsteil der beiden Kondensate destruktive Interferenz, schwarze Streifen konstruktive Interferenz. Im Gegensatz zur Atominterferometrie aus Abschn. 14.8.2, die auf der Selbstinterferenz einzelner Teilchen beruht, ist hier die Interferenz einer makroskopischen

Abb. 14.83. *Rechts*: Das erste Interferenzbild mit Materiewellen von 1997 von W. Ketterle. Experimentelles Schema (*links*): Ein gespeichertes Bose-Einstein-Kondensat wird mit einem intensiven fokussierten „Lasermesser“ durch optische Dipolkräfte in zwei Hälften geteilt. Nach Abschalten der Speicherkräfte expandieren und überlagern sich die beiden Teilkondensate und bilden dabei Interferenzstreifen aus



Wellenfunktion zu sehen. Das Bose-Kondensat verhält sich analog wie eine klassische Materiewelle – es wird durch Amplitude und Phase, die komplexe Größe $\Psi(\mathbf{r})$ beschrieben, und es gilt das Superpositionsprinzip

Es liegt nahe, nach der Anwendung des Bose-Einstein-Kondensats als „Atomlaser“ zu fragen. Dazu kann man die Atome aus dem Speicher zwar gleichmäßig herausfließen lassen, muss aber doch periodisch nachladen – den kontinuierlichen Atomlaser hoher Intensität gibt es bis heute nicht. Es gibt auch wichtige Unterschiede zum Licht: Dessen Strahlen durchdringen einander ungehindert, beim Atomlaser werden unweigerlich die Wechselwirkungen auftreten, die wir schon in der Gross-Pitaevski-Gleichung bemerkt haben – die atomare Wellenoptik mit vielen Teilchen ist von vornherein **nichtlinear!**

14.11.5 Suprafluidität und Vortizes

Suprafluidität ist ein Kennzeichen wechselwirkender **Quantenflüssigkeiten** und vor allem vom flüssigen He unterhalb des so genannten λ -Punktes bei $T = 2,17$ K bekannt. Die Suprafluidität zeigt außergewöhnliche Viskositätseigenschaften, denn unterhalb einer bestimmten kritischen Geschwindigkeit können in einer Suprafluidität keinerlei Anregungen erzeugt werden, dort findet reibungsfreier Fluss statt. Dieser Zustand tritt auch bei den atomaren Bose-Kondensaten auf.

Eine besonders eindrucksvolle Konsequenz der Suprafluidität tritt bei Rotationen auf. Wenn man eine klassische Flüssigkeit durch Drehen des Behälters in Rotation versetzt, wird sie wegen der Reibung an der Behälterwand mit derselben Geschwindigkeit wie der Behälter selbst rotieren, wie man auch am parabolischen Oberflächenprofil erkennt. Man kann dazu auch ein Geschwindigkeitsfeld angeben – $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ bei der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$. Das Bose-Kondensat verhält sich dagegen wie eine Suprafluidität – unterhalb einer **kritischen Geschwindigkeit** behält es seine Ruheposition, und dann beginnt es ein Wirbelfilament („Vortex“) zu bilden. Erhöht man die Rotationsgeschwindigkeit weiter, treten mehrere Wirbel auf, die ein Gitter bilden.

Die Gross-Pitaevski-Gleichung (14.82) erfüllt die Kontinuitätsgleichung $\partial n / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ mit der Teilchendichte $n(\mathbf{r})$ und der Stromdichte

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) .$$

Aus $\Psi = \sqrt{n} e^{i\phi}$ findet man $\mathbf{j} = n\hbar \nabla \phi / m$, woraus man die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\text{sfl}} = \hbar \nabla \phi / m$$

der Suprafluidität entnehmen kann. Sie beschreibt den reibungsfreien Fluss eines Kondensats. Wenn wir einen geschlossenen Weg C betrachten (Abb. 14.85),

$$\oint_C \mathbf{ds} \cdot \mathbf{v}_{\text{sfl}} = \frac{\hbar}{m} \oint_C \mathbf{ds} \cdot \nabla \phi \quad ,$$

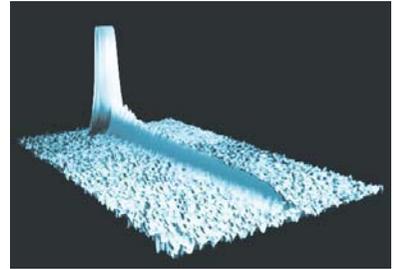


Abb. 14.84. Atomlaserstrahl der Universität München aus Rubidium-Atomen. Die Atome werden zuerst in einem Behälter, einer „magnetischen Flasche“, im exakt identischen Bewegungszustand niedrigster kinetischer Energie präpariert (so genanntes Bose-Einstein-Kondensat, im Bild links an der hohen Säule zu erkennen). Die magnetische Flasche kann geöffnet werden, sodass eine kohärente Materiewelle langsam herausfließt. Sie wird durch Fluoreszenz sichtbar gemacht, die Länge des Strahls beträgt in diesem Bild ca. 2 mm

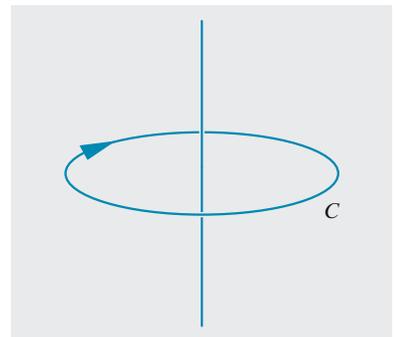


Abb. 14.85. Das Wegintegral um einen Vortex muss ein Vielfaches von 2π betragen

dann muss das Integral ein Vielfaches von 2π sein, um die Kontinuität der Kondensat-Wellenfunktion zu garantieren. Die Rotation ist deshalb quantisiert:

$$\oint_C ds \cdot \mathbf{v}_{\text{eff}} = 2\pi n \frac{\hbar}{m} \quad \text{mit } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Das Geschwindigkeitsfeld muss bei zylindrischer Symmetrie wie r^{-1} skalieren, eine Situation die auf der Achse eines solchen Vortex $\Psi(r) = 0$ erzwingt, um eine Singularität zu vermeiden. Der Drehimpuls eines allein auftretenden Wirbels mit $n = 1$ hat erwartungsgemäß die Größe \hbar pro Teilchen. (Die Wellenfunktion Ψ (14.81) ist auf die Gesamtzahl aller Teilchen normiert!)

Im Experiment (Abb. 14.86) wird das sonst immer zylindrisch symmetrische Speicherpotential elliptisch verformt und in Rotation versetzt, die Anisotropie übernimmt hier die Rolle des reibungsbehafteten Behälters bei einer gewöhnlichen Flüssigkeit. Oberhalb einer kritischen Winkelgeschwindigkeit Ω_c erscheint ein „Loch“ im Kondensat, das gerade einem Vortex entspricht. Wird die Rotationsgeschwindigkeit weiter erhöht, wird nicht der Drehimpuls dieses Wirbels erhöht, es treten stattdessen mehrere Wirbel auf, die sich in der gleichen Richtung drehen und untereinander abstoßen.

Sind die Vortizes einmal angeregt worden, bleiben sie auch nach Abschalten des Antriebs bestehen, weil der supraflüssige Zustand unterhalb einer kritischen Geschwindigkeit vollkommen reibungsfrei ist. Sie sind aber metastabil, denn sie entsprechen nicht dem thermodynamischen Gleichgewichtszustand. Kleine Störungen lassen sie zerfallen, wobei die Rotationsenergie des Wirbelzustandes frei wird.

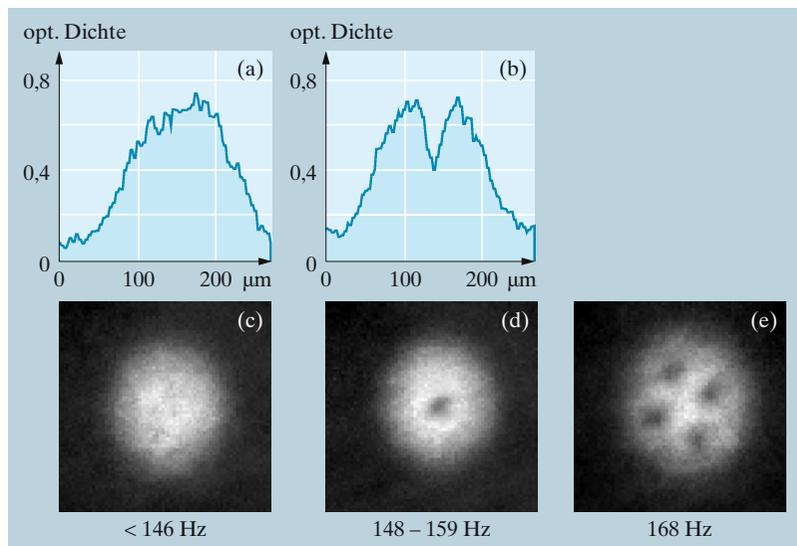


Abb. 14.86. Erzeugung von Vortizes (Wirbeln) in einem atomaren Bose-Kondensat. Das zylindrisch symmetrische Speicherpotential wird elliptisch verformt und in Rotation versetzt. Oberhalb einer kritischen Winkelgeschwindigkeit treten Wirbel auf. Die Daten wurden von Jean Dalibard, ENS Paris, zur Verfügung gestellt

Skizze

Von der Quantenflüssigkeit zum Mott-Isolator. Die Quantenflüssigkeit des atomaren Bose-Einstein-Kondensats wird mit einer makroskopischen Wellenfunktion beschrieben, wie in Abschn. 14.11.3 vorgestellt. Diese Quantenflüssigkeit kann durch Dipolkräfte in einem optischen Stehwellenfeld in 1–3 Dimensionen („Optisches Gitter“) auf experimentell einfache Weise einem periodischen Potential ausgesetzt werden (Abb. 14.87). Wenn das periodische Potential langsam anwächst, tauchen im Impulsraum-Bild (Abb. 14.88, nach der Methode von Abb. 14.81) im Abstand $2\pi/L$ vom zentralen Bild des Kondensats neue, scharfe Komponenten auf. Sie können als Beugung der atomaren Materiewelle am optischen Gitter mit der Periodenlänge L gedeutet werden. Die Interferenzlinien unterstreichen, dass die makroskopische Wellenfunktion eine sinnvolle Beschreibung der Quantenflüssigkeit liefert: Die einzelnen Atome sind „delokalisiert“, sie bewegen sich mit zunehmender Potentialtiefe in Energiebändern ähnlich wie Elektronen in einem Metall oder Halbleiter (Abschn. 17.3.5). Die **Delokalisierung** ist möglich, weil durch den Tunneleffekt zwischen benachbarten Potentialmulden ein Energiegewinn auftritt, der die abstoßende atomare Wechselwirkung überwiegt. Eine Momentaufnahme der Quantenflüssigkeit im periodischen Potential würde eine statistische Verteilung der Atome auf die Potentialmulden zeigen (Abb. 14.89). ▶

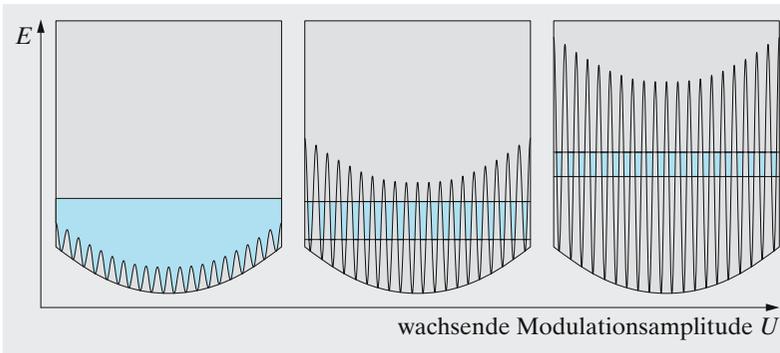


Abb. 14.87. Quantenflüssigkeit im periodischen Potential, das einem harmonischen Speicherpotential überlagert ist. Der hellblaue Bereich deutet den Energiebereich des Kondensats an

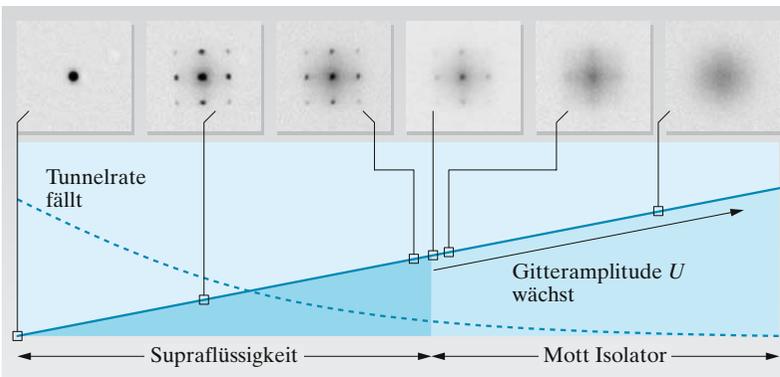


Abb. 14.88. Die Bilder zeigen den Impulsraum eines atomaren Quantengases nach gleichzeitigem Abschalten des harmonischen Speichers und des überlagerten optischen Gitters mit kubischer Symmetrie. Im Bereich der Supraflüssigkeit beweisen die scharfen Interferenzlinien die langreichweitige Kohärenz – die Delokalisierung – der makroskopischen Wellenfunktion. Oberhalb einer kritischen Tiefe des periodischen Potentials verschwinden die Interferenzerscheinungen schlagartig. Stattdessen tritt ein breites, inkohärentes Streumuster auf. Es zeigt die hohe Lokalisierung der Atome in einzelnen Potentialtöpfen. Mit freundlicher Erlaubnis von Immanuel Bloch

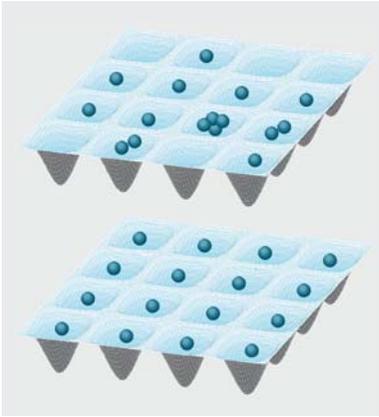


Abb. 14.89. Atomares Bose-Kondensat in einem optisches Gitter. Wenn das Gitter schwach ausgeprägt ist, bewegen sich die Atome über viele Potentialtöpfe hinweg, sie sind „delokalisiert“. Bei einer Momentaufnahme würde man die Atome statistisch verteilt in den Töpfen finden. Wenn die Potentialtiefe einen kritischen Wert übersteigt, überwiegt die Abstoßung zwischen den Atomen und unterdrückt das Tunneln

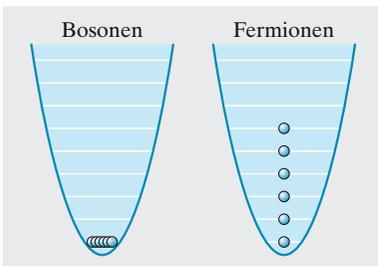


Abb. 14.90. Fermi-Gase können jeden Quantenzustand mit maximal einem Teilchen besetzen

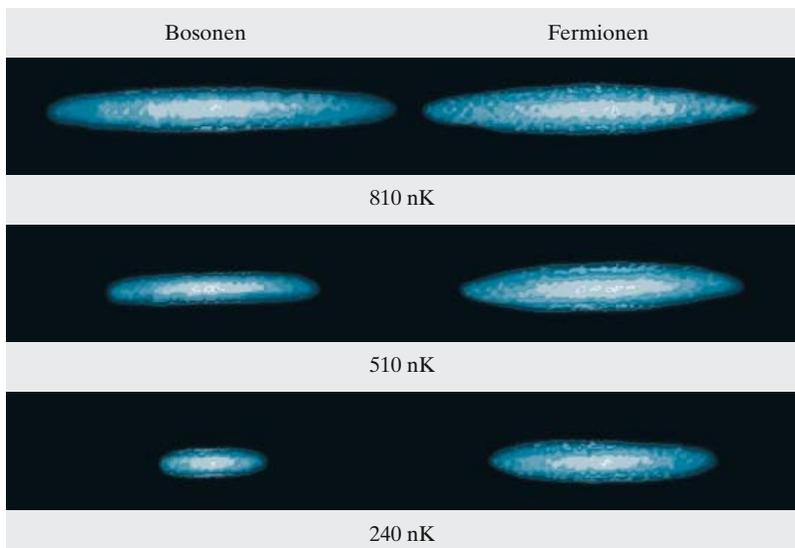
Abb. 14.91. Ein Gemisch aus bosonischem (${}^7\text{Li}$, links) und aus fermionischem Lithium (${}^6\text{Li}$, rechts) wird im selben Volumen abgekühlt. Jedes Paar von Bildern (die Isotope können durch Wellenlängenselektion getrennt werden) gehört zu einer bestimmten Temperatur, die von oben nach unten abnimmt. Wenn alle niedrig liegenden Quantenzustände besetzt sind, kann das Fermi-Gas unterhalb von T_F trotz Abkühlung nicht weiter schrumpfen. Das Bild wurde von Randy Hulet, Rice University Houston, U.S.A., zur Verfügung gestellt

Wenn die Tiefe des periodischen Potentials immer weiter wächst, dann nimmt die Tunnelrate zwischen den Potentialtöpfen ab und die Wechselwirkungen zwischen den Atomen dominieren plötzlich deren Verhalten: Das Tunneln in eine schon besetzte Potentialmulde kostet jetzt so viel Energie, dass der Prozess ganz unterdrückt wird: In jedem Potentialtopf befindet sich höchstens ein Atom.

Der Übergang von einem delokalisierten bzw. supraflüssigen Zustand in einen lokalisierten oder Isolatorzustand ist nach *Sir Neville Mott* benannt („**Mott-Phasenübergang**“), der diesen Effekt 1974 für einen elektronischen **Metall-Isolator-Übergang** vorhergesagt hat. Er ist ein Beispiel für einen **Quantenphasenübergang**, in dem sich der Charakter des Vielteilchenzustandes aufgrund des Wettbewerbs zweier Energiebeiträge (hier: Tunnelrate und atomare Abstoßung) schlagartig ändern kann.

14.11.6 Atomare Fermi-Gase

Fermi-Gase unterscheiden sich dramatisch von Bose-Gasen, allein weil das Pauli-Prinzip verbietet, einen Quantenzustand mehr als einfach zu besetzen (Abb. 14.90). Während die Teilchen eines Bose-Gases bei Abkühlung plötzlich bei T_c in den niedersten verfügbaren Zustand kondensieren, findet der Übergang zum entarteten Quantenregime im Fermi-Gas, der durch die charakteristische Temperatur $T_F = E_F/k_B$ bei der Energie E_F des höchsten noch besetzten Quantenzustandes markiert wird, eher kontinuierlich statt. Ist der Übergang zum Fermi-Quantengas schon schwierig zu erkennen, können auch die Kühlverfahren zur Erzeugung eines atomaren Bose-Einstein-Kondensats nicht einfach kopiert werden: Für identische Fermi-Teilchen ist die s-Wellenstreuung aus Symmetriegründen streng



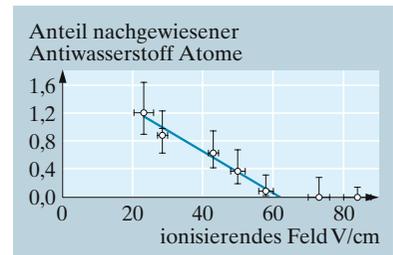
verboten (Abschn. 14.10.3), und alle anderen Streuprozesse nehmen mit der Temperatur ab. Die Konsequenz: **Verdampfungskühlen** eines ein-komponentigen Fermi-Gases ist gar nicht realisierbar. Der Ausweg: Man verwendet ein gemischtes Gas, das entweder durch Verwendung desselben Atoms, aber in einem anderen inneren Quantenzustand, oder eines fremden Isotops, zum Beispiel des Gemisches ${}^6\text{Li}/{}^7\text{Li}$, die s-Wellenstreuung und damit Verdampfungskühlen erlaubt. Atomare Fermi-Gase sind im Labor Realität geworden, und Abb. 14.91 zeigt in schöner Weise den Unterschied zwischen dem bosonischen und dem fermionischen Isotop von Li, die gleichzeitig in einem Gemisch abgekühlt werden: Während das bosonische System bei T_c kondensiert, verhindert der so genannte **Fermi-Druck** als Folge des Pauli-Prinzips das weitere Schrumpfen des fermionischen Systems unterhalb von T_F .

Fermi-Gase sind die Ursache bemerkenswerter Phänomene in der Natur, darunter des periodischen Systems der Elemente (Kap. 16), der Leitfähigkeit in Metallen (Abschn. 17.3.2), des Quanten-Hall-Effekts (Aufgabe 17.3.5) oder der Existenz von Neutronensternen (Abschn. 19.3): Sie alle „schulden“ ihre Existenz dem Pauli-Prinzip.

▲ Ausblick

Die atomaren Quantengase haben den Experimentalphysikern ein komplexes Labor der Quantenphysik zur Verfügung gestellt, mit dem der Raum zwischen einzelnen mikroskopischen Teilchen und der makroskopischen Welt intensiv studiert werden kann.

In jüngster Zeit ruft aber auch ein mikroskopisches atomares System wieder hohes Interesse hervor: Kürzlich wurden die ersten **Antiwasserstoffatome**, also das gebundene System aus einem Antiproton und einem Positron, hergestellt. Künftig sollen Spektrallinien des Antiwasserstoffatoms äußerst präzise durch Laserspektroskopie mit denjenigen des gewöhnlichen Wasserstoffatoms verglichen werden. Wird dabei auch nur eine winzige Verletzung der Symmetrie zwischen Materie und **Antimaterie** beobachtet, so könnte das einen Hinweis darauf geben, wieso wir in einem Universum leben, und nicht in einem Antiuniversum.



Seit kurzem gibt es kalte Antimateriatome, die beim Durchmischen von Antiprotonen- und Positronenplasmen entstehen. Es werden dabei zunächst lose gebundene Zustände (Rydberg-Zustände mit großen Hauptquantenzahlen) erzeugt, die durch ein äußeres elektrisches Feld wieder aufgetrennt werden können (Feldionisation).

Bei jedem Messzyklus werden fast 1 000 Antiwasserstoff-Atome produziert und nachgewiesen. Die Messdaten zeigen den relativen Anteil der Antiwasserstoff-Atome, die ein zusätzliches „Diskriminatorfeld“ überlebt haben, als Funktion der Ionisationsfeldstärke. Schon bei etwa 60 V/cm werden im Experiment alle Atome ionisiert, was auf Hauptquantenzahlen $n > 50$ schließen lässt.

Mit freundlicher Erlaubnis von Jochen Walz

✓ Aufgaben ...

●● 14.1.1 Bohr-Modell anders

Wir leiten die Bohr-Radien und Energiezustufen auf etwas andere Weise her, die noch wesentlich verallgemeinerungsfähiger ist. Dazu brauchen wir nur die Unschärferelation $\Delta x \Delta p \approx h$. Ein Teilchen sei in ein Volumen mit dem Durchmesser d eingesperrt. Welches ist seine maximale Orts- und die zugehörige minimale Impulsunschärfe? Welchen Impuls und welche kinetische Energie (Nullpunktsenergie) hat also das Teilchen mindestens? Ein Elektron kann sich in verschiedener energetischer Höhe im Coulomb-Potentialtopf des Kerns ansiedeln. Setzen Sie die Gesamtenergie ($E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$) an. Wo liegt das Minimum? Eine dritte Art, zu den Bohr-Energien zu gelangen, zeigen Aufgaben 13.5.1 und 13.5.2.

●● 14.1.2 Bohr-Geschwindigkeit

Bestimmen Sie Umlaufgeschwindigkeiten und -frequenzen für das Elektron in den einzelnen Zuständen des H-Atoms. Lassen sich diese Rechnungen für höhere Atome fortsetzen?

●● 14.1.3 Ionisierung

Wie kann man die Ionisierungsspannung des H-Atoms aus dem Bohr-Modell bestimmen? Geht das für andere Elemente (vgl. z. B. Abb. 14.10, 16.1) auch direkt, oder welche Modifikationen muss man anbringen?

●● 14.1.4 Energie-Größenordnungen

Vergleichen Sie folgende typischen Energien, immer bezogen auf ein Atom oder Molekül: Energie eines Elektrons im Atom (z. B. im H-Atom); chemische Energie, z. B. Bindungsenergie von H_2 ; Bindungsenergie der Teilchen in einer Flüssigkeit, z. B. Wasser; Oberflächenenergie, z. B. der auf ein H_2O -Molekül entfallende Anteil; elastische Energie, z. B. aus Festigkeitsgrenze und Bruchdehnung eines Metalls. Deuten Sie die gefundenen Größenordnungen atomistisch (vgl. die vorstehenden Aufgaben).

Kann man sagen, es handle sich eigentlich immer um die gleiche Art von Energie?

●● 14.2.1 Rydberg-Atome

In Abb. 14.11 sind die Linien H_η und H_θ kaum noch, die höheren gar nicht mehr erkennbar. Verdünnt man das Entladungsgas, so erscheinen immer höhere Linien. Wie kommt das? Können Sie schätzen, mit welchem Gasdruck Abb. 14.10 aufgenommen worden ist? Würden Sie meinen, dass bei der Verdünnung unter sonst gleichen Entladungsbedingungen die übrigen Linien auch intensiver werden?

●● 14.2.2 Balmer-Absorption

Balmer-Absorptionslinien sind ziemlich schwer zu erzeugen. Warum? Unter welchen Umständen gelingt das doch?

●● 14.3.1 Quantenbedingung

Machen Sie sich das bohrsche Postulat, nach dem sich Drehimpulskomponenten immer nur um ganzzahlige Vielfache von \hbar unterscheiden können, aus der **Unbestimmtheitsrelation** klar. Sie gilt z. B. zwischen Impulskomponente p_x und Koordinate x , aber auch zwischen Drehimpulskomponente und der entsprechenden konjugierten Variablen. Welche wird das sein? Welche maximale Unschärfe kann sie haben? Welcher minimale Unterschied in L_z ergibt sich daraus? Warum gibt es keine so allgemeingültige Stufe für Impuls oder Energie? Unter welchen Umständen sind diese Größen überhaupt gequantelt, und warum ist es der Drehimpuls immer?

●● 14.3.2 Bohr-Magneton

Geben Sie die Werte des **gyromagnetischen Verhältnisses** γ für die Teilchen in Tabelle 14.5 an. Welche anschauliche Bedeutung hat γ z. B. für ein „spinnendes Elektron“ oder ein Elektron auf einer bohrschen Kreisbahn?

●● 14.3.3 Stern-Gerlach-Versuch

Wie sollte das Profil der Silber-Niederschlagsdichte auf dem Schirm

des **Stern-Gerlach-Versuchs** in Richtung der Achse des Elektromagneten aussehen? Berücksichtigen Sie die Geschwindigkeitsverteilung im Atomstrahl. Warum müssen die Polschuhe so eigenartig ausgebildet sein? Wie groß müssen das Magnetfeld und seine Inhomogenität sein, damit die beiden Teilstrahlen sauber getrennt werden? Wie könnte man die Schärfe der Niederschlags-Flecken verbessern? Wie sähe das Ergebnis aus, wenn einige Silberatome ionisiert wären? Kann das vorkommen?

●● 14.3.4 Zeeman-Effekt I

Als Modell für den Zeeman-Effekt kann man ein harmonisch gebundenes Elektron betrachten, das nicht nur einem elektrischen Wechselfeld (14.3), sondern gleichzeitig im magnetischen Feld der Lorentzkraft ausgesetzt ist. Das magnetische Feld sei senkrecht zur Bahnebene des Elektrons in z -Richtung orientiert. Wie sieht dann die modifizierte Bewegungsgleichung aus? Welchen Einfluss hätte ein **B-Feld** in der Bahnebene?

●● 14.3.5 Zeeman-Effekt II

Damit sich die Zeeman-Aufspaltung aus der thermischen, der druckbedingten, der natürlichen Linienverbreiterung heraushebt, muss das Magnetfeld gewisse Grenzen übersteigen. Geben Sie diese Grenzen an. **Sonnenflecken** sind magnetische Zentren, wie man mittels des **Zeeman-Effekts** feststellte. Wie groß muss das Magnetfeld dort mindestens sein?

●● 14.3.6 Larmor-Präzession

Man kann die **Larmor-Frequenz**, mit der jedes Elektron um die Richtung eines Magnetfeldes präzediert, auch rein elektrodynamisch durch den Induktionseffekt beim Einschalten dieses Feldes erklären. Untersuchen Sie die Spannungen und Kräfte, die beim Einschalten auftreten, und zeigen Sie, dass der Gesamteffekt unabhängig davon ist, auf welche Art, wie schnell usw. man das Feld eingeschaltet hat.

●● 14.4.1 Feinstruktur

Schätzen Sie die Größe der **Feinstruktur-** und der **Hyperfeinstruktur-**Aufspaltung. Welches mittlere Magnetfeld erzeugt der Umlauf des Elektrons in der Bahnebene? Ist es klassisch vernünftig, dieses Feld auf das Spinmoment desselben Elektrons zurückwirken zu lassen?

●● 14.5.1 Pickering-Serie

Im Funkenspektrum des Heliums gibt es eine **Pickering-Serie** von der jede zweite Linie praktisch mit einer Balmer-Linie des Wasserstoffs zusammenfällt; die übrigen Linien fallen dazwischen. Wie deuten Sie diese Serie? Wie erklärt sich die geringfügige Abweichung von den Balmer-Linien?

●● 14.5.2 Spektralklassen

Die Astrophysiker ordnen die Sterne nach ihren Spektren in die Klassen *O, B, A, F, G, K, M, R, N* („O be a fine girl, kiss me right now“). In dieser Reihe wandert das Emissionsmaximum immer mehr ins Langwellige (Farbe!). *O*-Sterne haben starke Emissionslinien, in den übrigen herrschen Absorptionslinien vor. Die H-Absorptionslinien sind bei A-Sternen am kräftigsten (Deneb, Sirius, Wega), beiderseits werden sie immer schwächer. *B*-Sterne haben die stärksten He-Linien (Rigel, Regulus). Verstehen Sie das?

●● 14.5.3 Zwei Elektronen

Schätzen Sie die Energie E des Grundzustandes eines Atoms oder Ions mit zwei Elektronen nach der Unschärferelation. Aus welchen Anteilen setzt sich W zusammen? Das erste Elektron sei auf einen Bereich vom Radius r_1 beschränkt, das zweite auf r_2 . Drücken Sie E durch r_1 und r_2 aus. Wo liegt das Minimum? Gemessene Werte für H^- , He , Li^+ , Be^{++} , B^{+++} , C^{++++} : 1,05; 5,81; 14,5; 27,3; 44,1; 64,8, ausgedrückt als Vielfache der Rydberg-Einheit – 13,65 eV.

●● 14.6.1 21 cm-Linie

Kalter atomarer Wasserstoff hat nur eine Möglichkeit, niederfrequente

Strahlung zu absorbieren oder emittieren: Der Elektronenspin kann sich parallel oder antiparallel zum Kernspin einstellen. Schätzen Sie die Energie, Frequenz und Wellenlänge des Überganges zwischen diesen beiden Zuständen und vergleichen Sie mit der ersten eigentlichen Elektronenanregung (Lyman-Übergang). Rechnen Sie zuerst mit einem klassischen Punktelektron, dann mit einem quantenmechanischen $1s$ -Elektron, dessen Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\psi\psi^*$ gemäß $\psi = \psi_0 e^{-r/r_0}$ verteilt ist (r_0 : Rohr-Radius).

●● 14.9.1 Kernmitbewegung

Das Elektron kreist nicht einfach um den ruhenden Kern, sondern beide kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt. Um wie viel verändern sich dadurch die Radien, Energien, Frequenzen des Bohr-Modells? Warum hängt man an den Wert R_∞ , wie er in Abschn. 14.1.2 definiert ist, den Index ∞ an? Bei der Rechnung beachten Sie, dass jetzt der Drehimpuls des *Gesamtsystems* der Quantenbedingung unterliegt.

●● 14.9.2 Kernspin

Versuchen Sie die in Tabelle 14.5 angegebenen **Kernspins** und magnetischen Momente aus den Spins der Bausteine zusammensetzen. Bei welchen Teilchen gelingt das problemlos, und worauf beruht die Diskrepanz bei den anderen?

●● 14.9.3 Protonen im Eis

Schätzen Sie aus Abb. 14.51 das Störfeld am Ort des untersuchten Protons. Wenn ein Nachbarproton dafür verantwortlich ist, welcher Abstand der beiden ergibt sich daraus? Könnte die Aufspaltung von anderen Teilchen herrühren? Sähe die Resonanzkurve auch so aus, wenn das Proton im Eis in der Mitte einer O–O-Bindung säße? Es scheint, als sprängen die Protonen zwischen den beiden möglichen Lagen auf einer solchen Bindung hin und her (Abschn. 17.1.6). Was kann man über die Sprungfrequenz aussagen?

●● 14.9.4 Spinecho

Wie groß war in Abb. 14.52 das Hochfrequenzfeld B_1 , wenn der HF-Impuls $10 \mu\text{s}$ dauerte? Was bedeutet die Abklingzeit des Echos von etwa 10 ms?

●● 14.9.5 Chemische Verschiebung

Wie kommt es zu der Größenordnung $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-6}$ für die **chemischen Verschiebungen** bei der hochauflösenden Kernresonanz? Mit welcher Stoffkonstante, die ähnliche Größenordnung hat, hängt das direkt zusammen? Wenn Sie weiterdenken, lassen sich beide Werte auf ein Verhältnis von Naturkonstanten zurückführen, das in der Atomphysik seit langem einen besonderen Namen hat. Welches?

●● 14.9.6 Rabi-Versuch

In einem Magnetfeld von 0,3453 T werde die Resonanzbedingung bei 14,693 MHz erfüllt. Um was für Teilchen wird es sich gehandelt haben? Machen Sie nähere Angaben über die Abmessungen der Apparatur in Abb. 14.59. Dürfen die Teilchen eine Ladung oder ein elektronisches magnetisches Moment haben? Was bedeutet die Breite des Maximums in Abb. 14.61? Welche Amplitude hatte das Wechselfeld?

●● 14.11.1 Fermionen und Bosonen

Der Zustand zweier Teilchen wird durch eine Wellenfunktion $\psi(x_1, x_2)$ beschrieben. Wie ergibt sich daraus die Wahrscheinlichkeit P , Teilchen 1 in $(x_1, x_1 + dx_1)$ und Teilchen 2 in $(x_2, x_2 + dx_2)$ zu finden? Wie ändert sich P , wenn man Teilchen gleicher Art vertauscht? Und wenn man sie nochmal vertauscht? Was folgt daraus für ψ ?

●● 14.11.2 Fermi-Druck

Nach dem Pauli-Prinzip können höchstens zwei Elektronen (mit entgegengesetzten Spins) den gleichen Zustand einnehmen. Welches Volumen steht jedem Elektron in einem Elektronengas mit n Elektronen/ m^3 zur Verfügung? Welche kinetische

Energie muss es mindestens haben (auch bei $T = 0$)? Wie reagiert das Gas auf Kompression? Kann man einen Druck definieren (**Fermi-Druck** p_F , auch Schrödinger-Druck genannt), den es auch bei $T = 0$ ausübt? Wie verhält sich p_F zum üblichen gaskinetischen Druck? In welcher logischen und numerischen Beziehung steht er zur Kompressibilität oder zum Elastizitätsmodul?

● 14.11.3 Bergeshöhe und Fermionen

Wie hoch kann ein Berg auf der Erde oder auf einem anderen Planeten sein? Ein Material lässt sich höchstens so hoch auftürmen, bis sein Druck auf die Unterlage deren Elastizitäts- oder Festigkeitsgrenze überschreitet. In welcher Tiefe muss demnach das Gestein plastisch sein? Wie dick sind die Kontinentalschollen (vgl. Aufgabe 1.7.11)? Wie hoch könnten Berge auf Mond, Mars, Jupiter sein? Erreichen sie diese Höhe? Wie groß dürfte ein Himmelskörper sein, damit die „Berge“ auf ihm ungefähr so hoch sein können wie sein Radius? Im Augenblick ist Phobos der größte unregelmäßige (nicht im wesentlichen kugelige) Körper, den wir im Weltall aus Nahaufnahmen kennen. Stimmt das zur obigen Betrachtung?

● 14.11.4 Kräuselwellen

An einem sehr ruhigen Tag regt ein leiser Wind zunächst Wellen an, die dem Übergang von den Schwere- zu den

Kapillarwellen entsprechen. Warum? Wie groß ist die entsprechende Wellenlänge λ ? Physikalisch wesentlicher ist $\tilde{\lambda} = \lambda/(2\pi)$, diese Länge ist etwa 10^7 Atomdurchmesser. Andererseits ist die maximale Bergeshöhe (vgl. Aufgabe 14.11.3) etwa $10^7\tilde{\lambda}$. Ist das Zufall oder Gesetz? Gilt auf anderen Planeten Entsprechendes?

●● 14.11.5 Der größte Planet

Wenn ein Himmelskörper nicht die in Aufgabe 14.5.1 und Aufgabe 14.5.2 berechnete Mindest-Fusionstemperatur T_{fus} hat, hält sein eventueller Wärmeverrat nicht lange vor (vgl. Aufgabe 14.11.4). Wer hält dann dem Gravitationsdruck die Waage? Wie groß wird der Himmelskörper bei gegebener Masse?

●● 14.11.6 Jupiter ist aus Fermi-Gas

Warum hat kondensierte Materie fast immer Dichten zwischen 1 und 20 g cm^{-3} ? Wie kann man diese Dichte allein durch atomare Konstanten ausdrücken? Wie hängen demnach Masse und Radius eines kleinen Himmelskörpers zusammen? Bei welchen Werten von Masse, Radius, Druck geht diese „normale“ Abhängigkeit in die von Aufgabe 14.11.5 über? Was ist die physikalische Ursache für diesen Übergang?

●● 14.11.7 Der leichteste Stern

Eine Gasmasse wird erst dann zum Stern, wenn in ihr Fusion stattfindet. Wieso? Wie müssen M und R (oder N und d , s. Aufgabe 11.2.25) des Sterns zusammenhängen, damit er die dazu nötige Minimaltemperatur hat? Eine weitere Bedingung ist, dass nicht der Fermi-, sondern der thermische Druck den Gravitationsdruck kompensiert. Warum? Wie groß ist also der leichteste Stern?

●●● 14.11.8 Chandrasekhar-Grenze

Für das Folgende brauchen wir den Virialsatz für relativistische Teilchen. Wiederholen Sie die Ableitung von Abschn. 1.5.9i. Was ändert sich daran? Bleibt $F_i = \dot{p}_i$? Bleibt $\sum p_i \dot{r}_i = 2E_{\text{kin}}$? Beachten Sie Abschn. 12.8.2. Welchen Wert hat die Gesamtenergie? Kann man relativistische Teilchen durch ein r^{-2} -Kraftfeld stabil zusammenhalten?

●● 14.11.9 Der schwerste Stern

Kann ein Stern so heiß werden, dass der Strahlungsdruck p_S den thermischen Druck p_T überholt? Vergleichen Sie unter diesen Umständen die kinetische Energie der Teilchen mit der Energie des Strahlungsfeldes, d. h. der Photonen. Kann das System stabil sein (Virialsatz)? Wie schwer sind also die größten stabilen Sterne? Welche atomistische Konstante erkennen Sie in dem Massenverhältnis des schwersten und des leichtesten Sterns wieder?

Laserphysik

■ Inhalt

15.1	Laserprozesse	823
15.2	Laserstrahlen	829
15.3	Laser, Typen und Eigenschaften	833
15.4	Kurzzeitleaser	839

▼ Einleitung

Das Licht der Laser, ihre **kohärenten Lichtstrahlen** sind schon in der heutigen Technik allgegenwärtig, Anwendungen reichen von der optischen Kommunikation über den heimischen CD-Spieler und das Laserskalpell des Chirurgen bis zum Laserschweißgerät der Materialbearbeitung. Die intensiven und stark gebündelten Strahlen werden mit dem Laser erzeugt, dessen erstes Exemplar 1960 von Theodore Maiman gebaut wurde.

Laserlicht erkennt man leicht an seinem „Funkeln“, das im Unterschied zu gewöhnlichem, inkohärentem Licht aus Glühlampen auftritt, und kaum jemand kann sich dieser faszinierenden Wirkung auf unsere Sinne entziehen. Das Funkeln wird als **Laserspeckel** bezeichnet und ist eine direkt wahrnehmbare Folge der Kohärenz und hohen Interferenzfähigkeit von Laserlicht.

15.1 Laserprozesse

Bevor wir uns den Prozessen zuwenden, die zum Entstehen von Laserlicht führen, wollen wir noch kurz der Frage nachgehen, wie es aus der Sicht der Quantenmechanik überhaupt zur Abstrahlung von Licht aus Atomen kommt. Der Leser kann diesen Absatz aber auch überspringen.

15.1.1 Wie strahlen die Atome?

Wir wissen aus der klassischen Physik, dass Strahlung durch beschleunigte Ladungen erzeugt wird, im einfachsten Fall durch einen schwingenden atomaren Dipol, ähnlich dem **Hertz-Oszillator** aus Abschn. 7.4.6, dessen Dipolmoment $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ das Produkt aus Elementarladung e und Abstand \mathbf{r} vom Ursprung ist. Nach den Regeln aus Abschn. 14.6.2 und Tabelle 14.8 berechnen wir das Dipolmoment eines stationären atomaren Zustandes mit der Zustandsfunktion $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, müssen aber feststellen, dass es immer verschwindet.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ ist nicht nur statisch, sondern auch symmetrisch zum Ursprung. Anders ausgedrückt sind atomare Zustandsfunktionen immer ungerade oder gerade Funktionen von \mathbf{r} , man



Arthur L. Schawlow (1921–1999)
Miterfinder des Lasers 1958; Nobelpreis-träger 1982

„Der Laser ist eine Lösung auf der Suche nach einer Anwendung“ (A.S. in den 60er Jahren). Auf dem Bild hält Arthur Schawlow eine Spielzeugpistole mit einem eingebauten frühen Rubin-Laser in der Hand. Auf Knopfdruck wurde ein Rubin-Laser-Impuls gezündet und durch die transparente Hülle des unversehrten äußeren Luftballons geschickt. Der stark absorbierende innere Luftballon zerplatzte beim Auftreffen des Laserblitzes, und durch den Knall wurde die Kamera ausgelöst, mit der dieses Bild aufgenommen wurde.

Heute würde niemand mehr behaupten, dass der Laser keine Anwendungen besäße. Im Gegenteil wird erwartet, dass mit Laserlicht im 21. Jahrhundert besonders wichtige technologische Fortschritte erzielt werden

sagt, sie besitzen eine positive oder negative **Parität**, je nachdem ob sie ihr Vorzeichen behalten oder wechseln, wenn alle Koordinaten am Ursprung gespiegelt werden ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$). Für solche Funktionen muss das Integral aber verschwinden (Aufgabe 15.1.1), mit dem man das Dipolmoment berechnet:

$$\mathbf{d} = e \int \psi(\mathbf{r}) \mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}) dV = e \int \mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 dV = 0.$$

Ein schwingendes Dipolmoment können wir andererseits sehr wohl erhalten, wenn wir von atomaren Zuständen ausgehen, die aus einer Mischung von Zuständen $a\psi_1 + b\psi_2$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$, mit verschiedener Parität bestehen. Dann berechnet man mit dem so genannten (Dipol-)Matrixelement

$$\mathbf{D}_{ij} = \int \psi_i \mathbf{r} \psi_j^* dV, \quad (15.1)$$

das zwischen Zuständen $\psi_{1,2}$ verschiedener Parität eben nicht verschwindet, das zeitabhängige Dipolmoment für stationäre Zustände ($\mathbf{D}_{11} = \mathbf{D}_{22} = 0$),

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= e \int \mathbf{r} |\psi|^2 dV = a^2 \mathbf{D}_{11} + b^2 \mathbf{D}_{22} + 2ab \mathbf{D}_{12} \sin[(\omega_2 - \omega_1)t] \\ &= 2ab \mathbf{D}_{12} \sin(\omega_{12}t), \end{aligned}$$

wobei $\omega_{21} = (\omega_2 - \omega_1) = (E_2 - E_1)/\hbar$ genau der atomaren Übergangsfrequenz entspricht. Eine genauere Betrachtung zeigt, dass die Koeffizienten a und b zeitabhängig sind. Es lohnt sich, zwei Grenzfälle zu betrachten.

- Wird ein starkes äußeres Lichtfeld mit der Amplitude E eingestrahlt, schwingt ein langsam zerfallendes Atom mit der so genannten **Rabi-Frequenz** $\Omega = D_{12} \cdot E/\hbar$ zwischen Grundzustand und angeregtem Zustand hin und her,

$$\psi(t) = \cos(\Omega t) \psi_1 + \sin(\Omega t) \psi_2.$$

Das äußere Lichtfeld induziert ein Dipolmoment, dessen Amplitude periodisch moduliert ist. Diese Näherung gilt, wenn die spontane Zerfallsrate klein ist gegen die Rabifrequenz, $\Gamma \ll \Omega$ (Aufgabe 15.1.3).

- Den oberen Zustand eines anfänglich angeregten Atoms ($\psi(t=0) = \psi_2$) können wir nach

$$\psi_2(t) = e^{-\Gamma t/2} \psi_2(t=0)$$

beschreiben. Die theoretische Berechnung der Rate Γ des **exponentiellen Zerfalls** wurde erst mit Hilfe der Quantenelektrodynamik möglich (s. Skizze S. 770). Sie erklärt befriedigend, wie die so genannten Vakuumschwankungen des elektromagnetischen Feldes durch „Wackeln“ an der Elektronenverteilung ein anfängliches Dipolmoment, eine anfängliche Mischung von Zuständen erzeugen, die dann den strahlenden Zerfall eines angeregten atomaren Zustandes verursacht. Die Zerfallskonstante hat den Wert

$$\Gamma = A = \frac{e^2 D_{12}^2 \omega^3}{3\pi \hbar \epsilon_0 c^3} \quad (15.2)$$

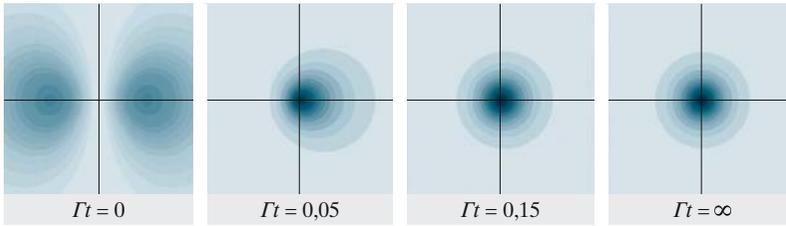


Abb. 15.1. Zu Beginn ($t = 0$) und am Ende ($t = \infty$) eines strahlenden Zerfalls besitzt das Atom eine symmetrische Ladungsverteilung. Im Beispiel wird ein p -Zustand gezeigt, der in einen s -Zustand übergeht. Dazwischen verursacht die Überlagerung der beiden Zustände eine Asymmetrie der Ladungsverteilung und ein Dipolmoment, das mit der Übergangsfrequenz schwingt

und ist identisch mit dem Einstein-A-Koeffizienten der spontanen Emission (s. auch (7.71), Aufgabe 15.1.2).

Aus den gerade definierten Matrixelementen lassen sich auch die **Auswahlregeln** aus Abschn. 14.6.2 und Tabelle 14.8, die Bohr schon empirisch für sein Atommodell angegeben hatte, theoretisch begründen.

15.1.2 Energieaustausch von Licht und Materie

Die Absorption und Emission von Licht durch Materie, zum Beispiel ein Gas von Atomen oder Molekülen, haben wir schon in Abschn. 11.2.3 als Grundlage des planckschen Strahlungsgesetzes kennen gelernt, das entscheidend zur Entwicklung der modernen mikroskopischen Physik und insbesondere der Quantenphysik beigetragen hat. Wenn sich ein Atom in einem energetisch tief liegenden Grundzustand befindet, kann es durch **stimulierte Absorption** von Licht (etwas salopp sprechen wir von einem absorbierten „Photon“) in einen angeregten Zustand überführt werden. Das Licht kann nur dann absorbiert werden, wenn der Abstand zwischen oberem und unterem Energieniveau gerade der Photonenergie entspricht, wenn die Resonanzbedingung erfüllt ist,

$$E = E_2 - E_1 = h\nu . \tag{15.3}$$

Das angeregte Atom strahlt die Anregungsenergie bei der gleichen Frequenz wieder ab, sein Anregungszustand „zerfällt“ durch die so genannte Resonanzfluoreszenz. Ein freies Atom strahlt nur durch spontane Emission; wenn es aber einem treibenden Lichtfeld mit der gleichen Frequenz ν ausgesetzt ist, dann wird es zu exakt synchronen Schwingungen angeregt und verstärkt das einfallende Lichtfeld. Dieser Prozess wird im Unterschied zum freien Zerfall als **stimulierte Emission** bezeichnet. In Abb. 15.2 haben wir diese Prozesse zusammengefasst.

Die Teilchenkonzentration n_0 des unangeregten oder Grundzustandes wird durch Absorption verringert und durch Emission aus dem angeregten Niveau erhöht:

$$\frac{d}{dt}n_0 = -\beta \cdot p \cdot n_0 + \beta \cdot p \cdot n^* + A \cdot n^* . \tag{15.4}$$

Der Einfachheit halber haben wir den Einstein-B-Koeffizienten so skaliert, dass wir statt der Energiedichte nun die Photonenzahl p verwenden können: Mit $p = \varrho/h\nu$ gilt in Anlehnung an (11.9) $B\varrho = \beta p$. Entsprechend wird die Population des angeregten Niveaus durch Absorption und

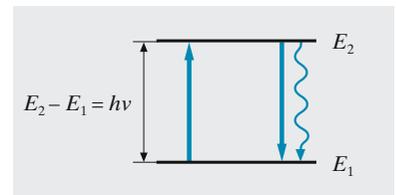


Abb. 15.2. Elementare Prozesse der Licht-Materie-Wechselwirkung. Absorption verringert die Teilchendichte im Grundzustand (E_1). Der angeregte Zustand zerfällt durch stimulierte und spontane Emission

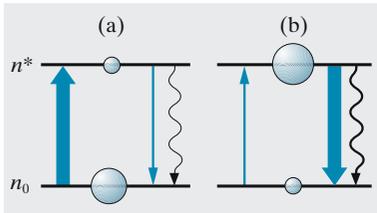


Abb. 15.3. (a) Wenn sich mehr Teilchen im Grundzustand als im angeregten Zustand befinden ($n_0 > n^*$), überwiegt die Absorption. (b) Verstärkung eines Lichtfeldes tritt auf, wenn die stimulierte Emission die Absorption überwiegt ($n^* > n_0$)

Emission verändert,

$$\frac{d}{dt}n^* = \beta \cdot p \cdot n_0 - \beta \cdot p \cdot n^* - A \cdot n^* . \quad (15.5)$$

Die Gesamtkonzentration der Teilchen N ist im Allgemeinen festgelegt, $N = n_0 + n^*$. Dann stellt man leicht fest, dass sich ohne äußeres Lichtfeld ($p = 0$) alle Teilchen im Grundzustand befinden müssen, $n_0 = N$ und $n^* = 0$.

15.1.3 Inversion und Verstärkung

Um die Laserprozesse zu verstehen, müssen wir die Wechselwirkung zwischen dem Lasermedium und dem Laserlichtfeld verstehen. Ob eine Materieprobe ein Lichtfeld eher absorbiert oder emittiert, hängt nach (15.4) und (15.5) zunächst davon ab, ob sich mehr Teilchen im angeregten oder im Grundzustand befinden. Die entscheidende Größe für das Absorptions- und Emissionsverhalten ist daher die **Besetzungszahldifferenz** zwischen Grund- und angeregtem Zustand.

$\Delta n = n^* - n_0$	Besetzungszahldifferenz
$\Delta n > 0$	Lichtfelder werden verstärkt
$\Delta n < 0$	Lichtfelder werden absorbiert.

Wenn die Besetzungszahldifferenz positiv ist, $\Delta n > 0$, dann ist der angeregte Zustand im Vergleich zum Grundzustand überbesetzt und es überwiegt die Emission. Ein solches Medium wird invertiert genannt, und diese Inversion ist die Voraussetzung zur **Verstärkung** eines einfallenden Lichtfeldes. Thermische Besetzungen entsprechen wegen $n^*/n_0 = \exp(-h\nu/kT) < 1$ immer einer negativen Besetzungszahldifferenz, sie können daher keine Inversion und keine Verstärkung liefern. Formal kann man Verstärkung nur erreichen, indem man eine **negative Temperatur** zulässt – ein klares Indiz, dass verstärkende Medien Nichtgleichgewichts-Charakter haben.

Wie in geeigneten Medien durch Energiezufuhr Inversion erzeugt wird, ist Thema von Abschn. 15.1.6. Dort werden wir sehen, dass wir dazu Systeme mit mehr als zwei Zuständen verwenden müssen.

Wir können aber nach (15.4) und (15.5) schon eine Ratengleichung für den Einfluss von Absorption und Emission auf die Inversion angeben,

$$\frac{d}{dt}\Delta n = -\beta \cdot p \cdot \Delta n - A \cdot (\Delta n - \Delta n_0) . \quad (15.6)$$

Hier haben wir $N = n_0 + n^* = -\Delta n_0$ definiert, um zu verdeutlichen, dass die Inversion in Abwesenheit eines äußeren Lichtfeldes ($p = 0$) genau diesen stationären Wert annimmt.

Diese Gleichung erlaubt sofort, den Einfluss eines Lichtfeldes auf die Inversion zu studieren. Im stationären Zustand ($d\Delta n/dt = 0$) gilt

$$\Delta n = \frac{A \cdot \Delta n_0}{A + \beta \cdot p} .$$

Ein äußeres Lichtfeld verringert danach die anfängliche Inversion Δn_0 , dreht aber ihr Vorzeichen niemals um. Dieser Befund ist sehr wichtig, denn die Verstärkungseigenschaften eines invertierten Mediums werden auch durch ein starkes Lichtfeld nicht zerstört!

15.1.4 Verstärkung und Verluste im Laser

Ein **Laser** ist nichts anderes als ein Verstärker von Lichtstrahlen, der selbst zur Erregung gelangt ist und als **Oszillator** arbeitet. Das Wort ist ein Akronym und leitet sich von der englischen Bezeichnung „*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*“ ab (Lichtverstärkung durch stimulierte Emission von Strahlung). Noch vor dem Laser wurde der **Maser** erfunden, der nach dem gleichen Prinzip jedoch bei Mikrowellen arbeitet. Deshalb wurde der Laser zunächst als **optischer Maser** bezeichnet.

Die Verstärkung, den Gewinn G des Laserlichtfeldes können wir schon angeben. Die Rate, mit der dem Lichtfeld, das durch den Laserresonator (s. Abschn. 15.2) definiert wird, Photonen zugeführt werden, beträgt

$$G = \beta \Delta n ,$$

denn jedes durch stimulierte Emission erzeugte Photon trägt gerade zur Verstärkung des Lichtfeldes bei. Jeder Oszillator gelangt genau dann zur Selbsterregung, wenn die Verstärkung die Verluste V überwiegt:

$$G > \Gamma = V + T . \tag{15.7}$$

Zur gesamten Verlustrate Γ tragen sowohl interne Verluste (V), wie z. B. Streuung, bei als auch die Transmission (T) zur Auskopplung von Licht für Anwendungen. Die Oszillation setzt ein, wenn die Verstärkung die Verluste überschreitet, und wird als **Laserschwelle** bezeichnet. Die Überwindung der Laserschwelle ist das Haupthindernis beim Bau von Laseroszillatoren und ist nur für bestimmte Systeme möglich. Die Suche nach immer besseren und vielfältigeren Lasersystemen wird daher noch lange ein Forschungsthema sein.

Die Differenz von Verstärkungs- und Verlustrate bestimmt die Rate, mit der sich die Photonenzahl dichte eines Laserlichtfeldes ändert:

$$\frac{d}{dt} p = (G - \Gamma) \cdot p = \beta \cdot \Delta n \cdot p - \Gamma \cdot p . \tag{15.8}$$

Wir fassen diese Gleichung mit (15.6) geschickterweise zu den **Laser-Ratengleichungen** zusammen. Dabei führen wir noch die Pumprate $R = A \Delta n_0$ ein, die dafür sorgen muss, dass die Inversion ($\Delta n_0 > 0$) aufrecht erhalten wird.

$$\frac{d}{dt} \Delta n = -\beta \cdot p \cdot \Delta n - A \cdot \Delta n + R \tag{15.9a}$$

$$\frac{d}{dt} p = \beta \cdot p \cdot \Delta n - \Gamma \cdot p \tag{15.9b}$$

Diese Gleichungen beschreiben sehr wichtige allgemeine Eigenschaften des Lasers, die wir noch kurz untersuchen wollen, bevor wir ausgewählte Lasersysteme vorstellen.

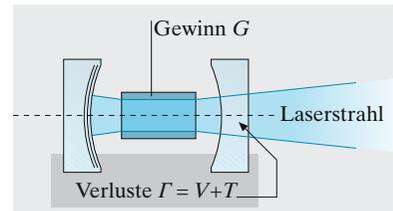


Abb. 15.4. Energieaustausch im Laseroszillator. Der Laser besteht aus dem Lasermedium und dem Lichtfeld, das hier durch einen Stehwellenresonator definiert wird. Die Verstärkung (Gewinn) wird im Lasermedium durch äußere Energiezufuhr erzeugt. Wenn der Gewinn die Verluste (intern und durch Transmission) überwiegt, kommt es zur Laseroszillation

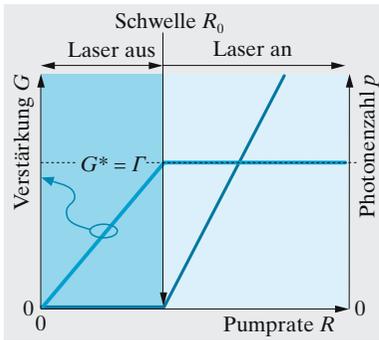


Abb. 15.5. Verstärkung und Photonenzahl (bzw. Laserintensität) im Laser. Wenn die Verstärkung G die Verlustrate Γ erreicht, setzt Lasertätigkeit ein. Oberhalb der Schwelle wird die Verstärkung durch stimulierte Emission auf den gesättigten Wert $G^* = \Gamma$ abgebaut

15.1.5 Laserschwelle und gesättigte Verstärkung

Die Laser-Ratengleichungen sind analytisch nicht allgemein lösbar, weil sie bilinear sind, d. h. sie hängen vom Produkt der Variablen p und Δn ab. Mithilfe der Computeralgebra kann man sich aber viele interessante Eigenschaften leicht durch ein kleines Programm zur Lösung dieser Gleichungen veranschaulichen (Aufgabe 15.1.3). Im stationären Zustand ($p, \Delta n = 0$) können wir aber wichtige Aussagen über den Laserbetrieb treffen. Wir unterscheiden dazu zwei Fälle:

- $p = 0$, der Laser befindet sich unterhalb der Laserschwelle. Dann bleibt nur (15.9a) übrig und bestimmt die Inversion bzw. Verstärkung nach

$$G = \beta \cdot \Delta n = \beta \cdot R/A < \Gamma.$$

Die Verstärkung G wächst linear mit der Pumprate R an, bis sie die Laserschwelle bei $G = \Gamma$ erreicht. Den Wert $G = \beta \cdot \Delta n$ bezeichnet man auch als **Kleinsignalverstärkung**. Wenn der Laser in Betrieb ist, wird die Verstärkung nämlich reduziert.

- $p > 0$, der Laser ist bereits in Betrieb. In diesem Fall wird die Inversion durch (15.9b) bestimmt, und sie legt die Verstärkung nach

$$G^* = \beta \cdot \Delta n = \Gamma$$

fest, die Verluste werden nun durch die Verstärkung genau kompensiert! Die Verstärkung ist oberhalb der Schwelle sogar konstant, weil die Rate der spontanen Emission mit der Feldstärke immer weiter zunimmt und die Inversion nach (15.9b) wieder abbaut. Man spricht im Laser von **gesättigter Verstärkung**, deshalb haben wir zur Unterscheidung von der Kleinsignalverstärkung G , die auch oberhalb der Schwelle weiter wächst, die Bezeichnung G^* gewählt.

Wir können nun die Laserschwelle bestimmen. Die minimale Pump-rate R_0 muss nämlich eine Inversion erzeugen, die größer ist als diejenige, die gerade zum Einsetzen der Verstärkung reicht:

$$R_0 = A\Delta n_0 \geq A\Delta n = A\Gamma/\beta. \quad (15.10)$$

Der Laser geht für $R > R_0$ in Betrieb, er springt an. Dann lässt sich aus (15.9a) auch die Photonenzahl p berechnen,

$$p = (R - R_0)/\Gamma = (G - \Gamma) \cdot (A/\beta). \quad (15.11)$$

Sie ist auch zur ausgekoppelten Laserintensität proportional, denn am teildurchlässigen Spiegel wird gerade die Photonenzahl $p_{\text{aus}} = T \cdot p$ ausgekoppelt.

15.1.6 Laserbetrieb mit drei und vier Niveaus

Um die Inversionsbedingung für den Laserbetrieb durch Pumpprozesse zu erfüllen, müssen wir mindestens einen Hilfszustand heranziehen, noch klarere Bedingungen erhalten wir mit einem Vier-Zustandssystem, das wir hier als Modell für einen Laser betrachten wollen (Abb. 15.6).

Durch Energiezufuhr (salopp spricht man von *Pumpen*, das durch Absorption von Licht, Elektronenstoß in einer Entladung oder andere Mechanismen erledigt wird) sorgt man dafür, dass das Lasermedium in einen angeregten Zustand versetzt wird. Der Pumpzustand zerfällt in den angeregten oberen Laserzustand. Dabei können strahlende und nichtstrahlende Prozesse eine Rolle spielen. Um Inversion zwischen dem oberen und unteren Laserzustand aufrecht zu erhalten, muss nun nur noch der untere Zustand schneller zerfallen als der obere, d. h. man kann ohne Rechnung die Bedingung

$$A_0 > A$$

für die Zerfallsraten aus diesen Zuständen formulieren. Das obere Laser-niveau muss wie ein Flaschenhals in dem kaskadenartigen Zerfall vom Pumpniveau zurück in den Grundzustand wirken.

Die Energiezufuhr durch den Pumpvorgang und die Laserprozesse sind in diesem System voneinander weitgehend unabhängig, sodass die vereinfachte Betrachtung der Laserprozesse mit nur zwei Zuständen wie in Abschn. 15.1.5 und Abb. 15.3 gerechtfertigt ist – der Pumpprozess hat keine andere Aufgabe, als die Inversion durch Energiezufuhr aufrecht zu erhalten. Allerdings kann man das Pumpniveau gleichzeitig als oberen Laserzustand verwenden und hat dann einen 3-Niveau-Laser realisiert.

15.2 Laserstrahlen

Jedem Beobachter fällt sofort die starke Bündelung des Laserlichts auf, deren Ursache wir hier nachgehen wollen. Zunächst stellen wir uns die Dipolantenne des Lasers als mikroskopisch kleine Dipolantennen vor. Ein einzelnes Atom strahlt mit einer antennenähnlichen Charakteristik ähnlich Abb. 7.109. Bei der stimulierten Emission wird durch das schon vorhandene Lichtfeld allen Dipolantennen gerade die richtige Phasenlage aufgezwungen, sodass durch konstruktive Interferenz ein stark gerichteter Strahl entsteht.

Meistens wird der Laserprozess durch die Laserspiegel unterstützt, die das Lichtfeld durch Vielfachreflexion verstärken. Der **optische** oder **Laserresonator** (s. Abschn. 15.2.2) selektiert einen ebenfalls stark gebündelten Lichtstrahl, der mit dem Lasermedium überlappen muss. Manche Lasermedien, zum Beispiel im Stickstoff-Laser, haben aber eine so große Verstärkung, dass sie sogar ohne Resonator auskommen.

15.2.1 Gaußstrahlen

Laserstrahlen gehorchen wie alle anderen elektromagnetischen Wellen den Maxwell-Gleichungen und damit der Wellengleichung (7.75). Sehr gut gebündelte Strahlen breiten sich nur in der Nähe einer Achse aus, und für diesen Fall kann man ausgezeichnete Näherungslösungen angeben. Wir beschränken uns darauf, geometrische Eigenschaften für den wichtigsten Fall des so genannten **gaußschen Grundmodes** (in Aufgabe 15.2.1 wird nachgerechnet) vorzustellen.

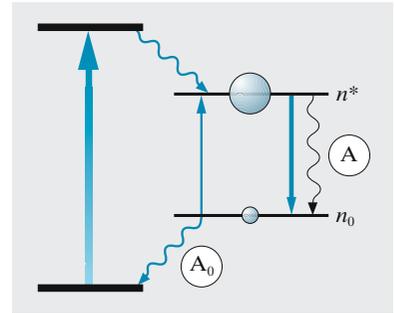


Abb. 15.6. Pumpprozess und Inversion im Lasersystem mit 4 Zuständen. Die beiden oberen Zustände können in einem 3-Niveau-Laser identisch sein

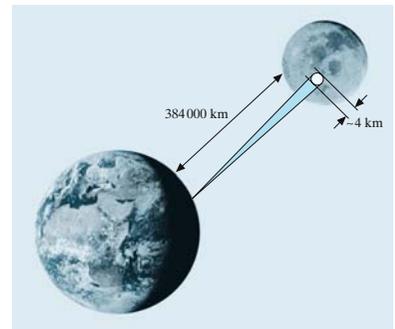


Abb. 15.7. Laserstrahlen können so gut gebündelt werden, dass sie auch nach der langen Laufstrecke zum Mond nur einen Lichtfleck mit ca. 4 km Durchmesser verursachen. Das an den von den Apollo-Missionen abgesetzten Reflektoren gespiegelte Licht kann genutzt werden, um den Abstand Erde–Mond durch Laufzeitmessungen mit wenigen cm Genauigkeit zu vermessen. Mit den Daten können wichtige Aspekte der Erdbewegung (Gezeiten, Erdrotation) sehr genau studiert werden

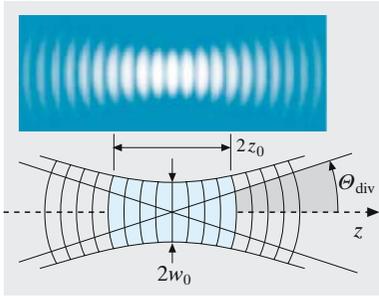


Abb. 15.8. Gaußscher Laserstrahl mit wichtigen Kenngrößen. Die Rayleigh-Zone ist hellblau gekennzeichnet. In ihrem Zentrum in Fokussnähe treten nahezu ebene Wellenfronten auf. Bei großen Abständen nähert sich der Lichtstrahl einem Ausschnitt aus einer Kugelwelle an. Im oberen Bildteil ist die Intensitätsverteilung in einer Gauß-Stehwelle veranschaulicht. Die Wellenlänge ist gegenüber optischen Verhältnissen extrem vergrößert worden

Der einfachste gaußsche Laserstrahl ist zylindrisch symmetrisch ($\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$) und soll sich entlang der z -Achse ausbreiten. Dann gilt für die Feldstärke als Funktion von ρ und z

$$E(\rho, z) = E_0 \frac{w_0 e^{(-\rho/w(z))^2}}{w(z)} e^{ik\rho^2/2R(z)} e^{i(kz - \eta(z))} \quad (15.12)$$

Der erste Faktor gibt nur eine allgemeine Amplitude E_0 an. Der zweite Faktor jedoch bestimmt mit $w(z)$ den Durchmesser und das Querschnittsprofil des Strahls entlang der z -Achse, der dritte den Krümmungsradius $R(z)$ der Wellenfronten. Der vierte Faktor lässt die Ähnlichkeit zur ebenen Welle ($\sim e^{ikz}$) erkennen, es tritt nur ein zusätzlicher Phasenfaktor auf, die so genannte Gouy-Phase $\eta(z)$, die wir hier nur der Vollständigkeit halber berücksichtigen.

An jeder Stelle der z -Achse zeigt der Strahl das Intensitätsprofil einer gaußschen Glockenkurve, deren Breite (definiert durch die Stellen, an denen die Intensität auf das $1/e^2$ -fache des Maximalwertes abgefallen ist) gerade durch $w(z)$ angegeben wird. Die Strahlausbreitung ist symmetrisch zu $z = 0$ und durchläuft dort einen Brennpunkt mit der Strahltaille w_0 (Abb. 15.8). Entlang der z -Achse wird die Ausbreitungsform durch den Rayleigh-Parameter z_0 bestimmt, der zwei Grenzgebiete voneinander trennt und der mit der Strahltaille w_0 und der Wellenlänge λ eindeutig verknüpft ist (s. Tabelle 15.1).

Wir betrachten zwei Grenzfälle

- Für $z \ll z_0$ ändert sich der Durchmesser fast nicht, er bleibt nahe beim kleinsten Durchmesser der Strahltaille $w(z) \sim w_0$, während der Radius $R(z)$ sehr groß wird und in Fokussnähe fast ebene Wellenfronten erzeugt.
- Für $z \gg z_0$ dagegen gilt zunächst $w(z) \sim (w_0/z_0)z = \Theta_{div} \cdot z$. Wir sehen, dass ein enger Zusammenhang zwischen Strahldurchmesser, Rayleigh-Länge und Strahldivergenz besteht. Erst das anschließende Beispiel zum Helium-Neon-Laser macht die ungewöhnlichen geometrischen Verhältnisse klar, die die starke Bündelung des Laserlichtes erklären. Der Radius der Wellenfronten geht bei großen Abständen in $R(z) \sim z_0^2/z$ über und zeigt kugelwellenartige Ausbreitung ($\sim 1/z$). In Abb. 15.8 sind diese geometrischen Überlegungen zusammengefasst.

Tabelle 15.1. Parameter von gaußschen Laserstrahlen

Parameter	Formel
Strahldurchmesser	$w(z) = w_0 [1 + (z/z_0)^2]^{1/2}$
Strahltaille	$w_0^2 = \lambda z_0 / \pi$
Divergenz	$\Theta_{div} = w_0 / z_0$
Radius der Wellenfront	$R(z) = z [1 + (z_0/z)^2]$
Gouy-Phase	$\eta(z) = \arctan(z/z_0)$

× Beispiel . . .

Typische Helium-Neon-Laser (Abschn. 15.3.1) haben Baulängen von 30 cm und das Laserrohr hat ca. 1 mm Innendurchmesser. Für eine Strahltaille von $w_0 = 0,25$ mm können wir für die rote Wellenlänge bei $\lambda = 0,633 \mu\text{m}$ nach Tabelle 15.1 den Wert $z_0 = 0,3$ m berechnen. Dann fällt die Divergenz $\Theta_{div} = w_0/z_0 = 0,8$ mrad nicht mehr als einen Öffnungswinkel von ca. $1/20$ Grad! Selbst nach einem Kilometer Laufstrecke hat sich dieser Laserstrahl auf wenig mehr als 1 m Durchmesser aufgeweitet!

Das transversale Intensitätsprofil der Laserstrahlen entspricht der gaußschen Glockenkurve, deren Form in Abb. 15.9 oben links vorgestellt

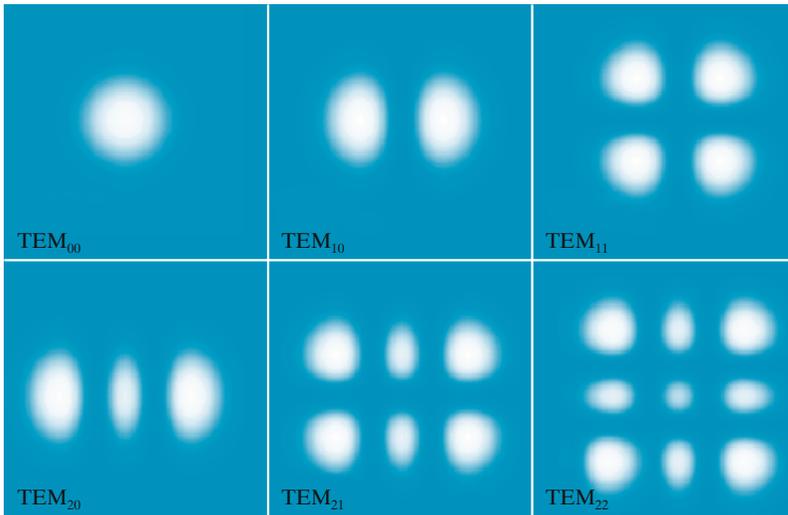


Abb. 15.9. Gaußsche Laserstrahlen oder TEM_{mn}-Moden: Transversale Grundformen von Laserstrahlen. TEM = Transversaler Elektrischer und Magnetischer Mode mit Indizes (m, n). Die Indizes geben die Anzahl der Knotenebenen in x- bzw. y-Richtung an. In der Praxis wird fast ausschließlich der TEM₀₀-Mode verwendet

ist. Darüber hinaus kommen auch komplizierte Strukturen vor, die so genannten TEM_{mn}-Moden, die höheren Lösungen der Wellengleichung entsprechen. In realen Lasern sind sie in den meisten Fällen unerwünscht. Der Grundmode wird auch als TEM₀₀-Mode bezeichnet. Die Bezeichnung TEM weist daraufhin, dass in diesem elektromagnetischen Feld sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen. TEM-Moden sind charakteristisch für die Ausbreitung im freien Raum. In Hohlleitern für Mikrowellen oder optischen Fasern treten TE- und TM-Moden mit unterschiedlichen Eigenschaften auf.

15.2.2 Optische Resonatoren

Die Konstruktion eines geeigneten optischen Resonators ist für den Laserbau sehr wichtig, denn das Erreichen der Laserschwelle hängt entscheidend davon ab, dass das Verstärkungsvolumen optimal genutzt wird. Wenn einmal die Form des Laserstrahls festgelegt ist, dann kann man sich anschaulich leicht vorstellen, dass ein Resonatorspiegel genau den Wellenfronten des Gaußstrahls aus Abb. 15.8 entsprechen muss und dabei ein Stehwellenfeld erzeugt.

Optische Resonatoren sind im Prinzip nichts anderes als Fabry-Perot-Interferometer (s. Abschn. 10.1.13). Die Verlustrate Γ , die wir in (15.9) zur Beschreibung der Dynamik des Laserlichtfeldes verwendet hatten, ist nichts anderes als die Dämpfungsrage dieses Fabry-Perot-Resonators.

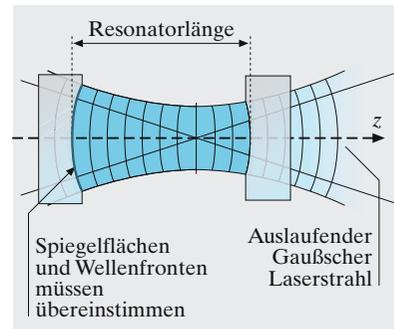


Abb. 15.10. Optischer Resonator und Gaußmode. Die Spiegel müssen so ausgesucht werden, dass ihre Oberflächen gerade den gekrümmten Wellenfronten des Laserstrahls entsprechen

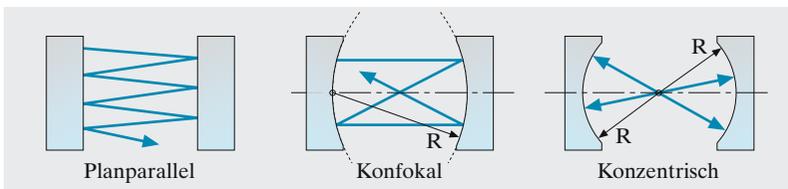


Abb. 15.11. Symmetrische Zwei-Spiegel-Resonatoren im Bild der Strahlenoptik. Der planparallele Resonator ist gerade noch stabil, nämlich nur für genau senkrechten Einfall. Im konfokalen Resonator (Spiegelabstand = Krümmungsradius R) ist der Lichtweg schon nach 2 Umläufen geschlossen. Der konzentrische Resonator (Spiegelabstand = $2 \times$ Krümmungsradius R) ist wie der planparallele gerade noch stabil und daher sehr justierempfindlich. Die meisten stabilen Laserresonatoren werden zwischen planparallelem und konfokalem Resonatortyp entworfen

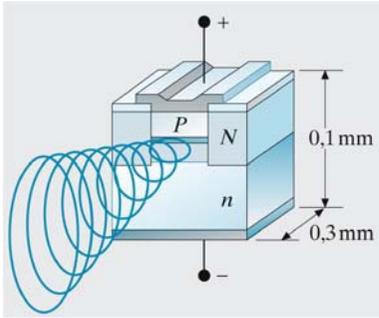


Abb. 15.12. Laserdiode. Der Resonator einer Laserdiode wird durch Spalten aus einem größeren Substrat gewonnen, die Spaltflächen formen die Endspiegel des Stehwellenresonators. Die aktive *pn*-Zone (s. Abschn. 17.4.2) und die Schichtenfolge werden mit den Methoden der Mikroelektronik hergestellt und sind nur wenige μm dick. Auch die Resonatorlängen betragen nur Bruchteile eines Millimeters

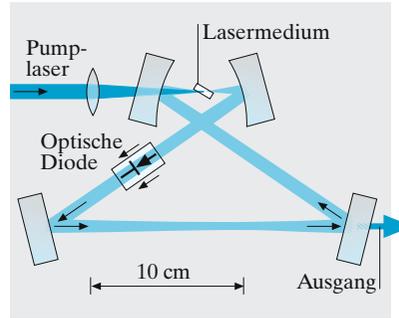


Abb. 15.13. Ringresonator. Das Lasermedium befindet sich im gemeinsamen Fokus von Pump-laser, der für die Energiezufuhr sorgt, und Ringresonator. Im übrigen Lichtweg können optische Elemente zur Kontrolle des Laserfeldes untergebracht werden. Zum Beispiel sorgt eine optische Diode dafür, dass das Laserlicht nur in einer Richtung umläuft

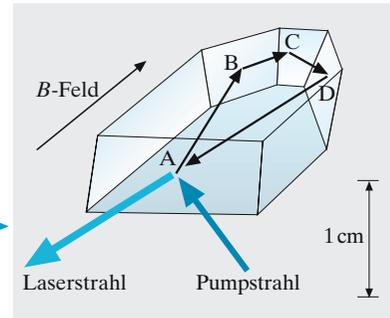


Abb. 15.14. Monolithisch integrierter Laserkristall („MISER“). Die Spiegel dieses Ringresonators werden durch Totalreflexion an den polierten Kristallflächen realisiert. Bei C wird der Strahl an der oberen Facette reflektiert. Ein Magnetfeld sorgt für Ein-Richtungsbetrieb

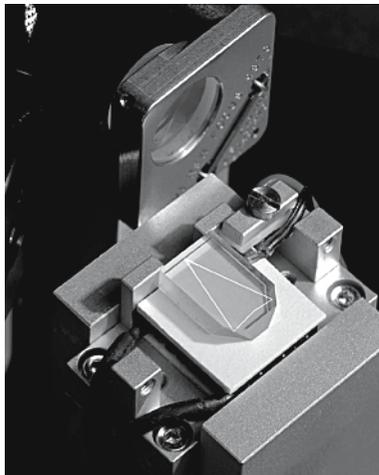


Abb. 15.15. Miser (von Innolight) im Betrieb. Der Strahl des Lasers ist im Resonator durch parasitäre Streuung und Fluoreszenz gut zu erkennen. Dieser Laserkristall ist sogar aus verschiedenen Materialien zusammen gesetzt, um z. B. durch elektro-optische Kontrolle der Resonatorlänge die Abstimmung zu erleichtern

Nach (15.10) ist nämlich die Laserschwelle umso niedriger je geringer diese Verlustrate ist.

Die Resonatortypen, die für den Betrieb von Lasern verwendet werden, sind sehr zahlreich und sehr verschieden. In Abb. 15.12–14 sind einige Beispiele gezeigt, die einen guten Eindruck von der Vielfalt der Resonatorkonzepte geben. In allen Fällen sorgt die Spiegelgeometrie dafür, dass ein geschlossener Lichtweg entsteht.

Man spricht auch von **stabilen Resonatoren**. Die Intensität des Lichtfeldes wird darin durch konstruktive Interferenz erhöht und verstärkt die Rate der stimulierten Emission. Man unterscheidet **Stehwellen-** und **Ringresonatoren**. Während der Stehwellenresonator (Abb. 15.10, 15.12, 15.17) die wenigsten optischen Elemente wie Spiegel benötigt und leichter die Schwelle erreicht, nutzen Ringresonatoren mit ihrer laufenden Welle das Verstärkungsvolumen besser aus: In Stehwellenresonatoren wird nämlich das Verstärkungspotential in den Knoten der Stehwelle gar nicht genutzt. Dieser Effekt wird räumliches **Lochbrennen** genannt (engl. *spatial hole burning*), weil die Verstärkungsdichte des Muster der Stehwelle abbildet. Während bei den meisten Lasertypen nur eine geringe Verstärkung zur Verfügung steht, gibt es auch Systeme mit außergewöhnlich hoher Verstärkung. Dann kann es technisch geraten sein, auch **instabile Resonatoren** zu verwenden, die das Lichtfeld gewissermaßen automatisch auskoppeln.

15.2.3 Laserleistung

Wenn man einen Laserresonator vollständig schließt, wird die Schwelle besonders leicht überschritten. Wenn man die Transmission zur Auskoppelung zu groß macht, wird er erst gar nicht anspringen. Wo liegt die optimale Wahl der Spiegeltransmission für einen Laserresonator?

Nach (15.11) werden aus einem Laser mit der Rate $p_{\text{aus}} = T \cdot p$ Photonen ausgekoppelt,

$$p_{\text{aus}} = T \cdot \frac{(R - R_0)}{V + T} = T \cdot \frac{(G - V - T)}{V + T} \cdot \frac{A}{\beta}. \quad (15.13)$$

In Abb. 15.16 haben wir die Laser-Ausgangsleistung als Funktion der Transmissionsrate T (normiert auf die inneren Verluste V) dargestellt. Wie erwartet steigt die Ausgangsleistung eines Lasers zunächst an, durchläuft ein Maximum und verschwindet, wenn die Transmission so groß wird, dass die Laserschwelle unterschritten wird.

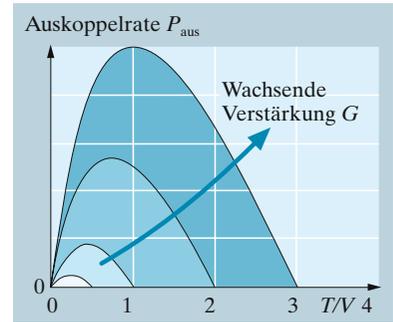


Abb. 15.16. Die Ausgangsleistung eines Lasers ist proportional zur Auskoppelrate von Photonen p_{aus} . Sie wächst mit der Verstärkung G und hängt von der Transmissionsrate T ab (15.13)

15.3 Laser, Typen und Eigenschaften

Mit Laseroszillatoren werden kohärente Lichtfelder erzeugt, die für zahlreiche Anwendungen immer wichtiger werden. Kohärentes Licht lässt sich wie in Abschn. 15.2 besprochen sehr gut bündeln und damit auch über große Entfernungen transportieren. Kohärente Lichtstrahlen sind ferner die Voraussetzung, um einen scharfen Fokus nach dem Rayleigh-Kriterium aus Abschn. 10.1.5 zu erzeugen, Laserlicht lässt sich also so gut wie theoretisch möglich, wir sprechen vom „**Beugungslimit**“, fokussieren.

Obwohl Laserlicht bei so ziemlich allen Wellenlängen im Experiment und in der Anwendung gesucht wird, gibt es kein einheitliches, allgemeines Prinzip für den Laserbau, geschweige denn den perfekten, durchstimmbaren Laser. In diesem Abschnitt stellen wir ausgewählte und wichtige Lasertypen vor.

15.3.1 Helium-Neon-Laser und Gaslaser

Der Helium-Neon-Laser mit der roten Wellenlänge von 633 nm ist der vielleicht bekannteste Laser. Er wurde 1961 als erster **Dauerstrich-** oder **cw-Laser** (von engl. continuous wave) der Welt betrieben und zählt zur Klasse der Gaslaser. Er war über lange Zeit der Modellaser schlechthin, um allgemeine Lasereigenschaften zu studieren. In seinem eher komplizierten Gasgemisch wird die Laserstrahlung von den Neonatomen erzeugt, das Helium hilft lediglich bei der effizienten Anregung. Der Helium-Neon-Laser hat in der Vergangenheit auch in Anwendungen eine große Rolle

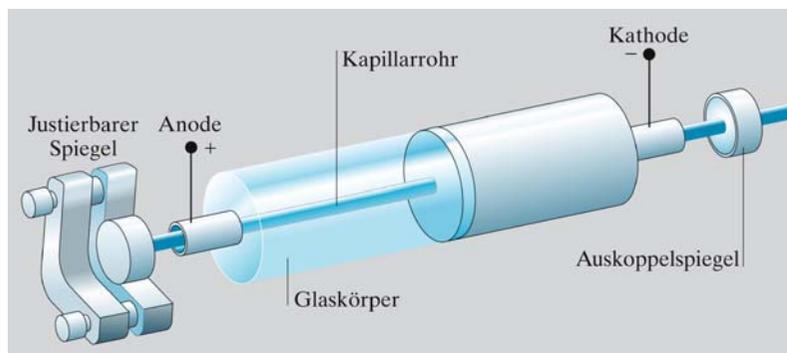


Abb. 15.17. Helium-Neon-Laser, schematisch. Inversion und Verstärkung werden durch eine Entladung erzeugt, die auf der Achse der Laserröhre brennt. Die Kathode ist als großer Becher ausgebildet, um Abtragung durch die Entladung zu verhindern. In dem engen Kapillarrohr sorgen Wandstöße für die Entleerung des unteren Laserzustandes

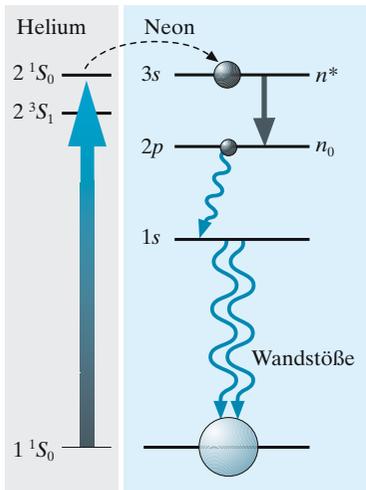


Abb. 15.18. Inversion im Helium-Neon-Laser. Durch Elektronenstoß werden Heliumatome in einen langlebigen Zustand befördert, aus welchem die Anregungsenergie durch Stöße auf die Neonatome übertragen wird. Lasertätigkeit ist zwischen den angeregten $3s$ - und $2p$ -Neonzuständen möglich, am bekanntesten ist die rote 633 nm -Linie. Es gibt aber noch weitere Laserlinien zwischen 543 (grün) und 3392 nm (infrarot). Die Zustandsbezeichnungen entsprechen der spektroskopischen Konvention. Die Kreise auf den Neonzuständen deuten die Population in diesen Zuständen an

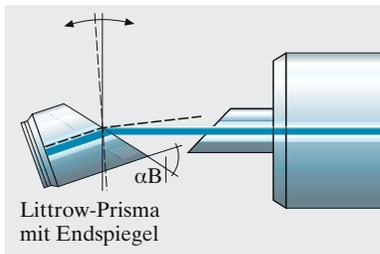


Abb. 15.19. Wellenlängenselektion im Helium-Neon-Laser mit einem Littrow-Prisma. Die Wellenlänge kann durch Kippen der Prisma-Spiegel-Kombination gewählt werden, weil blaue Wellenlängen stärker gebrochen werden als rote. Der Lichtstrahl tritt durch die Glasflächen unter dem Brewsterwinkel ein (s. Abschn. 10.2.4), um die Verluste im Resonator möglichst gering zu halten

gespielt, wird jedoch mehr und mehr durch kompaktere und preiswertere rote **Diodenlaser** (s. Abschn. 15.3.4) ersetzt.

In einem Helium-Neon-Gasgemisch (He:Ne 10:1, 10 mbar Helium) brennt eine Entladung, die die Heliumatome durch Elektronenstoß in einen langlebigen Zustand anregt. Deren Anregungsenergie wird durch Stöße sehr effizient auf die Neonatome übertragen und erzeugt dort eine Inversion zwischen hochliegenden Zuständen (s. Abb. 15.18). Auf denselben Übergängen, die vom Leuchten der Reklame-Neonröhren her bekannt sind, wird durch stimulierte Emission Laserbetrieb möglich. Zu den technischen Besonderheiten des Helium-Neon-Lasers gehört sein Betrieb in einer engen Kapillarröhre ($\varnothing \sim 1\text{ mm}$), die die Neonatome durch einen Stoß mit der Wand in den Grundzustand zurück befördert und für den Laserprozess wieder verfügbar macht. Die Inversionsbedingung und damit die Lasertätigkeit könnten nicht aufrecht erhalten werden, wenn sich die Neonatome im unteren, metastabilen Laserniveau $1s$ in (Abb. 15.18) ansammelten. Der Helium-Neon-Laser entspricht weitgehend dem idealisierten **Vier-Niveau-Laser** (s. Abb. 15.6).

Laserstrahlung kann auf allen Übergängen eines Atoms emittiert werden, auf denen Inversion erzeugt werden kann. Im Helium-Neon-Laser stehen dafür neben der bekanntesten roten Wellenlängen bei 633 nm noch zahlreiche weitere Laserlinien zwischen 543 nm im grünen Spektralbereich und 3392 nm im Infraroten zur Verfügung. Meistens haben diese Linien gemeinsame Zustände (z. B. $3s$ im Neon-Atom, Abb. 15.18) und es schwingt nur die Linie mit der größten Verstärkung an. Um auch andere Linien über die Laserschwelle zu bringen, muss man im Laserresonator geeignete wellenlängenselektive Filter einsetzen. Zum Beispiel wird dieses Ziel im Helium-Neon-Laser mit einem so genannten Littrow-Prisma (Abb. 15.19) erreicht: Der Laser ist immer nur für eine einzige Wellenlänge korrekt justiert.

Die Ausgangsleistung des Helium-Neon-Lasers ist relativ gering, sie beträgt selten mehr als 25 mW . Weil der Anregungsprozess nur bei relativ geringen Drücken effizient ist, kann man die Verstärkung nur durch Verlängerung der Laserröhre erhöhen. Dann dominiert aber schon ab ca. $0,5\text{ m}$ Länge die meistens unerwünschte Laserlinie bei 3392 nm , die die mit Abstand höchste Verstärkung besitzt, und zwar auch ohne externe Resonatorspiegel. Ähnliche technische Detailprobleme treten bei fast allen Lasertypen auf.

Neben dem Helium-Neon-Laser sind mehrere andere Gaslaser in Gebrauch. In Gaslasern wird die Verstärkung auf atomaren oder molekularen Übergängen erzielt, sie sind immer **Festfrequenzlaser**. Das Gas muss aber auch unter technisch sinnvollen Bedingungen herstellbar sein, und Edelgase sowie Molekülgase wie CO oder CO_2 sind schon deshalb bevorzugte Lasermedien, denn sie liegen schon bei Raumtemperatur gasförmig vor.

Zu den technisch bedeutendsten Lasersystemen zählen Argonionen-Laser, CO_2 -Laser und Excimer-Laser. Im **Argonionen-Laser** findet die Lasertätigkeit sogar im zweifach ionisierten Argonatom statt. Der Argonlaser ist einer der leistungsstärksten sichtbaren Laser (die wichtigsten Laserlinien sind $\lambda = 514\text{ nm}$, 488 nm , $334\text{--}364\text{ nm}$.), aber dieser Vorteil wird um einen hohen Preis erkauft, weil im Laserprozess sehr viel Energie

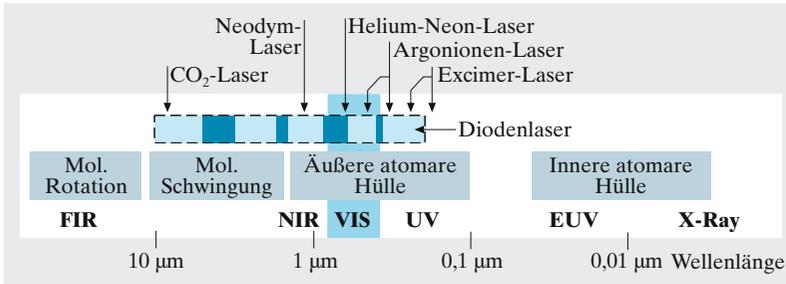


Abb. 15.20. Wellenlängen und Anregungstyp für ausgewählte atomare bzw. molekulare Gaslaser. Zum Vergleich sind die heute verfügbaren Wellenlängenbereiche für Diodenlaser dunkelblau markiert. (FIR: Fern-Infrarot; NIR: Nah-Infrarot; VIS: Sichtbares Licht (engl. *visible*); UV: Ultraviolett; EUV: Extrem-Ultraviolett; X-Ray (engl.): Röntgenlicht)

als Abwärme freigesetzt wird. Die vom technischen Standpunkt außerordentlich wichtige **Konversionseffizienz** (das Verhältnis von elektrischer Anschlussleistung zur Laser-Ausgangsleistung) ist mit ca. 10^{-3} gering. Ausgangsleistungen von 10 W erfordern daher mit 10 kW und mehr einen hohen Energieverbrauch.

Der **CO₂-Laser** emittiert infrarotes Laserlicht ($\lambda = 9,2\text{--}10,8 \mu\text{m}$) und gehört zu den leistungsstärksten Lasertypen überhaupt. Seine Laserstrahlung wird von Schwingungsübergängen des CO₂-Moleküls getragen. Moleküllaser können viel mehr Laserlinien emittieren, weil außer den elektronischen Anregungen auch Schwingungs- und Rotationsübergänge zur Verfügung stehen, sie sind aber nicht kontinuierlich durchstimbar. Das Spektrum der Laserlinien eines Moleküllasers in Abb. 15.21 ähnelt dessen Rotations-Schwingungsspektrum (s. Abschn. 16.4.3). Der CO₂-Laser liefert Ausgangsleistungen bis zu 100 kW bei einer Konversionseffizienz bis zu 10% und wird daher in großen Zahlen für die **Materialbearbeitung** (Schneiden, Schweißen u. A.) eingesetzt. Laserlicht lässt sich in der Materialbearbeitung sehr gut verwenden, weil das kohärente Lichtfeld nach dem Rayleigh-Kriterium (s. Abschn. 10.1.5) die Energie berührungslos und mit hoher Präzision auf einen sehr kleinen Brennfleck zu fokussieren erlaubt.

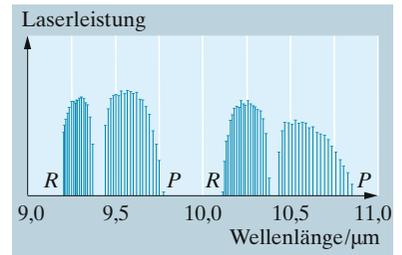
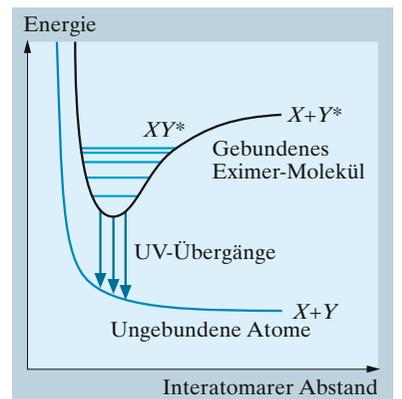


Abb. 15.21. Linienspektrum eines CO₂-Lasers. Es handelt sich um die Rotationsbanden (s. Abschn. 16.4.3) eines Vibrationsübergangs bei 9,4 bzw. 10,4 μm

Immer größere Bedeutung gewinnen die so genannten **Excimer-Laser**, die aus ganz ungewöhnlichen Molekülen bestehen, nämlich Edelgas-halogeniden (z. B. ArF), die überhaupt nur im angeregten Zustand ArF* existieren (Abb. 15.22)! Die Herstellung der Inversion ist also gar nicht schwierig, weil das Molekül nach dem Übergang sofort zerfällt. Diese Laser werden im **Pulsbetrieb** verwendet, denn nach jedem Laserblitz muss das in einer Entladung erzeugte Excimer-Gas ausgetauscht werden. Mit Excimerlasern lassen sich sehr kurze UV-Wellenlängen mit guter Ausbeute (~ 1 Joule/Puls) herstellen.



Excimer-Laser spielen eine wachsende Rolle in der **Mikrolithographie** (s. Abschn. 10.1.5), deren Auflösungsvermögen durch die verwendete Wellenlänge begrenzt wird. Dabei treten immer mehr technologische Probleme auf, denn so ziemlich alle bekannten optischen Materialien verlieren spätestens bei ~ 200 nm Wellenlänge ihre Transparenz (Abb. 15.23).

Abb. 15.22. Energieschema mit Laserübergängen im Excimer-Molekül

15.3.2 Neodym-Laser und Festkörperlaser

Die Atome aus der Gruppe der **Seltenen Erden** (Ordnungszahlen 58 (Cer) bis 71 (Lutetium)) lassen sich in bestimmten Kristallen bei großer

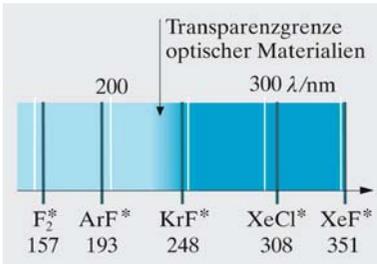


Abb. 15.23. Wellenlängen von Excimer-Lasern. Unterhalb von etwa 200 nm verlieren alle optischen Materialien ihre Transparenz

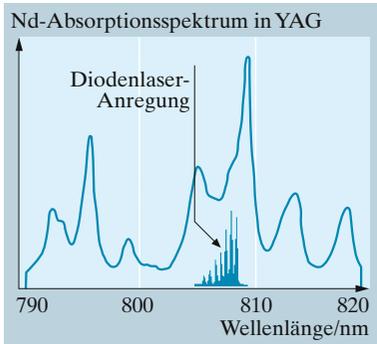


Abb. 15.24. Absorptionsspektrum des Neodym-Ions in YAG und Emissionsspektrum einer 808-nm-Hochleistungs-Laserdiode

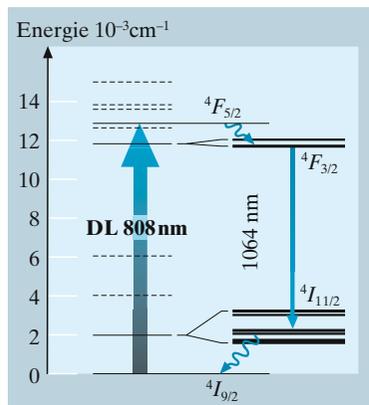


Abb. 15.25. Atomare Energiezustände des Neodym-Ions (Nd^{3+}) und Vier-Niveau-Laserprozess. Die Zustände sind mit ihren spektroskopischen Bezeichnungen gezeigt. Die kristalline Umgebung der Ionen im Festkörper verursacht die Feinstruktur der Zustände

Verdünnung (**Dotierung**) wie ein gefrorenes Gas unabhängiger Atome betrachten. Bei diesen Elementen werden relativ tief innen liegende Energiezustände, die so genannte $4f$ -Schale (s. Abschn. 16.1.2), sukzessive mit Elektronen gefüllt, während sich die äußere Elektronenhülle, die die Bindungszustände zum Beispiel in einem Kristallgitter bestimmt, nur geringfügig ändert. Die $4f$ -Schalen werden deshalb durch den Wirtskristall nur geringfügig gestört und besitzen ähnlich wie ein freies Atom scharfe Energiezustände, die sich hervorragend zur Erzeugung von festfrequenter Laserstrahlung eignen. Die Verstärkung kann große Werte erreichen, weil sich diese Eigenschaft auch noch bei 1000fach höherer Dichte als in typischen Gaslasern erhält.

Das wichtigste Beispiel für diese **Festkörper-Laser** ist der **Neodym-Laser**. Er kann in verschiedenen Kristallen realisiert werden, von denen Yttrium-Aluminium-Granat (YAG) mit der Laser-Wellenlänge $1,064 \mu\text{m}$ (Abb. 15.25) der bekannteste ist. Die Wirtsmaterialien müssen hervorragende optische Qualität besitzen und sollen außerdem über eine hohe Wärmeleitfähigkeit verfügen, um die beim Laserprozess immer entstehende Abwärme schnell abführen zu können – ansonsten werden die Ausbreitungseigenschaften der gaußschen Laserstrahlen schnell empfindlich gestört. Und selbst bei den üblichen geringen Dotierungen von nur 1% ist die Dichte dieses „gefrorenen Gases“ noch immer viel höher als in einer Gasentladung, sodass man sehr hohe Ausgangsleistungen erwarten kann.

Die Inversion wird im Neodym-Laser durch optische Anregung erzeugt, traditionell mit Anregungslampen, heute mehr und mehr mit effizienten Hochleistungslaserdioden, die im idealen Fenster bei 808 nm sehr effizient absorbiert werden (Abb. 15.24). Das Energieschema ist in Abb. 15.25 vorgestellt und zeigt den Neodym-Laser als ein sehr gutes Beispiel für einen Vier-Niveau-Laser. Die extrem schnellen Übergänge vom Pumpniveau (${}^4F_{5/2}$) in den oberen ${}^4F_{3/2}$ -Laserzustand sowie die Entvölkerung des unteren ${}^4I_{11/2}$ -Laserzustandes werden hier durch Anregung von Gitterschwingungen (Phononen, Abschn. 17.2.4) verursacht. In Abb. 15.26 sind zwei Beispiele für die Geometrie von Neodym-Festkörpern gezeigt. Auch der „Miser“ aus Abb. 15.14 und Abb. 15.15 ist ein Beispiel für einen Festkörperlaser. Die monolithische Form verleiht diesem Laser besondere mechanische und damit Frequenzstabilität.

Ein anderer bedeutender Laser ist der **Erbium-Laser**, der ganz analog zum Neodym-Laser arbeitet, er wird mit Diodenlasern bei der Wellenlänge 980 nm gepumpt und emittiert bei $2,9 \mu\text{m}$ und vor allem bei $1,55 \mu\text{m}$. Diese Wellenlänge ist für die **optische** (Langstrecken-) **Kommunikation** außerordentlich wichtig, weil das spektrale Minimum der Absorption von Glasfaserkabeln (s. Abschn. 9.1.4), die das Licht mit extrem geringen Verlusten transportieren, gerade bei $1,55 \mu\text{m}$ liegt. Die Erbium-Atome werden im **EDFA** (engl. *Erbium Doped Fibre Amplifier*) direkt in den Kern einer Glasfaser eingebracht. Der Pumpstrahl läuft in einem zweiten Mantel, der nicht zylindersymmetrisch ist, um zu vermeiden, dass die Pumpstrahlung nur um den Kern herumläuft statt in ihm absorbiert zu werden (Abb. 15.27). Aus dem Verstärker wird ein **Faserlaser**, indem als Endspiegel so genannte **Bragg-Spiegel** aufgebracht werden. Dazu wird der Faser eine periodische Brechungsindex-Modulation aufgeprägt, die

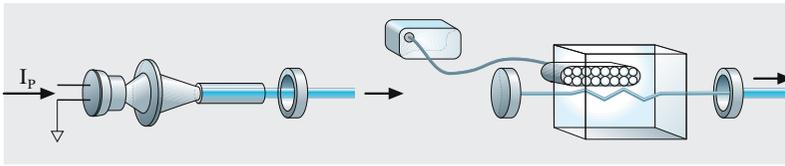


Abb. 15.26. Pumpsysteme für Festkörperlaser. Im einfachsten Fall wird der Pumpstrahl der Laserdiode kollinear zur Resonatorachse eingestrahlt (*Linkes Bild*: ein Endspiegel ist direkt auf den Kristall aufgebracht). Um eine höhere Ausgangsleistung zu erzielen, wird das Licht mehrerer Diodenlaser absorbiert. Dazu kann zum Beispiel in der so genannten „Scheiben-Geometrie“ der Laserstrahl unter Totalreflexion in einem Laserkristall geführt werden. Das Pumplicht kann dann transversal zugeführt werden (*rechtes Bild*)

eine hohe Reflektivität nach der **Bragg-Bedingung** unter senkrechtem Einfall (s. Abschn. 17.2.2) erzeugt. Faserlaser (Abb. 15.29) sind generell vorteilhaft zur Erzeugung von Laserstrahlung, weil die Verstärkungsdichte im Faserkern über lange Strecken sehr hoch ist.

15.3.3 Diodenlaser

Diodenlaser (Abb. 15.31) gehören heute zu den meist verwendeten Laserlichtquellen. Sie können mit den Methoden der Mikroelektronik in großen Mengen hergestellt werden (Abb. 15.12), sind entsprechend preiswert und bieten vor allem eine unschlagbar hohe Konversionseffizienz bis über 50%. Mit Silizium, dem Standardmaterial der Mikroelektronik, kann man zwar sehr leistungsfähige Photodioden, aber leider keine Halbleiterlaser bauen. Silizium besitzt nämlich im Gegensatz zu GaAs, dem wichtigsten Material für die optische Halbleiter nur eine indirekte Bandlücke (Abb. 17.55), während für die optische Emission eine **direkte Bandlücke** erforderlich ist (s. Abschn. 17.4).

Die Größe der Bandlücke ist eine Eigenschaft des Halbleitermaterials, die auch schon zu den verschiedenen Farben der Elektrolumineszenzdioden oder **LEDs** (s. Abschn. 17.4.3) führt. Derzeit sind Halbleitermaterialien mit bis zu 4 Komponenten (z. B. InPGaAs) in Gebrauch, die heute – allerdings mit großen Lücken, s. Abb. 15.20 – Wellenlängenbereiche von blauen Wellenlängen bei 0,4 μm bis über 4 μm im Infraroten erschließen.

Inversion kann man im Diodenlaser erstaunlicherweise direkt durch Injektion von Ladungsträgern, Elektronen und Löchern (s. Abschn. 17.4)

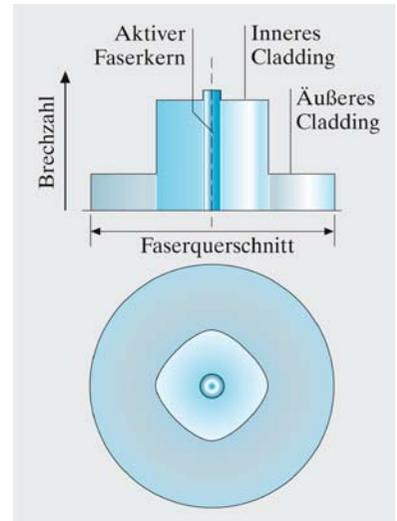


Abb. 15.27. Querschnitt durch einen Faserlaser. Das innere Cladding ist deformiert, um alle Pumpstrahlen durch den absorbierenden Kern, der die Dotierung enthält, zu lenken

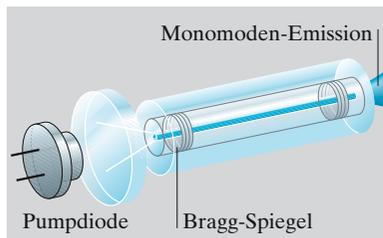


Abb. 15.28. Schematischer Aufbau eines Faserlasers mit Diodenpumpquelle und Bragg-Spiegel. Die Faserlänge kann viele Meter betragen und lässt sich aufwickeln

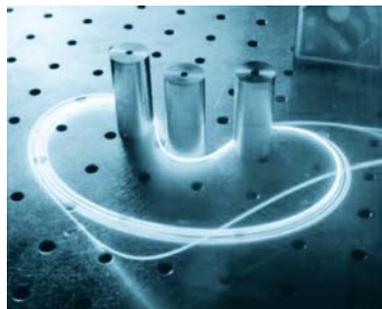
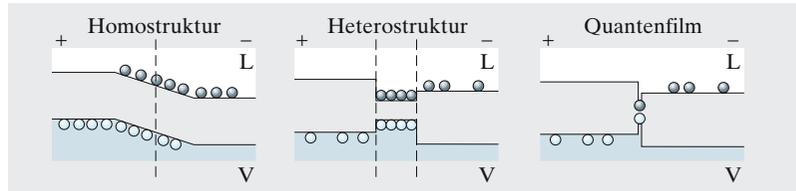


Abb. 15.29. Faserlaser. Die nierenförmige Anordnung verbessert die Absorption des Pumplichts im Faserkern. Institut für Angewandte Optik, Universität Jena (mit freundlicher Genehmigung)

Abb. 15.30. Vorwärtsbetrieb von pn -Übergängen im optischen Halbleiter. Im Bereich des Übergangs treffen Elektronen (im Leitungsband L) und Löcher (im Valenzband V) aufeinander und können unter Emission von Licht rekombinieren. Um ausreichende Verstärkung zu erzielen, müssen die Bandkanten durch die Materialzusammensetzung geeignet geformt werden. Sehr enge Heterostrukturen werden zum Quantenfilm, weil sich die Elektronen und Löcher wie Teilchen in einem Potentialtopf verhalten (s. Abschn. 13.7)



in einen pn -Übergang erzielen. Löcher sind positiv geladene, unbesetzte Elektronenzustände und können im Übergangsbereich mit einem Elektron unter Emission eines Photons „rekombinieren“.

Die Laserleistung zeigt ein Verhalten, das mit der einfachen Theorie aus Abschn. 15.3.2 sehr gut zu verstehen ist. Die Schwellströme liegen für typische Laserdioden bei einigen 10 mA. Hohe Ausgangsleistungen über 100 mW können mit einem einzelnen Streifen einer Laserdiode nicht erzielt werden, weil die interne Erwärmung die Verstärkung wieder reduziert und im „roll-over“-Bereich die Leistung nicht weiter ansteigt (Abb. 15.32). Durch Kombination mehrerer Laserdiodenstreifen können große Ausgangsleistungen von mehreren 10 W erzielt werden, allerdings auf Kosten der Strahlqualität, die nun ein oft kompliziertes Interferenzmuster zeigt. **Hochleistungs-Laserdioden** eignen sich wegen der hohen Konversionseffizienz andererseits ausgezeichnet als intensive Pumplichtquellen, zum Beispiel für die Festkörperlaser des vorhergehenden Abschnitts, sie werden zum Beispiel zum transversalen Pumpen in der Scheibengeometrie aus Abb. 15.26 eingesetzt.

Diodenlaser haben sich zahlreiche Anwendungen erobert, sie dienen mit roten Wellenlängen und batteriebetrieben als Laserpointer, sind das Herz jeder Lese- oder Schreibvorrichtung für CD-ROM-Speicher und sorgen dafür, dass Laserdrucker mit höchster Auflösung schreiben. Laserdioden stehen wohl noch immer am Anfang ihrer Entwicklung.

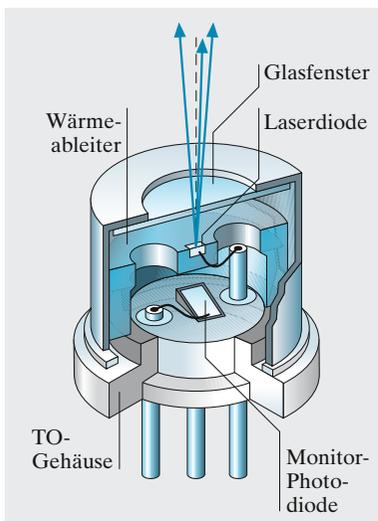


Abb. 15.31. Typische Bauform einer Laserdiode. Der winzige Laserchip mit der Resonatorform aus Abb. 15.18 strahlt das Licht mit großer Divergenz ab. Der Strahl der Laserdioden muss daher immer kollimiert werden

15.3.4 Durchstimmbare Laser

Der Wunsch jedes Laseranwenders ist ein Knopf, an welchem sich die Laserwellenlänge wie die Frequenz an einem elektronischen Funktionsgenerator einstellen lässt. Innerhalb bestimmter Wellenlängenbereiche gibt es tatsächlich Lasermaterialien, die diesen Vorstellungen recht nahe kommen. Die bekanntesten Beispiele sind der **Farbstofflaser** und der **Titan-Saphir-Laser**. Sie haben spektral voneinander wohl getrennte Absorptions- und Emissionslinien. Man kann Inversion erzeugen, und sie emittieren bei optischer Anregung ein sehr breites und kontinuierliches Spektrum, das grundsätzlich bei allen vorkommenden Farben auch zur Verstärkung beitragen kann (Abb. 15.33).

In einem durchstimmbaren Laser muss die erwünschte Frequenz durch geeignete optische Elemente im Resonator selektiert werden, andernfalls oszilliert der Laser immer bei der Wellenlänge mit der höchsten Verstärkung oder auch gleichzeitig bei mehreren Wellenlängen. Ein Beispiel hatten wir für den Helium-Neon-Laser schon in Abb. 15.19 vorgestellt. In der Praxis sind dazu im Allgemeinen mehrere Filter mit wachsendem

Feinheitsgrad notwendig. Der Titan-Saphir-Laser beispielsweise emittiert Licht zwischen 650 und 1 100 nm und kann fast im ganzen Bereich auch als Laser betrieben werden. Varianten des achtförmigen Resonators aus Abb. 15.13 werden bevorzugt für durchstimmbare Laser verwendet. In seinen langen Armen propagiert ein gut gebündelter Laserstrahl, der durch optische Elemente nur geringfügig gestört wird.

Ein konzeptionell interessanter Laser ist der so genannte Freielektronen-Laser (FEL), der im Prinzip große Durchstimmbarkeit in nahezu beliebigen Wellenlängenbereichen verheißt. In einem FEL wird ein Elektronenstrahl durch ein periodisch alternierendes Magnetfeld (Abb. 15.34) in transversale Schwingungen versetzt und gibt dabei Synchrotronstrahlung ab (Abschn. 11.3.2). Wenn sich die Beiträge der einzelnen Elektronen phasenrichtig addieren, kann man kohärentes Licht erzeugen, wie es von einem Laser erwartet wird.

Die räumliche Oszillationsperiode der Elektronen wird durch die Geometrie des Magnetfelds (im so genannten **Undulator**) bestimmt, die Oszillationsfrequenz dann nur noch durch die Geschwindigkeit des Elektronenstrahls. Um in den interessanten kurzwelligigen Bereich zu gelangen, sind kurze Undulatorperioden und hohe Elektronenenergien erforderlich. Im Jahr 2000 wurde am DESY-Labor in Hamburg erstmals Laserstrahlung bei etwa 100 nm erzeugt.

15.4 Kurzzeitleaser

Die Periodendauer einer Lichtschwingung bei optischen Frequenzen ($5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 500 \text{ THz}$ bei $\lambda = 600 \text{ nm}$ wegen $\lambda \nu = c$) beträgt nicht mehr als 2 fs oder $2 \cdot 10^{-15} \text{ s}$. Wie kurz diese Zeit ist, kann man mit menschlichen Maßstäben kaum ermessen, sie ist wohl ebenso schwierig wie das geschätzte Alter des Universums zu erfassen, das etwa 10^{18} s beträgt und sozusagen die andere, lange Seite der Zeit auslotet. Erstaunlicherweise sind Laser aber ein fast perfektes Instrument, um dynamische Prozesse auf der Femtosekunden-Zeitskala wie mit einem Stroboskop zu untersuchen.

Wie wir schon in Abschn. 15.2 erfahren haben, wird die Verstärkung im stationären Betrieb gesättigt und begrenzt natürlich auch die erzielbare Laserleistung. Man kann aber die Laserstrahlung zunächst unterdrücken, um mehr Verstärkung für höhere Ausgangsleistung aufzubauen. Diese Situation betrachten wir kurz unter dem Stichwort **Güteschaltung**, bei der Laserpulse auf der Nanosekundenskala und mit hoher Energie erzeugt werden. Ein anderer Typ von kurzen Laserimpulsen kommt in der so genannten **Modenkopplung** durch die Überlagerung einer großen Anzahl von Laserschwingungen zustande, die aus einer periodischen Reihe extrem kurzer Laserpulse entsteht.

15.4.1 Güteschaltung

Der Neodym-Laser aus Abschn. 15.3.2 ist ein gutes Beispiel für einen Laser, mit dem Impulse mit sehr großer Intensität erzeugt werden können. In einem Lasermedium kann nämlich die Anregungsenergie der Inversion ge-

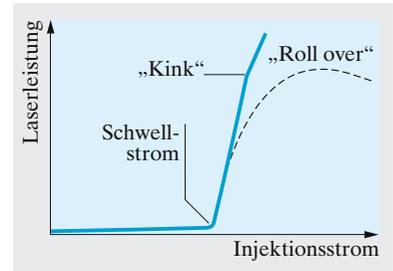


Abb. 15.32. Kennlinie einer Laserdiode. Das Verhalten entspricht der Erwartung nach Abb. 15.5. Details der Kennlinie zeigen Veränderungen im Betrieb der Diode an, zum Beispiel das Anschwingen eines unerwünschten Lasermodes („Kink“) oder Abnahme der Verstärkung durch zu starke Erwärmung („rollover“)

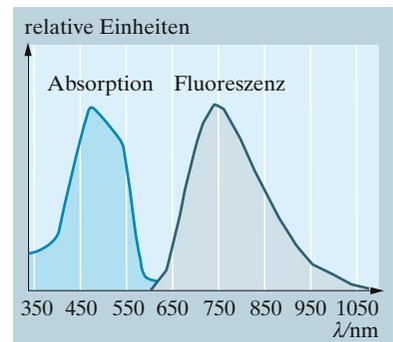


Abb. 15.33. Absorptions- und Emissionsspektrum eines Titan-Saphir-Kristalls. Der Titan-Saphir-Laser läuft fast im ganzen Emissionsbereich

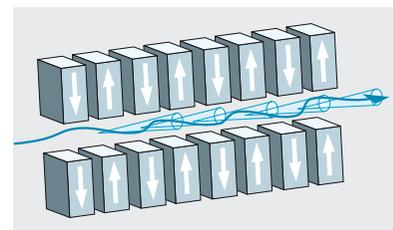


Abb. 15.34. Ein Elektronenstrahl wird im periodischen Magnetfeld eines Undulators zu Schwingungen angeregt. Wenn sich die Strahlungsfelder überlagern, kommt es zu stimulierter Emission eines Freielektronen-Lasers (vgl. Abb. 11.38)

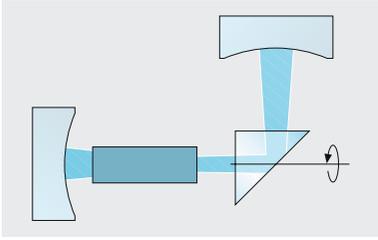


Abb. 15.35. Ein einfacher Güteschalter. Der Laser blitzt nur dann auf, wenn das Rotationsprisma gerade die richtige Stellung hat

speichert werden, wenn die Lebensdauer des oberen Laserzustandes nicht zu kurz ist. Im Neodym-Laser zerfällt der obere Zustand nach ca. $240 \mu\text{s}$, so lange kann man also auch mit einem Dauerstrichlaser Energie in das Medium pumpen, wenn man gleichzeitig die Laseroszillation unterdrückt. Dazu wird ein so genannter Güteschalter verwendet, der den Gütefaktor des Laserresonators stark reduziert (s. Abb. 15.35). Man baut dadurch für kurze Zeit eine Verstärkung auf, die die gesättigte Verstärkung des Dauerstrichbetriebes (s. Abschn. 15.2) weit übersteigt. Wenn nun der Güteschalter geöffnet wird, dann führt diese große Verstärkung kurzzeitig zur Emission eines Riesenimpulses. Diese Laserdynamik lässt sich übrigens auf dem Computer nach (15.9) leicht modellieren (s. Aufgabe 15.1.3). Mit der Güteschaltung (engl. *Q-Switching*) können Laserimpulse mit mehr als 1 J Energieinhalt und typisch 1–10 ns Länge erzeugt werden.

15.4.2 Modenkopplung

Wie kann es zur Emission extrem kurzer Laserimpulse im Femtosekundenbereich kommen? Dazu betrachten wir zunächst einen Modelllaser mit 8 möglichen, aufeinander folgenden Schwingungen (Abb. 15.37).

In der obersten Bildreihe sind nur zwei der möglichen Schwingungen angeregt. Wir kennen das Phänomen der Schwebungen, das sich hier als eine Amplitudenmodulation äußert, bereits aus Abschn. 4.4. Das Lichtfeld ist auch im Resonator intensitätsmoduliert, denn der ausgekoppelte Strahl ist nur der transmittierte Anteil. Die Periode der Schwebung entspricht gerade der inversen Differenzfrequenz der Laserschwingungen, und für die gilt bei der Resonatorlänge l

$$T = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{2l}{c} \tag{15.14}$$

Mit $\Delta\nu = c/2l$ wird auch der vom Fabry-Perot-Interferometer bekannte Modenabstand bezeichnet (s. Abschn. 9.3.3). Modengekoppelte Laser werden üblicherweise mit 80 MHz–6 GHz Repetitionsrate betrieben.

Wenn wir alle acht Schwingungen mit gleicher Amplitude und mit genau definierter Phasenbeziehung versehen anregen, dann ergibt sich die Pulsform aus der zweiten Bildreihe. Die einzelnen Wellen überlagern sich ganz ähnlich wie beim optischen Gitter, nur findet die Überlagerung hier in der Zeit und nicht am Ort statt. Weil alle Resonatorschwingungen einen festen Frequenzabstand besitzen, können wir die gesamte elektrische Feldstärke als **Fourierreihe** (s. S. 146) schreiben,

$$E(t) = e^{-i(\omega - N\Delta\omega/2)t} \sum_{n=1}^N a_n e^{-in\Delta\omega t} \tag{15.15}$$

Es ist bekannt, dass solche Fourierreihen ein genau mit der Periode T aus (15.14) periodisches Verhalten zeigen, und diese Periode entspricht genau der Umlaufzeit des Laserimpulses im Resonator. Die komplexen Koeffizienten a_n bezeichnen die Amplituden und Phasen der einzelnen Moden oder Resonatorschwingungen. Der Laser läuft bei der Mittenfrequenz ω .

In der dritten Bildreihe haben wir die Amplituden zwar gleich groß gewählt, ihre Phasen aber zufällig zwischen 0 und 2π . Dann bleibt zwar

www.

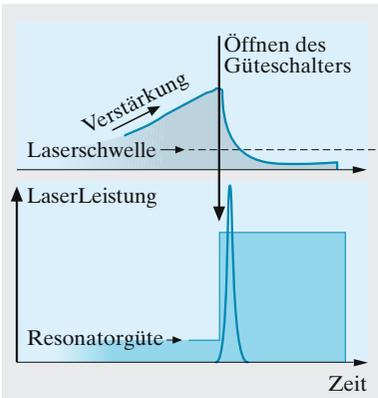


Abb. 15.36. Riesenimpulserzeugung durch Güteschaltung. Die Verstärkung wird weit über die Schwellverstärkung aufgebaut. Die Öffnung des Güteschalters erhöht schlagartig die Resonatorgüte und zündet den Laser. Die gespeicherte Energie wird in einem kurzen, sehr intensiven Laserimpuls abgebaut

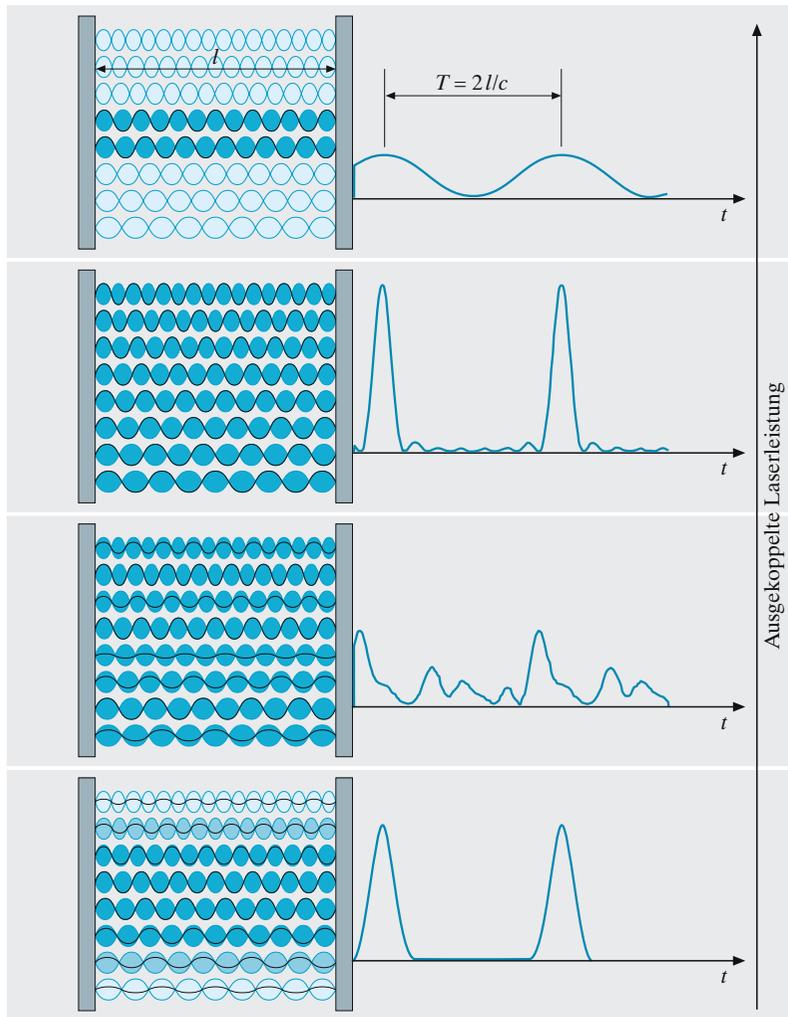


Abb. 15.37. Modenkopplung am Beispiel von 8 Resonatormoden. Erläuterungen s. Text. Die jeweils ausgekoppelte Laserleistung ist als Funktion der Zeit dargestellt. Die Anregungsstärke der Moden ist durch die Intensität der Blaufärbung dargestellt

[www.j](#)

die Periodizität erhalten, der Amplitudenverlauf schwankt aber in einer einzelnen Periode zufällig. Für die Erzeugung kurzer Pulse sind also genau definierte Phasenbeziehungen zwischen den Einzelwellen notwendig!

Die unterste Bildreihe zeigt, wie man durch geeignete Wahl der Amplituden der einzelnen Beiträge auch die unerwünschten (und auch vom Gitter bekannten, s. Abschn. 10.1.6) Nebenmaxima zwischen den Impulsen beseitigen und zu einer nahezu glatten Pulsform gelangen kann.

Um die Modenkopplung (damit ist vor allem die Phasenkopplung gemeint) im Laserresonator zu erzwingen, sind mehrere Methoden gebräuchlich. Schon intuitiv kann man sich vorstellen, dass es darauf ankommt, im Resonator genau mit der Umlauffrequenz des Impulses ein geeignetes, verlustarmes „Tor“ für den umlaufenden Lichtimpuls zu öffnen. Besonders erfolgreich ist in jüngerer Zeit die so genannte **Kerr-**

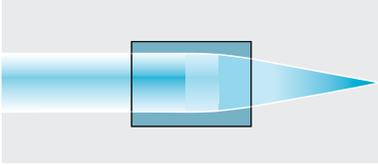


Abb. 15.38. Selbstfokussierung mit einer Kerr-Linse. Der Brechungsindex wird proportional zur Lichtintensität verändert und verursacht bei glockenförmigem Laserprofil Linsenwirkung

Linsen-Modenkopplung geworden, mit deren Hilfe sich der Laserimpuls ein solches Tor selber verschafft.

Der **optische Kerr-Effekt** (s. auch Abschn. 10.2.10) bezeichnet die Brechzahländerung eines optischen Materials aufgrund der Wechselwirkung mit dem eingestrahlenen Lichtfeld,

$$n = n_0 + n_2 \cdot I .$$

Es handelt sich um einen nichtlinearen optischen Effekt, der in einem glockenförmigen Laserprofil in geeigneten optischen Materialien Selbstfokussierung (oder -defokussierung, je nach dem Vorzeichen des Koeffizienten n_2) verursacht und als **Kerr-Linse** wirkt (Abb. 15.38). Interessanterweise – und für den Femtosekundenlaser sehr wichtig – wirkt sich die Brechzahländerung praktisch instantan aus. Wenn also die Linsenwirkung, die nur bei genügend hohe Laserintensitäten auftritt, für die Laserjustierung und damit für den Laserbetrieb unbedingt notwendig ist, kann ein solcher Laser stabilen Betrieb überhaupt nur im Pulsmodus erreichen!

Die Spitzenleistung eines Pulses ist bei gegebener Gesamtenergie umso höher, je kürzer der Puls ist. Damit nun genügend kurze Pulse entstehen, müssen Resonatorschwingungen aus einem hinreichend großen Frequenzbereich zur Überlagerung kommen, und diese Möglichkeit bieten gerade Lasermedien mit spektral sehr breitem Verstärkungsprofil, am günstigsten derzeit der Titan-Saphir-Laser (s. Abschn. 15.3.4). Ein gaußscher Puls mit

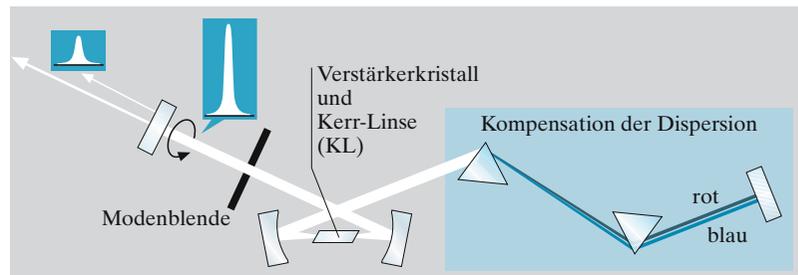
$$E(t) = E_0 e^{-i\omega_0 t} e^{-2 \ln 2(t/\tau_1)^2}$$

besitzt gerade die Intensitäts-Halbwertsbreite τ_1 mit $|E(t = \tau_1/2)|^2 = |E_0|^2/2$. Das **Amplitudenspektrum** $\mathcal{E}(\omega)$ eines einzelnen Pulses wird durch seine **Fouriertransformierte** berechnet,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\omega) &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2 \ln 2(t/\tau_1)^2} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \frac{E_0 \cdot \tau_1}{2\sqrt{\ln 2}} e^{-(\omega - \omega_0^2)\tau_1^2/8 \ln 2} , \end{aligned}$$

wenn bei sehr kurzen Pulsen der Pulsabstand $T/2 \rightarrow \infty$ genommen wird. Man findet wieder eine gaußförmige Verteilung, diesmal nur im Frequenzbereich. Zwischen den Intensitäts-Halbwertsbreiten für Impulslänge τ_1

Abb. 15.39. Aufbau eines einfachen Femtosekundenlasers. Die Kerr-Linse wird im Titan-Saphir-Verstärkerkristall automatisch mitgeliefert. Zur Unterstützung der Kerr-Linsen-Modenkopplung kann man an geeigneter Stelle eine Modenblende einfügen. Um die kurze Pulsform zu erhalten, müssen dispersive Eigenschaften des Laserresonators kompensiert werden. Dazu dient die gezeigte Prismenanordnung, die für rote und blaue Anteile der Laserpulse justierbare, unterschiedlich lange Laufstrecken hervorruft. Der Pump laserstrahl wurde weggelassen



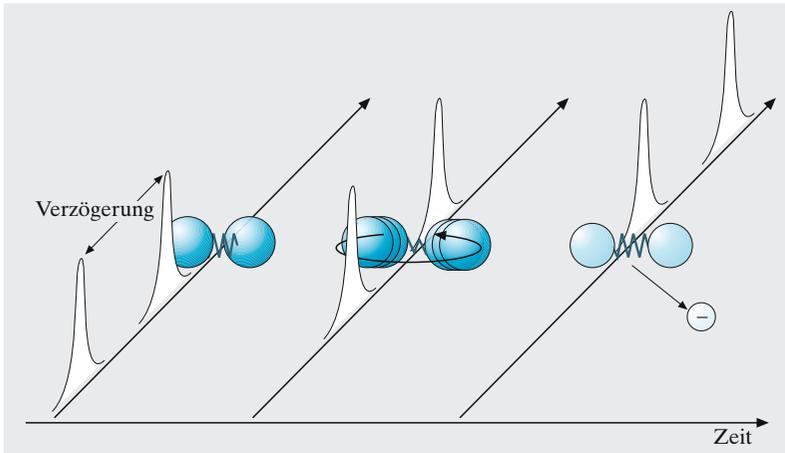


Abb. 15.40. Femtosekunden-Stroboskopie an einem einfachen zweiatomigen Molekül. Der erste Laserpuls versetzt das Molekül in Schwingungen, der zweite löst nach einer fs-Verzögerungszeit ein Elektron ab und hinterlässt ein ionisiertes Molekül. Die Ionisationswahrscheinlichkeit ist besonders groß, wenn sich die Atome am nächsten kommen. Daher erwartet man, dass sich der Ionenstrom mit der Verzögerungszeit periodisch ändert. Die Verzögerungszeit lässt sich durch Laufzeitvariation einstellen

und Bandbreite $\Delta\omega_1$ können wir das Pulslängen-Bandbreite-Produkt formulieren:

$$\Delta\omega_1 \cdot \tau_1 = 4 \ln 2 = 2,773 .$$

Es ist nicht sehr überraschend, dass die Pulse umso kürzer werden, je mehr Resonatorschwingungen man überlagern kann. Interessant sind aber die konkreten Pulslängen, die durch verschiedene Lasertypen möglich werden.

× Beispiel...

Wie kurz werden Laserimpulse?

Wir nehmen uns zwei wichtige Grenzfälle vor: Der Neodym-Glaslaser besitzt bei der Wellenlänge $\lambda = 1\,054\text{ nm}$ eine Verstärkungsbandbreite $\Delta\lambda = 30\text{ nm}$ oder $\Delta\omega/2\pi = 8\text{ THz}$, der Titan-Saphir-Laser ($\Delta\lambda = 400\text{ nm}$ bei 850 nm Mittenfrequenz) bietet sogar volle 100 THz ! Nach dem Pulslängen-Bandbreite-Produkt berechnen wir daraus Pulslängen von 55 fs bzw. $2,6\text{ fs}$. Die kürzesten im Experiment erzielten Pulslängen betragen $3\text{--}4\text{ fs}$.

Um die aller kürzesten Pulse zu erzielen, muss man aus den Originalpulsen der Laser durch nichtlineare Prozesse weitere Verkürzungen erzeugen.

15.4.3 Das Femtosekunden-Stroboskop

Die extrem kurzen Laserimpulse erlauben es den Experimentatoren seit kurzem, entsprechend schnelle Zeitabläufe im Zeitbereich zu studieren (Abb. 15.40). Mit einem Femtosekundenlaser lässt sich beispielsweise wie mit einem Femtosekunden-Stroboskop die Molekülbewegung beobachten, denn typische molekulare Schwingungsperioden betragen einige 100 fs bis einige ps (Abb. 15.41, s. auch Abschn. 16.4).

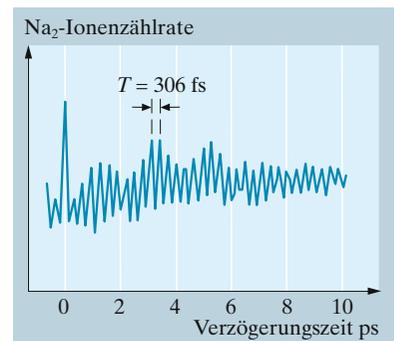
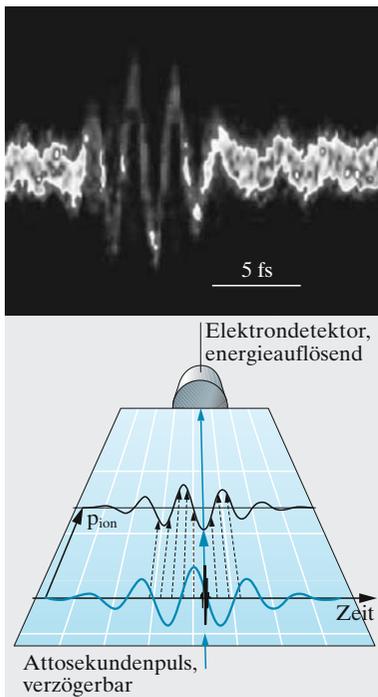


Abb. 15.41. Ionisationsstrom des Na_2 -Moleküls als Funktion der Verzögerung im Femtosekunden-Stroboskop. Schema des Experiments in Abb. 15.40

15.4.4 Höchstleistungslaser

Die extrem kurzen Laserpulse sind auch mit extremen Spitzenleistungen der Laserintensität verbunden. Ein gewöhnlicher Laserstrahl hat bei 10 fs Pulsdauer, 80 MHz Repetitionsrate und 1 W mittlerer Leistung bereits eine Spitzenleistung von 1 MW! Die Energie des Einzelpulses beträgt dabei nur 12,5 nJ, aber die Energie einzelner Pulse lässt sich durch geeignete Verstärker auf 1 J anheben. Mit Kurzzeitalasern kann man also unvorstellbare Leistungen im Tera- und Petawatt-Bereich erzielen, wenn auch nur für ebenso unvorstellbar kurze Zeiten. In diesem Leistungsbereich treten übrigens Feldstärken auf, die weit über denen liegen, denen typische atomare Hüllenelektronen ausgesetzt sind.

Um zu derart hohen Leistungen zu gelangen, müssen die Pulse während des Verstärkungsprozesses aber zunächst künstlich verlängert werden, man würde sonst Verstärkermaterialien durch die extreme Leistungsdichte zerstören. Nach der Verstärkung werden die Pulse einfach wieder komprimiert und stehen dann mit ihrer extremen Leistung zur Verfügung.



Direkte Beobachtung des elektrischen Feldes eines Femtosekundenpulses. Eine farbige Version des Messsignals (*oben*) wurde für das Titelbild verwendet. Der Röntgen-Attosekundenpuls (*blaue Linie*) kann zu genau definierten Zeiten Atome photoionisieren. Das Feld des Femtosekundenpulses modifiziert den Impuls der Photoelektronen in Richtung des Detektors. (Mit freundlicher Erlaubnis von F. Krausz und U. Heinzmann.)

▲ Ausblick

Laser und kohärente Lichtstrahlen spielen eine wachsende Rolle in vielen Bereichen der Alltagswelt. Sie sind inzwischen so gut kontrollierbar, dass wir schon fast routinemäßig bis an die Grenzen physikalisch möglicher Leistungen gehen: Gerade Messtechnik und Anwendungen mit dem Laser streben nach dem intensivsten elektrischen Feld, der genauesten Frequenzmessung, dem kürzesten Zeitintervall. Grenzen zu überschreiten, physikalische Grenzen auszuloten und zu überwinden ist ein immer aktuelles Thema physikalischer Forschung. Eines dieser aktuellen Themen ist die Erzeugung von Attosekunden-Lichtimpulsen, die schon im Bereich der Röntgenwellen liegt (1 Attosekunde (as) ist eine tausendstel Femtosekunde). Damit ist es kürzlich sogar gelungen (E. Goulielmakis et al., *Science* **305**, 1267 (2004)), das instantane elektrische Feld eines Femtosekundenpulses aufzuzeichnen:

Zur Herstellung der Attosekundenpulse ist bereits ein intensiver Femtosekundenpuls von wenigen Lichtschwingungen erforderlich. Der Femtosekundenpuls ($\lambda = 700 \text{ nm}$, $\Delta t = 5 \text{ fs}$) reißt Elektronen durch Ionisation z. B. aus Heliumatomen heraus, die vom selben Lichtfeld gleich wieder auf dasselbe Atom zurückgeschleudert werden. Die Atome werden bei der Kollision zu extrem starken und schnellen Schwingungen angeregt und strahlen einen kurzen Röntgenblitz von nur wenigen 100 as ab, der wie ein Laserstrahl gerichtet ist, d. h. es wird kohärentes Licht bei einer Wellenlänge von ungefähr 1 nm (Photonenenergie 93 eV) erzeugt.

Der Attosekundenpuls kann nun verwendet werden, um Atome zu ionisieren. In diesem Experiment wurden von der Photonenergie 21,5 eV verbraucht, um die Ionisationsschwelle von Neonatomen zu überwinden, 71,5 eV wurden in kinetische Energie der Elektronen umgesetzt, sie erhalten einen Impuls p_{ion} . Wenn die Ablösung der Elektronen in einem starken Laserfeld stattfindet, werden ▶

Sie durch dessen lokales und instantanes elektrisches Feld $E(t)$ zusätzlich beschleunigt. Während der kurzen Dauer des Femtosekunden-Pulsed können die Photo-Elektronen das Lichtfeld nicht verlassen, sie erfahren den zusätzlichen Impuls $\Delta p(t) = \int_t^\infty E(t') dt'$, der vom Ionisationszeitpunkt t abhängt. Die Elektronen treffen dann mit dem modifizierte Impuls $p(t) = p_{\text{ion}} + \Delta p(t)$ auf den Detektor, wobei $|\Delta p(t)| < p_{\text{ion}}$ gilt. Der Attosekundenpuls erlaubt es, den Ionisationszeitpunkt t deutlich besser als die optische Periodendauer des Femtosekundenpulses festzulegen. Mißt man also den Gesamtimpuls der Elektronen in einer bestimmten Richtung als Funktion der Verzögerungszeit zwischen Atto- und Femtosekundenpuls, so kann man aus $E(t) \propto d\Delta p(t)/dt$ ein direktes Abbild des elektrischen Feldes des Femtosekundenlasers gewinnen. Die Methode ähnelt dem Oszillographen oder einer Streak-Kamera, in denen die zeitliche Variation elektrischer Felder auch durch ein variables Ablenkfeld sichtbar gemacht werden.

✓ Aufgaben . . .

www. CD

● 15.1.1 Spontane Emission

Schätzen Sie den Einstein-A-Koeffizienten (15.2) der spontanen Emission für einen charakteristischen atomaren Übergang ($\lambda = 600$ nm, Dipolmoment $d = \text{elektron} \cdot \text{Ladung} \cdot \text{Bohr-radius}$) ab. Berechnen Sie die erforderliche Laserleistung, um für diesen atomaren Übergang eine Rabi-Frequenz zu erreichen, die schneller ist als die Zerfallsrate. Wie ändert sich die erforderliche Leistung mit der Zerfallsrate?

●● 15.1.2 Laser und gefiltertes Licht

Man könnte ja auf den Gedanken kommen, monochromatisches Laserlicht durch das gefilterte Licht einer Glühlampe zu ersetzen. Wie heiß muss ein perfekter schwarzer Strahler mit 1 cm^2 (100 cm^2) Fläche sein, um mit einem Filter der Breite 1 \AA die gleiche Strahlungsstärke wie ein roter Helium-Neon-Laser ($\lambda = 633$ nm) zu erreichen, der mit einer Divergenz von 1 mrad emittiert?

●●● 15.1.3 Dynamik der Laserintensität

Schreiben oder verwenden Sie ein einfaches Computerprogramm zur Lösung der Laser-Ratengleichungen (15.9) und studieren Sie unterschiedliche Parameterbereiche.

● 15.1.4 UV-Laser

Indem man *Einsteins* Ableitung des Planck-Gesetzes sinngemäß abändert, kann man leicht ablesen, warum ein UV-Laser sehr viel schwerer herzustellen ist als ein IR-Laser.

● 15.2.1 Gauß-Näherung

Rechnen Sie explizit nach, dass sich die Gesamtintensität des Gauß-Modus (15.12) entlang der z -Richtung nicht ändert.

● 15.2.2 Krümmung der Wellenfronten

Skizzieren Sie Durchmesser und Krümmungsradius $R(z)$ des Gaußstrahls als Funktion von z . Wo tritt die größte Krümmung auf? Wie kann man die Krümmung beobachten?

●● 15.2.3 Gouy-Phase

Wie ändert sich die Phase eines Gaußstrahls beim Durchgang durch den Fokus im Vergleich zu einer ebenen Welle? Wie kann man diese Phasenverschiebung beobachten?

● 15.3.1 Verstärkungskoeffizient

Wie groß ist der Verstärkungskoeffizient (in cm^{-1}) entlang des Lichtweges in einem 30 cm langen Helium-Neon-Laser, wenn dieser bei einer Transmission des Auskoppelspiegels $< 92\%$

erlischt? Was kann man tun, um die Ausgangsleistung zu erhöhen?

●● 15.3.2 Strahlungsdruck

Welche Kraft übt ein Nd-YAG-Laserstrahl ($\lambda = 1064$ nm) mit 10 W Leistung bei der Reflexion an einem Spiegel aus? Wie weit wird ein pendelartig ($l = 10 \text{ cm}$) aufgehängter Spiegel mit 10 g Masse ausgelenkt?

● 15.3.3 Laserbremsung

Ein Atom erfährt durch Absorption von Photonen aus einem Laserstrahl einen Rückstoß. Die spontane Emission geschieht in alle Richtungen, verursacht also im Mittel keinen Impulsübertrag. Wie groß ist die maximale Beschleunigung für ein Cäsium-Atom, das Licht bei 852 nm absorbiert und maximal ein Photon pro 60 ns streuen kann? Wie lang ist die Bremsstrecke für thermische Cäsiumatome?

● 15.3.4 Dotierung mit Laserionen

In Yttrium-Kristallen lassen sich die Y-Ionen häufig durch Nd-Ionen ersetzen, z. B. im Nd:YAG-Kristall. Wenn deren Dichte jedoch zu hoch wird, führen Wechselwirkungen zwischen den Fremd-Ionen zu nichtstrahlenden Verlusten, die die Inversion beeinträchtigen. Nehmen Sie eine hexagonale

dichteste Kugelpackung für die Konfiguration der Y-Ionen an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, direkt benachbarte Nd-Ionen bei einer Dotierung von 1% zu finden?

● 15.3.5 Laserdioden und Facetten

Welche Intensität tritt an der Ausgangsfacette einer Laserdiode mit 1 mW bzw. 1 W auf? Nehmen Sie einen aktiven Streifen mit einer Fläche $10 \cdot 1 \mu\text{m}^2$ an.

●● 15.4.1 Laser-Spitzenleistungen

Bei welcher Laserleistung wird in einem Brennfleck mit $10 \mu\text{m}$ Durchmesser die Durchschlagfeldstärke an Luft erreicht? Wann werden inneratomare Feldstärken erreicht? Wie hängt die Spitzenleistung von Pulslänge und Wiederholrate ab?

● 15.4.2 Femtosekunden-Pulsverformung

Wie weit laufen blaue (400 nm) und rote (700 nm) Wellenlängenanteile ei-

nes kurzen (Femtosekunden-)Pulses beim Passieren von 1 mm gewöhnlichem Glas auseinander?

●●● 15.4.3 Nichtlineare Optik I

Laserlicht kann mehr als die 10^{10} -fache Intensität des Sonnenlichts erreichen. Wie groß sind das elektrische und das Magnetfeld in der Welle? Vergleichen Sie mit den Feldern, die ein Elektron an sein Atom binden. Stellen Sie das Mitschwingen des Elektrons mit der Welle in seiner Potentialkurve dar. Ist das Elektron noch als harmonischer Oszillator aufzufassen, oder welche Abweichungen treten auf? Unterscheiden Sie asymmetrische und symmetrische Abweichungen. Wie wird die einfallende Welle durch die Sekundäremission verzerrt? Falls Oberwellen auftreten, zu welchen Frequenzen führen die symmetrische und die asymmetrische Anharmonizität? Bewirkt die symmetrische in jedem Kristalltyp Oberwellen? Schätzen Sie die Intensität der Oberwellen. Es gibt eine eigentümliche Schwierigkeit für

die Beobachtung der Oberwellen: Sie interferieren sich meist weg. Warum? Ein raffinierter Weg zur Behebung dieser Schwierigkeit nutzt die Doppelbrechung aus. Können Sie sich vorstellen, wie?

●●● 15.4.4 Nichtlineare Optik II

Wie kommt es, dass normalerweise die von den mitschwingenden Elektronen emittierte Sekundärwelle die Primärwelle so wenig stört? Warum beeinflussen sich eigentlich zwei Lichtbündel nicht, die durch das gleiche Medium gehen? Warum treten z. B. keine Schwebungswellen mit Summen- und Differenzfrequenzen auf? Ist das bei intensivem Laserlicht auch noch so? Denken Sie daran, dass das Licht durch seine eigenen Wechselfelder die optischen Eigenschaften des Mediums periodisch moduliert (Faraday- und Kerr-Effekt, aber auch direkte Beeinflussung der Brechzahl). Unter welchen Umständen kann man von Photon-Photon-Streuung sprechen? Welche Stoßgesetze beherrschen diese Streuung?

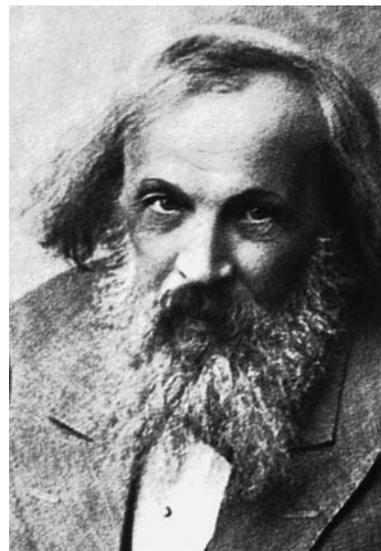
Die Elemente und die Chemie

■ Inhalt

16.1	Systematik des Atombaus	847
16.2	Atome mit mehreren Elektronen in der Quantenmechanik	851
16.3	Röntgenstrahlung	856
16.4	Moleküle	869

▼ Einleitung

Im Prinzip haben wir mit der Quantenmechanik das notwendige Gerüst geschaffen, um die Eigenschaften aller Atome, Moleküle, der kondensierten Materie zu beschreiben – sie werden nämlich von der Bewegung der Elektronen bestimmt. Aber jeder Baustein, den wir unserem System hinzufügen, lässt seine Komplexität rasch anwachsen, und wir stoßen sehr schnell an die Grenze des streng systematischen Vorgehens auf einem einmal eingeschlagenen theoretischen Weg. Nur physikalische Intuition kann aus dieser Verlegenheit helfen, die schon beim Helium beginnt, dem einfachsten Atom nach dem perfekten und idealtypischen Wasserstoff. Weil die Elektronen die Kräfte zwischen den Atomen bestimmen, erklärt die Quantenmechanik auch, wie es zur chemischen Bindung kommt.



Dmitrij Mendelejew (1834–1907)

Der russische Chemiker Mendelejew wirkte seit 1863 an der Universität St. Petersburg. Er ordnete und publizierte 1869 die damals bekannten 63 chemischen Elemente einerseits nach ihrem Atomgewicht, andererseits nach ihren chemischen Ähnlichkeiten. Seine Tabelle enthielt bereits die acht Hauptgruppen, die heute in jedem Klassenzimmer der Welt zu finden sind. Weil in seinem System leere Plätze blieben, konnte er die Entdeckung weiterer Elemente vorhersagen und die falsche Zuordnung von Atomgewichten erkennen.

Im Jahr 1870 kam der Chemiker Lothar Meyer (1830–1895) an der Technischen Hochschule Karlsruhe zum gleichen Periodensystem, indem er neben dem Atomgewicht die Periodizität des Atomvolumens als Ordnungskriterium verwendete (s. Abb. 16.3)

16.1 Systematik des Atombaus

Historisch ist das Periodensystem aus einer Betrachtung von Massenverhältnissen bei chemischen Reaktionen entstanden. Heute deuten wir die meisten Eigenschaften der Atome als Konsequenz ihrer elektronischen Hülle, wir fügen dazu – wie in einem Baukasten – Elektron um Elektron hinzu. Auch die Gesamtladung des schweren Atomkerns muss im gleichen Maß zunehmen, dessen Eigenschaften sind aber Thema eines eigenen Kapitels.

16.1.1 Das Periodensystem der Elemente

D. Mendelejew und *L. Meyer* fanden beim Versuch, sämtliche chemischen Elemente nach ihrem Atomgewicht zu ordnen, eine Anordnung, die eine Reihe von Verwandtschaften und Gesetzmäßigkeiten besonders gut erkennen lässt: das in Tabelle 16.1 in moderner Form wiedergegebene **Periodensystem**. Es enthält in 7 waagrechten Reihen (Perioden) und 8 senkrechten Reihen (Gruppen), dazu einigen Nebengruppen sämtliche bekannten Elemente. Die durchlaufenden Nummern nach dem Symbol eines jeden Elementes heißen **Ordnungszahlen**.

Die Zahlen unter den Elementensymbolen sind die **Atomgewichte**, richtige **Massenzahlen**, d. h. diejenigen Zahlen, die angeben, wie vielmal

Tabelle 16.1. Periodensystem der Elemente

Periodensystem der Elemente																							
1s	H 1 1,008															He 2 4,0026	1s						
	1															2							
2s 2p	Li 3 6,941	Be 4 9,012															B 5 10,81	C 6 12,01	N 7 14,01	O 8 16,00	F 9 19,00	Ne 10 20,18	2s 2p
	1 -	2 -															2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	
3s 3p	Na 11 23,00	Mg 12 24,31															Al 13 26,98	Si 14 28,09	P 15 30,97	S 16 32,06	Cl 17 35,45	Ar 18 39,95	3s 3p
	1 -	2 -															2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	
3d 4s 4p	K 19 39,10	Ca 20 40,08	Sc 21 44,96	Ti 22 47,87	V 23 50,94	Cr 24 52,00	Mn 25 54,94	Fe 26 55,85	Co 27 58,93	Ni 28 58,69	Cu 29 63,55	Zn 30 65,39	Ga 31 69,72	Ge 32 72,64	As 33 74,92	Se 34 78,96	Br 35 79,90	Kr 36 83,80	3d 4s 4p				
	-	-	1	2	3	5	5	6	7	8	10	10	10	10	10	10	10	10					
4d 5s 5p	Rb 37 85,47	Sr 38 87,62	Y 39 88,91	Zr 40 91,22	Nb 41 92,91	Mo 42 95,94	Tc 43 (98)	Ru 44 101,07	Rh 45 102,9	Pd 46 106,4	Ag 47 107,9	Cd 48 112,4	In 49 114,8	Sn 50 118,7	Sb 51 121,8	Te 52 127,6	J 53 126,9	Xe 54 131,3	4d 5s 5p				
	-	-	1	2	4	5	6	7	8	10	10	10	10	10	10	10	10	10					
5d 6s 6p	Cs 55 132,9	Ba 56 137,3	La 57 138,9	Hf 72 178,5	Ta 73 181,0	W 74 183,8	Re 75 186,2	Os 76 190,2	Ir 77 192,2	Pt 78 195,1	Au 79 197,0	Hg 80 200,6	Tl 81 204,4	Pb 82 207,2	Bi 83 209,0	Po 84 (209,0)	At 85 (210,0)	Rn 86 (222,0)	5d 6s 6p				
	-	-	1	2	3	4	5	6	7	9	10	10	10	10	10	10	10	10					
6d 7s 7p	Fr 87 (223,0)	Ra 88 (226,0)	Ac 89 (227)	Rf 104 261,1	Db 105 (262,1)	Sg 106 (263,1)	Bh 107 (262,1)	Hs 108 (265,1)	Mt 109 (266,1)	Ds 110 (269,3)	Rg 111 (272)	112 (277)		114 (289)		116 (292)		118 (293)	6d 7s 7p				
	-	-	1	2?	3?																		
4f 5d 6s						Ce 58 140,1	Pr 59 140,9	Nd 60 144,2	Pm 61 (145)	Sm 62 150,4	Eu 63 152,0	Gd 64 157,3	Tb 65 158,9	Dy 66 162,5	Ho 67 164,9	Er 68 167,3	Tm 69 168,9	Yb 70 173,0	Lu 71 175,0	4f 5d 6s			
						2	3	4	5	6	7	7	8	10	11	12	13	14	14				
5f 6d 7s																				5f 6d 7s			
						Th 90 232,0	Pa 91 231,0	U 92 238,0	Np 93 (237,0)	Pu 94 (244,1)	Am 95 (243,1)	Cm 96 (247,1)	Bk 97 (247,1)	Cf 98 (251,1)	Es 99 (252,1)	Fm 100 (257,1)	Md 101 (258,1)	No 102 (259,1)	Lr 103 (262,1)				
						-	2	3	5	6	7	7	9	10	11	12	13	14	14				
						2	1	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	1				
						2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2				

Element und Ordnungszahl
 Atommasse in AME; für einige instabile Elemente in Klammern:
 Massenzahl des stabilsten Isotops
 Elektronenkonfiguration; die vollen Schalen der vorhergehenden
 Perioden sind mitzurechnen, z.B. vollständige Elektronenkonfiguration
 des Fe: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$

Ku wurde zu Rf = Rutherfordium (IUPAC 1997)
 Ha wurde zu Db = Dubnium (IUPAC 1997)
 Sg = Seaborgium nach *Glenn T. Seaborg* *1912
 Bh = Bohrium (IUPAC 1997)
 (Niels Bohr, dänischer Physiker 1885–1962)
 Hs = Hassium
 (lat. *Hassia* = Hessen, deutsches Bundesland)
 Mt = Meitnerium (*Lise Meitner*,
 österreichische Physikerin, 1878–1968)
 Ds = Darmstadtium (Sitz der Gesellschaft für Schwerionenen-
 forschung, GSI, an der die Elemente 107–112
 synthetisiert wurden)
 Rg = Roentgenium (*Wilhelm Conrad Röntgen*,
 deutscher Physiker, 1845–1923)

größer die Masse des betreffenden Atoms ist als die Masse des Kohlenstoffatoms (C) – genauer gesagt, des überwiegenden **Isotops** (Abschn. 18.1.2) des Kohlenstoffs –, wenn man diesem die Massenzahl 12 zuschreibt. Da Kohlenstoff normalerweise nicht ohne Beimengung eines schwereren Isotops (Massenzahl 13) vorkommt, erscheint unter dem Symbol C eine Zahl, die geringfügig größer als 12 ist. Analoges gilt für fast alle Massenzahlen.

Die chemischen Eigenschaften der Elemente wiederholen sich in jeder Periode, daher sind die in den Gruppen untereinander stehenden Elemente sich chemisch sehr ähnlich, z. B. die **Halogene** in Gruppe VII, die **Edelgase** in Gruppe VIII, die **Alkalien** und **Erdalkalien** in den Gruppen I und II. Etwas größer sind die Unterschiede innerhalb der **Erden** (Gruppe III) und **Chalkogene** (Gruppe VI). Dazu kommen die Elemente der **Nebengruppen**, durch eingerückte Elementsymbole dargestellt, die eine gewisse entfernte Verwandtschaft zur Hauptgruppe zeigen.

Um das System verwandtschaftlicher Beziehungen aufrechtzuerhalten, muss man allerdings alle Elemente der Ordnungszahlen 57 bis 71, die **Seltenen Erden**, auf einen einzigen Platz setzen, ebenso alle Elemente der Ordnungszahlen 89 bis 103, die **Aktiniden**.

Der chemischen Periodizität folgen zahlreiche andere Eigenschaften, z. B. die **Ionisierungsenergie** (Abb. 16.1, Abb. 16.2), das **Atomvolumen** (Abb. 16.3), die Schmelztemperatur, der Ausdehnungskoeffizient und der Aufbau der optischen Spektren. Offenbar bestimmen Anzahl und Anordnung der äußeren Elektronen die Eigenschaften, welche sich als periodisch erweisen, denn die Spektren der charakteristischen Röntgenstrahlung der inneren Elektronen lassen keine Periodizität erkennen: Die Härte der Röntgenstrahlen nimmt mit wachsender Kernladungszahl ständig zu (Abschn. 16.3.5).

Die Anzahl der Elemente in den Perioden lässt sich durch die doppelten Quadrate $2n^2$ der Zahlen $n = 1, 2, 3, 4$ darstellen:

$$2 = 2 \cdot 1^2, \quad 8 = 2 \cdot 2^2, \quad 18 = 2 \cdot 3^2 \quad \text{und} \quad 32 = 2 \cdot 4^2.$$

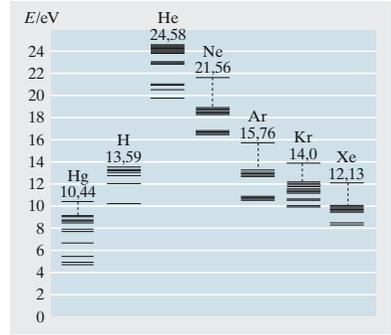


Abb. 16.1. Anregungs- und Ionisierungsenergien von Quecksilber, Wasserstoff sowie Helium, Neon, Argon, Krypton und Xenon

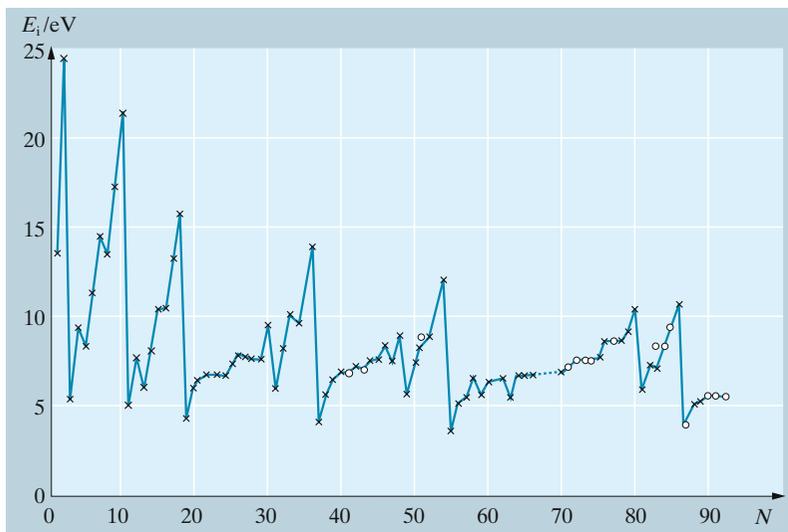
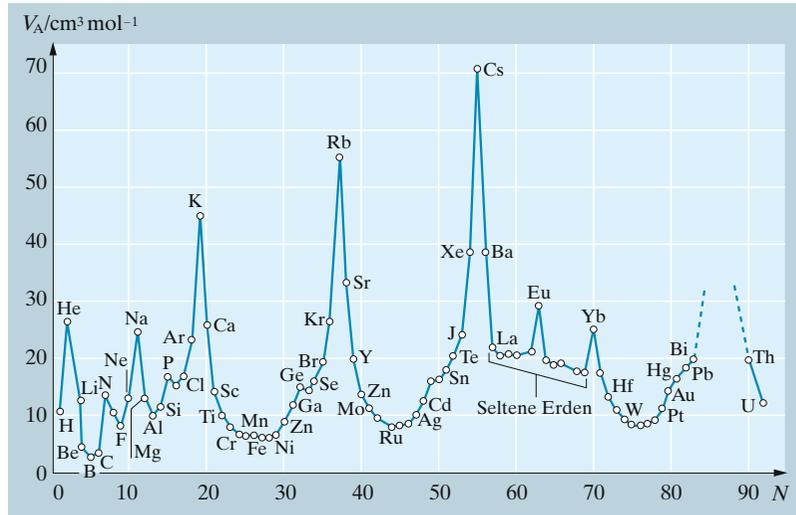


Abb. 16.2. Ionisierungsenergie der Atome als Funktion der Ordnungszahl. (Nach W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

Abb. 16.3. Die Periodizität der Atomvolumina. Nach Julius Lothar Meyer (1835–1890), *Annalen der Chemie*, Supplementband 7, 354 (1870)



Dies ganze System der Elemente findet bis in alle Einzelheiten eine Deutung durch die Quantentheorie, die das Schalenmodell des Aufbaus der Atome zwanglos, aber keineswegs selbstverständlich durch die Einteileneigenschaften der Elektronen erklärt.

16.1.2 Einteilchenmodell und Quantenzustände

Die ersten Informationen über die Systematik des Aufbaus der Atome stammten aus der Chemie, wo Reduktions- und Oxidationszustände sowie die Volumenanteile der Elemente in einer Verbindung die Periodizitäten aus Abb. 17.2 und Abb. 17.3 erkennen ließen. Ein weiterer Beitrag zur Ordnung der Atome war die Erkenntnis von Moseley, dass charakteristische Röntgenlinien der Elemente sich gruppieren ließen (K -, L -, M -, ... Serien), und dass die Lage der Serien beginnend mit dem Wasserstoffatom eine strenge Ordnung nach Atomgewicht bzw. Ordnungszahl erlaubte. Für die K -Serie gilt das phänomenologische Gesetz für ein Atom mit der Ordnungszahl Z ,

$$E_{K\alpha} = \frac{3}{4} R_{\mu} (Z - 1)^2 = R_{\mu} (Z - 1)^2 \left(\left(\frac{1}{1} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right), \quad (16.1)$$

ähnliche Gesetze findet man für die L -Serie usw. Diese und andere experimentellen Befunde (s. Abschn. 17.2.5, Abb. 17.25) legten nahe, dass man die Atome bausteinartig durch Hinzufügen immer weiterer Elektronen aufbauen könnte. Die Elektronenzustände des Wasserstoffatoms werden durch Quantenzahlen beschrieben, zu der im Bohr-Sommerfeld-Modell eine Kepler-Ellipse, in der Quantenmechanik eine Wellenfunktion mit einer charakteristischen ‚Elektronenwolke‘ gehört. Wir kennen die vier Quantenzahlen und ihre physikalische Bedeutung schon aus Abschn. 14.2 bis Abschn. 14.5:

- Die **Hauptquantenzahl** n . Sie misst bei Bohr-Sommerfeld die große Halbachse der Bahn: $a \sim n^2$. Auch in der Quantenmechanik wächst der Radius der Elektronenwolke etwa mit n^2 an. Entsprechend steigt auch

die Gesamtenergie des Elektrons. Elektronen mit $n = 1, 2, \dots$ heißen auch Elektronen der K -, L -... Schale.

- Die **Nebenquantenzahl** oder **Drehimpulsquantenzahl** l . Bei *Bohr-Sommerfeld* drückt sie die kleine Halbachse der Bahnellipse, d. h. ihren Bahndrehimpuls aus. In der Quantenmechanik ist $l = 0$ für eine völlig kugelsymmetrische Wolke, $l = 1, 2, \dots$ für verschiedene Abweichungen von der Kugelsymmetrie. Diese Abweichungen bestehen u. A. darin, dass sich die Elektronenwolke in unmittelbarer Kernnähe umso mehr verdünnt, je größer l ist; umso stärker wird daher auch die **Abschirmung** durch weiter innen sitzende Elektronen, d. h. Zustände mit gegebenem n liegen energetisch umso höher, je größer ihr l ist. Elektronen mit $l = 0, 1, 2, 3$ heißen s -, p -, d -, f -Elektronen. Für l sind bei gegebener Hauptquantenzahl n die n Werte $0, 1, \dots, n - 1$ möglich.
- Die **magnetische Quantenzahl** m . Sie kennzeichnet die Orientierung der Elektronenbahn bzw. der Elektronenwolke. Ein umlaufendes Bohr-Elektron bzw. eine nichtkugelsymmetrische Elektronenwolke ($l \neq 0$) stellt einen elektrischen Ringstrom dar, mit dem ein magnetisches Moment verbunden ist. Dieses Moment kann zu einer vorgegebenen Richtung (z. B. zur Richtung eines äußeren Magnetfeldes) $2l + 1$ Orientierungen einnehmen, die durch die Werte $m = -l, -l + 1, \dots, -1, 0, +1, \dots, l - 1, l$ der magnetischen Quantenzahl unterschieden werden. Zu jedem l gibt es also $2l + 1$ verschiedene Werte der magnetischen Quantenzahl.
- Die **Spinquantenzahl** s . Das Elektron hat einen Eigendrehimpuls, einen **Spin**. Dieser kann zu einer vorgegebenen Richtung nur zwei Orientierungen einnehmen, die man durch die Werte $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ kennzeichnet.

16.2 Atome mit mehreren Elektronen in der Quantenmechanik

16.2.1 Bauprinzipien der Elektronenhülle

Den Einbau eines zweiten Elektrons mit Quantenzahlen $\{n, l, m, s\}$ haben wir beim He-Atom schon in Abschn. 14.6 untersucht. Die dort gewonnenen Einsichten können wir mit vereinfachten Prinzipien auch für den Einbau weiterer Elektronen in Mehrelektronen-Atome anwendbar machen:

Das Pauli-Prinzip. Dieses sehr allgemeine Symmetrieprinzip (s. Abschn. 14.5.4) ist eine Erfahrungstatsache etwa vom Rang des Energiesatzes, es folgt aber auch aus relativistischen Prinzipien und fordert, dass die Gesamtwellenfunktion, das Produkt aus Orts- und Spinwellenfunktionen der Elektronen, wegen ihres halbzahligen Spins immer antisymmetrisch sein muss. Es besagt in der hier benötigten speziellen Form:

Innerhalb eines Atoms dürfen nie zwei oder mehr Elektronen in allen vier Quantenzahlen übereinstimmen.

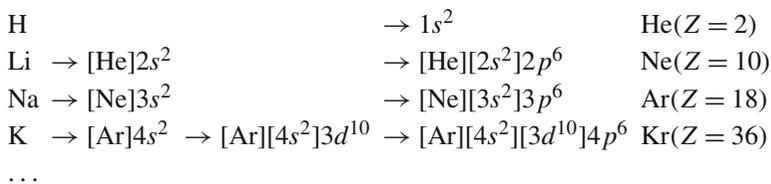
Jede mögliche Kombination der vier Quantenzahlen darf also nur von einem einzigen Elektron beansprucht werden.

Bausteinprinzip und Elektronenkonfiguration.

Die Elektronenhülle eines Atoms entsteht aus derjenigen des in der Ordnungszahl vorangehenden Atoms dadurch, dass ein weiteres Elektron angefügt wird, ohne die schon vorhandene Ordnung wesentlich zu verändern.

Von den möglichen Anbauweisen wird immer die energetisch günstigste wahrgenommen. Sie entspricht i. Allg. einem Zustand mit der geringsten noch verfügbaren Hauptquantenzahl n . Unter diesen Zuständen wird wiederum der mit der geringsten Drehimpulsquantenzahl l bevorzugt, weil er wegen der geringeren Abschirmung energetisch am günstigsten liegt. Es kann sogar vorkommen, dass das Prinzip minimalen l den Vorrang vor dem Prinzip minimalen n gewinnt (Abschn. 17.1.6).

Wegen des Spin-Freiheitsgrades kann jeder (n, l) -Zustand unter Beachtung des Pauli-Prinzips mit gerade 2 Elektronen aufgefüllt werden. Dann gelangen wir schnell zu folgender Systematik, die Mendelejew und Meyer implizit schon um 1870 zur Aufstellung des periodischen Systems der Elemente geführt hat:



Immer wenn eine Drehimpulsgruppe die maximal mögliche Zahl von Elektronen enthält, sprechen wir von einer abgeschlossenen **Schale**.

Bis zum Ar-Atom, werden erst alle Schalen mit wachsendem Drehimpuls ℓ zu einer gemeinsamen Hauptquantenzahl n aufgefüllt. Danach ist es energetisch zunächst günstiger, die 4s- vor der Schale der 3d-Zustände aufzufüllen, dabei entstehen die Nebengruppen des Periodensystems.

16.2.2 Zentralfeldnäherung

Solange wir die Atome durch Hinzufügen weiterer Elektronen aufbauen, lässt sich der Hamilton-Operator für ein Atom mit N Elektronen ohne weiteres in Erweiterung des Operators für das Helium-Atom (14.33) hinschreiben:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon r_i} \right\} + \sum_{i<j=1}^N \frac{e^2}{4\pi\epsilon r_{ij}} \quad (16.2)$$

In der *Zentralfeldnäherung* wird angenommen, dass sich jedes einzelne Elektron in einem gemittelten, kugelsymmetrischen Potential der übrigen Elektronen bewegt,

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon} r + S(r) \quad (16.3)$$

In Kernnähe erwarten wir, dass jedes Elektron der „nackten“ Kernladung ausgesetzt ist ($V(r) \simeq -Ze^2/4\pi\epsilon r$, $r \rightarrow 0$), je größer die Abstände aber werden, desto stärker wird sie von den weiter innen liegenden Elektronen

abgeschirmt. Für das zuletzt eingebaute Elektron nimmt das effektive Potential weit draußen ($r \rightarrow \infty$) die Form $V(r) \simeq -(Z - N + 1)e^2/4\pi\epsilon r$ an. Mit Faustregeln für die Abschirmkoeffizienten (s. Aufgabe 18.2.1) lassen sich Eigenschaften wie Ionisationsenergie, Atomvolumen etc. ziemlich weitgehend deuten.

Der Vorteil der Zentralfeldnäherung liegt insbesondere in der Rotationssymmetrie, derzufolge die Drehimpuls-Quantenzahlen (l, m) und Drehimpuls-Wellenfunktionen ganz wie im Einelektronen-Atom behandelt werden können. Das Zentralfeld wirkt sich lediglich auf die radialen Wellenfunktionen aus.

16.2.3 Drehimpuls und Spin im Mehrelektronenatom

Wie im Helium-Atom koppeln die Drehimpuls- und Spineigenschaften durch magnetische Wechselwirkungen aneinander (s. Abschn. 14.5.4). Bei leichteren Atomen koppeln erst alle elektronischen Bahn-Drehimpulse untereinander zu einem Gesamt-Bahndrehimpuls L , alle Spins zu seinem Gesamtspin S , bevor ein Gesamtdrehimpuls J gebildet wird. Welcher Zustand mit $\{L, S, J\}$ -Quantenzahlen dabei am energetisch niedrigsten liegt, wird nach den so genannten **Hundschen Regeln** ermittelt:

Hundsche Regeln:

1. Regel: Der Grundzustand nimmt den maximal möglichen Gesamtspin an, $S \rightarrow S_{\max}$, d.h. er besitzt maximal mögliche Gesamtsymmetrie.
2. Regel: Der Grundzustand besitzt den maximalen auch mit Regel 1 verträglichen Bahndrehimpuls, $L \rightarrow L_{\max}$.
3. Regel: Der Gesamtdrehimpuls J nimmt im niedrigstliegenden Zustand die Werte

$$J = |L - S| \text{ bei weniger als halb gefüllter Schale,}$$

$$J = L + S \text{ bei mehr als halb gefüllter Schale}$$
 an.

Die Hundschen Regeln sind aus der Quantentheorie im Detail begründbar, wir beschränken uns hier auf eine qualitative Deutung: Bei maximal symmetrischer Spinwellenfunktion wird die Ortwellenfunktion maximal antisymmetrisch, d.h. insbesondere, dass sie für $r_i = r_j$ von zwei Elektronen verschwindet und daher die Coulomb-Abstoßung minimiert wird (Regel 1). Auch die Annahme des größten unter diesen Umständen mit dem Pauli-Prinzip verträglichen Drehimpulses hat diesen Ursprung (Regel 2). Die letzte Regel kann man erklären, wenn man davon ausgeht dass fehlende Elektronen in geschlossenen Schalen wie Löcher oder positiv geladene Teilchen wirken, ihr effektives magnetisches Moment also ein umgekehrtes Vorzeichen besitzt und daher auch die Term-Reihenfolge der Feinstruktur-Zustände invertiert ist.

Man überzeugt sich leicht davon, dass der Grundzustand des Helium-Atoms diese Regeln erfüllt (s. Tabelle 16.2). Die Elemente der ersten und zweiten Periode des periodischen Systems der Elemente, H ... Ne,

Tabelle 16.2. Elektronische Zustände, Drehimpuls-Quantenzahlen und Spektraltypen in der ersten Periode

	H	He	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne
2p					↑	↑↑	↑↑↑	(↓↓)	(↓)	⊙
2s			↑	↑↓	⊙	—				
1s	↑	↑↓	⊙	—						
S	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
L	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
J	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	0
$2S+1L_J$	$^2S_{1/2}$	1S_0	$^2S_{1/2}$	1S_0	$^2P_{1/2}$	3P_0	$^4S_{3/2}$	3P_2	$^2P_{3/2}$	1S_0
Typ des Spektrums	1el	2el	1el	2el	1el	2el	2h	1h	1el/1h	1el/1h
	2L	$^3L, ^1L$	2L	$^3L, ^1L$	2L	$^3L, ^1L$	$^4L, ^2L$	$^3L, ^1L$	$^4L, ^2L$	$^3L, ^1L$

⊙: abgeschl. Schale; (↓↓) = ⊙ - ↓↓, (↓) = ⊙ - ↓ etc.;

erfüllen diese Regeln im Grundzustand ohne Ausnahme. Ihre Spektren bzw. Energiediagramme lassen sich grob in zwei Klassen einteilen: Solche die für Einelektronen-Systeme (1el) und solche die für Zweielektronen-Systeme (2el) typisch sind. Die nahezu vollen Schalen von O und F lassen sich hier ebenfalls einordnen, wenn wir deren Elektronenkonfiguration als abgeschlossene Schalen mit Elektronenfehlstellen oder *Löchern* (h) verstehen.

Geradezu ein Musterbeispiel für diese Regeln sind die elektronischen Zustände der *Seltenen Erden* (s. Tabelle 16.3): In dieser Nebengruppe des Periodensystems werden nach einander 14 Elektronen in die 4f-Schale eingebaut. Diese Schale liegt relativ weit im Inneren der Elektronenhülle und zeigt daher eine relativ kleine Wechselwirkung mit der Umgebung.¹

Tabelle 16.3. Seltene Erden, Elektronenkonfiguration

Atom		Neutral	Ionisch (3+)	μ/μ_B		
Lanthan	La	*5d6s ²	² D _{3/2}	*	¹ S ₀	0,0
Cer	Ce	*4f5d6s ²	³ H ₄	*4f	² F _{5/2}	2,4
Praseodym	Pr	*4f ³ 6s ²	⁴ I _{9/2}	*4f ²	³ H ₄	3,5
Neodym	Nd	*4f ⁴ 6s ²	⁵ I ₄	*4f ³	⁴ I _{9/2}	3,5
Promethium	Pm	*4f ⁵ 6s ²	⁶ H _{5/2}	*4f ⁴	⁵ I ₄	—, —
Samarium	Sm	*4f ⁶ 6s ²	⁷ F ₀	*4f ⁵	⁶ H _{5/2}	1,5
Europium	Eu	*4f ⁷ 6s ²	⁸ S _{7/2}	*4f ⁶	⁷ F ₀	3,4
Gadolinium	Gd	*4f ⁸ 6s ²	⁷ F ₆	*4f ⁷	⁸ S _{7/2}	8,0
Terbium	Tb	*4f ⁹ 6s ²	⁶ H _{15/2}	*4f ⁸	⁷ F ₆	9,5
Dysprosium	Dy	*4f ¹⁰ 6s ²	⁵ I ₈	*4f ⁹	⁶ H _{15/2}	10,6
Holmium	Ho	*4f ¹¹ 6s ²	⁴ I _{15/2}	*4f ¹⁰	⁵ I ₈	10,4
Erbium	Er	*4f ¹² 6s ²	³ H ₆	*4f ¹¹	⁴ I _{15/2}	9,5
Thulium	Tm	*4f ¹³ 6s ²	⁴ F _{7/2}	*4f ¹²	³ H ₆	7,3
Ytterbium	Yb	*4f ¹⁴ 6s ²	¹ S ₀	*4f ¹³	² F _{7/2}	4,5
Lutetium	Lu	*4f ¹⁴ 5d6s ²	² D _{3/2}	*4f ¹⁴	¹ S ₀	0,0

*: [Xe]-Schale

¹ Diese geringe Wechselwirkung hat den Seltenen Erden ihren Namen gegeben. Sie sind in der Erdkruste keineswegs selten, jedoch in der Vergangenheit chemisch nur schwierig von einander zu trennen gewesen.

Werden insbesondere die dreifach ionisierten Seltenen Erd-Ionen verdünnt in einem Festkörper gelöst, verhalten sie sich in vieler Beziehung wie ein gefrorenes Gas von Atomen. Die Atome und Ionen der Seltenen Erden zeigen sehr hohe Drehimpulszustände, die mit großen magnetischen Momenten verknüpft sind und daher eine große Rolle für magnetische Werkstoffe spielen.

16.2.4 Jenseits des Periodensystems

Mit den Elementen 104 (Kurtschatowium) und 105 (Hahnium) wird die $6d$ -Schale begonnen. In den letzten Jahren hat man besonders in Darmstadt durch Zusammenschuss schwerer Ionen Kerne bis zur Ordnungszahl 112 hergestellt. Wahrscheinlich geht die Auffüllung von $6d$ und $7p$ analog zur Reihe Hf–Rn weiter bis zum Edelgas 118 (Eka-Radon). Von 122 bis 153 liegen wahrscheinlich die Superaktiniden (Auffüllung von $6f$), von 154 bis zum Edelgas 168 sind die Schalen $7d$ und $8p$ an der Reihe. Wann die 18 Elemente fassende Schale mit $n = 5$, $l = 5$ nachgeholt wird, weiß man noch nicht genau.

Die Stabilität der **Transurane** nimmt anfangs mit wachsender Ordnungszahl Z ab. Die Halbwertszeit gegen spontane Spaltung ist z. B. 10^{11} Jahre beim Pu, 1 h beim Fm. Mit Annäherung an die magische Neutronenzahl $A - Z = 164$, was $Z = 110$ oder 114 entspricht, wird die Stabilität wieder zunehmen. Es ist sogar möglich, dass die Elemente 110 (Eka-Platin) und 114 (Eka-Blei) in der Natur existieren. Meldungen von ihrer Auffindung haben sich allerdings als verfrüht erwiesen.

Es ist nicht sicher, ob die vorausgesagten **Inseln der Stabilität** tatsächlich stabile Atome enthalten. Interessant sind aber auch schwere Komplexe von Nukleonen, die man für sehr kurze Zeit herstellen kann, indem man schnelle Ionen in Beschleunigern aufeinander prallen lässt. Zwei U-Ionen können so vorübergehend zu einem Kern verschmelzen, der nahezu Dominiks „Atomgewicht 500“ erreicht und tatsächlich überraschende Eigenschaften zeigt.

Je schwerer ein Kern wird, desto mehr nähert sich die Bindungsenergie eines Innenelektrons seiner Ruhenergie. Nach dem einfachen Rydberg-Gesetz (14.16) würde sie erreicht bei $E = Z^2 m e^4 / (32 \pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2) = m c^2$, also bei $Z = \sqrt{2} 4 \pi \epsilon_0 \hbar c / e^2 = 195$. $e^2 / (4 \pi \epsilon_0 \hbar c) = \alpha = \frac{1}{137}$ ist **Sommerfelds Feinstrukturkonstante**. Man kann sie anschaulich als Verhältnis zwischen der Coulomb-Energie der Wechselwirkung zweier Ladungen im Abstand r und der Energie eines Photons der Wellenlänge $\lambda = 2 \pi r$ interpretieren, oder als Verhältnis der Umlaufgeschwindigkeit des Elektrons im Grundzustand des H-Atoms zur Lichtgeschwindigkeit.

Ein Atom mit $Z = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 137 = 387$ könnte also K -Röntgenquanten aussenden, die ihrerseits sich in Elektron-Positron-Paare umsetzen können. In Wirklichkeit passiert etwas noch Merkwürdigeres.

Man nimmt heute an, dass überall im Vakuum ständig alle Arten von Teilchen-Antiteilchen-Paaren entstehen, aber normalerweise einander sehr schnell wieder vernichten, und zwar innerhalb einer Zeit Δt , die so kurz ist, dass die Unschärferelation $\Delta t \Delta E \approx h$ die Verletzung des Energiesatzes um die Ruhenergie ΔE der Teilchen verbergen kann. Besonders leicht sind solche virtuellen Elektron-Positron-Paare zu erzeugen. Sie führen zu einer **Polarisation des Vakuums**, die u. A. für den **Lamb shift** (s. Abschn. 14.6.4), eine winzige Abweichung einiger Energiezustände des H-Atoms von den Werten nach der Dirac-Theorie, und für das **anomale magnetische Moment des Elektrons** verantwortlich ist. Wenn solche Paare in der Nähe eines so schweren Kerns entstehen, kann das Elektron in einen gebundenen Zustand eingefangen werden und damit seine eigene Existenz und die des gleichzeitig entstandenen Positrons nachträglich energetisch rechtfertigen. Solche kurzlebigen Kerne müssten also eine neue Art von Positronstrahlung aussenden, denn das Positron wird durch Coulomb-Abstoßung aus dem Atominnern herausgeworfen, wo

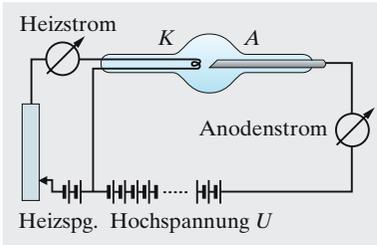
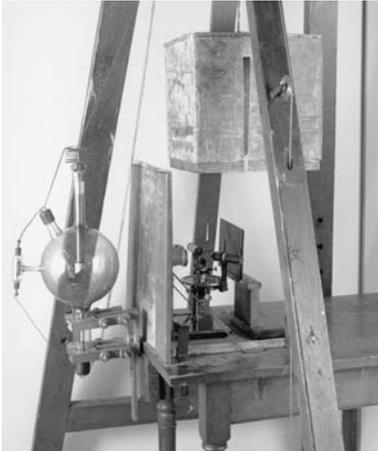


Abb. 16.4. Aus der Glühkathode K emittierte Elektronen prallen, durch U beschleunigt, auf die Antikathode A und lösen Röntgenstrahlung aus



Originalaufbau von *Max v. Laue, Walther Friedrich* und *Paul Knipping* zur Messung der Röntgenbeugung an einem Kristall (vermutlich ZnS). *Wilhelm Conrad Röntgen* sah in dem Beugungsbild sofort die lange gesuchte Bestätigung für die Wellennatur seiner Strahlung. (Foto: Deutsches Museum München)

„Wenn die Entladung einer ziemlich großen Induktionsspule durch eine hinreichend evakuierte Hittorf-, Lennard- oder Crookes-Röhre geschickt wird, welche letztere mit dünnem schwarzen Carton, einigermaßen dicht schließend, bedeckt ist, ... beobachtet man bei jeder Entladung eine Erleuchtung eines mit Bariumplatin-zyanür bestrichenen Pappschirms ...“

W. C. Röntgen, 1895

die positive Ladung überwiegt. Man glaubt, diese Strahlung bereits nachgewiesen zu haben.

Elektronenzustände mit so hohen Energien sind relativistisch zu behandeln. Damit verschiebt sich die Grenze Z für Kerne der geschilderten Art erheblich nach unten. Das liegt an der Massenzunahme des Elektrons mit der Energie. Wie Sie in Aufgaben 16.1.5–16.1.13 etwas genauer nachrechnen können, würde die Bindungsenergie schon bei $Z = 137$ unendlich werden und kurz vorher die Grenze $2m_0c^2$ überschreiten. In Wirklichkeit kommt es nicht zu diesem Unendlichwerden, weil solche Elektronen bereits innerhalb des Kerns „umlaufen“ und daher nicht mehr dem r^{-2} -Feld einer Punktladung ausgesetzt sind, sondern annähernd dem mit r ansteigenden Feld im Innern einer gleichmäßigen sphärischen Ladungsverteilung. Das verschiebt die Grenze für die neuartige Positronenstrahlung und den **Zerfall des neutralen Vakuums** wieder etwas aufwärts, nämlich bis $Z \approx 170$. Solche Komplexe sind aus zwei schweren Ionen durchaus kurzzeitig herstellbar.

Schon bei den schwereren stabilen Atomen sind relativistische Effekte nicht mehr vernachlässigbar: Auch die Chemie wird relativistisch. Zwar bewegen sich die für die chemische Bindung verantwortlichen Außenelektronen auch in schweren Atomen langsam gegen die Lichtgeschwindigkeit, solange man sie sich auf Kreisbahnen vorstellt. Das wird auch im Bohr-Sommerfeld-Bild anders für schlanke Ellipsenbahnen, in deren Perihel das Elektron schon im r^{-2} -Feld viel schneller würde, wo es vor allem aber einer höheren effektiven Kernladung ausgesetzt ist. Dann wird die relativistische Massenzunahme merklich und führt nach (14.1) zu engeren Bahnen und nach (14.2) zu höheren Bindungsenergien als nach dem nicht-relativistischen Bohr-Modell. Es gibt auch einen anderen relativistischen Effekt, der in der entgegengesetzten Richtung wirkt: Die Innenelektronen schwerer Atome sind bestimmt relativistisch, schnüren sich also enger um den Kern als nach Bohr und schirmen daher die Kernladung stärker von den Außenelektronen ab als nach dem nichtrelativistischen Bohr-Modell: Z_{eff} wird kleiner, die Bahn weiter und energieärmer.

Wie diese Konkurrenz der gegenläufigen Effekte ausgeht, muss für jeden Fall gesondert berechnet werden. Offensichtlich überwiegt aber die Steigerung der Masse und der Bindungsenergie bei den Elektronen mit geringer Drehimpulsquantenzahl (z. B. den s -Elektronen), die nach *Bohr-Sommerfeld* und auch nach *Schrödinger* dem Kern am nächsten kommen. Ihre Energieteile werden gesenkt, die von d - oder f -Elektronen angehoben. Erst so versteht man, warum Gold so viel „edler“ ist als seine Spaltenhomologen Cu und Ag : Sein $6s$ -Außenelektron ist ungewöhnlich fest gebunden (um fast $1,5 \text{ eV}$ stärker als ohne relativistische Effekte). Deswegen sind die Atomradien, sofern sie überwiegend durch s -Elektronen bestimmt sind, also bei den schweren Übergangsmetallen, so klein, deswegen sind also Os , Ir und Pt noch viel dichter als ihre Nachbarerlemente. Deswegen sind diese Metalle auch so hart und so hochschmelzend: Delokalisierung von Elektronen bringt umso mehr Energie, auf je engerem Raum sie vorher eingesperrt waren (vgl. Abschn. 17.4.3). Diese Tendenz hört aber sofort auf, sobald die d -Schale und besonders sobald auch die s -Schale abgeschlossen sind: Gold ist schon leichter, weicher und einfacher zu schmelzen als Platin; Quecksilber schließlich, bei dem beide Schalen voll sind, bildet die bekannte extreme Ausnahme unter allen Metallen mit außerordentlich kleiner Bindungsenergie zwischen den Atomen.

16.3 Röntgenstrahlung

16.3.1 Erzeugung und Nachweis

Röntgenstrahlung entsteht, wenn schnelle Elektronen auf ein Hindernis prallen und plötzlich gebremst werden. Bei *W. C. Röntgen* prallten die Elektronen, die aus einer kalten Kathode kamen, auf die Glaswand gegenüber,

heute gewinnt man sehr viel mehr Elektronen durch Heizung der Kathode, beschleunigt sie stärker (durch eine Anodenspannung zwischen 50 und 300 V), bündelt sie elektronenoptisch (durch einen Wehnelt-Zylinder) und stellt ihnen eine **Antikathode** aus Metallen mittlerer oder hoher Massenzahl entgegen (Mo, Cu bzw. W). Dort geben die Elektronen ihre Energie ab und verwandeln sie in Strahlung, größtenteils aber in Wärme, sodass die Antikathode meist gekühlt werden muss. Diese Strahlung durchdringt Materieschichten erheblicher Dicke, was *W. C. Röntgen* am Aufleuchten eines Fluoreszenzschirms nachwies, ähnlich wie er noch heute zur Schirmbilduntersuchung dient. Schonender für den Patienten ist die photographische Aufnahme. Röntgenstrahlung löst Elektronen nicht nur im Bildschirm oder im Bromsilberkorn des Films aus, sondern ionisiert auch Gase und lässt sich so durch die Entladung von Elektrometern oder Ionisationskammern messen.²

16.3.2 Röntgenbeugung

Noch fast 20 Jahre nach *Röntgens* Entdeckung war zweifelhaft, ob hier Wellen oder Teilchen emittiert werden. Wenn es sich um Wellen handelt, sollten sie gemäß ihrem Durchdringungsvermögen sehr kurz sein. Da genügend enge Beugungsgitter nicht herstellbar sind, schien ein experimenteller Beweis aussichtslos, bis *Max von Laue* die geniale Idee hatte, dass die Natur solche Gitter in Gestalt der Kristalle anbietet. Deren periodische Raumgitterstruktur war bis dahin ebenfalls nur Hypothese, und *Laue*, *Friedrich* und *Knipping* konnten die beiden grundlegenden Annahmen durch ein einziges Experiment beweisen.

Ein eng ausgeblendetes Röntgenbündel tritt durch eine Kristallplatte *K*, z. B. aus NaCl parallel zu den Würfel­flächen geschnitten (Abb. 16.5). Auf der Photoplatte *P* zeichnet sich nicht nur der Durchstoßpunkt des Bündels (in Abb. 16.6 abgedeckt) als schwarzer Fleck ab, sondern es entsteht rings herum ein System von Flecken, das vierzählige Symmetrie hat.

Man könnte leicht verstehen, dass der Durchgang durch Materie das Röntgenlicht etwas aus der Richtung bringt und dass sich ein homogener Streu­kegel bildet. Statt dessen scheint es, als seien im Kristall viele Spiegel unter verschiedenen Richtungen angebracht, die scharfe Reflexionspunkte erzeugen. Eine Betrachtung von *W. Bragg* zeigt, um was für Spiegel es sich handelt. In einer periodischen Anordnung von Teilchen findet man viele Ebenen verschiedener Richtung, die durch Gitterpunkte gehen, z. B. nicht nur die horizontale und vertikale Ebene in Abb. 16.7, sondern auch schräge, auf denen allerdings die Teilchen dünner gesät sind. Hat man eine solche **Netzebene** gefunden, so sind auch alle dazu parallelen in einem gewissen Abstand gezogenen Ebenen Netzebenen. Dieser Abstand ist offenbar i. Allg. verschieden von den **Gitterkonstanten**, d. h. den Teilchenabständen in *x*- oder *y*-Richtung (Abb. 16.8). Wenn paralleles Röntgenlicht auf eine Netzebene fällt, wirkt jedes daraufliegende Teilchen als Streuzentrum und emittiert eine Sekundärwelle. Alle diese Sekundärwellen setzen sich nach *Huygens* zu einer regulär reflektierten Welle zusammen (Abb. 16.8b). Dasselbe geschieht an den dazu parallelen Netzebenen, denn auf dem Abstand *d* wird die Röntgenwelle nur sehr wenig absorbiert. Alle diese reflektierten Wellen interferieren. Ist die Verstärkungsbedingung „Gang-

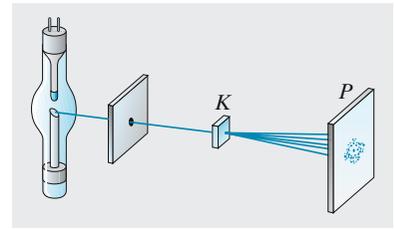


Abb. 16.5. Anordnung von *v. Laue*, *Friedrich* und *Knipping* zur Erzeugung von Kristallinterferenzen

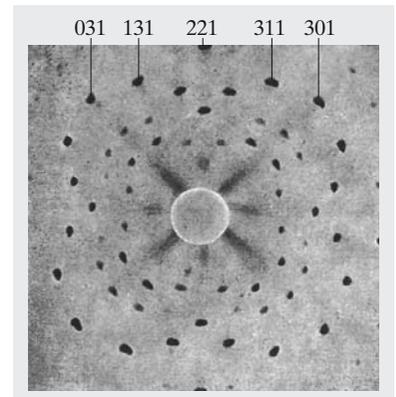


Abb. 16.6. Laue-Interferenzen mit einer parallel zur Würfel­fläche gespaltenen NaCl-Kristallplatte. (Aus R. W. Pohl: *Einführung in die Physik*, Band 3: *Optik und Atomphysik*, 13. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976)) Die oben angegebenen Zahlentripel sind die millerschen Indizes der Netzebenen, an denen ein passender Wellenlängenbereich reflektiert wird

² Röntgenstrahlen sehr hoher Energie werden in Synchrotrons erzeugt (Abschn. 11.3.2)

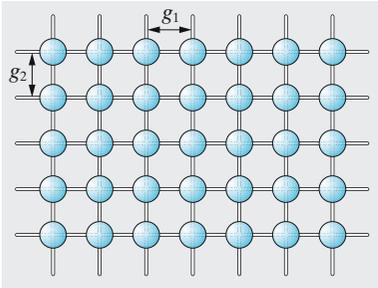


Abb. 16.7. Schema eines Kreuzgitters

unterschied = ganzes Vielfaches der Wellenlänge“ nicht exakt erfüllt, so interferiert sich die reflektierte Welle völlig weg. Man sieht das wieder am einfachsten im Zeigerdiagramm, wo jeder Phasenunterschied δ der Teilwellen als Winkel zwischen den Amplituden-Zeigern zum Ausdruck kommt. Hat man sehr viele solche Zeiger für Reflexionen an den vielen parallelen Netzebenen, dann schließen sie sich selbst bei sehr kleinem δ zu einem mehrfach durchlaufenen Polygon, die Summenamplitude ist praktisch 0. Nur wenn δ exakt $k \cdot 2\pi$ ist, streckt sich das Polygon, alle Teilamplituden addieren sich (Abschn. 10.1.3).

Für welche Einfallswinkel und welche Wellenlängen die Verstärkungsbedingung erfüllt ist, liest man aus Abb. 16.9 ab. Von A bis B bzw. von A' bis C haben durchgehende und reflektierte Welle gleich weit zu laufen, ebenso von C bzw. D bis zum sehr weit entfernten Film. Der Gangunterschied ist also einfach BD :

$$\boxed{\text{Reflexionsbedingung von W. L. Bragg}} \quad (16.4)$$

$$BD = 2d \cos \vartheta = k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

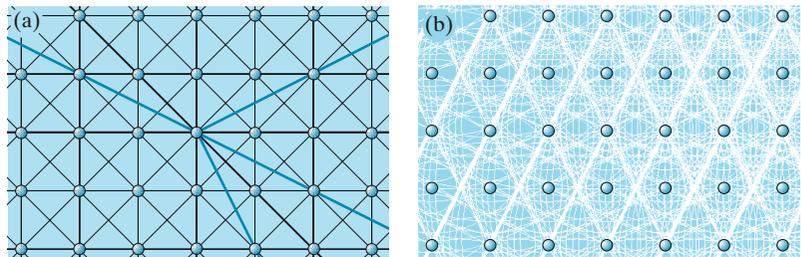
Das folgt auch aus (10.20) mit $n = 1$. Diese Bedingung ist bei gegebenem ϑ nur für wenige λ und bei gegebenem λ nur für wenige ϑ erfüllt. Zu jedem Punkt im Beugungsdiagramm gehört eine Netzebene, die den Winkel zwischen direktem und reflektiertem Strahl halbiert. Diese Netzebene sucht sich zur Reflexion aus dem einfallenden „weißen“ Röntgenlicht die Wellenlänge heraus, die die **Bragg-Bedingung** erfüllt. Die Reflexe sind eigentlich „bunt“. Ihre Intensität ist umso höher, je dichter die reflektierende Netzebene mit Teilchen besetzt ist und je mehr parallele reflektierende Ebenen es gibt, d. h. je kleiner d ist. In Abb. 16.8 erzeugt die vertikale Ebene den stärksten Reflex, etwa doppelt so stark wie die angedeutete schräge Ebene, wenn die geometrischen Verhältnisse sonst gleich sind.

Laues eigene Deutung des Diagramms klingt etwas anders, ist aber logisch äquivalent mit der von *Bragg*. Wenn man zwei Strichgitter (Durchlassgitter) wie in Abb. 16.7 senkrecht kreuzt, so unterliegen die Richtungen für die Interferenzmaxima zwei Bedingungen (Abschn. 10.1.6):

$$z_1 \lambda = g_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) , \quad z_2 \lambda = g_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) , \quad (16.5)$$

wo α und α_0 die Winkel des gebeugten und des einfallenden Strahls gegen die x -Richtung und β und β_0 die Winkel gegen die y -Richtung sind. Die gebeugten Strahlen müssen also sowohl auf einem Kegel um die x -Richtung mit dem Öffnungswinkel 2α , als auf einem Kegel um die y -Richtung mit

Abb. 16.8. (a) Zurückführung der Laue-Interferenzen auf Spiegelung des einfallenden Strahls an geeigneten Netzebenen im Innern des Kristalls. (b) So kommen die Reflexe zustande: Von links oben fällt eine Primärwelle ein. Um jedes von ihr getroffene Teilchen bilden sich kreisförmige Streuwellen, die zu ebenen Reflexwellen interferieren. Die Reflexe an 1, 0 und 0, 1 (senkrechte bzw. waagerechte Netzebene) fallen zusammen und zeichnen sich daher besonders stark ab, laufen allerdings in entgegengesetzten Richtungen. 1, 1 und 1, -1 (45°-Ebenen) geben schwächere Reflexe, (um $\lambda/2$ verschoben und auch gegenläufig), weil sie weniger dicht besetzt sind



dem Öffnungswinkel 2β liegen. Im Allgemeinen schneiden sich beide Kegel; in Richtung dieser Schnittgeraden verlaufen also gebeugte Strahlen. Für jedes λ , das kleiner als g_1 und g_2 ist, und jede Einfallrichtung α_0, β_0 kommt ein Schnitt der zugehörigen Strahlenkegel zustande. Die Beugungsfigur eines Kreuzgitters enthält also alle Wellenlängen, die im auffallenden Licht enthalten sind.

Bringt man aber nun in gleichen Abständen g_3 hintereinander lauter parallele Kreuzgitter so an, dass die Kreuzungspunkte in der z -Richtung senkrecht übereinander liegen, so tritt als dritte „Laue-Gleichung“ für die Richtung der gebeugten Strahlen zu (16.5) hinzu:

$$z_3\lambda = g_3(\cos \gamma - \cos \gamma_0) . \tag{16.6}$$

Damit wirklich eine Verstärkung zustande kommt, muss auch der Kegel um die z -Achse mit dem Öffnungswinkel 2γ durch die Schnittlinie der beiden anderen Kegel gehen. Das wird im Allgemeinen nicht der Fall sein, sondern bei vorgegebenen Werten von z_1, z_2 und z_3 , die kleine ganze Zahlen sind, nur für bestimmte Wellenlängen λ erfüllt sein. Nach längerer Rechnung ergibt sich daraus wieder die Bragg-Bedingung (16.4).

Diese Bedingung gibt an, in welchen Richtungen (bei gegebener Wellenlänge) gebeugte Bündel oder „Reflexe“ entstehen können, sie sagt aber nichts über deren Intensität. Diese ergibt sich, wenn man die Teilchen, die an den Gitterpunkten sitzen, nicht einfach als Punkte schematisiert, sondern auf ihre innere Struktur Rücksicht nimmt. Ein solches Teilchen kann ja ein ganzes, u. U. riesiges Molekül sein. Selbst ein einzelnes Atom hat eine ausgedehnte Elektronenhülle. Außerdem geben die Punkte des Idealgitters nur die Ruhelagen der Teilchen an, um die sie thermische Zitterbewegungen ausführen. Alle drei Effekte – Existenz mehrerer Atome in der „Basis“ des Gitters, Elektronenhülle jedes Atoms und thermische Schwankungen – führen zu inneren Interferenzen der Teilwellen, die von den einzelnen Strukturelementen stammen, und führen i. Allg. zu einer Herabsetzung der Intensität, manchmal sogar zur völligen Auslöschung des Reflexes. Diese Effekte werden in Abschn. 17.1.3 genauer behandelt.

Beim Laue-Verfahren mit feststehendem Kristall, auf den kontinuierliches Röntgenlicht fällt, suchen sich die einzelnen Wellenlängen Netzebenen mit passendem Abstand d und Einstellwinkel ϑ , an denen sie nach *Bragg* reflektiert werden. Man kann aber auch immer mit der gleichen Netzebene arbeiten und durch Änderung des Einfallswinkels ϑ , d. h. Drehung des Kristalls mit gleichzeitiger Schwenkung des Empfangsgerätes, nacheinander die einzelnen Wellenlängen in gewissen Grenzen durchlaufen, also ein Röntgenspektrum aufnehmen.

Strahlen gleicher Wellenlänge, aber von verschiedenen Stellen der Antikathode A stammend, werden bei *Braggs* Drehkristallmethode am gleichen Punkt P der Photoplatte gesammelt, wenn dieser von der Drehachse D des Kristalls ebenso weit entfernt ist wie der Spalt S . Zunächst stellen wir die Kristalloberfläche parallel zu SP . Strahlung der Wellenlänge λ , für die $k\lambda = 2d \cos \vartheta$ ist, wird bei D nach P reflektiert. Nun drehen wir den Kristall um D . Seine Oberfläche schneidet jetzt den Kreis, der durch S, D und P geht, auch in einem zweiten Punkt B . Die Winkel SDP und SBP sind gleich als Peripheriewinkel über der Sehne SP ,

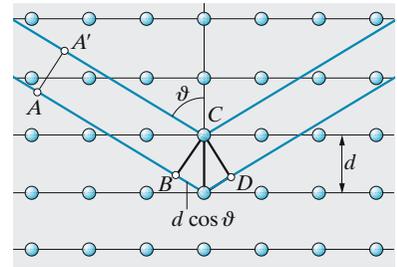


Abb. 16.9. Zwischen den Reflexen an zwei Netzebenen eines Kristalls herrscht ein Gangunterschied $2d \cos \vartheta$, wenn der Strahl um ϑ vom Lot abweicht

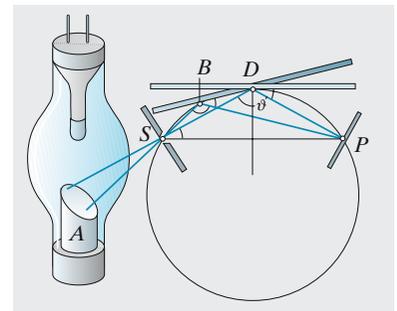


Abb. 16.10. Die bragg'sche Drehkristallmethode zur Wellenlängenmessung von Röntgenstrahlen

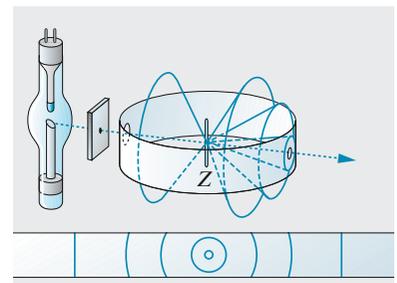
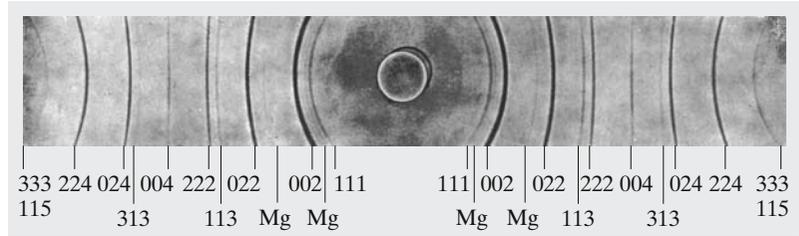


Abb. 16.11. Oben: **Debye-Scherrer-Verfahren** zur Bestimmung des Gitterbaus von Kristallen. Unten ist das Beugungsbild auf dem abgewickelten Film dargestellt

Abb. 16.12. Debye-Scherrer-Diagramm von MgO mit den zu den Beugungsringen gehörenden Laue-Indizes der „spiegelnden“ Netzebenen



ebenso ist $PBD = PSD = \pi/2 - \vartheta$ als Peripheriewinkel über PD . Also reflektiert der Kristall, diesmal an der Stelle B , einen aus S kommenden Strahl der gleichen Wellenlänge λ ebenfalls nach P . Diese Betrachtung gilt für Netzebenen beliebiger Richtung.

Genügend große Einkristalle für die Verfahren von *Laue* und *Bragg* sind schwer herzustellen. *Debye* und *Scherrer* zeigten, dass man die Struktur eines Materials auch aufklären kann, wenn es nur als Kristallpulver vorliegt. Man benutzt dazu monochromatische oder linienhafte Röntgenstrahlung. In einem Stäbchen Z , das aus feingepulverten Kristallen gepresst ist (Abb. 16.11), findet die benutzte Röntgenwellenlänge unter den vielen ungeordneten Kriställchen immer solche vor, deren Orientierung der Reflexionsbedingung genügt. Die so an einer Netzebene gebeugten Strahlen erfüllen einen Kegelmantel, dessen Öffnungswinkel, abzulesen auf einem koaxial zu Z gelegten Film, nach (16.4) den Abstand der betreffenden Netzebenen ergibt. Auch daraus lässt sich die Kristallstruktur rekonstruieren (Abb. 16.12).

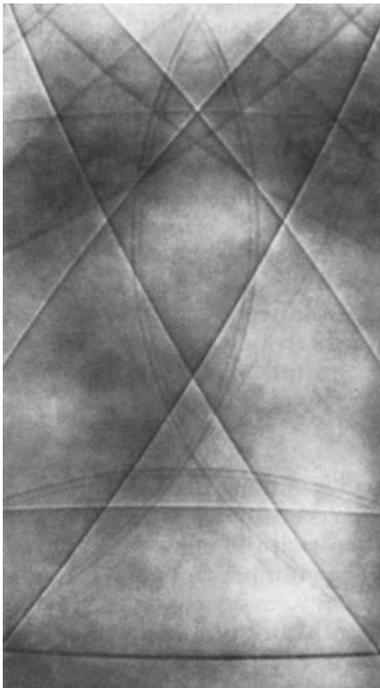


Abb. 16.13. Emission einer Kupfer-Einkristall-Antikathode im Gebiet um den Oktaederpol des kubisch-flächenzentrierten Gitters (Überlassen von *W. Kossel*)

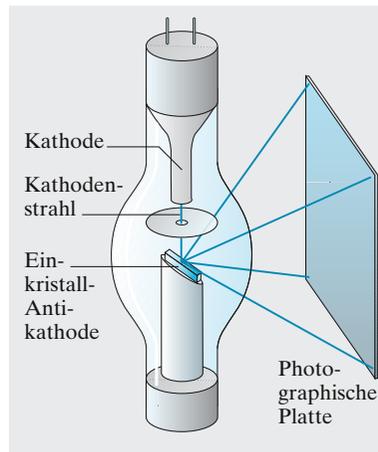


Abb. 16.14. Hier dient der Kristall selbst als Antikathode. Die erzeugte Röntgenstrahlung kommt aus einer Tiefe, die viele Netzebenen umfasst, und interferiert mit den an diesen reflektierten Sekundärwellen

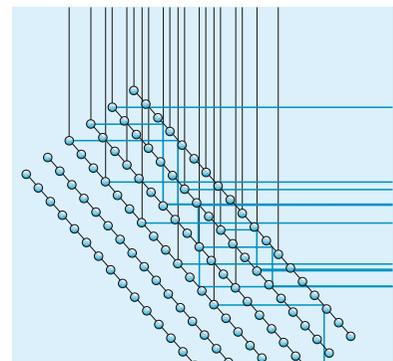


Abb. 16.15. Einige der durch schnelle Elektronen (—) ausgelösten Röntgenphotonen (—) der Primärwelle treffen auf Atome einer anderen Netzebene und werden dort gestreut bzw. lösen Photonen einer Sekundärwelle aus. Jedenfalls erleidet die Welle dadurch eine Phasenverschiebung, die bei Erfüllung der Bragg-Bedingung durch konstruktive Interferenz einen zusätzlichen registrierbaren Reflex ergibt

Wenn man ein gut fokussiertes Kathodenstrahlenbündel in einen Einkristall eintreten lässt (Abb. 16.14), verlegt man die Antikathode, von der die charakteristische Röntgenstrahlung ausgeht, in das Innere des beugenden Kristalls. Weil nun von der ins Innere verlegten Quelle die Ausstrahlung nach jeder Richtung erfolgt, erscheinen die Reflexe der im Gitter möglichen Netzebenen vollständig. Die Überlagerung der primären und der sekundären Strahlung ermöglicht, die Phasenbeziehung zwischen ihnen wahrzunehmen (Abb. 16.13 und 16.15), während die Laue- und Bragg-Interferenzen nur die Phasenbeziehungen der Sekundärwellen untereinander zeigen. Die Deutung der Interferenzen ergibt, dass sich die von der Gitterquelle ausgehenden Wellen kohärent im ganzen Raumwinkel 4π ausbreiten.

16.3.3 Röntgenoptik

Kennt man die Gitterkonstanten der Kristalle – sie lassen sich aus Dichte, Atommasse und Avogadro-Zahl leicht bestimmen – so liefert die Röntgenbeugung nach *Bragg* oder *Debye-Scherrer* auch die Wellenlängen der Röntgenlinien auf indirekte Weise. Direkte Wellenlängenmessungen an künstlich hergestellten Gittern gelangen erst um 1925 durch den Trick der **streifenden Inzidenz**: Einer Welle, die fast parallel zur Gitterebene einfällt, erscheint der Strichabstand wesentlich reduziert. Wenn man in der Interferenzbedingung (10.13) statt der gegen die Normale gemessenen Winkel α und β ihre Komplemente φ und ψ einführt (Abb. 16.16), erhält man

$$k\lambda = g(\cos \varphi - \cos \psi) . \quad (16.7)$$

Die sehr kleinen Winkel φ und ψ sind schwer zu bestimmen. Man registriert daher auf einer hinreichend weit entfernten Photoplatte den gebeugten Strahl zusammen mit dem reflektierten Strahl und in einer weiteren Belichtung nach Wegnahme des Gitters auch den einfallenden Strahl in seiner Verlängerung. Die Differenzwinkel δ und γ zwischen diesen Richtungen $\delta = \psi + \varphi$, $\gamma = \psi - \varphi$ (Abb. 16.16) enthalten dieselbe Information wie die Originalwinkel φ und ψ :

$$k\lambda = 2g \sin \frac{\psi + \varphi}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \approx \frac{g}{2} (\psi + \varphi)(\psi - \varphi) = \frac{g}{2} \delta \gamma . \quad (16.8)$$

Kein Gitter kann feiner sein als ein Kristall, wenn auch dessen dreidimensionale Struktur das Beugungsbild kompliziert. Beim **Kristallspektrographen** (Abb. 16.17) reflektiert der langsam rotierende Kristall nach und nach mit verschiedenen Netzebenen verschiedene Wellenlängen, und zwar mit besonders großer Schärfe und Intensität, wenn er zu einem Konkavgitter ausgeschliffen ist.

Theoretisch könnte ein **Röntgenmikroskop** sehr kleine, der Wellenlänge von Bruchteilen eines nm entsprechende Details auflösen. Die übliche Linsen- oder Spiegeloptik funktioniert aber nicht, weil die Brechzahl n aller Stoffe im Röntgengebiet nur ganz wenig von 1 abweicht. Da n meist kleiner als 1 ist (Abschn. 10.3.3), wird ein aus dem Vakuum kommender Strahl total reflektiert, allerdings nur bei sehr flachem Einfall (streifender Inzidenz). Schwach gekrümmte Spiegel, auch als „Röntgenlinsen“ dienen. Wegen dieser Beschränkungen erreicht das Röntgenmikroskop in der Praxis kaum höhere Auflösung als das Lichtmikroskop. Daneben benutzt

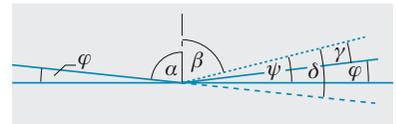


Abb. 16.16. Absolute Wellenlängenmessung von Röntgenstrahlen mit einem streifend angestrahlten Strichgitter nach *Compton* und *Doan*. Der Röntgenstrahl fällt von links unter dem kleinen Winkel φ gegen die horizontale Gitterebene ein

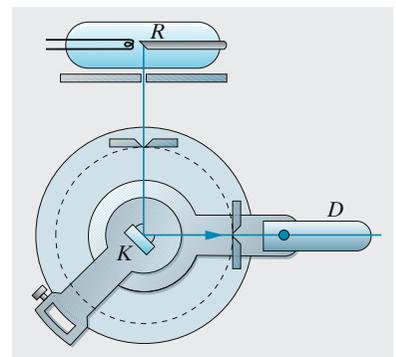


Abb. 16.17. Röntgenspektrometer mit Röntgenröhre *R*, drehbarem Analysatorkristall *K* und Detektor *D*. (Nach W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

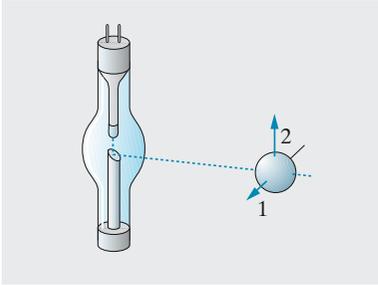


Abb. 16.18. Zum Nachweis der **Polarisation der Röntgenbremsstrahlung**

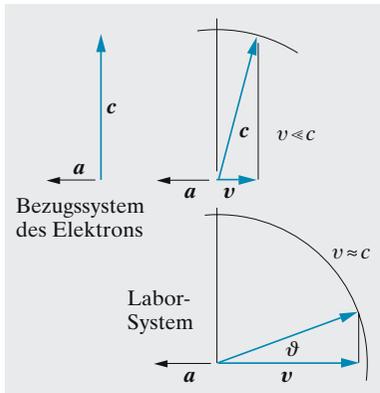


Abb. 16.19. In seinem eigenen Inertialsystem strahlt ein gebremstes Elektron vorwiegend senkrecht zu seiner Beschleunigungsrichtung. Im Laborsystem, in dem das Elektron mit v fliegt, müssen die Photonen ebenfalls mit c laufen. Bei $v \ll c$ scheint es noch, als werde v einfach zu c addiert. In Wirklichkeit klappt aber c auf einem Kreis herum

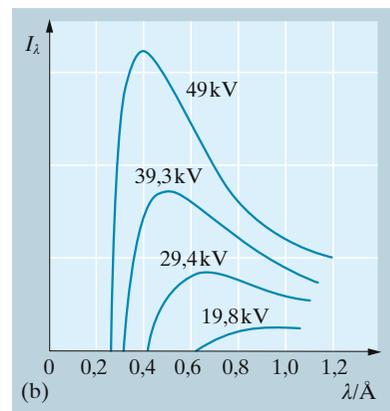
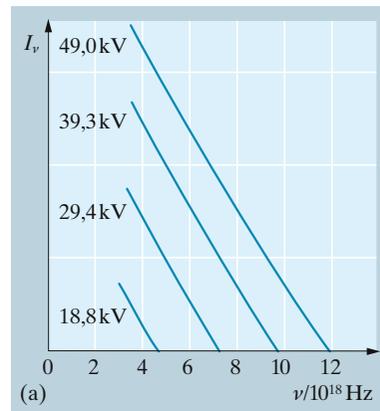
man auch, ohne optische Abbildung, einen sehr feinen Antikathoden-Brennfleck; die radial von diesem Zentrum ausgehende Strahlung projiziert eine Probe auf einen weit entfernten Schirm, ähnlich wie beim einfachen Feldemissions-Mikroskop.

16.3.4 Bremsstrahlung

Ein plötzlich gebremstes Elektron muss nach der klassischen Elektrodynamik wie jede beschleunigte Ladung strahlen, und zwar nach Abb. 7.109 überwiegend senkrecht zur Richtung der Beschleunigung a . Deswegen schrägt man die Antikathode meist unter 45° ab, als ob man eine ideale Reflexion erwartete. Der nach der anderen Seite gehende Teil der Strahlungscharakteristik wird in der Antikathode weitgehend absorbiert. Auch die Polarisation nach Abb. 7.110 mit dem E -Vektor senkrecht zu a und r lässt sich nachweisen. Ein Streustrahler aus leichten Atomen (Abb. 16.18) sendet, wie man mit einer Ionisationskammer prüfen kann, in Richtung 1 viel mehr Sekundärstrahlung aus als in Richtung 2. Das entspricht dem Strahlungsdiagramm von Ladungen, die von der Primärwelle in Richtung 2 hin- und hergeschüttelt werden.

Elektronen mit Energien um 500 keV und darüber geben ihre Bremsstrahlung nicht mehr nach *H. Hertz* überwiegend senkrecht zur Bahn, sondern mehr in Vorwärtsrichtung ab. Man versteht das, indem man sich zunächst ins Bezugssystem des schnellen Elektrons setzt. Wenn dieses etwas gebremst wird (nicht gleich bis zur Ruhe), strahlt es in seinem eigenen System wie gewohnt senkrecht zur Bahn. Umrechnung ins Laborsystem erfolgt, indem man die Elektronengeschwindigkeit v addiert. Trotz $v \approx c$ liefert diese Addition aber für das Photon nicht etwa einen 45° -Vektor mit dem Betrag $\sqrt{2}c$, sondern das Photon kann auch jetzt nur mit c fliegen, und sein Vektor mit diesem Betrag c muss daher bis auf einen Winkel ϑ mit $\cos \vartheta = v/c$, $\sin \vartheta = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ an die Bahnrichtung herangeklappt werden. Diese Wurzel gibt genau E_0/E (E Energie, E_0 Ruhenergie des Elektrons, Abschn. 12.8.2). Der Vorwärts-Kegel wird also mit wachsendem E immer enger: $\vartheta \approx E_0/E$. Man kann das auch so ausdrücken: Wegen der Zeitdilatation kommt das Photon in senkrechter Richtung nur um den

Abb. 16.20a,b. Spektrale Intensitätsverteilung der Röntgen-Bremsstrahlung aus dicker Antikathode als Funktion der Frequenz (a) bzw. der Wellenlänge (b) (nach *Kulenkampff*). I_λ , I_ν : Intensität pro Intervall der entsprechenden Größe



Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ weniger weit als erwartet. Man kann auch sagen: Bei $E \ll E_0$ ist der Impuls des Photons klein gegen den des Elektrons, weil $p_\gamma = h/\lambda = E/c \ll \sqrt{2E_0E}/c = mv = p_e$; das getroffene Atom schluckt den Impuls p_e , für das Photon gibt es hieraus keine Richtungsbeschränkung. Bei $E \gg E_0$ dagegen geht fast der ganze Impuls des Elektrons ans Photon über, denn relativistisch gilt auch fürs Elektron $E \approx pc$.

Im elektrischen Feld eines Hindernisses wird ein Proton wegen seiner größeren Masse 1 836mal weniger gebremst als ein Elektron. Nach (7.72) strahlt bei gleicher Energie also das Proton pro Zeiteinheit 1 836²mal weniger intensiv als das Elektron, dringt aber entsprechend tiefer ein.

Der plötzlichen Bremsung, also einer völlig unperiodischen Beschleunigung, entspricht nach *Fourier* ein kontinuierliches Spektrum, ähnlich dem akustischen Knall. Daher sollte sich klassisch das Spektrum der Röntgen-Bremstrahlung bis zu beliebig hohen Frequenzen erstrecken. Da die Strahlung aber in Photonen abgepackt ist, kann eins davon höchstens die gesamte Energie eU des Elektrons übernehmen. Das Spektrum bricht bei einer **Grenzfrequenz** ν_{gr} ab, für die das Duane-Hunt-Gesetz gilt

$$h\nu_{gr} = eU \quad \text{oder} \quad \lambda_{gr} = \frac{hc}{eU} = \frac{1\,234\text{ nm}}{U} \quad (U \text{ in V}) \quad (16.9)$$

Aus ν_{gr} kann man sehr einfach die Planck-Konstante h bestimmen.

16.3.5 Charakteristische Strahlung

Über das Bremsspektrum lagert sich bei hinreichend hoher Elektronenenergie ein Linienspektrum von relativ einfachem Bau, das im Gegensatz zum Bremsspektrum charakteristisch für das Antikathodenmaterial ist. Es entsteht, indem die schnellen Elektronen tief in die Hülle der getroffenen Atome eindringen, und hängt nur vom Aufbau der inneren Hülle ab, die durch chemischen und Aggregatzustand kaum berührt wird. Daher senden auch feste Körper, anders als im sichtbaren Gebiet, scharfe Röntgenlinien aus (Abb. 16.21).

Als man noch keine Wellenlänge, sondern nur die Härte (das Durchdringungsvermögen) der Röntgenstrahlung messen konnte, lieferten Experimente über **Röntgenfluoreszenz** wichtige Aufschlüsse. In Abb. 16.22 sendet eine röntgenbestrahlte Metallplatte nach ziemlich allen Richtungen Sekundärstrahlung aus, nachgewiesen mit einer Ionisationskammer. Ein geringer Teil dieser Strahlung ist Rayleigh-Streuung: Die in der Primärwelle geschüttelten Elektronen strahlen mit der gleichen Frequenz. Der Hauptteil der Sekundärstrahlung ist aber viel weicher als die Primärstrahlung, und ihr Absorptionskoeffizient hängt von der Röhrenspannung nicht ab. Ebenso verhält sich ja die im Sichtbaren erregte Fluoreszenz: Ihre Frequenz ist nach der Stokes-Regel verringert (Abschn. 13.3.3). Die Fluoreszenzstrahlung von Fe, Co, Ni, Cu, Zn wird entsprechend der Reihenfolge im Periodensystem härter; maßgebend ist hier die Ordnungszahl, nicht die Atommasse, denn Co ist schwerer als Ni. Die Sekundärstrahlung ist charakteristische Strahlung des beschossenen Elements.

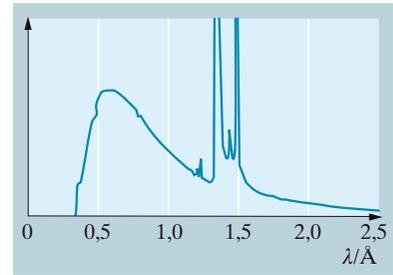


Abb. 16.21. Röntgenspektrum einer Kupfer-Antikathode mit Bremskontinuum und überlagerten Linien K_α und K_β des Kupfers. Röhrenspannung 38 kV

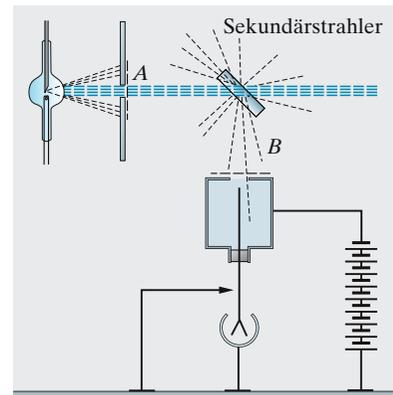


Abb. 16.22. Anordnung zur Messung der Härte von Röntgenfluoreszenzstrahlung

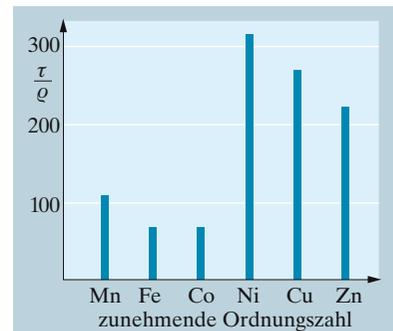


Abb. 16.23. Absorbierbarkeit der K -Strahlung der Elemente vom Mangan bis zum Zink in Eisen

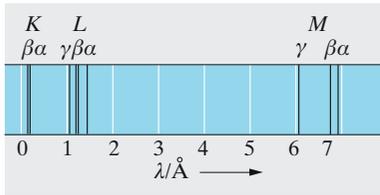


Abb. 16.24. Das Spektrum der charakteristischen Röntgenstrahlung des Wolframs

Eine dünne Fe-Schicht, z. B. ein mit einer Eisensalzlösung getränktes Filtrierpapier, das man bei *B* in Abb. 16.22 über das Fenster der Ionisationskammer legt, absorbiert die charakteristische Strahlung des Fe schlechter als die des Ni (Abb. 16.23). Anders als im Sichtbaren handelt es sich hier nicht um eine echte Resonanzabsorption.

Die Röntgenspektroskopie enthüllt in der charakteristischen Strahlung jedes Elements höherer Ordnungszahl Liniengruppen sehr verschiedener Frequenz, die als *K*-, *L*-, *M*-, ...-Strahlung bezeichnet werden (Abb. 16.24). Alle diese Gruppen sind natürlich bei hinreichender Röhrenspannung anregbar. *Moseley* fand den sehr einfachen Zusammenhang zwischen der Frequenz der langwelligsten *K*-Linie K_{α} eines Elements und seiner Ordnungszahl *Z*:

$$\nu_{K_{\alpha}} = c/\lambda_{K_{\alpha}} = \frac{3}{4} R_{\infty} c (Z - 1)^2 \quad (16.10)$$

R_{∞} ist die gleiche Rydberg-Konstante, die man für die optischen Spektren findet. Für die L_{α} -Linie gilt, wenn auch nicht ganz so exakt

$$\nu_{L_{\alpha}} = c/\lambda_{L_{\alpha}} = \frac{5}{16} R_{\infty} c (Z - 7,4)^2 \quad (16.11)$$

Die Frequenz aller Linien wächst monoton mit der Ordnungszahl, ohne dass die Periodizität der Elemente zum Ausdruck kommt.

Alles deutet darauf hin, dass auch die Röntgenlinien durch Elektronensprung zwischen stationären Zuständen entstehen, allerdings tief im Innern der Hülle. Wenn ein Kathodenstrahl-Elektron beim Aufprall auf die Antikathode aus einem Atom ein tiefliegendes Elektron herauschlägt, kann ein weiter außen liegendes Elektron in diese Lücke nachrutschen und dabei eine Linie emittieren, deren Frequenz dem energetischen Abstand beider Zustände entspricht.

Die K_{α} -Linie ergibt sich durch Vergleich mit (14.16) als Übergang von $n = 2$ nach $n = 1$ (der Faktor $\frac{3}{4}$ ist $\frac{1}{1} - \frac{1}{4}$), d. h. als langwelligste Lyman-Linie in einem Atom, in dem auf das nachrutschende Elektron die Kernladung $(Z - 1)e$ wirkt. Tatsächlich ist die Kernladung Ze ; es sieht so aus, als sitze außer dem herausgeschlagenen Elektron auch ein weiteres noch ganz innen, das genau eine Elementarladung des Kerns abschirmt. Weiter außen sitzende Elektronen sollten zur Abschirmung nichts beitragen, weil ihre kugelsymmetrische Ladungsverteilung im Innern kein Feld erzeugt (Abschn. 6.1.4). In der innersten, der *K-Schale*, sitzen also offenbar zwei Elektronen. Die weiteren Linien der *K*-Serie (K_{β} , K_{γ} usw.) stammen von Übergängen aus höheren Zuständen ($n = 3, 4$ usw.) in die *K*-Schale. Sie sind aber viel enger zusammengedrängt als die entsprechenden Linien der Lyman-Serie, weil sich bei ihnen progressiv immer mehr abschirmende Elektronen dazwischenschieben.

Um die L_{α} -Linie als langwelligste Balmer-Linie deuten zu können, muss man nach (16.11) eine viel größere Abschirmung um $7,4 e$ annehmen, also außer den beiden *K*-Elektronen noch durch weitere fünf oder sechs abschirmende Elektronen. Die *L*-Schale enthält daher mindestens sechs bis sieben Elektronen, einschließlich des herausgeschlagenen. Vergleich mit dem periodischen System liefert sogar acht *L*-Elektronen, die demnach nicht alle mit ihrer vollen Ladung zur Abschirmung beitragen. Dass diese

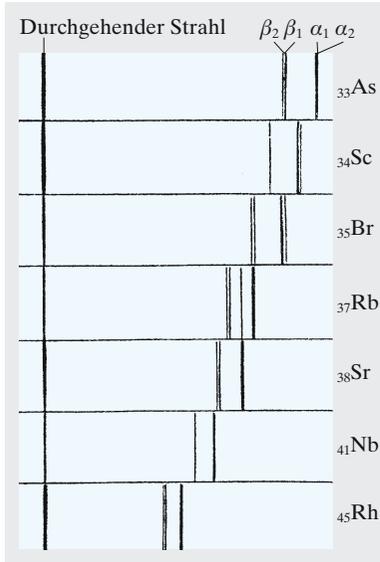


Abb. 16.25. Charakteristisches Röntgenspektrum (*K*-Serie) der Elemente von As bis Rh. Entsprechend dem Moseley-Gesetz nimmt die Frequenz mit der Ordnungszahl zu (photographisches Negativ; nach *K. Siegbahn*). Es handelt sich um Beugungsspektren in einem Röntgenspektrometer ähnlich Abb. 16.17. Der nichtabgelenkte Strahl ist angegeben. Die Ablenkung ist annähernd proportional der Wellenlänge. (Aus W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

Abschirmzahlen für K_α und L_α bei allen Elementen gleich sind, zeigt, dass die K - und L -Schale, wenn sie einmal mit zwei bzw. acht Elektronen besetzt ist, nicht mehr aufnehmen kann. Sonst würden ja Röntgenübergänge in die tieferen Schalen auch ohne Elektronenstoß oder andere energiereiche Anregung stattfinden können. Das Nachrutschen der äußeren Elektronen erfolgt vorzugsweise zwischen einer Schale und der nächstinneren: Zuerst fällt ein L -Elektron in ein Loch in der K -Schale, dann ein M -Elektron in das L -Loch usw. Daher treten i. Allg. alle Linien einer Röntgenserie und alle Serien gleichzeitig auf, wenn die Anregung genügend energiereich ist.

Wie oben gezeigt, wird die K_α -Linie des Fe im Eisenatom nicht resonanzabsorbiert. Das ist verständlich, denn eine solche Absorption als direkte Umkehrung des L - K -Überganges würde voraussetzen, dass gerade ein L -Platz frei ist. Da dies nicht der Fall ist, muss das K -Elektron bis in die äußerste, von Natur aus nur teilweise besetzte Schale gehoben werden, was mehr Energie erfordert, als das K_α -Photon hat.

Die K -Serie zerfällt nur in eine Gruppe nahe benachbarter Linien K_α , K_β usw., die L -Serie dagegen in drei solche Gruppen, die M -, N -... Serien in 5, 7, ... Gruppen. Man muss daraus schließen, dass die L -, M -, N -Zustände selbst 3-, 5-, 7fach energetisch aufgespalten sind. Ähnlich zu der etwas andersartigen Aufspaltung der Alkali-Linien zeigt dies, dass die eine Quantenzahl n ($K: n = 1, L: n = 2, \dots$) zur Kennzeichnung der Energiezustände nicht ausreicht. Man braucht noch die Drehimpuls-, die magnetische und die Spinquantenzahl, deren Kombinationen die beobachteten sichtbaren und Röntgenterme ergeben.

Nicht jedes aus der K -, L -, ... Schale herausgeschlagene Elektron führt zur Emission einer Röntgenlinie. Die Strahlungsausbeute, definiert als Anzahl der in einer bestimmten Linienserie emittierten Photonen dividiert durch die Anzahl der in der betreffenden Schale ionisierten Atome, ist stets kleiner als 1, und zwar am kleinsten für leichte Atome. **Strahlungslose Übergänge** sind bei leichten Atomen wahrscheinlicher. Solche Übergänge benutzen die Energie des nachrutschenden Außenelektrons zur Abspaltung eines weiteren Elektrons aus dem gleichen Atom. Man kann von einem **inneren Photoeffekt** sprechen und sich vorstellen, das Röntgenphoton werde zwar emittiert, aber im gleichen Atom sofort wieder absorbiert. Das abgespaltene Elektron bekommt dann die Differenz der beteiligten Übergangsenergien als kinetische Energie mit. So kann eine ganze Kaskade von Elektronen mit verschiedenen kinetischen Energien abgelöst werden. Nebelkammeraufnahmen beweisen quantitativ die Existenz dieser Elektronen mit ihren diskreten Energiestufen und bestätigen damit diese Deutung des **Auger-Effektes**.

16.3.6 Röntgenabsorption

Für den Anwender von Röntgenstrahlung am wichtigsten ist ihre Schwächung beim Durchgang durch Materie – so kann der Arzt sich und den Patienten schützen – und die Abhängigkeit dieser Schwächung von der Art des Absorbers – so kann er Knochen und Fremdkörper im Gewebe sichtbar machen. Röntgenstrahlung wird wie Licht nach dem Lambert-Beer-Gesetz $I = I_0 e^{-\mu x}$ absorbiert, und der Absorptionskoeffizient μ lässt

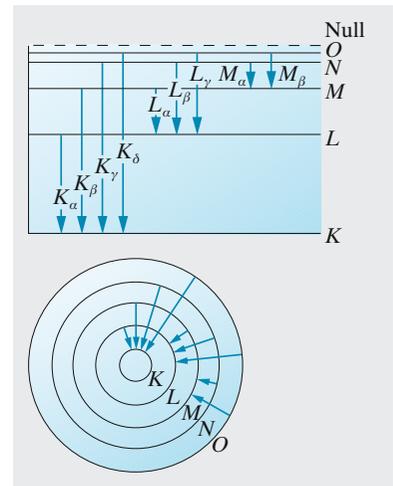


Abb. 16.26. Die Deutung der K -, L -, M -... Serien der charakteristischen Röntgenspektren aus dem Energie-Termschema (oben) und dem Schalenmodell des Atoms (unten)

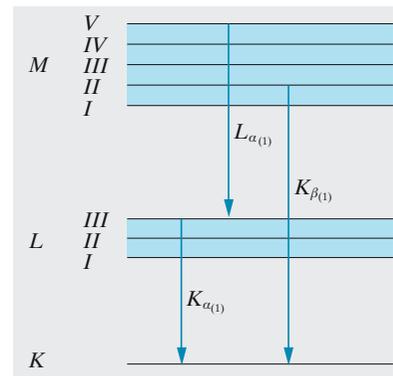


Abb. 16.27. Die Untergruppen der L - und M -Schale

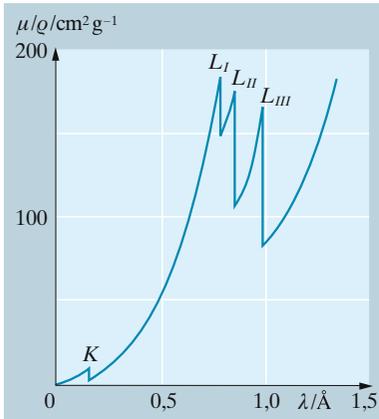


Abb. 16.28. Röntgenabsorption in Blei

sich durch Anzahldichte n und Querschnitt σ der absorbierenden Teilchen ausdrücken: $\mu = \sigma n$. Zur Absorption und Streuung tragen die Elektronen viel mehr bei als die Kerne, das zeigt schon die klassische Theorie der erzwungenen Schwingungen. Die wichtigsten Schwächungsmechanismen sind Photoeffekt, Streuung (elastische und inelastische) und Paarbildung.

Photoeffekt. Ein Röntgenquant gibt seine Energie $h\nu$ ganz an ein Atomelektron ab und schlägt es i. Allg. mit einer kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = h\nu - E_n$ aus dem Atom heraus, wo es die Bindungsenergie E_n hatte. In den leergewordenen Platz können Außenelektronen nachrutschen und charakteristische Fluoreszenz abgeben oder selbst strahlungslos Auger-Elektronen herausschlagen.

Wenn die Röntgenphotonen mit wachsender Energie eine neue, tiefere Elektronenschale attackieren können, steigt die Absorption schlagartig an. Diese **Absorptionskanten** entsprechen den Energien der jeweils härtesten der charakteristischen Linien. Anders als bei der Resonanzabsorption im Sichtbaren fällt die Absorption aber jenseits dieser Linien nicht ebenso steil wieder ab, denn infolge der Abschirmung durch die äußeren Schalen hat das Spektrum eine ganz andere Struktur: Die Energiedifferenz zwischen den unbesetzten Außenschalen und dem ionisierten Zustand ist zu vernachlässigen, K -Elektronen können also alle Energien oberhalb $E_K = (Z-1)^2 E_H$ aufnehmen, wenn auch mit abnehmender Wahrscheinlichkeit.

Wir geben eine grobe Theorie dieser Wahrscheinlichkeit, d. h. des Absorptionsquerschnittes eines Elektrons. Wenn es mit der Kreisfrequenz ω_n schwingt oder rotiert, sendet es nach $H. \text{Hertz}$ die Leistung $P = \frac{1}{6} e^2 r_n^2 \omega_n^4 / (\pi \epsilon_0 c^3)$ aus. Emission eines Photons $\hbar\omega_n$ dauert im Mittel eine Zeit

$$t_0 = \frac{\hbar\omega_n}{P} = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 \hbar}{e^2 r_n^2 \omega_n^3} = \frac{3}{2} \frac{c^2}{\alpha r_n^2 \omega_n^3};$$

$\alpha = e^2 / (4\pi\epsilon_0 \hbar c) = \frac{1}{137}$ ist die **Feinstrukturkonstante**. Dieselbe Wahrscheinlichkeit gilt auch für die Absorption, denn alle Elementarprozesse sind umkehrbar. Während welcher Zeit dt ist aber das ankommende Photon in Kontakt mit dem Elektron? Ein Elektron ist sehr klein; wie groß ist ein Photon? In diesem Zusammenhang kann man ihm den Radius λ zuschreiben, also $dt = \lambda/c$, und immer, wenn ein Elektron durch den Querschnitt $\pi\lambda^2$ des Photons tritt, kommt es mit der Wahrscheinlichkeit dt/t_0 zu einer Absorption: Der **Absorptionsquerschnitt** ist

$$\sigma_a \approx \frac{2\pi}{3} \alpha r_n^2 \omega_n^3 \frac{\lambda^3}{c^3} = \frac{2\pi}{3} \alpha r_n^2 \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^3. \quad (16.12)$$

Das erklärt den Abfall mit E^{-3} . Zur besseren Vergleichbarkeit drücken wir den Bahnradius durch den klassischen Elektronenradius

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

aus, den Radius, auf den die Elektronenladung konzentriert sein müsste, damit ihre elektrostatische Energie gleich der Ruhenergie mc^2 des Elektrons wird; $r_n = n^2 r_0 / (Z\alpha^2)$, die Bahnfrequenz drücken wir durch die relativistische Grenzfrequenz $\omega_0 = mc^2/\hbar$ aus:

$$\omega_n = \frac{1}{2} \frac{Z^2 \alpha^2 m c^2}{n^2 \hbar} = \frac{1}{2} \frac{Z^2 \alpha^2 \omega_0}{n^2}.$$

Damit wird

$$\sigma_a \approx \frac{\pi}{12} \frac{\alpha^3 Z^4}{n^2} r_0^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^3. \tag{16.13}$$

Hier tritt wieder der **Thomson-Querschnitt** $\frac{2}{3}\pi r_0^2$ auf, der knapp 0,1 barn = 10^{-29} m^2 ist.

Aus σ_a erhält man den **Absorptionskoeffizienten** $\mu = NN_{\text{at}}\sigma_a$ oder wegen $\rho = N_{\text{at}}m_{\text{at}}$ den **Massenabsorptionskoeffizienten** $\mu/\rho = N\sigma/m_{\text{at}}$ (N_{at} ist die Atomzahldichte, N absorbierende Elektronen/Atom). Wegen $m_{\text{at}} \approx 2Zm_{\text{H}}$ ist μ/ρ nur noch proportional zu Z^3 . Wenn z. B. Blei schon K -absorbieren kann (ab 150 keV), schirmt es 30-mal stärker ab als ebenso dickes Eisen. Bei Verbindungen addieren sich die Beiträge der Einzelatome. Da die Atomabstände in reinen Verbindungen und Elementen etwa gleich sind, kann man auch sagen: Jedes Atom bringt sein μ/ρ mit in die Verbindung, aber wegen $\mu/\rho = Z\sigma/m_{\text{at}}$ ist dieser Anteil mit dem Massenanteil des Atoms zu multiplizieren, z. B. für Wasser

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{9} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{H}} + \frac{8}{9} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{O}}.$$

Streuung. Ein Röntgenquant kann elastisch, d. h. ohne Energieverlust gestreut werden, ebenso wie ein sichtbares in der Rayleigh-Streuung. Meist verliert aber das Quant beim Compton-Stoß mit dem Elektron Energie und wird inelastisch gestreut. Nach (13.6) und $\Delta v = -\Delta\lambda v^2/c$ ist ja der relative Energieverlust bei hohen Energien viel größer, und daher überwiegt der Compton-Stoß dann immer mehr. Beide Vorgänge kann man auch im Bild des Hertz-Strahlers annähernd verstehen. Ein Elektron wird durch das Feld E der Röntgenwelle mit der Kreisfrequenz ω gerüttelt und zwar weit oberhalb aller Resonanzen (zur Streuung liefern ja die viel zahlreicheren Außenelektronen den Hauptbeitrag). Im Feld E wird das Elektron mit $\ddot{x} = -eE/m$ beschleunigt und strahlt die Leistung

$$P = \frac{1}{6} \frac{e^2 \ddot{x}^2}{\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{1}{6} \frac{e^4 E^2}{\pi \epsilon_0 c^3 m^2}$$

in alle Richtungen senkrecht zur Schwingung, solange diese nichtrelativistisch ist. Die Röntgenwelle hat die Intensität $I = c\epsilon_0 E^2$, also streut das Elektron mit dem Querschnitt $\sigma = P/I = e^2/(\epsilon_0 c^4 m^2)$. Dies kann man darstellen durch den klassischen Elektronenradius $r_0 = e^2/(4\pi\epsilon_0 mc^2)$. Also ist der Streuquerschnitt

$$\sigma \approx \frac{2\pi}{3} r_0^2 \approx 1,7 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 \tag{16.14}$$

bis auf einen Zahlenfaktor gleich dem Thomson-Querschnitt, den wir schon aus Abschn. 11.3.3 kennen. Alle Z Elektronen des Atoms tragen bei, und daher ist der Massenstreuquerschnitt $\mu_S/\rho \approx \sigma/(2m_{\text{H}})$ für alle Stoffe etwa $0,02 \text{ m}^2/\text{kg}$. Das bedeutet einfach, dass bei allen Elementen die Elektronendichte etwa proportional zur Massendichte ist, also die Ordnungszahl eines Atoms etwa proportional zur Massenzahl. Im relativistischen Bereich fällt μ_S/ρ etwa mit dem Energiefaktor E_0/E ab. Dieser Faktor beschreibt ja die Öffnung des Vorwärts-Kegels bei der Strahlung eines sehr schnellen Elektrons: So energiereiche Photonen werden kaum noch aus der Richtung geworfen.

Tabelle 16.4. Massenabsorptionskoeffizient einiger Stoffe in cm^2/g

λ/nm	Luft	Al	Cu	Pb
0,01	–	0,16	0,33	3,8
0,05	0,48	2,0	19	54
0,1	2,6	15	131	75
0,2	21	102	188	–

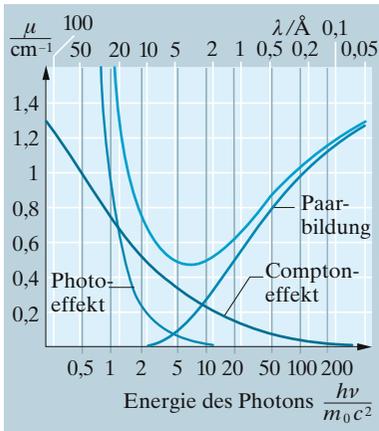


Abb. 16.29. Die durch Photoeffekt, Compton-Effekt und Paarbildung bewirkte Absorption von Photonen in Blei

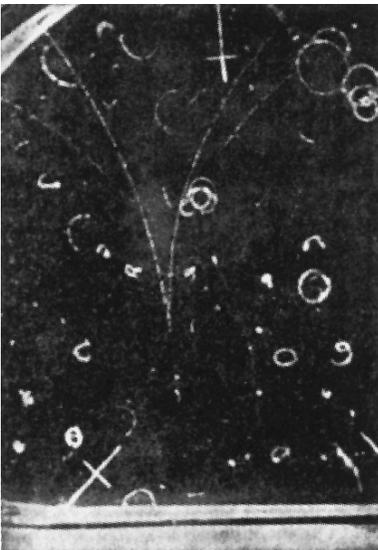


Abb. 16.30. Elektronenpaarbildung

Nach (16.13) und (16.14) überwiegt zwar der Photoeffekt immer bei kleinen Energien. Für leichte Atome taucht er aber bald unter das konstante Niveau der Streuung (für Luft z. B. um 30 keV). Für Blei liegt dieser Übergang so hoch, dass hier bereits der dritte Absorptionseffekt, die Paarbildung, einsetzt (Abb. 16.29).

x Beispiel...

Warum sieht man Knochen auf dem Röntgenbild? Sieht man sie bei hoher oder geringer Anodenspannung besser?

Ein Atom Ca oder P absorbiert entsprechend seiner Ordnungszahl nach $\mu \sim Z^3$ etwa 20mal mehr als ein Atom C, O oder N. Aber Ca und P sind auch größer, wenn auch nicht so viel, wie Abb. 16.3 vermuten lässt: Bei Ca^{++} fehlt die äußerste Schale. Damit und infolge des Proteingehalts im Knochen verringert sich dessen μ -Vorsprung auf einen Faktor um 3. Bei zu harter Strahlung (über 100 kV) hebt sich die Absorption kaum noch von der fast Z -unabhängigen Streuung ab.

Paarbildung. Von einigen MeV ab werden energiereichere Röntgenquanten wieder stärker absorbiert, werden also eigentlich „weicher“. Der Grund ist ein neuer Energie verzehrender Prozess, nämlich die Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren (Abb. 16.30). Sie wird möglich, sobald die Photonenenergie größer wird als die Ruhenergie $2mc^2$ dieser beiden Teilchen. Ein Energieüberschuss kann als kinetische Energie auf beide verteilt werden. Die Impulserhaltung wäre allerdings im Vakuum nicht möglich (das Photon hat $p = E/c$, und das ist immer größer als $2mc$, d. h. die beiden Elektronen müssten in Vorwärtsrichtung schneller als c fliegen); ein weiteres Teilchen, in dessen Feld die Paarbildung erfolgt, muss den Differenzimpuls aufnehmen. Deshalb hängt auch die Paarbildungswahrscheinlichkeit von der Art des Stoffes ab, in dem sie erfolgt.

Vorzugsweise wird der Impuls auf einen Kern übertragen. Ein Elektron hat ja ein schwächeres Feld um sich, und außerdem müsste es zusammen mit dem Impuls auch eine erhebliche Energie aufnehmen ($E = p^2/(2m)$), wodurch die Schwellenenergie der Paarbildung höher würde als $2mc^2$, nämlich $4mc^2$. Wir müssen also einen Impuls der Größenordnung mc auf einen Kern der Ordnungszahl Z übertragen. Im Abstand r ist die Kraft auf das Elektron oder das Positron $F = Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, Kern und Elektron bleiben etwa die Zeit $\Delta t = r/c$ in genügend engem Kontakt, also wird bestenfalls der Impuls $p \approx F \Delta t \approx Ze^2/(4\pi\epsilon_0 rc)$ übertragen. Damit er mc wird, muss $r \approx Ze^2/(4\pi\epsilon_0 mc^2)$ sein. Das ist wieder der klassische Elektronenradius, multipliziert mit Z . Der Paarbildungsquerschnitt ist von der Größenordnung $Z^2 r^2$, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit für den Übergang Photon \rightarrow Elektronenpaar selbst, die wie für alle Einphotonenprozesse etwa $\alpha = 1/137$ ist:

$$\sigma_p \approx \alpha Z^2 r^2. \quad (16.15)$$

Der genaue Wert ist energieabhängig: Je kleiner der Energieüberschuss des Photons über $2mc^2$ ist, desto mehr Impuls muss übertragen wer-

den, und desto langsamer trennen sich Elektron und Positron (solange sie fast am gleichen Ort sind, üben sie ja viel weniger Kraft auf den Kern aus, als wenn sie einzeln wären). Beides führt zu einem ziemlich langsamen (logarithmischen) Anstieg des Paarbildungsquerschnitts mit der Photonenenergie.

Abbildung 16.30 ist eine Nebelkammeraufnahme einer Paarbildung. Der Röntgenstrahl, der keine Spur hinterlässt, ist von unten her eingedrungen. Die Elektronenbahnen sind gekrümmt, und zwar im entgegengesetzten Sinne, weil man die Kammer in ein Magnetfeld gestellt hat. Der umgekehrte Prozess (**Paarvernichtung**) findet statt, wenn ein Positron mit einem gewöhnlichen Elektron von nicht zu hoher Energie zusammentrifft. Dann entstehen zwei γ -Quanten mit je etwa 500 keV, also $\lambda = 2,4 \cdot 10^{-12}$ m, die unter 180° und senkrecht zueinander polarisiert emittiert werden. Dies ist das Schicksal des Positrons in Abb. 16.30 nach kurzer Laufstrecke. Der Zerstrahlung kann Bildung eines wasserstoffähnlichen Systems aus Positron und Elektron, eines **Positronium-Atoms** vorausgehen, das in zwei Zuständen (mit parallelen oder antiparallelen Spins) vorkommt und nach Lebensdauern von $1,4 \cdot 10^{-7}$ s bzw. $1,2 \cdot 10^{-10}$ s zerfällt. Die Vernichtungsstrahlung mit $2,4 \cdot 10^{-12}$ m, also der Compton-Wellenlänge, überlagert sich als starke monochromatische Streulinie dem Spektrum der Compton-Streuung.

16.4 Moleküle

Sinngemäß übertragen, erklärt das Bohr-Modell auch vieles in den viel komplizierteren Spektren der Moleküle. Was aber die Moleküle zusammenhält, versteht man richtig nur quantenmechanisch, selbst im Fall der Ionenbindung, wo man ja erst erklären muss, warum ein Elektron vom Na zum Cl übergeht.

16.4.1 Die Energiestufen der Moleküle

Moleküle haben viel mehr Spektrallinien als Atome. Oft häufen sich die Linien so, dass der Eindruck von kontinuierlichen Emissionsbändern, hier **Banden** genannt, entsteht, die nach einer Seite stetig schwächer werden („Abschattierung“), an der anderen aber im **Bandenkopf** plötzlich abbrechen (Abb. 16.31). Erst hochauflösende Spektralapparate zerlegen auch die Banden in sehr viele scharfe, regelmäßig angeordnete Linien, deren Abstand manchmal über die ganze Bande konstant ist.

Die Energie, die ein Molekül abstrahlen kann, steckt ja nicht wie beim Atom nur in angeregten Elektronen. Die Atome können auch ge-

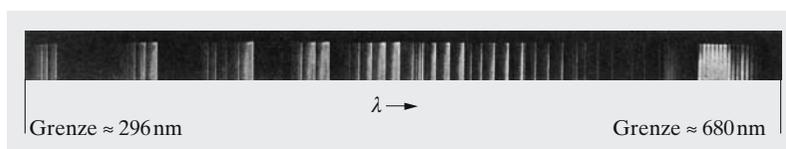


Abb. 16.31. Bandenspektrum. Spektrum des Lichtes aus der positiven Säule einer Glimmentladung in Stickstoff. (Aufnahme von *H. Schüler*, Max-Planck-Institut, Hechingen)

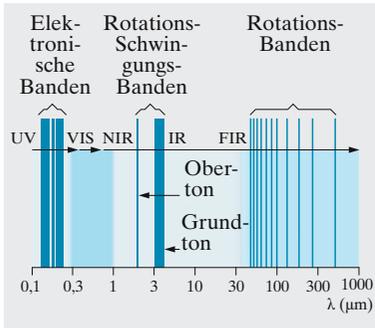


Abb. 16.32. Schematische Darstellung der drei wesentlichen Beiträge zum elektromagnetischen Spektrum des HCl-Moleküls auf logarithmischer Wellenlängenskala. (UV: UV-Licht; VIS: sichtbares Licht; IR: Infrarot; NIR: Nah-Infrarot; FIR: Fern-Infrarot)

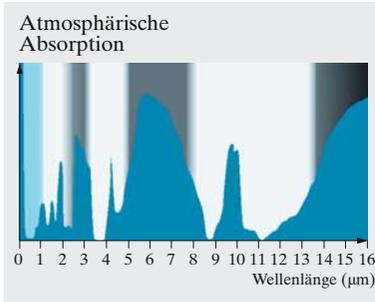


Abb. 16.33. Einfache Moleküle (H_2O , CO_2 , O_2 , N_2 , O_3 , ...) sind für die unterschiedliche Durchlässigkeit (helle Bereiche) der Atmosphäre für elektromagnetische Strahlung entscheidend. Am wichtigsten für uns ist das „Fenster“ für das sichtbare Licht (hellblauer Streifen am linken Rand)

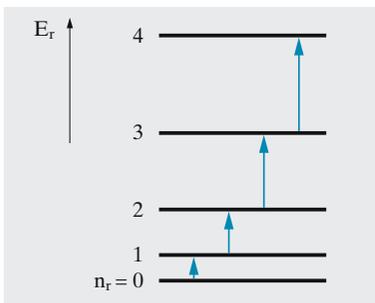


Abb. 16.34. Rotations-Energiestufen eines zweiatomigen Moleküls

geneinander schwingen, oder das ganze Molekül kann rotieren. Alle diese Anteile tragen zur spezifischen Wärmekapazität bei (Ausnahmen s. unten) und können thermisch (durch Stöße), optisch (durch Licht) oder elektrisch (durch starke Felder) zugeführt oder abgerufen werden. Allerdings sind Schwingung und Rotation optisch nur wirksam, wenn sich geladene Molekülteile bewegen, z. B. heteropolar gebundene Ionen.

Wie wir gleich verstehen werden, liegen Rotationszustände am dichtesten (Abstand $\Delta E_r \approx 10^{-3}$ eV, Wellenlänge fast 1 000 μm im fernem Infrarot); Schwingungszustände sind fast 100mal weiter getrennt ($\Delta E_s \approx 0,1$ eV, $\lambda \approx 10 \mu m$), Elektronenzustände noch fast 100mal weiter ($\Delta E_e \approx 10$ eV, $\lambda \approx 0,1 \mu m$). Das vollständige Spektrum setzt sich aus allen drei Anteilen zusammen, für die Frequenzen gilt

$$h\nu = \Delta E_e + \Delta E_s + \Delta E_r . \tag{16.16}$$

16.4.2 Rotationsbanden

Ein Molekül kann nicht mit beliebiger Geschwindigkeit rotieren, sondern nur mit solchen, die die Quantenbedingung erfüllen. Als Ortskoordinate fungiert hier der Drehwinkel φ mit $\omega = \dot{\varphi}$, als Impulskoordinate der Drehimpuls $L = J\omega$ mit Trägheitsmoment J . Die Quantisierung des Drehimpulses legt nahe:

$$J\omega = n_r h .$$

Daraus ergeben sich die erlaubten Rotationsenergien

$$E_r = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{n_r^2 \hbar^2}{J} .$$

Die strenge Quantenmechanik liefert etwas abweichend davon

$$E_r = \frac{1}{2} \frac{n_r(n_r + 1)\hbar^2}{J} . \tag{16.17}$$

Beim Übergang von n_r auf $n_r - 1$ wird die Frequenz

$$\nu_r = \frac{E_r}{h} = \frac{\hbar}{4\pi J} (n_r(n_r + 1) - (n_r - 1)n_r) = \frac{\hbar}{2\pi J} n_r \tag{16.18}$$

emittiert. Die Frequenz nimmt proportional zu n_r zu, die Linien liegen äquidistant (Abb. 16.35). Aus ihrem Abstand $\hbar/(2\pi J)$ lässt sich das Trägheitsmoment des Moleküls ablesen.

Wir vergleichen das Rotationsquant $\Delta E_r \approx \hbar^2/(mr^2)$ mit der Energie eines Elektronensprunges $\Delta E_e \approx e^2/(8\pi\epsilon_0 r)$. Der typische Kernabstand r ist etwa gleich dem Bohr-Radius $r \approx 4\pi\epsilon_0 \hbar^2/(m_e e^2)$, also $\Delta E_e/\Delta E_r \approx m/m_e \approx 10^4$. Eine Ausnahme macht die Rotation eines zweiatomigen Moleküls um seine Symmetrieachse. Hier rotieren praktisch nur Elektronen, und ΔE_r ist daher kaum kleiner als ΔE_e , nämlich einige eV.

So versteht man endlich, warum ein zweiatomiges Molekül nur fünf Freiheitsgrade hat, nicht sechs. Da die Kerne so winzig sind und die Elektronen praktisch keine Masse haben, ist für die Rotation um die

Kernverbindungsline das Trägheitsmoment sehr klein und damit nach (16.18) der Termabstand sehr groß, viel größer als die mittlere thermische Energie kT . Thermische Stöße können das Molekül nicht aus dem tiefsten Zustand der Rotation um diese Achse herauswerfen, und daher leistet dieser Rotationsfreiheitsgrad keinen Beitrag zur spezifischen Wärmekapazität.

× Beispiel ...

Lesen Sie aus Abb. 16.35 das Trägheitsmoment des HCl-Moleküls und daraus den Kernabstand zwischen H und Cl ab.

Die längstwellige Linie liegt bei $6,2 \cdot 10^{11}$ Hz, und dies ist auch der Abstand der übrigen. Diese Äquidistanz entspricht einem Rotationspektrum. Man deutet dann den Abstand als $h/(4\pi^2 J)$. Das Trägheitsmoment ergibt sich zu $J = 2,7 \cdot 10^{-47}$ kg m². Wenn m und M die Massen von H und Cl sind, r ihr Kernabstand, gilt $J = mr^2 M^2 / (M + m)^2 + Mr^2 m^2 / (M + m)^2 = mr^2 (1 + m/M)$, also $r = 1,3$ Å.

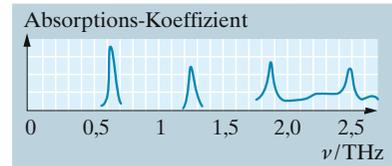


Abb. 16.35. Rotationspektrum von HCl

16.4.3 Das Rotations-Schwingungs-Spektrum

In einem zweiatomigen Molekül können die Atome längs ihrer Verbindungsline gegeneinander schwingen. Die Bindung an die Ruhelage ist annähernd elastisch, die Schwingung also harmonisch: $x = x_0 \cos \omega t$. In die Quantenbedingung setzt man hier den üblichen Impuls $p = m\dot{x}$ und den Ort x ein. Das Phasenintegral über eine Periode ist

$$\begin{aligned} \int p \, dq &= \int_0^{2\pi/\omega} m\omega x_0 \sin(\omega t) x_0 \omega \sin(\omega t) \, dt \\ &= \pi m \omega x_0^2 = \frac{E_s}{\nu} = n_s h. \end{aligned} \quad (16.19)$$

$E_s = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2$ ist ja die Gesamtenergie der Schwingung. Die strenge Quantenmechanik (Aufgabe 13.7.1) liefert allerdings kein Vielfaches von h , sondern ein ungerades Vielfaches von $h/2$:

$$E_s = (n_s + \frac{1}{2}) h \nu. \quad (16.20)$$

Als **Auswahlregel** für die möglichen Übergänge erhält man $\Delta n_s = \pm 1$, wie bei reinen Rotationsübergängen. Das Spektrum des **harmonischen Oszillators** besteht also nur aus einer einzigen Frequenz

$$\nu_s = \nu, \quad (16.21)$$

es ist wie im klassischen Fall unabhängig von der Amplitude oder der Energie der Schwingung. Anders als in der klassischen Mechanik kann aber der Oszillator seine Energie nie ganz abgeben, er behält auch im Grundzustand eine **Nullpunktsenergie**

$$E_{s0} = \frac{1}{2} h \nu. \quad (16.22)$$

Die Schwingungsfrequenzen bilden etwa das geometrische Mittel zwischen Elektronen- und Rotationsfrequenzen. Man sieht das, wenn man

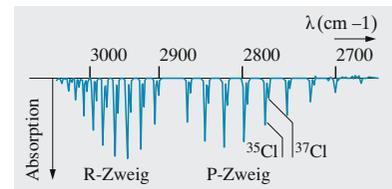


Abb. 16.36. Infrarot-Spektrum der Grundschiwingung des HCl-Moleküls. Im R-Zweig wird die Vibrationsquantenzahl n_r bei der Absorption um 1 erhöht, im P-Zweig um 1 erniedrigt

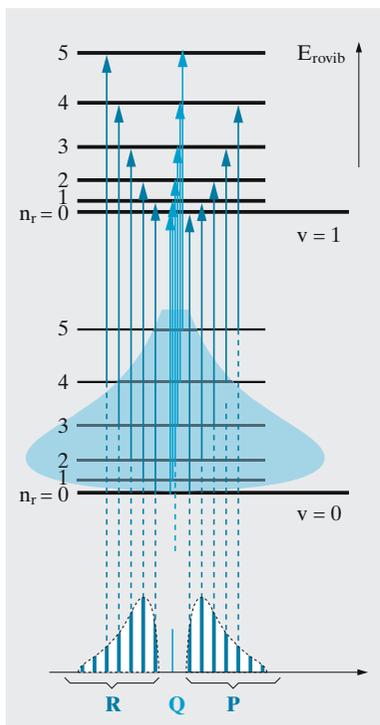


Abb. 16.37. Rotations-Schwingungszustände eines zweiatomigen Moleküls mit Infrarot-Übergängen. Der blau schattierte Bereich bei $v = 0$ deutet die thermische Verteilung in den Rotationsniveaus an, die die Linienstärken der einzelnen Zweige bestimmt (vergl. Abb. 16.36)

$\nu_s \approx \sqrt{D/m}$ mit der Federkonstanten $D \approx dF/dr \approx e^2/(8\pi\epsilon_0 r^3)$ schreibt und wieder beachtet, dass r etwa der Bohr-Radius ist.

Schwingungs- und Rotationszustand können sich auch gleichzeitig ändern. Die Energie des Schwingungsquants reicht gut aus, damit die Rotation schneller wird, also n_r um 1 zunimmt. So ergeben sich die drei Frequenzen

$$\nu = \nu_s, \quad \nu = \nu_s \pm \frac{\hbar}{2\pi J} n_r. \quad (16.23)$$

Jetzt lassen wir außerdem einen Elektronensprung zu. Er ändert i. Allg. den Bindungszustand im Molekül, also die Grundfrequenz der Schwingung und das Trägheitsmoment, z. B. von J auf J' . Dann ändert sich die Rotationsenergie sogar, wenn keine Änderung der Rotationsquantenzahl eintritt. Allgemein beim Übergang $n_r \rightarrow n'_r$ ändert sie sich um

$$\Delta E_r = \frac{1}{2} \hbar^2 \left(\frac{n_r(n_r + 1)}{J} - \frac{n'_r(n'_r + 1)}{J'} \right). \quad (16.24)$$

Es gibt drei Fälle mit folgenden leicht zu errechnenden Frequenzen:

$$1) \quad n'_r = n_r + 1 : \quad (R\text{-Zweig}) \quad (16.25)$$

$$\nu = \nu_e + \nu_s + B n_r + C n_r^2$$

$$2) \quad n'_r = n_r \quad (Q\text{-Zweig}) \quad (16.25')$$

$$\nu = \nu_e + \nu_s + C n_r + C n_r^2$$

$$3) \quad n'_r = n_r - 1 : \quad (P\text{-Zweig}) \quad (16.25'')$$

$$\nu = \nu_e + \nu_s - B(n_r + 1) + C(n_r + 1)^2$$

$$B = \frac{\hbar}{4\pi} \left(\frac{1}{J} + \frac{1}{J'} \right), \quad C = \frac{\hbar}{4\pi} \left(\frac{1}{J} - \frac{1}{J'} \right).$$

Alle drei Zweige bilden im $\nu(n_r)$ -Diagramm (**Fortrat-Diagramm**, Abb. 16.38) Parabeln, aber die Scheitel liegen ganz verschieden. Bei $C > 0$ (Kernabstand im oberen Zustand kleiner, $J < J'$) sind die Parabeln nach oben offen, sonst nach unten. So kann man die Bandenspektren verstehen (z. B. Abb. 16.38 mit $C < 0$) und erhält daraus viele Angaben über den Bau des Moleküls (Kernabstand, Bindungskräfte, Dissoziationsarbeit usw.).

16.4.4 Die Potentialkurve des Moleküls

Zwischen den Atomen oder Ionen eines zweiatomigen Moleküls wirkt eine Anziehung, sonst käme es ja gar nicht zur Molekülbildung. Im Fall der Ionen handelt es sich um eine Coulomb-Anziehung mit einem r^{-1} -Potential. Bei neutralen Atomen konnte erst die Quantenmechanik die homöopolare Bindungskraft als Austauschkraft erklären, bedingt durch die Erweiterung des Potentialtopfes und Absenkung des Energiezustandes eines oder zweier bindender Elektronen (Abschn. 13.7.1). Das homöopolare Anziehungspotential hat für geringe Abstände ähnliche Form wie das Coulomb-Potential. Nähern sich die Atome oder Ionen aber zu stark, geht die Anziehung in eine Abstoßung über, weil die Elektronenhüllen sich dabei deformieren müssen. Dieses Abstoßungspotential wächst sehr steil mit abnehmendem Abstand r . Im Abstand r_0 , wo sich beide Kräfte die

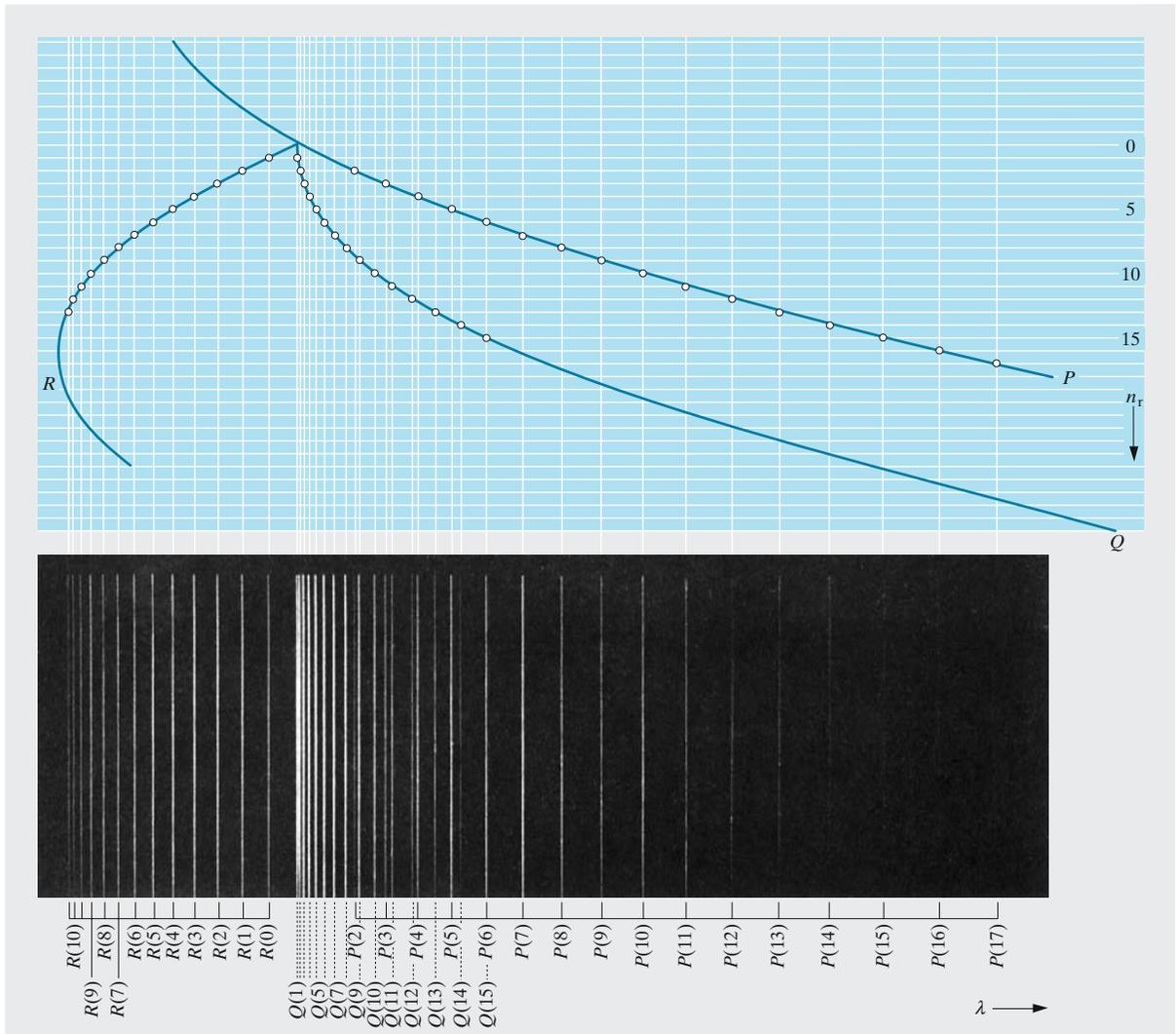


Abb. 16.38. *Oben*: Eine Elektronenbande des AlH, hoch aufgelöst (Aufnahme von H. Schüler, Max-Planck-Institut, Hechingen). Anders als in Abb. 16.31 nimmt λ hier nach unten zu. *Unten*: Aus den drei Parabeln des Fortrat-Diagramms kann man die Lage der Linien in Abb. 16.38 ablesen. Die Intensitäten ergeben sich aus dem Franck-Condon-Prinzip (Abschn. 16.4.4)

Waage halten, im Minimum der Potentialkurve, würde man klassisch die Ruhelage des Moleküls erwarten. Quantenmechanisch gibt es aber immer eine Nullpunktsenergie: Die Teilchen schwingen immer etwas oberhalb des Topfbodens.

Nahe der „Ruhelage“ r_0 kann man das Potential als Parabel annähern. Der Auslenkung $r - r_0$ wirkt die harmonische Kraft $F = -D(r - r_0)$ entgegen und beschleunigt die Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 gemäß $m_i \ddot{x}_i = -D(r - r_0)$. Trotz der Schwingung bleibt der Schwerpunkt in r_0 , es gilt $m_1 x_1 = m_2 x_2$ und $x_1 + x_2 = r - r_0$, also $x_1 = m_2(r - r_0)/(m_1 + m_2)$ und folglich

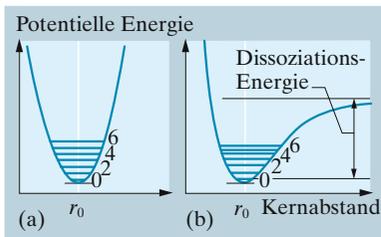


Abb. 16.39a,b. Potentialkurve eines zweiatomigen Moleküls

$$\mu \ddot{r} = -D(r - r_0) . \quad (16.26)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (16.27)$$

heißt **reduzierte Masse** des Moleküls. Die Teilchen schwingen also mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{D/\mu}$. Diese Frequenz gilt auch quantenmechanisch, aber die Teilchen können nicht beliebige Schwingungsenergien haben, sondern nur solche von der Form $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Es gilt dieselbe **Auswahlregel** $\Delta n = \pm 1$ wie im Abschn. 16.4.3.

Die Parabel ist nur eine Näherung für kleine Schwingungen. Das wirkliche Potential ist asymmetrisch: innen steil, außen flach. Trennung der Atome, d. h. Dissoziation des Moleküls erfordert ja nur einen endlichen Energiebetrag. In einem solchen Potential rücken die erlaubten Schwingungsenergien nach oben hin immer enger zusammen und konvergieren gegen die Dissoziationsenergie. Auch die Auswahlregel $\Delta n = \pm 1$ gilt nicht mehr: Es gibt Übergänge mit größerem Δn , allerdings mit abnehmender Wahrscheinlichkeit.

Wenn man ein Elektron im Molekül anregt, ändert die Potentialkurve ihre Form. Der Elektronenzustand bestimmt ja die Bindungs- und Abstoßungskräfte. Auch das Trägheitsmoment ändert sich meist dabei. Die allgemeinste Spektrallinie des Moleküls, die sich aus Anregung, Schwingung und Rotation zusammensetzt, ist also durch einen Sprung zwischen zwei verschiedenen Potentialkurven darzustellen. Während ein Elektron springt, können die viel schwereren Atome ihre Lage kaum ändern. Der Sprung erfolgt also fast senkrecht im Potentialschema, und zwar am wahrscheinlichsten zwischen den Umkehrpunkten der beiden beteiligten Schwingungen, weil sich dort, klassisch betrachtet, die Atome am längsten aufhalten; quantenmechanisch liegen dort die Maxima der ψ -Funktion, außer für den tiefsten Zustand, dessen Maximum in der Mitte liegt (Aufgabe 13.7.1). Mit diesem **Franck-Condon-Prinzip** kann man viele Moleküleigenschaften aufklären.

16.4.5 Molekulare Quantenzustände

Wenn immer man Eigenzustände eines bestimmten Systems ermittelt, darf man folgende Tatsachen nicht vergessen, die mathematisch ganz einfach aus dem Formalismus folgen:

Wenn zwei Zustände ψ_1 und ψ_2 hinsichtlich eines Operators A entartet sind, d. h. zum gleichen Eigenwert gehören, ist auch jede ihrer Linearkombinationen

$$\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 \quad (16.28)$$

mit beliebigen Koeffizienten c_1 und c_2 eine Eigenfunktion zum gleichen Eigenwert. Das folgt sofort durch Anwendung des Operators A auf (16.28) unter Beachtung der Linearität dieses Operators. c_1 und c_2 sind nur durch die Normierungsbedingung beschränkt:

$$c_1^2 + c_2^2 = 1 .$$

Zustände zu *verschiedenen* Eigenwerten ergeben bei der Linearkombination nicht wieder Eigenzustände. Gibt man z. B. für das H-Atom drei

p -Eigenzustände an, so ist zu beachten, dass es sich bei ihnen um ein Basis-Dreibein orthonormaler Eigenfunktionen handelt, aus dem sich auch sehr viele andere Tripel orthonormaler Zustände kombinieren lassen, die in solchen Richtungen stehen, wie das die Umstände verlangen (z. B. ein Zusatzfeld oder ein sich nähernder Bindungspartner). Man kann auch einen $2s$ - und einen $2p$ -Zustand kombinieren oder *hybridisieren*; beim Wasserstoff sind diese Zustände ja energetisch entartet, man erhält also wieder einen stationären Zustand und braucht nicht zu fürchten, dass der **Hybridzustand** durch Strahlung zerfällt (Abschn. 15.1.1). Eine solche **sp -Hybridisierung** hat dort, wo s - und p -Funktion das gleiche Vorzeichen haben, eine Steigerung von ψ , auf der anderen Seite eine Schwächung von ψ zur Folge (Abb. 16.40). Es entsteht so eine überwiegend einseitige Keule anstelle der p -Hantel und der s -Kugel. Eine solche Elektronenkonfiguration, die sich einem eventuellen Partner entgegenreckt, ist für eine chemische Bindung natürlich sehr vorteilhaft. Obwohl ein solches Hybrid in einem Mehrelektronen-Atom eigentlich gar kein stationärer Zustand ist, da es ja dort aus zwei nichtentarteten Zuständen kombiniert ist, leistet es zur annähernden Beschreibung der Molekülzustände gute Dienste. Man muss bedenken, dass die Atomzustände im komplizierteren Feld der Kerne der *beiden* Bindungspartner sowieso nicht mehr zutreffen. Jede Näherung, die diesen besonderen Verhältnissen Rechnung trägt, ist recht.

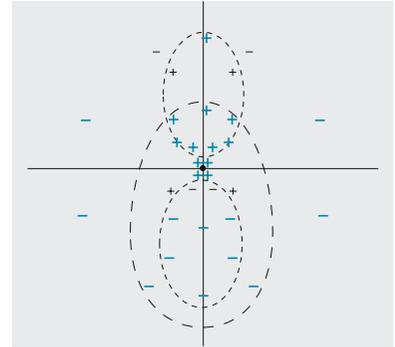


Abb. 16.40. $2s$ - $2p$ Hybridwellenfunktion

16.4.6 Quantenchemie

Eine **heteropolare (ionogene)** chemische Bindung ist schon elektrostatisch einigermaßen zu verstehen, wenn man den Begriff der **Elektronenaffinität** eines neutralen Atoms einführt. So nennt man die Energie E_A , die man gewinnt, wenn man ihm ein überschüssiges Elektron angliedert. E_A ist besonders groß für Atome mit annähernd abgeschlossener Schale (besonders für Halogene und Chalkogene), da sie einen starken Durchgriff der Kernladung auf ein zusätzliches Elektron haben. Nach unseren Regeln für die Abschirmzahlen ergibt sich z. B. für die effektive Kernladung, die ein Elektron sieht, wenn es sich an ein neutrales Cl-Atom anzulagern sucht:

$$Z_{\text{eff}} = 17 - 5 \cdot 1,00 - 8 \cdot 0,90 - 4 \cdot 0,70 = 2,00 .$$

Damit schätzen wir die Elektronenaffinität ab zu

$$E_A = \frac{Z_{\text{eff}}^2}{n^2} E_H = 6,05 \text{ eV} .$$

Allgemein ist offenbar die für die Bildung eines negativen Ions entscheidende effektive Kernladung um Eins kleiner als der Wert für das nächste Atom. Für typische Nichtmetalle ist nun E_A größer als die Ionisierungsenergie (wie üblich verstanden als Abtrennungsenergie eines Elektrons) für ein typisches Metall. Es ist also vorteilhaft, ein Elektron z. B. vom Na abzureißen und einem Cl zuzuführen. Man gewinnt dabei

$$E_{\text{A}_{\text{Cl}}} - E_{\text{I}_{\text{Na}}} = (6,05 - 5,12) \text{ eV} = 0,93 \text{ eV} .$$

Die beiden so entstandenen Ionen halten infolge ihrer Coulomb-Wechselwirkung zusammen, falls nicht ein Medium mit sehr hoher

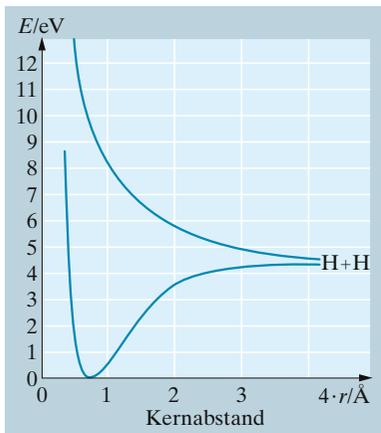


Abb. 16.41. Potentielle Energie der Wechselwirkung zwischen zwei H-Atomen. Bei entgegengesetzten Spins profitieren beide Elektronen von der Erweiterung des Potentialtopfes: Bindender Zustand, *untere Kurve*. Bei parallelen Spins muss eins in einen höheren Zustand auswandern: Lockernder Zustand, *obere Kurve*. (Nach Heitler und London, aus W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

Dielektrizitätskonstante das Coulomb-Feld zu stark abschwächt, bzw. die Trennung der Ionen auch sonst noch begünstigt ist.

Dagegen ist die **homöopolare Bindung**, speziell die Bindung zwischen gleichartigen Atomen, ohne die Quantenmechanik völlig unverständlich. Es gibt kein klassisches Gebilde etwa aus zwei Protonen und zwei Elektronen, das stabil als Modell des H₂-Moleküls zusammenhielte. Die Quantentheorie der homöopolaren Bindung ist in den Einzelheiten sehr kompliziert. Das Wesentliche versteht man schon aus der allgemeinen Tatsache, dass ein Elektron sich in zwei Potentialtöpfen immer energetisch vorteilhafter einzurichten weiß als in einem, einfach weil sie mehr Platz bieten und folglich nach der Unschärferelation einen tieferen Energiezustand ermöglichen. Eine der vielen Anwendungen dieses Gedankens ist folgende: Nähert man zwei H-Atome einander, so stellen die beiden Protonen den beiden Elektronen einen Potentialtopf zur Verfügung, der breiter ist als der eines einzelnen Protons. Bei großem Abstand haben allerdings die Elektronen noch wenig Gelegenheit, diesen verbreiterten gemeinsamen Topf auszunutzen (man sagt, ihr **Überlappungsintegral** sei noch klein). Sind die beiden Protonen sehr nahe beisammen, so ist der Topf zwar noch verbreitert (er ist so breit wie der eines He-Kerns), aber die Abstoßungsenergie der Kerne ist zu groß. Bei einem mittleren Abstand liegt ein Optimum: Die Absenkung der Elektronenzustände infolge der Verbreiterung des Topfes ist größer als die Abstoßungsenergie von Kernen und Elektronen, und zwar gerade um die Bindungsenergie größer.

Allerdings kann diese Absenkung nur dann von beiden Elektronen ausgenutzt werden, wenn ihre Spins entgegengesetzte Richtungen haben. Es handelt sich ja darum, beide Elektronen in den gleichen Zustand, oder, wie man in der Chemie meist sagt, in das gleiche **Orbital**, einzubauen, das in dem gemeinsamen Potentialtopf das tiefste bildet. Nach dem Pauli-Prinzip geht das nur für zwei Elektronen mit antiparallelen Spins. Von zwei Elektronen mit gleichgerichteten Spins müsste eines in einen höheren Zustand überwechseln. Der entsprechende Energiebetrag geht der Bindungsenergie verloren und macht die Bindung i. Allg. unmöglich.

Wir gehen aus von einem sphärischen Potentialtopf wie dem des H-Atoms, in dem das Elektron im Grundzustand die Gesamtenergie $E_1 = -e^2/(8\pi\epsilon_0 r_1) = 13,6 \text{ eV}$ hat. Im zweiatomigen Molekül ist dieser Potentialtopf etwas größer, er habe z. B. das doppelte Volumen und damit, falls er etwa kugelförmig bleibt, den Radius $r_1 \cdot 2^{1/3}$. Der Grundzustand liegt in diesem Topf bei $E'_1 = E_1 \cdot 2^{-2/3} = 0,63 E_1$ und ist gegenüber dem Zustand zweier getrennter Atome um $2 \cdot 0,37 E_1 \approx 10 \text{ eV} \approx 10^6 \text{ J/mol}$ abgesenkt. Die tatsächliche Bindungsenergie z. B. des H₂ liegt mit $4,6 \cdot 10^5 \text{ J/mol}$ etwas tiefer als diese grobe Schätzung. Eigentlich handelt es sich um zwei Elektronen im Feld zweier Protonen, aber eine Kernladung wird durch das andere Elektron weitgehend abgeschirmt. Bessere Übereinstimmung erhält man, wenn man das H₂-Molekül etwa in der Mitte zwischen dem He-Atom (beide Protonen am gleichen Ort) und den getrennten H-Atomen ansiedelt (Aufgabe 16.1.14).

Das **bindende Elektronenpaar** der Chemiebücher ist also ein gemeinsames Orbital im Feld der beiden Kerne, das von zwei Elektronen

mit antiparallelen Spins besetzt ist. Elektronen mit parallelen Spins bilden ein **lockernes Elektronenpaar**. Ein einzelnes Elektron, dessen Zustand im verbreiterten Topf entsprechend abgesenkt ist, kann aber auch bereits binden; sonst gäbe es z. B. kein H_2^+ -Ion.

Zwei Elektronen aus den beiden zu bindenden Atomen haben umso stärkere Tendenz, ein gemeinsames Orbital einzunehmen, je mehr sich ihre Orbitale schon im Zustand freier Atome überlappen, d. h. schon vor der Verzerrung der Orbitale, die die Bindung natürlich mit sich bringt. Diese Verzerrung wirkt im Sinne einer Verstärkung der Überlappung. Abbildung 16.42 zeigt die wichtigsten Bindungstypen. Man unterscheidet für zweiatomige Moleküle **σ -Bindungen**, bei denen die resultierende ψ -Funktion rotations-symmetrisch um die Kernverbindungsline ist, und **π -Bindungen** sowie Bindungen höheren Drehimpulses. Der Drehimpuls um die Drehachse ist bei einer σ -Bindung 0, bei der π -Bindung 1 usw. Die Folgerungen über die Drehbarkeit der Moleküle um eine σ bzw. π -Bindung liegen modellmäßig auf der Hand.

Wir behandeln als Beispiel das H_2O . Das O hat die Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 2p^4$. Obwohl die Elektronen möglichst verschiedene p -Zustände einnehmen, müssen doch zwei der p -Elektronen in den gleichen Zustand, und zwar natürlich mit antiparallelen Spins. Zu einer Bindung trägt ein solches antiparalleles Paar nichts bei, weil es mit einem fremden Elektron zu einem bindenden und einem lockernen Paar führen würde. O ist daher zweiwertig und bindet speziell zwei H-Atome mit aufeinander senkrecht stehenden senkrecht stehenden σ -Bindungen (Abb. 16.43). Die Verzerrung besonders der $1s$ -Wolke des H führt nun zu einer teilweisen Entblößung des Protons. Man erklärt dies manchmal auch so, dass man der Bindung zwischen dem elektronegativen O und dem elektropositiven H einen heteropolaren Anteil zuschreibt. Jedenfalls tragen effektiv die beiden H positive **Partiellladungen** von einem gewissen Bruchteil einer Elementarladung. Die Abstoßung zwischen diesen Partiellladungen spreizt den Winkel zwischen den beiden OH-Bindungen von 90° auf die beobachteten 105° . Die kompensierende negative Partiellladung ist am O zu lokalisieren. So entsteht das Dipolmoment des H_2O -Moleküls, das so weit reichende Folgen für Physik, Chemie und Biologie hat.

X Beispiel ...

Die Moleküle H_2O , H_2S , H_2Se sind alle gewinkelt. Man misst die Valenzwinkel 105° , 93° , 90° . Erklärung?

Die beiden einfach besetzten p -Orbitale der Chalkogene O, S, Se, Te stehen normalerweise mit ihren Achsen senkrecht zueinander. Nur die Coulomb-Abstoßung zwischen den beiden H, denen das Chalkogenatom ihr Elektron teilweise weggezogen hat, spreizt diesen Valenzwinkel weiter auf. Die Polarisierung der XH-Bindung lässt in der Reihe O, S, Se, Te immer mehr nach (die Elektronegativität nimmt ab), denn der Durchgriff der Kernladung durch die immer dichter werdenden Elektroschalen verringert sich, außerdem nimmt auch der Bindungsradius, d. h. der Abstand der H immer mehr zu, d. h. selbst bei gleicher

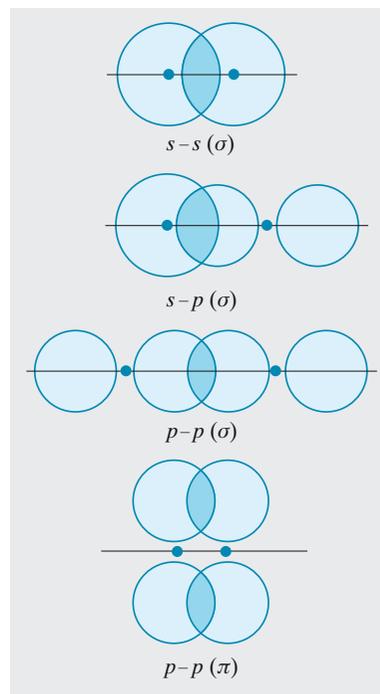


Abb. 16.42. Bindungstypen in Molekülen

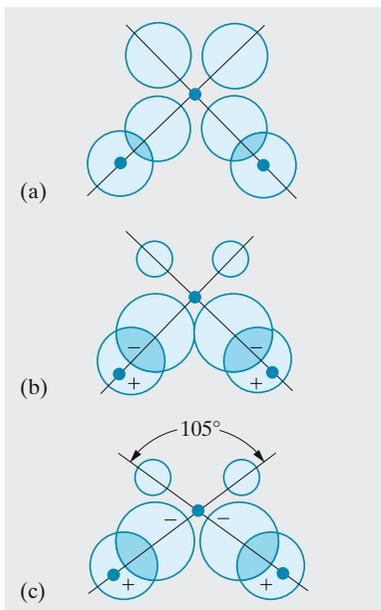


Abb. 16.43a–c. Das Wassermolekül.
 (a) *s*-*p*-Bindung zwischen O und H.
 (b) Verzerrung der beteiligten Elektronen-Wellenfunktionen. (c) Spreizung des Valenzwinkels infolge Abstoßung der Partialladungen der H

Partiellladungen würden Coulomb-Abstoßung und Spreizung geringer werden.

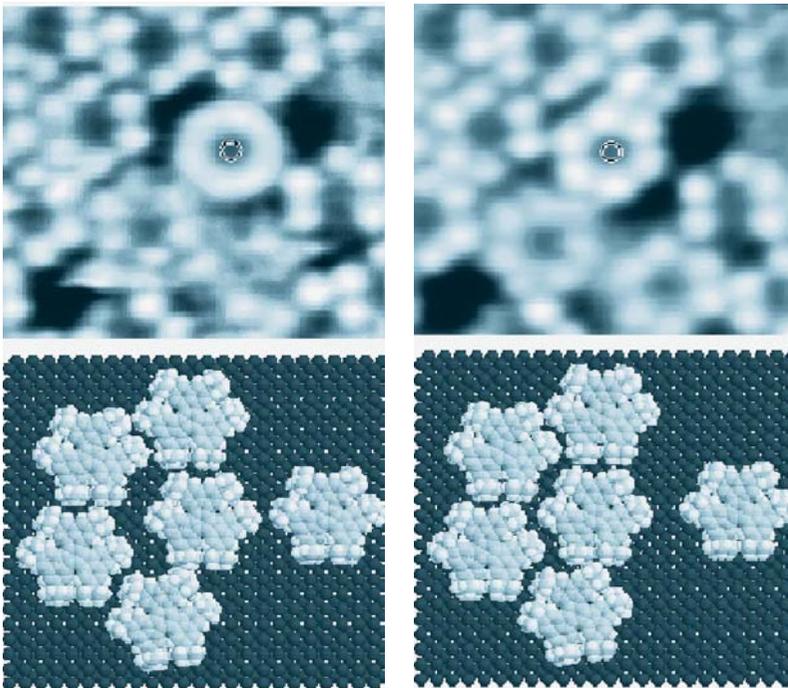
Das **C-Atom** dürfte entsprechend seiner $1s^2 2s^2 2p^2$ -Konfiguration eigentlich nur zweiwertig sein. Hier zeigt sich, dass die Möglichkeit einer chemischen Bindung, d. h. die Schaffung neuer Orbitals im Feld zweier Kerne statt eines einzigen, die Elektronenstruktur tiefgreifend umbaut. Auch vom Einzelatom her kann man die Vierwertigkeit des C mit Hilfe der Hybridisierung von Zuständen begreifen. Ein *sp*-Hybridzustand mit seiner einseitigen Keule ist ja für eine Bindung von vornherein besser geeignet als ein *p*-Zustand (Abb. 16.40). Dieser Vorteil kann u. U. den Nachteil überkompensieren, der daraus erwächst, dass der *s*-Zustand energetisch tiefer liegt als das *sp*-Hybrid. Statt der $2s^2 2p^2$ -Konfiguration seiner Außenelektronen kann sich ein C-Atom also durchaus für eine Konfiguration aus vier *sp*-Hybriden entscheiden, wenn vier geeignete Bindungspartner sich anbieten. Am günstigsten sind vier gleichartige Hybride, die jedes aus allen drei *p*-Orbitalen und dem *s*-Orbital, aber mit jeweils verschiedenen Koeffizienten der Linearkombination (vgl. (16.28)) gebildet sind, also vier sp^3 -Hybride. Diese Hybride können nämlich nach den vier Ecken eines Tetraeders gerichtete, fast ganz einseitige Keulen bilden, womit die gegenseitige Behinderung der Liganden zum Minimum und die Bindungsenergie zum Maximum gemacht wird.

Wir haben in unserer qualitativen Darstellung je nach Bedarf von zwei der wichtigsten Näherungs-Gesichtspunkte Gebrauch gemacht, mit deren Hilfe die Quantenchemie ihre ungeheuer komplizierte quantitative Aufgabe angeht. Diese beiden Gesichtspunkte werden heute meist unter die englischen Schlagworte eingeordnet: **AO-Methode** (speziell **LCAO-Methode** „linear combination of atomic orbitals“), begründet von *Heitler* und *London*; man geht von den Orbitalen der isolierten Atome aus und modifiziert diese zu Molekülzuständen (im einfachsten Fall durch Linearkombination, z. B. Hybridisierung solcher Atomzustände); **MO-Methode** („molecular orbitals“), begründet von *Hund* und *Mulliken*; man sucht von vornherein Elektronenzustände im gemeinsamen Feld aller Kerne bzw. Atomrümpfe zu ermitteln. Beide Methoden, so weit sie auch vorgetrieben worden sind, haben grundsätzlich nur den Charakter von Näherungen.

▲ Ausblick

Der Aufbau der elektronisch dominierten Materie ist im Prinzip geklärt. Dennoch versagen alle unsere Berechnungsmethoden, sobald ein Molekül zu groß wird. Die wissenschaftliche Kunst besteht dann darin, die wichtigsten, die wesentlichen Eigenschaften eines komplexen Gebildes aus der unglaublichen Vielfalt des Möglichen herauszufischen.

In ausgewählten Fällen können Physiker und Chemiker ihr Wissen andererseits schon heute als „molekulare Ingenieure“ anwenden, sie konstruieren elektrische und mechanische Komponenten auf mikroskopischer Basis und träumen von molekularen Maschinen. Dabei wird unsere makroskopische Umwelt nicht einfach immer weiter verkleinert, diese Systeme werden auch neue, durch den Vorstoß in die Quantenwelt verursachte Eigenschaften besitzen. Das Rastertunnelmikroskop (RTM) hat wesentlich zu dieser Entwicklung beigetragen. Einer Forschergruppe unter Führung des IBM-Labors in Zürich ist es damit gelungen, ein mechanisches Rad zu bauen, das aus einem einzigen Molekül mit 1,75 nm Durchmesser besteht. Die Forscher hatten zunächst gelernt, so genannte Hexa-Butyl-Deka-Zykan-Moleküle (HB-DC) einzeln mit dem RTM auf einer Oberfläche zu positionieren und zu kontrollieren. Diese Moleküle bestehen aus einem Deka-Zykan-Block, an dem sechs Butyl-Speichen befestigt sind. Im linken oberen Bild ist jedes einzelne Molekül an seiner sechszähligen Symmetrie gut zu erkennen, und dort ist die ►



Ein HB-DC-Molekül als molekulares Rad mit 1,75 nm Durchmesser. Die Bilder der oberen Reihe wurden mit dem Rastertunnelmikroskop aufgenommen, darunter finden sich die entsprechenden Computer-Simulationen. In der linken Spalte befinden sich alle Moleküle im Ruhezustand. Nach geringfügiger Verschiebung kann ein Molekül in freie Rotation versetzt werden

Anordnung so gewählt, dass die Moleküle eine feste Ruhelage besitzen. Im rechten oberen Bild wurde ein Molekül durch einen Spannungsimpuls mit der RTM-Spitze um 1/4 nm nach rechts verschoben. Auf dieser neuen Position wurde das Molekül zwar noch wie in einem Achslager gehalten, konnte aber schon bei thermischen Energien frei rotieren. Zur Verdeutlichung sind in der unteren Reihe Computer-Darstellungen der arretierten und der rotierenden Position gezeigt. Vielleicht gelingt es eines Tages, aus solchen Elementen molekulare Geräte zu bauen, die chemische Reaktionen oder andere mikroskopische Prozesse steuern.

✓ Aufgaben ...

www. CD

●● 16.1.1 Periodensystem

Erklären Sie die Begriffe metallisch, nichtmetallisch, elektropositiv, elektronegativ in möglichst vielen ihrer Schattierungen und Anwendungen, die in der Chemie und Physik üblich sind. Wie sind diese Gegensatzpaare im **Periodensystem** lokalisiert? Betrachten Sie den „horizontalen“ und „vertikalen“ Gang dieser Eigenschaften. Wie ist dieser Gang aus der Struktur der Elektronenhülle zu verstehen?

● 16.1.2 Atomvolumina

Schätzen Sie Radien und Volumina der Atome mittels des Begriffs der effektiven Kernladung. Kommt der Gang von Abb. 16.3 heraus? Stimmen auch die Einzelwerte überein? Wie sind die Daten von Abb. 16.3 vermutlich gewonnen worden?

● 16.1.3 Ionisierungsspannung

Welche Gesetzmäßigkeiten über den Gang der **Ionisierungsspannung** in den Perioden und Gruppen kann man aus den effektiven Kernladungen folgern? Ziehen Sie quantitative Konsequenzen über den Grad des Metallcharakters im Sinne der anorganischen Chemie (Säure- und Basenstärke) und der Elektrochemie (Elektrolyse).

● 16.1.4 Verspätete Auffüllung

Erklären Sie die energetische Staffelung der *s*-, *p*-, *d*-, *f*-Zustände und die Unregelmäßigkeiten in der Auffüllung der Elektronenschalen (**Übergangsmetalle**, **Seltene Erden**,

Aktiniden) mit den Ellipsenbahnen des **Bohr-Sommerfeld-Modells**.

● 16.1.5 Vakuum-Polarisation

Wir wissen, dass auch im Vakuum ständig Teilchenpaare, z. B. Elektron-Positron-Paare entstehen. Falls ihnen niemand die dazu notwendige Energie stiftet, müssen diese Teilchen einander sehr bald wieder vernichten. Nach welcher Zeit muss dies spätestens geschehen, und wie weit können sie bestenfalls in dieser Zeit fliegen?

●● 16.1.6 Maximale Reichweite

Wenn Teilchen eines virtuellen Paares genau mit ihrer Ruhmasse erzeugt werden, bewegen sie sich nicht und kommen nicht vom Fleck. Will man ihnen sehr große kinetische Energie mitgeben, fliegen sie zwar schnell, aber existieren noch kürzere Zeit. Gibt es ein Maximum für ihre mögliche Flugstrecke, und wie groß ist sie?

●● 16.1.7 Legale Überziehung

Das erzeugte Elektronenpaar kann seine Existenz vorher oder nachher rechtfertigen, indem ihm jemand seine Energieschuld vorher oder nachträglich bezahlt, letzteres so schnell, dass niemand die Überziehung merken kann. Diese Deckung des Defizits könnte erfolgen, indem das Elektron in eine hinreichend tief gelegene bohrsche Bahn stürzt. Welche Atome besitzen so tief gelegene Bahnen? Gehen Sie vom Bohr-Modell aus. Wie groß wären der Bahnradius und die Bahngeschwindigkeit?

●●● 16.1.8 Relativistisches Bohr-Modell

Kann man annehmen, die Massen in der Kreisbahn- und Drehimpulsbedingung hätten alle die gleiche Geschwindigkeitsabhängigkeit, und wie sieht diese Abhängigkeit aus? Drücken Sie v durch den Bahnradius r aus und geben Sie dann r an. Gilt noch die Beziehung $W_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}W_{\text{pot}}$, oder wie sieht sonst die Gesamtenergie aus?

●●● 16.1.9 Kern-Tauchbahnen

Von welchem Z ab tauchen die innersten Elektronenbahnen in den Kern ein, und welchen Einfluss hat das auf die Bahnenergie?

●●● 16.1.10 Tauchbahnen nach Bohr

Formulieren Sie die Bohr-Bedingungen für ein Elektron, das im Innern einer Kugel vom Radius r_K und von der Gesamtladung Z_e umläuft. Wie sind die Bahnradien und die Bahnenergien abgestuft?

●●● 16.1.11 Relativistische Tauchbahnen

Behandeln Sie auch die Elektronenbahnen, die im Innern des Kerns verlaufen, relativistisch. Welche Tatsachen können Sie vom Fall des Coulomb-Feldes übernehmen, welche aus der nichtrelativistischen Behandlung?

●●● 16.1.12 Spontane Paarbildung

Von welcher Kernladungszahl Z an kann man spontane Paarerzeugung

mit nachträglicher Schuldendeckung durch Einfang in Bahnen mit $n = 1, 2, 3, \dots$ erwarten?

●● 16.1.13 Elektron im Kern?

Man behauptet doch gewöhnlich, Elektronen könnten sich nicht im Kern aufhalten. Wieso soll das für sehr große Kerne nicht mehr wahr sein? Wie soll sich das Elektron ungehindert durch die dichtgepackten Nukleonen bewegen können?

●● 16.1.14 Zwei Elektronen

Schätzen Sie die Energie E des Grundzustandes eines Atoms oder Ions mit zwei Elektronen nach der Unschärferelation. Aus welchen Anteilen setzt sich W zusammen? Das erste Elektron sei auf einen Bereich vom Radius r_1 beschränkt, das zweite auf r_2 . Drücken Sie E durch r_1 und r_2 aus. Wo liegt das Minimum? Gemessene Werte für H^- , He , Li^+ , Be^{++} , B^{+++} , C^{++++} : 1,05; 5,81; 14,5; 27,3; 44,1; 64,8, ausgedrückt als Vielfache der Rydberg-Einheit – 13,65 eV.

●● 16.1.15 Elektronegativität

In dem Bemühen, möglichst viele Eigenschaften eines Atoms durch einen einzigen Parameter auszudrücken, wenn auch nur halbphänomenologisch, führte *L. Pauling* den Begriff der **Elektronegativität** ein. Er ging davon aus, dass die Bindungsenergie eines Moleküls AB immer größer ist als das Mittel der Bindungsenergien für AA und BB und nannte $\Delta_{AB} = E_{AB} - \frac{1}{2}(E_{AA} + E_{BB})$ die Stabilisierungsenergie. Woher mag sie stammen? Formal hängt sie mit der Differenz der Elektronegativitäten $\chi_A - \chi_B = 0,102\sqrt{\Delta_{AB}}$ zusammen (Energie in kJ/mol). Was bedeuten die χ anschaulich? Gibt man dem elektronegativsten Element Fluor willkürlich $\chi = 4$, ergeben sich einfache Werte im Periodensystem. H hat $\chi = 2,1$. Jeder Schritt nach links in der ersten Periode senkt χ um 0,5. Die weiteren Perioden fangen beim Halogen niedriger an und haben kleinere Schritte. Die Ablösarbeit für ein Elektron aus einem Metall (in eV) ist $E \approx 2,3\chi + 0,34$, die

Summe von erster Ionisierungsenergie und **Elektronenaffinität** ist $5,4\chi$, der Atomradius in einer kovalenten Bindung (in Å) $r \approx 0,31(N+1)/(\chi - \frac{1}{2})$, wo N die Anzahl der Valenzelektronen ist. Versuchen Sie dies alles qualitativ zu erklären und prüfen Sie die Zahlenwerte. Schätzen Sie die **Partiellladungen** in einer O–H- und einer Na–Cl-Bindung.

●● 16.2.1 Röntgens Apparat

Wie sah seine Spannungsquelle aus? Welche Spannungen dürfte er erreicht haben? Wie hart war das erste Röntgenlicht?

●● 16.2.2 Röntgen-Totalreflexion

Die Wellenlängenmessung von Röntgenstrahlung mit streifender Inzidenz auf das Gitter wird dadurch erleichtert, dass Totalreflexion auftritt. Wieso? Weisen Sie aus der Dispersionstheorie (Abschn. 10.3.3) nach, dass Glas oder Metall für Röntgenstrahlung dünner sind als Luft, und schätzen Sie den Grenzwinkel der Totalreflexion.

●● 16.2.3 Charakteristische Strahlung

Welche Frequenzen haben die Linien K_α und L_α mit Mo bzw. W als Antikathode? Welche Röhrenspannungen braucht man, um sie anzuregen? Welche Frequenzen haben die härtesten K -Linien, die es gibt? Konnte *W. C. Röntgen* mit seinen 25 keV-Elektronen die K -Serie seiner Antikathode (Glas) anregen?

●● 16.2.4 Auger-Effekt

Welche Termdifferenzen können als Auger-Elektronenenergien auftreten, wenn der anregende Elektronenstoß ein K -Elektron abgetrennt hatte?

●● 16.2.5 X-Ray panic

Man sagt, dass um 1900 jede junge Dame errötete, wenn von X-Strahlen die Rede war; eine Londoner Firma bot „X-feste Damenunterwäsche“ an; ein Abgeordneter von New Jersey brachte einen Gesetzesvorschlag ein, der „den Einbau von X-Strahlen in Operngläser“ verbot. Hatten diese Befürchtungen oder Hoffnungen eine Grundlage?

●● 16.2.6 Tomographie

Wie kann man Organe tief im Körper erinnern, deren Dichte sich kaum von der Umgebung unterscheidet, ohne Kontrastmittel im Röntgenbild deutlich sichtbar machen? Wie kann man sie gezielt bestrahlen?

●● 16.2.7 Paarvernichtung

Ist die Paarvernichtungslinie immer gut vom Compton-Streuspektrum zu trennen? Hat die Bildung des **Positroniums** einen merklichen Einfluss auf die Vernichtungswellenlänge? Berechnen Sie Energiezustände und Bahnradien des Positroniums. Kann man seine „Lyman-Linien“ neben der Zerstrahlungslinie sehen?

●● 16.2.8 Bremsstrahlung

Wie ist es möglich, dass die spektralen Energieverteilungen der **Bremsstrahlung** über ν und über λ (Abb. 16.20) so grundverschieden aussehen? Beachten Sie die Definitionen von I_ν und I_λ . Nehmen Sie die einfachste mit den Daten einigermaßen verträgliche Funktion $I_\nu(\nu)$ an und rechnen Sie auf $I_\lambda(\lambda)$ um. Bestätigt sich das Näherungsgesetz für Lage und Höhe des Maximums von $I_\lambda(\lambda)$? Besteht eine Ähnlichkeit mit der Planck-Kurve? Wenn ja, ist sie physikalisch begründet?

●● 16.2.9 Protonen-Therapie

Einige große Kliniken haben die Tumor-Therapie mittels schneller **Protonen** eingeführt. Welchen Vorteil hat diese gegenüber der herkömmlichen Röntgen-Therapie? Vergleichen Sie auch mit der Neutronentherapie. Schwerere Ionen wären noch günstiger. Wieso? Welche Energie braucht man, um alle Tumore im Menschen erreichen zu können? Denken Sie an die Ionendichte und ihre räumliche Verteilung (Abschn. 15.3.1).

●● 16.3.1 Rotationsspektrum

Schätzen Sie den Abstand der Rotationsterme für die Rotation eines zweiatomigen Moleküls um die Kern-

verbindungsline. Von welchen Temperaturen ab muss man mit dem sechsten Freiheitsgrad rechnen?

●● 16.3.2 Schwingungsspektrum

Wenn in einem Molekül ein höherer Elektronenzustand angeregt ist, bedeutet das i. Allg. einen geänderten Abstand des Elektrons von „seinem“ Kern. Wie wirkt sich das auf die Potentialkurve der Kerne aus? Zeichnen Sie schematisch die Potentialkurven für die beiden Elektronenzustände mit den Schwingungstermen darin. Diskutieren Sie den Aufbau der Rotations-Schwingungsbanden in diesem Bild.

●● 16.3.3 Franck-Condon-Prinzip

Da die Elektronenmasse so viel kleiner ist, können die Kerne ihre Lage während eines Elektronensprungs nicht wesentlich ändern. An den Umkehrpunkten hält sich ein schwingendes System am längsten auf. Leiten Sie aus diesen beiden Tatsachen Regeln über die Intensität der Bandenlinien ab. Ergeben sich noch andere Folgerungen?

●● 16.3.4 Dissoziation

Stellen Sie die **Dissoziation** eines Moleküls infolge Lichtabsorption im Potentialkurvenschema dar. Warum ist Photodissoziation allein durch Anregung von Kernschwingungen i. Allg. unmöglich? Wie hängt die Dissoziationsenergie mit der Lage des Bandenkopfes zusammen?

●● 16.3.5 Chemische Bindung

Ein System sei gekennzeichnet durch seinen H -Operator. Wie vollständig ist diese Kennzeichnung? Welcher Zustand hat die kleinstmögliche Energie? Zur Konkurrenz zugelassen seien nicht nur die stationären Zustände (dann ist die Antwort klar), sondern auch beliebige nichtstationäre. Welches Maß für die Zustandsenergie wird man dann verwenden? Das System bestehe aus zwei Teilsystemen, deren H -Operatoren, Eigenfunktionen und Eigenwerte bekannt seien. Wie sieht der H -Operator des Gesamtsystems aus, solange die Teilsysteme noch weit getrennt sind? Jetzt werden sie in Kontakt gebracht, sodass sie einander beeinflussen. Was kann man dann allgemein über H -Operator,

Eigenfunktionen (speziell den Grundzustand), Eigenwerte sagen? Arbeiten Sie mit den Begriffen Resonanz, Resonanzstabilisierung, Resonanzenergie. Suchen Sie Beispiele.

●● 16.3.6 Wasserstoffbrücke

Die **H-Brücke** (Bindung zwischen dem an ein elektronegativeres Atom gebundenen Proton und einem ebenfalls elektronegativen Atom) ist der wichtigste Strukturbildner in biologischen Makromolekülen. Sie bestimmt in Proteinen α -**Helix** und β -**Faltblatt**, in **Nukleinsäuren** die Passung zwischen Guanin und Cytosin (3 Brücken) sowie Adenin und Thymin oder Uracil (2 Brücken), die die Präzision der **Reduplikation der DNS** wie auch der **Transkription der DNS in RNS** garantiert. Machen Sie sich das am Modell klar. Hier handelt es sich um N–H–O-Brücken mit Abständen N–H von $1,0 \text{ \AA}$ und H–O von $1,9 \text{ \AA}$. Schätzen Sie Partialladungen und Bindungsenergien. Tun Sie das auch für Wasser und vergleichen Sie mit der Verdampfungsenergie.

Festkörperphysik

■ Inhalt

17.1	Kristallgitter	884
17.2	Gitterschwingungen	910
17.3	Metalle	922
17.4	Halbleiter	935
17.5	Gitterfehler	945
17.6	Makromolekulare Festkörper	952
17.7	Supraleitung	957

▼ Einleitung

Noch vor wenigen Jahrzehnten verstand man eigentlich nichts von dem, was für unser praktisches Leben am wichtigsten ist, nämlich vom Verhalten fester und flüssiger Stoffe. Diese Dinge sind nach der klassischen, nichtquantentheoretischen Physik nicht zu begreifen.

Man muss allerdings zugeben, dass auch die modernste Physik noch nicht richtig versteht, warum Masse und Ladung immer in so sauberen „Quanten“, Teilchen genannt, abgepackt sind. Nimmt man aber die Teilchen, besonders Proton, Elektron und Neutron, als gegeben hin, dann ist die klassische Physik grundsätzlich nicht imstande, daraus irgendetwas Geformtes und Haltbares zu bauen. In einer „klassischen“ Welt gäbe es nicht einmal Atome. Protonen und Elektronen würden sofort ineinander stürzen. Es gäbe auch keine Moleküle, denn auch aus mehreren Kernen und Elektronen könnte man kein stabiles System aufbauen. Da Atome und Moleküle während der beschränkten Zeit ihrer Existenz keine definierten Abmessungen hätten, würden sie auch im Festkörper keine definierten Abstände einhalten. Die Kräfte, die den Festkörper zusammenhalten und seine mechanischen Eigenschaften bedingen, blieben so gut wie völlig im Dunkeln. Die Welt der klassischen Physik wäre formlos. Es gäbe bestenfalls mehr oder weniger dichte Gase. Feste Abstände, Form, Gestalt kommen erst durch die Quantengesetze zustande.

Selbst wenn man der klassischen Physik das Zusatzprinzip einräumt, dass Elektronen von Kernen und Atome untereinander gewisse feste Abstände einhalten und dass gewisse Kraftgesetze zwischen ihnen herrschen, kommen die meisten Eigenschaften der Festkörper immer noch falsch heraus. Man hat z. B. das Verhalten der Metalle schon sehr früh qualitativ dadurch erklärt, dass sie viele freie Elektronen (ungefähr eines pro Atom), eingebettet in ein Grundgitter aus Rumpffionen, enthalten. Wie es diese Elektronen aber fertig bringen, sich so leicht durch das Gitter positiver Ladungen zu schieben, war nicht einzusehen. Ein „klassischer“ Kupferdraht würde nicht besser leiten als ►



Walter Schottky (rechts) mit Max v. Laue

„Die Zeit des unbedenklichen Wirtschaftens mit den Energiequellen und Stofflagern, die uns die Natur zur Verfügung gestellt hat, wird wahrscheinlich schon für unsere Kinder nur noch die Bedeutung einer vergangenen Wirtschaftsepoche haben.“

W. Schottky, Thermodynamik, 1929

Kohle. Außerdem müssten die Elektronen als freie Teilchen etwa ebenso viel zur spezifischen Wärme beitragen wie die Rumpfnionen, d. h. man müsste den doppelten Dulong-Petit-Wert messen, was durchaus falsch ist.

Magnetische Werkstoffe gäbe es in einer klassischen Welt auch nicht. Ein klassisches System im thermischen Gleichgewicht kann grundsätzlich im äußeren Magnetfeld kein magnetisches Moment annehmen (sofern es z. B. durch feste Wände am Rotieren gehindert wird). Der Grund liegt einfach darin, dass ein Magnetfeld B keine Arbeit auf Ladungen leistet, denn die Lorentz-Kraft steht immer senkrecht zur Geschwindigkeit. Ein Magnetfeld beeinflusst also die Lage der möglichen Energiezustände der Teilchen und des Gesamtsystems nicht. Die Verteilung der Teilchen über die möglichen Zustände hängt aber nach *Boltzmann* nur von den Energien dieser Zustände ab. Wenn B diese Energien nicht beeinflusst, kann es auch den Gesamtzustand des Systems nicht ändern. Dem steht scheinbar die Tatsache entgegen, dass jedes Atom im Magnetfeld rotieren muss und damit ein diamagnetisches Moment annimmt. Aber es gibt ja eben im Gleichgewicht gar keine Atome, bei denen Elektronen stabil um Kerne fliegen. Nimmt man die klassische Physik wirklich ernst, dann gibt es im thermischen Gleichgewicht keine Magnetisierung. Der Magnetismus der Materie ist ein reiner Quanteneffekt.

Ohne Quantenphysik keine Festkörperphysik. Mit wenigen quantenmechanischen Tatsachen kommt man aber schon sehr weit. Jedes Teilchen mit der Energie E und dem Impuls p verhält sich wie eine Welle mit der Frequenz $\nu = E/h$ und der Wellenlänge $\lambda = h/p$. Umgekehrt sind auch jedem Wellenvorgang Teilchen zugeordnet, die Quanten des Wellenfeldes. Aus der Wellennatur der Teilchen folgen sofort die Unschärferelationen $\Delta x \Delta p \approx h$, $\Delta E \Delta t \approx h$. Diese geringen Mittel richtig eingesetzt, werden uns bis zum Josephson-Effekt führen.

17.1 Kristallgitter

Der typische Festkörper hat Kristallstruktur, d. h. eine regelmäßige Anordnung seiner atomaren Bausteine. Unter den Ausnahmen von diesem Satz, den **amorphen Stoffen**, sind z. B. die **Gläser**. Ihre Eigenschaften weichen so vom üblichen Festkörperverhalten ab, dass man sie als **unterkühlte Flüssigkeiten** bezeichnet hat: Ihre Viskosität ist zwar groß, aber endlich, sie fließen also, wenn auch langsam. Sie haben keinen definierten Schmelzpunkt, sondern gehen allmählich in den echten flüssigen Zustand über. Wir werden uns nur gelegentlich (z. B. in Abschn. 17.4.4) mit amorphen Stoffen beschäftigen. Im Mittelpunkt stehen der Bau und die Eigenschaften der Kristallgitter.

Tabelle 17.1. Aggregatzustände

Zustand	fest		flüssig		gasförmig		Suprafluid
	ideal	real	real	ideal	real	ideal	
Beispiel	Diamant	Plexiglas	Glyzerin	Ether	kl. T , gr. p	gr. T , kl. p	He II ($< 2,18$ K)
Dichte kg m^{-3}	3 520	1 160–1 200	1 260	800	bis 100	≈ 1	125
Kompressionsmodul N m^{-2}	$5,8 \cdot 10^{11}$	$\sim 10^{11}$	10^{11}	10^{10}	bis 0	\sim Druck	
Schubmodul N m^{-2}	$3,5 \cdot 10^{11}$	$1,5 \cdot 10^{10}$	0	0	0	0	
Viskosität $\text{N m}^{-2} \text{ s}$	–	$> 10^8*$	$1,5*$	$2 \cdot 10^{-4*}$		$\approx 10^{-5*}$	$< 10^{-8}$
Oberflächen- spannung N m^{-1}	–	–	0,066 gegen Luft	0,017	0	0	

* Bei Zimmertemperatur

17.1.1 Dichteste Kugelpackungen

Die wichtigsten Kristallstrukturen lassen sich auf zwei ganz einfache Grundstrukturen zurückführen: Die **kubisch-flächenzentrierte** und die **hexagonal dichteste Kugelpackung**.

Man werfe eine Handvoll Kugeln gleicher Größe in eine Schachtel, sodass der Boden zunächst nur teilweise bedeckt ist und kippe die Schachtel leicht an. Die Kugeln haben die Tendenz, sich regelmäßig anzuordnen, offenbar weil dann die potentielle Energie minimal, also die Packung möglichst dicht ist. In dieser Anordnung wird jede Kugel, die nicht am Rand liegt, von sechs anderen berührt. Jedes Loch, durch das man den Boden durchschimmern sieht, ist von drei Kugeln begrenzt. Da andererseits jede Kugel sechs solche Löcher um sich hat, gibt es doppelt so viele Löcher wie Kugeln.

Tut man mehr Kugeln hinein, wird die Anordnung dreidimensional. Man muss Schichten wie die eben beschriebene übereinander stapeln. Jede Kugel der zweiten Schicht sucht ein Loch in der ersten abzudecken und berührt also drei Kugeln der ersten Schicht. Offenbar kann man so nur jedes zweite Loch der ersten Schicht abdecken, denn es gibt in dieser doppelt so viele Löcher wie Kugeln. Auch durch zwei Schichten schimmert also noch Boden durch, aber nur noch an ebenso vielen Stellen, wie Kugeln in jeder Schicht sind. Dementsprechend zerfallen die Hohlräume zwischen den Kugeln jetzt in zwei Gruppen: Aus den abgedeckten Löchern sind Hohlräume geworden, an die vier Kugeln als regelmäßiges Tetraeder angrenzen (**Tetraederlücken**). Die nichtabgedeckten Löcher werden von sechs gleichwertigen Kugeln begrenzt, drei in jeder Schicht. Es sind **Oktaederlücken** (ein Oktaeder hat sechs Ecken). Beim Weiterbau werden sie sich entweder als *c-axiale Kanäle* aneinander reihen oder durch zwei Deckkugeln abschließen.

Es gibt nämlich zwei Möglichkeiten, die *dritte* Schicht anzulegen. Deren Kugeln können alle die Löcher zudecken, durch die der Boden noch durchschimmert. Solche Löcher sind ja gerade in richtiger Anzahl vorhanden. Hält man dieses Prinzip aufrecht, muss man logischerweise

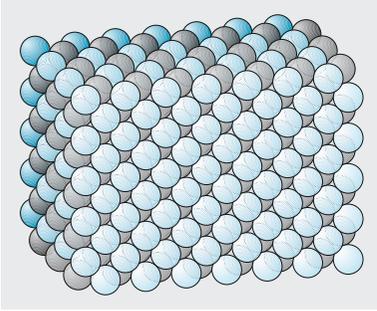


Abb. 17.1. Kubisch-flächenzentrierte Kugelpackung, raumfüllend dargestellt. Von vorn sieht man eine (110)-Ebene; die noch enger liegenden Kugelreihen, die schräg über die obere Fläche laufen, gehören zu den schräg stehenden (111)-Ebenen

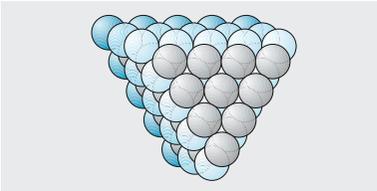


Abb. 17.2. Hexagonal-dichte Kugelpackung, raumfüllend dargestellt. Man schaut fast in Richtung der c -Achse. Zwischen je zwei Schichten, die hier 15 Kugeln enthalten, liegen Schichten wie die vorderste mit 10 Kugeln

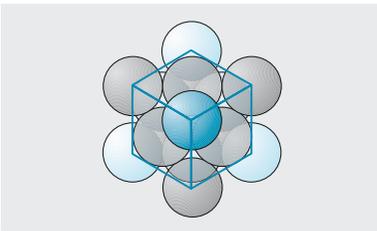


Abb. 17.3. Der Elementarwürfel der kubisch-flächenzentrierten Kugelpackung, in (111)-Richtung gesehen. Die Kugeln sind durchsichtig dargestellt. Von vorn nach hinten folgen Schichten mit einer blauen, sechs grauen, sechs blauen, einer grauen Kugel aufeinander

bei der Schicht, die *unter* der ersten anzubringen wäre, ebenso verfahren. Wir werden gleich nachweisen, dass das so entstandene Gitter als *kubisch flächenzentriert* beschrieben werden kann. Man kann aber auch anders weiterbauen, nämlich in der dritten Schicht vermeiden, die Bodensicht abzudecken. Plätze sind dazu genügend vorhanden: Man legt jede Kugel der dritten Schicht genau über eine der ersten. Setzt man dieses Prinzip in allen weiteren Schichten fort, dann bleiben Kanäle offen, und zwar in gleicher Anzahl, wie Kugeln in jeder Schicht sind. Solche Kanäle gibt es nur in *einer* Richtung, unserer ursprünglichen Bauvertikalen. In allen anderen Richtungen kann man nicht durch die Packung hindurchschauen. Diese Packung, die genauso dicht ist wie die kubisch flächenzentrierte, heißt *hexagonal dicht*, die Kanalrichtung ist ihre c -Achse. Um diese Achse herrscht offenbar dreizählige Symmetrie. In beiden Packungen hat jede Kugel zwölf nächste Nachbarn.

Die kubisch flächenzentrierte Packung hat keine Einzelrichtung, die ausgezeichnet wäre, und überhaupt keine Richtung, in der man hindurchschauen könnte. Dass sie ihren Namen verdient, d. h. aus einem Elementarwürfel entstanden gedacht werden kann, an dessen Ecken und in dessen Flächenmitten Teilchen sitzen, sieht man am besten, wenn man einen solchen Würfel auf die Spitze stellt. Er wirft, genau von oben beleuchtet, einen regulär sechseckigen Schatten: Würfelform und dreizählige Symmetrie sind vereinbar. Die 14 Kugeln des Würfels (acht an den Ecken, sechs in den Flächenmitten) fallen in vier verschiedene Schichten (Abb. 17.3). Man sollte trotz dieser Darstellungsweise mittels des Elementarwürfels nicht vergessen, dass alle Kugeln im kubisch-flächenzentrierten Gitter gleichwertig sind: Jede Flächenmitte kann auch als Ecke eines anderen Würfels aufgefasst werden, in dem dann die bisherigen Ecken z. T. die Rolle der Flächenmitten übernehmen.

Da diese Packung aus Würfeln besteht, hat sie deren Symmetrie, d. h. drei zueinander senkrechte gleichwertige Achsen. Man könnte als Achsen die drei Raumdiagonalen nehmen und hat dann dreizählige Symmetrie um jede. Üblicherweise nimmt man aber die *Würfelkanten* als Achsen. Unsere ursprünglichen dichtest gepackten Schichten liegen so, dass sie von jeder dieser Achsen das gleiche Stück abschneiden, m. a. W., ihr Normalvektor hat drei gleich große Komponenten in diesen Achsen. Diese Schichten heißen daher 111-Ebenen (Komponenten des Normalvektors oder reziproke Achsabschnitte auf kleinste ganzzahlige Werte reduziert: **Miller- oder Laue-Indizes**). In den 111-Ebenen liegen die Kugeln maximal dicht gepackt, wie aus ihrer Entstehungsweise hervorgeht. Die Würfel Flächen sind als 100- bzw. 010- bzw. 001-Ebenen zu bezeichnen (die 1 bedeutet die Achse, zu der die Ebene senkrecht steht). Diese Ebenen sind nicht so dicht besetzt; zwischen den vier Kugeln, z. B. den Würfel ecken, die eine andere (die Flächenmitte) berühren, bleiben Lücken (Oktaederlücken). Man sieht daraus, dass es ebenso viele Oktaederlücken gibt wie Kugeln. Andere Ebenen wie z. B. 110 (senkrecht zur Flächendiagonale) sind i. Allg. noch lockerer besetzt. Wir sprechen natürlich nur von der Besetzung mit *Kugelmittelpunkten*; dass in lockerer besetzte Ebenen i. Allg. noch Kugeln mit ihren äußeren Teilen hineinragen, ist klar. Die Teilchendichte auf einer Ebene bestimmt direkt die Häufigkeit, mit der sich solche Flä-

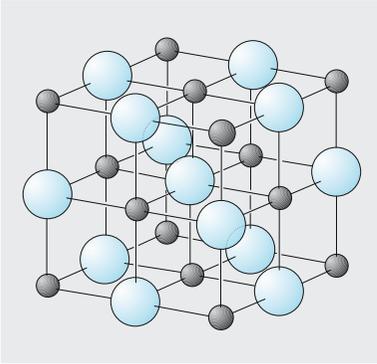


Abb. 17.4. **NaCl-Struktur.** Beide Teilgitter kubisch-flächenzentriert. Jede *schwarze Kugel* ist oktaedrisch von sechs *blauen* umgeben und umgekehrt. Wenn Na- und Cl-Gitterpunkte mit dem gleichen Teilchen besetzt sind, entsteht das **einfach-kubische Gitter**

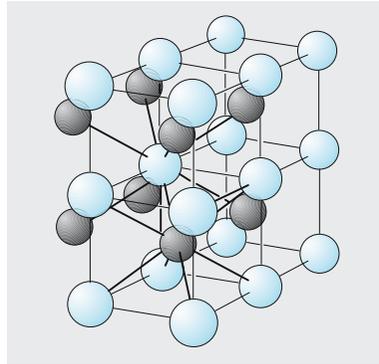


Abb. 17.5. **CsCl-Struktur.** Beide Teilgitter einfach-kubisch. Jede *schwarze Kugel* ist von acht *blauen* umgeben und umgekehrt. Wenn Cs- und Cl-Gitterpunkte mit den gleichen Teilchen besetzt sind, entsteht eines der häufigsten Metallgitter, das **kubisch-raumzentrierte**

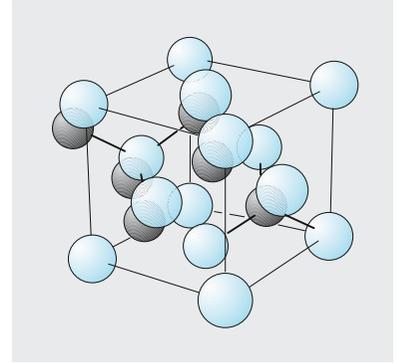


Abb. 17.6. **Sphalerit-Struktur.** Beispiel: ZnS (Zinkblende). Die S allein ergeben die kubisch dichte Packung, ebenso die Zn. Jede *schwarze Kugel* ist tetraedrisch von vier *blauen* umgeben und umgekehrt. Wenn S- und Zn-Gitterpunkte mit den gleichen Teilchen besetzt sind, entsteht das **Diamantgitter**

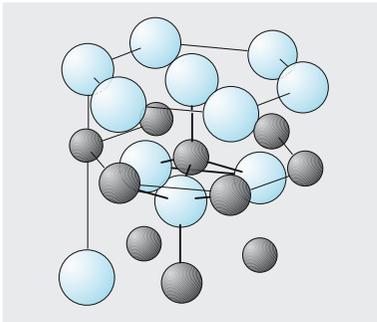


Abb. 17.7. **Wurtzit-Struktur.** Beispiel: ZnS. Die S allein ergeben die hexagonal dichte Packung, ebenso die Zn. Jede *schwarze Kugel* ist tetraedrisch von vier *blauen* umgeben und umgekehrt. Wenn S- und Zn-Gitterpunkte mit den gleichen Teilchen besetzt sind, entsteht das **Eisgitter**

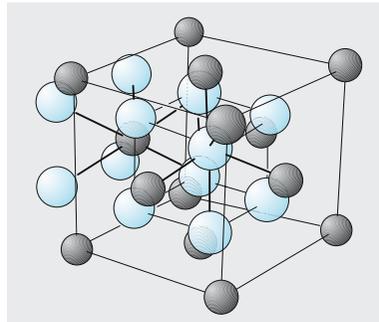


Abb. 17.8. **Flussspatgitter** (CaF_2) Ca: kubisch-flächenzentriert, F: einfach-kubisch. Jedes F hat vier Ca um sich, jedes Ca acht F

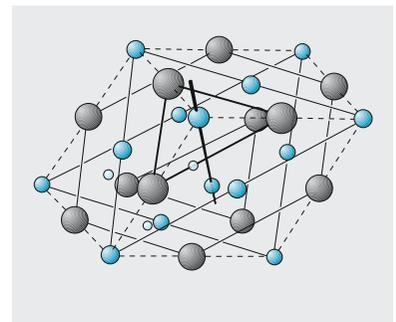


Abb. 17.9. **Kalkspatgitter** ● C, ● Ca, ○ O. Die O-Atome sind nur um eines der C eingezeichnet

chen beim Kristallwachstum ausbilden (vgl. Abschn. 17.1.7), aber auch die Intensität der Bragg-Reflexionen in der Röntgenbeugung des Kristalls (vgl. Abschn. 17.1.3).

Für den Aufbau komplizierter Gitter sind besonders die Hohlräume zwischen den Kugeln wichtig. In sie können sich nämlich Teilchen einer anderen Art einlagern. Welche Hohlräume dabei bevorzugt werden, hängt von der Anzahl und der Größe dieser anderen Teilchen ab. Oktaederlücken sind größer; sie existieren in beiden dichtesten Packungen in derselben

In Abb. 17.4–17.9 sind die Radien der Ionen im richtigen Verhältnis zueinander dargestellt, nicht aber im richtigen Verhältnis zur Gitterkonstanten. Diese ist 2,5mal zu groß. Ungleichartige Ionen berühren einander und erschweren damit die Übersicht (vgl. Abb. 17.1–17.3). Alle Abbildungen bis auf Abb. 17.9 (CaCO_3) haben den gleichen Maßstab. Für CaCO_3 gilt auch ein anderer Farbcode. Sonst: *blaue Kugeln* Anionen, *schwarze Kugeln* Kationen (Metall)

Anzahl wie die Kugeln selbst. Im hexagonalen Gitter sind sie zu c -Kanälen übereinander getürmt, im flächenzentrierten gegeneinander versetzt, und zwar so, dass sie ihrerseits ein kubisch flächenzentriertes Gitter bilden. Tetraederlücken sind kleiner. Jede Kugel beider dichtesten Packungen hat, in der ursprünglichen Schichtrichtung gesehen, eine genau über, eine genau unter ihrem Mittelpunkt (Spitze des Tetraeders nach unten bzw. nach oben). Es gibt also doppelt so viele Tetraederlücken wie Kugeln. Beide Arten von solchen Lücken – die mit der Spitze oben und die mit der Spitze unten – bilden ihrerseits auch wieder ein Gitter vom gleichen Typ wie das der Kugeln. Das ergibt sich sofort aus der beschriebenen Zuordnung zwischen Kugeln und Lücken. Jeder Punkt dieses neuen Gitters ist gegen einen der alten um die Höhe des Schwerpunkts eines regulären Tetraeders verschoben, d. h. um $\frac{1}{4}$ des Kugelabstandes.

Tabelle 17.2. Einige wichtige Kristallgitter

Stoffklasse	Gittertyp	Vertreter	Beschreibung	Koord.-Zahl
Metalle	kubisch flächenzentriert	γ -Fe ($910 < T < 1400$ °C)	s. Abschn. 17.1.1	12
	hexagonal dicht	Be, Mg, Zn, Cd, Co Ti, selt. Erden, He		12
	kubisch raumzentriert	andere Edelgase Na, Li, α -Fe, ($T < 910$ °C), ($T > 1400$ °C)		8
Binäre Verbindungen, überwiegend Ionencharakter	Sphalerit = Zinkblende (= Diamant)	ZnS, CuCl, AgI, CdS	kfz. S- in kfz. Zn-Gitter, eins in der Hälfte der Tetraeder-Lücken des anderen	4,4
	Wurtzit (= Eis)	ZnS, ZnO, CdS, SiC, BN	hex. S- in hex. Zn-Gitter, eins in der Hälfte der Tetraeder-Lücken des anderen	4,4
	NaCl	LiH, KCl, PbS, AgBr, MgO	kfz. Na- in kfz. Cl-Gitter, eins in den Oktaeder-Lücken des anderen	6,6
	CsCl	NH ₄ Cl, CuZn (β -Messing), AlNi, TiI	einf. kub. Cs- in einf. kub. Cl-Gitter, eins in den Würfelmitten des anderen	8,8
	CaF ₂		kfz. Ca- in einf. kub. F-Gitter, F in allen Tetraeder-Lücken von Ca	4,8
Binäre Verbindungen, überwiegend kovalenter Charakter	Diamant (= Sphalerit)	C, Sn (grau) BN, SiC	wie Zinkblende	4
	Eis (= Wurtzit)	H ₂ O, C (hexag. Diamant)	wie Wurtzit	4
	Graphit	C	dicht gepackte C-Schichten, lose gestapelt und durch Nebenvalenzen ($\pi\pi$ -Bindung) verbunden	3

Man kann hiernach bereits in vielen Fällen vorhersagen, wie ein gegebener Stoff kristallisieren wird. Auch über das Kristallwachstum und die äußere Form der Kristalle (**Kristalltracht**) lassen sich allgemeine Aussagen machen (Abschn. 17.1.5). Vor allem aber gewinnt man mittels dieser rein geometrischen Betrachtungen ein vertieftes Verständnis der physikalisch-chemischen Eigenschaften der einzelnen Kristallsysteme.

Für diese Betrachtungen ist wichtig, dass sich jedes Atom oder Ion durch einen **Atom-** bzw. **Ionenradius** kennzeichnen lässt, der von der Art des Bindungspartners nur wenig abhängt. Es ist klar, dass sich nur ein sehr kleines Teilchen *B* in die Tetraederlücken eines kubisch-flächenzentrierten Gitters aus Teilchen *A* einlagern kann. Größere Teilchen *B* werden die Oktaederlücken bevorzugen, noch größere können das ganze *A*-Gitter sprengen und es z. B. in ein raumzentriertes verwandeln, in dem mehr Platz zur Einlagerung von *B* ist (Aufgabe 17.1.1). Außerdem sucht sich jedes Teilchen mit möglichst vielen anderen zu umgeben, mit denen es Bindungen unterhält, d. h. es versucht seine **Koordinationszahl** möglichst hoch zu machen. Schließlich kommt es darauf an, ob die Bindungen Richtungseigenschaften haben oder nicht. **Kovalente Bindungen** haben eine feste Richtung, von der nur unter erheblichem energetischen Mehraufwand abgewichen werden kann. Die **Ionen-** und die **Metallbindung** sind dagegen ihrem rein elektrostatischen Charakter entsprechend weitgehend ungerichtet.

17.1.2 Gittergeometrie

Viele wichtige Gitter einfacher Substanzen lassen sich aus den dichtesten Kugelpackungen ableiten. Im allgemeineren Fall braucht man einige weitergehende Begriffe der klassischen Kristallographie. Die Grundidee ist, das Gitter entstanden zu denken durch wiederholte Verschiebung (Translation) einer **Basiseinheit**. Diese Basis kann ein Einzelatom sein, aber auch ein ganzes Molekül von sehr komplexer innerer Struktur, z. B. ein Proteinkomplex mit über 10 000 Atomen. Wenn der ganze Raum durch Translation mit solchen identischen und identisch gelagerten Basiseinheiten ausgefüllt ist, heißt das Folgendes: Es gibt unendlich viele Vektoren *r*, genannt Gittervektoren, von deren Endpunkten aus gesehen das Gitter genau das gleiche Bild bietet wie vom Ursprung 0 aus. Alle diese **Gittervektoren** lassen sich aus drei linear unabhängigen (d. h. nicht in einer Ebene liegenden) **Grundvektoren** *a*₁, *a*₂, *a*₃ additiv aufbauen: $r = \sum n_i a_i$, wobei die *n*_{*i*} positiv oder negativ ganzzahlig sind. Das setzt voraus, dass die *a*_{*i*} die kürzest möglichen linear unabhängigen Gittervektoren sind. Ein *Gitter* ist definiert durch Angabe der *Basiseinheit* und der drei *Grundvektoren* *a*_{*i*}. Die Grundvektoren spannen die **Elementarzelle** des Gitters auf. Physikalisch fällt jeweils i. Allg. nur ein Teil der Basiseinheiten, die auf oder nahe den acht Ecken der Elementarzellen sitzen, in diese Zelle hinein, aber diese acht Teile bilden insgesamt eine volle Basiseinheit. Das Gitter entsteht durch dreidimensionale Aneinanderreihung von Elementarzellen.

Die kubisch dichteste Kugelpackung kann dargestellt werden durch eine kubische Elementarzelle, aufgespannt durch drei gleich lange und wechselweise senkrechte Grundvektoren *a*_{*i*}. Die Ebenen dichtester Pa-

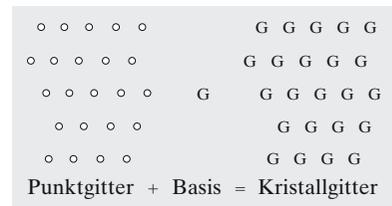


Abb. 17.10. Zusammenhang zwischen Punktgitter, Basis und Raumgitter

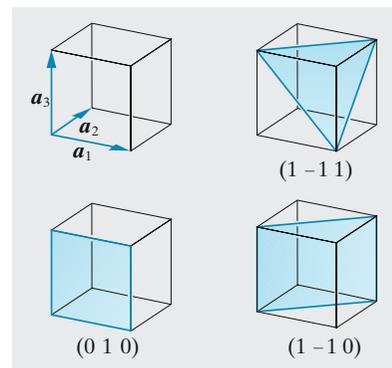


Abb. 17.11. Die drei wichtigsten Netzebenentypen im kubischen Gitter

Tabelle 17.3. Winkel in Bravais-Gittern

Ebene Gitter	
$\alpha \neq 90^\circ, 60^\circ$:	schief
$\alpha = 90^\circ, a_1 \neq a_2$:	Rechteck
$\alpha = 60^\circ, a_1 = a_2$:	hexagonal
$\alpha = 90^\circ, a_1 = a_2$:	Quadrat
Raumgitter	
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 90^\circ$:	triklin
$\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ,$ $\alpha_3 \neq 90^\circ$:	monoklin
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ,$ $a_1 \neq a_2 \neq a_3$:	orthorhombisch
$\alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ,$ $a_1 \neq a_2 \neq a_3$:	orthorhombisch
$\alpha_1 = 60^\circ, a_2 = a_3$:	hexagonal
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq 90^\circ,$ $a_1 = a_2 = a_3$:	trigonal (rhomboedrisch)
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ,$ $a_1 = a_2 \neq a_3$:	tetragonal
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ,$ $a_1 = a_2 = a_3$:	kubisch

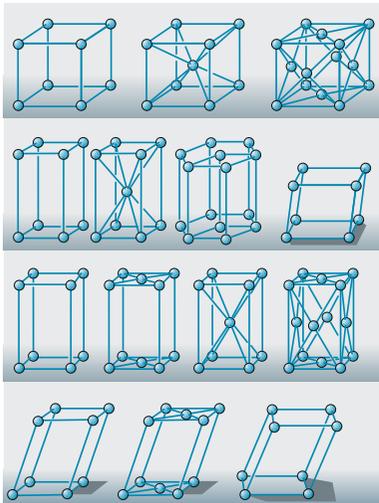


Abb. 17.12. Die vierzehn Bravais-Gitter

ckung laufen schräg zu allen drei Achsen. Als Basiseinheit muss man dann ein Tetraeder aus vier Kugeln wählen: Eine Kugel an der Würfecke und die drei Zentralkugeln der angrenzenden Würfelflächen. Von der Eckkugel gehört nur $\frac{1}{8}$ in die Elementarzelle, von jeder Flächenmittelkugel $\frac{1}{2}$. Die Elementarzelle enthält also $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$ Kugeln, d. h. eine ganze Basiseinheit. Das gleiche Gitter lässt sich auch aus einer kleineren Elementarzelle aufbauen, die nur aus dem Basis-Tetraeder und dem ihm im Würfel diame-
tral gegenüberliegenden Tetraeder besteht (Elementar-Rhomboeder). Die Grundvektoren, die eine Würfecke mit einer anstoßenden Flächenmitte verbinden, sind dann allerdings nicht mehr senkrecht zueinander (trigonale oder rhomboedrische Symmetrie). Gewöhnlich zieht man die Darstellung durch eine kubische Elementarzelle wegen ihrer höheren Symmetrie vor.

Nach der maximalen Translations-symmetrie, ausgedrückt durch die drei Grundvektoren der möglichst symmetrischen Elementarzelle, teilt man alle Kristalle in sieben „Systeme“ ein. Wir erläutern sie durch Gegenüberstellung mit den vier Systemen für ebene Gitter (zwei Grundvektoren).

Damit ist noch nicht gesagt, ob die Elementarzelle „primitiv“, d. h. nur an den Ecken besetzt, oder ob sie innen-zentriert (raumzentriert, Symbol I), d. h. auch im Schnittpunkt der Raumdiagonalen besetzt, oder ob sie flächen-zentriert (Symbol F) ist, wie die der kubisch dichtesten Packung. Bei nichtkubischen und nichttrigonalen Gittern sind die Flächen der Elementarzelle nicht alle gleichwertig, man muss u. U. noch Zentrierung der „Basisfläche“ (Symbol C) und der übrigen Flächen unterscheiden. Man kommt so zu den vierzehn **Bravais-Gittern** oder zentrierten Gittern (in der Ebene nur fünf). Es sind nicht mehr als vierzehn, weil nicht alle Kombinationen der sieben Systeme mit den drei oder vier Zentrierungstypen (P, I, F, C) sinnvoll sind. Vielfach würde die Zentrierung zur Entstehung einer kleineren Elementarzelle gleicher Symmetrie führen, oder Erhebung eines Flächen-paars in den Rang einer zu zentrierenden Basisfläche würde die herrschende Symmetrie herabsetzen. Aus dem zweiten Grund gibt es z. B. kein kubisch oder trigonal basiszentriertes Gitter. Das tetragonal basiszentrierte Gitter ließe sich durch 45° -Drehung und Verkleinerung der Elementarzelle auch als tetragonal primitiv auffassen.

Noch größer ist die Anzahl der **Punktsymmetrieklassen**. Sie werden gebildet durch die möglichen Kombinationen von Symmetrieelementen, die das reine Translationsgitter (d. h. ohne Berücksichtigung der inneren Struktur der Basiseinheit) kennzeichnen. Solche **Symmetrieelemente** sind: Symmetrieachsen, die zwei-, drei-, vier- oder sechszählig sein können, d. h. so, dass eine Drehung um $180^\circ, 120^\circ, 90^\circ, 60^\circ$ um diese Achse das Gitter in sich selbst überführt. Fünf-, sieben- oder höherzählige Achsen gibt es nicht, weil damit keine vollständige Raumerfüllung möglich wäre. Zu den Symmetrieachsen kommen Symmetrieebenen (Symbol m). Ein Symmetriezentrum z. B. kann durch Kombination einer zweizähligen Achse und einer dazu senkrechten Spiegelebene ersetzt werden. Nicht alle Kombinationen sind möglich, denn ein Symmetrieelement erzwingt manchmal eine bestimmte Kombination anderer Elemente. Wenn z. B. eine vierzählige Achse mit einer Symmetrieebene kombiniert werden soll, kann die Ebene nur senkrecht oder parallel zur Achse sein. Im zweiten Fall muss es wegen der vierzähligen Symmetrie noch eine weitere Symmetrieebene senkrecht zur ersten und parallel zur Achse geben. Man erhält so 32 Punktsymmetrieklassen.

Die Basiseinheit selbst kann durch ihre innere Struktur die Punktsymmetrie des Translationsgitters durchbrechen (Beispiel: Abb. 17.10). Kombination mit den Symmetrieelementen der Basis ergibt also neue, zahlreichere Symmetrieklassen.

sen, die **Raumsymmetrieklassen**. Ihre Anzahl ist ebenfalls begrenzt: 230 im Raum, 17 in der Ebene. Weitere Verallgemeinerungen, die Antisymmetrie- oder Schwarz-Weiß-Symmetrieklassen und Farbsymmetrieklassen, ergeben noch mehr Kombinationen (1 651 Antiraumgruppen oder **Schubnikow-Gruppen**). Sie sind zur Charakterisierung magnetischer und Mischkristallstrukturen wichtig, und zwar deswegen, weil ein magnetisches Moment als axialer Vektor sich bei der Spiegelung oder Inversion seinem Richtungssinn nach gerade umgekehrt verhält wie ein räumlicher (polarer) Vektor (vgl. Abschn. 18.4.10).

17.1.3 Kristallstrukturanalyse

Eine monochromatische ebene Welle (Licht, Neutronen, manchmal auch Elektronen) fällt auf einen Kristall. Dessen Gitter ist gegeben durch die Basiseinheit und das Translationsgitter, in dem sich diese Basis periodisch wiederholt, gekennzeichnet durch die Grundvektoren \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$). Wir untersuchen zuerst den Einfluss des Translationsgitters auf das Beugungsbild. Die Streuung der Welle am Gitter sei elastisch und linear, d. h. die gestreute Frequenz sei gleich der einfallenden. Bei sehr hohen Intensitäten wie im Laserstrahl ist die Linearität nicht immer gesichert; Elastizität der Streuung setzt voraus, dass der Kristall als Ganzes den Rückstoßimpuls bei der Umlenkung des Photons oder Neutrons aufnimmt, sodass wegen der ungeheuren Masse des Stoßpartners kein merklicher Energieverlust stattfindet. Ferner sei der streuende Kristall sehr klein gegen den Abstand bis zum Schirm (Film, Zähler), der die gebeugten Wellen registriert.

An jedem Gitterpunkt $\mathbf{r} = \sum n_i \mathbf{a}_i$ mit ganzzahligen n_i sitzt eine Basiseinheit. Sie emittiert eine kugelförmige Streuwelle, allerdings durchaus nicht immer mit isotroper Intensitätsverteilung. In bestimmten Richtungen überlagern sich die Streuwellen von allen Basiseinheiten zu einer ebenen Wellenfront.

Wir beschreiben die einfallende Welle durch den Wellenvektor \mathbf{k} und die Kreisfrequenz ω , die ebene Streuwelle durch \mathbf{k}' und ω' . Der \mathbf{k} -Vektor steht senkrecht auf der Wellenfront in Ausbreitungsrichtung, sein Betrag ist $k = 2\pi/\lambda$. Die Welle wird dargestellt durch $E = E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ oder, mathematisch einfacher, $E = E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$. Es ist $\omega' = \omega$ und $k = |\mathbf{k}| = k' = |\mathbf{k}'|$.

Ob in einer bestimmten Richtung \mathbf{k}' alle Teilwellen konstruktiv oder destruktiv interferieren, hängt nur von ihren Gangunterschieden ab. Wir legen einen Gitterpunkt 0 als Ursprung fest und bestimmen den Gangunterschied zwischen einer Streuwelle, die von einem anderen Gitterpunkt $\mathbf{r} = \sum n_i \mathbf{a}_i$ ausgeht, und der, die von 0 ausgeht. Wie Abb. 17.13 zeigt, muss die Welle bis \mathbf{r} um die Strecke $r \cos(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} / k$ weiter laufen als bis 0. Dafür spart sie von \mathbf{r} aus bis zum Schirm die Strecke $\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}' / k'$. Wegen der Definition des Skalarprodukts als Projektion z. B. auf die \mathbf{k} -Richtung stimmt dies auch, wenn \mathbf{r} nicht in einer Ebene mit \mathbf{k} und \mathbf{k}' liegt.

Alle Teilwellen-Amplituden addieren sich, wenn dieser Gangunterschied für *alle* Gitterpunkte ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, d. h. wenn

$$\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \Delta \mathbf{k} \cdot \sum n_i \mathbf{a}_i = 2\pi m, \tag{17.1}$$

Tabelle 17.4. Bravais-Gitter

Ebene Gitter				
schief	P			
hexagonal	P			
rechteckig	P	F		
quadratisch	P			
Raumgitter				
triklin	P			
monoklin	P	C		
hexagonal	P			
trigonal	P			
orthorhombisch	P	C	I	F
tetragonal	P		I	
kubisch	P		I	F

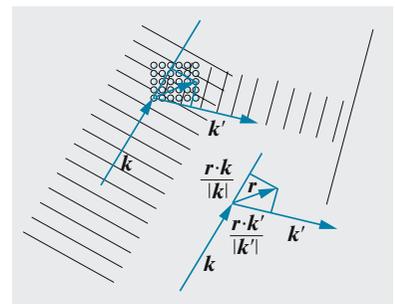


Abb. 17.13. Die Streuwellen von zwei im Abstand r gelegenen Zentren interferieren nur dann voll konstruktiv, wenn ihr Gangunterschied ein Vielfaches von λ ist, d. h. wenn $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k}/k - \mathbf{k}'/k') = n\lambda$.

mit ganzzahligem m für alle ganzzahligen Tripel n_i . Für alle $\Delta\mathbf{k}$, die dieser **Beugungsbedingung** nicht genügen, d. h. für die $\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ nicht für alle Gittervektoren \mathbf{r} ganzzahlig ist, verteilen sich die Phasen der Teilwellen praktisch gleichmäßig über das ganze Intervall $(0, 2\pi)$, d. h. die Teilwellen interferieren einander vollständig weg (man bedenke, dass der Kristall immer sehr groß gegen eine Wellenlänge ist und praktisch unendlich viele Basiseinheiten enthält). Gleichung (17.1) ist eine andere Formulierung der **Bragg-Bedingung** (16.4) (vgl. Aufgabe 17.1.9).

Der eleganteste Kunstgriff zur allgemeinen Lösung der Beugungsbedingung (und vieler anderer Probleme) ist die Einführung des **reziproken Gitters**. Dies ist ein Translationsgitter, dessen Grundvektoren $\tilde{\mathbf{a}}_i$ ($i = 1, 2, 3$) mit den Grundvektoren \mathbf{a}_i des eigentlichen Gitters in folgender Beziehung stehen:

$$\tilde{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{a}_k = \delta_{ik} 2\pi = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 2\pi & \text{für } i = k \end{cases} \quad (17.2)$$

Das bedeutet, dass z. B. $\tilde{\mathbf{a}}_1$ auf \mathbf{a}_2 und \mathbf{a}_3 senkrecht steht, also parallel zum Vektorprodukt $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ ist. Damit ferner $\tilde{\mathbf{a}}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 2\pi$, muss sein

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3} 2\pi \quad \text{usw.} \quad (17.3)$$

Wenn die \mathbf{a}_i orthogonal sind, wie für das kubische, das tetragonale und das orthorhombische System, sind die $\tilde{\mathbf{a}}_i$ ebenfalls orthogonal, und zwar $\tilde{\mathbf{a}}_i$ parallel zu \mathbf{a}_i , nämlich $\tilde{\mathbf{a}}_i = 2\pi\mathbf{a}_i/a_i^2$. Ein kubisches Gitter und sein reziprokes Gitter unterscheiden sich nur im Maßstab.

Ein Vektor des reziproken Gitters hat die allgemeine Form $\mathbf{g} = \sum l_i \tilde{\mathbf{a}}_i$, mit ganzen l_i . Sein Produkt mit jedem Vektor des wirklichen Gitters ist automatisch eine ganze Zahl:

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = \left(\sum l_i \tilde{\mathbf{a}}_i \right) \cdot \left(\sum n_i \mathbf{a}_i \right) = \sum l_i n_i \cdot 2\pi = \text{ganze Zahl} \cdot 2\pi .$$

Mit Hilfe des reziproken Gitters kommt die Beugungsbedingung daher auf die einfache Form:

$$\Delta\mathbf{k} = \mathbf{g} . \quad (17.4)$$

Ein möglicher Reflex liegt in der Richtung, die gegeben ist durch ein $\Delta\mathbf{k}$, das ein Vektor des reziproken Gitters ist.

Das Beugungsbild ist einfach eine Projektion des reziproken Gitters auf den Film, entsprechend wie ein direktes elektronenmikroskopisches Bild, wenn man es machen könnte, eine Projektion des richtigen Gitters wäre.

Die Beugungsbedingung lässt sich auch impulsmäßig interpretieren: Das einfallende Photon (Neutron) hat den Impuls $\hbar\mathbf{k}$, das gestreute $\hbar\mathbf{k}'$, die Impulsänderung beim Stoß mit dem Gitter ist $\hbar\Delta\mathbf{k}$. Den entgegengesetzten Impuls nimmt das Gitter im Rückstoß auf. Nur wenn $\Delta\mathbf{k}$ ein Vektor des reziproken Gitters ist, erfüllen die Stöße vieler Photonen an allen möglichen Gitterpunkten eine Phasenbedingung, die garantiert, dass sich alle winzigen Beiträge der Einzelphotonen zu einem Gesamtimpuls überlagern. Nur dann kann der ganze Kristall den Rückstoß aufnehmen, der nötig ist, damit sich ein gebeugtes Bündel bildet.

Eine bequeme geometrische Deutung der Beugungsbedingung ist die **Ewald-Konstruktion**: Man zeichne einen ebenen Schnitt des reziproken Gitters und lege den Vektor k mit der Spitze in einen reziproken Gitterpunkt P . Sein Anfang sei O . Jeder andere Gitterpunkt, der auf dem Kreis um O durch P liegt, ergibt die Richtung eines möglichen Reflexes, nämlich einen Wellenvektor k' , der die Beugungsbedingung erfüllt.

Nicht für jeden Vektor k des einfallenden Lichts liegen andere reziproke Gitterpunkte genau auf dem Ewald-Kreis. Ob das der Fall ist, sieht man noch einfacher aus den **Brillouin-Zonen**: Von einem beliebigen reziproken Gitterpunkt O ziehe man die Verbindungslinien zu allen übrigen, also alle Vektoren des reziproken Gitters, und errichte in der Mitte jeder Verbindungslinie eine dazu senkrechte Ebene. Alle diese Ebenen teilen den reziproken Raum in Gebiete, die Brillouin-Zonen, auf (Abb. 17.15). Nur Licht, dessen k -Vektor, von O angetragen, auf einer Zonengrenze endet, wird im Kristall gebeugt, und zwar als Bragg-Reflexion an der Netzebene, die dieser Zonengrenze parallel ist. In diesem Fall ist nämlich Δk gleich dem (negativen) Gittervektor g , dessen Mittelsenkrechte die betrachtete Zonengrenze ist. Licht mit anderen k wird überhaupt nicht gebeugt. Da weiter außen die Zonengrenzen immer dichter liegen, trifft dies praktisch nur für k -Vektoren innerhalb der innersten Brillouin-Zonen zu, d. h. für sehr lange Wellen.

Jeder Vektor g des reziproken Gitters steht senkrecht auf einer bestimmten **Netzebene** des wirklichen Gitters (diese Beziehung besteht zwischen einem Vektor des wirklichen Gitters und einer Netzebene nicht allgemein, sondern nur für die drei orthogonalen Kristallsysteme). Die Netzebene wird durch die Komponenten des zu ihr normalen reziproken Gittervektors charakterisiert (**Miller- oder Laue-Indizes**) (siehe Abb. 17.15).

Ein bestimmter Reflex wird dementsprechend gekennzeichnet durch die Komponenten des reziproken Gittervektors $g = \Delta k / (2\pi)$, m. a. W. durch die Miller-Indizes der reflektierenden Netzebene, die senkrecht zu diesem Vektor g steht.

Die Beugungsbedingung in ihren verschiedenen Formen gibt die Richtungen an, in denen Reflexe liegen können. Sie bezieht sich dabei nur auf die Struktur des Translationsgitters. Welche Intensität diese Reflexe haben und ob diese Intensität vielleicht sogar verschwindet, hängt von der Struktur der Basiseinheit des Gitters ab, und zwar von

- der Anordnung der Atome in der Basiseinheit,
- der Struktur der Elektronenhülle jedes Atoms der Basis,
- der thermischen „Verwackelung“ des regulären Translationsgitters.

In allen drei Fällen handelt es sich um eine Intensitätsschwächung durch Interferenz der Teilstreuwellen von den einzelnen Strukturelementen der Basis.

Die Basiseinheit, speziell die am Ursprung angebrachte, bestehe aus m Atomen an den Orten b_ν , $\nu = 1, 2, \dots, m$. Die vom ν -ten Atom ausgehende Kugelstreuwellen habe die relative Amplitude A_ν . Ihr Beitrag zum gebeugten Bündel (Wellenvektor k') ist gegeben durch den Gangunterschied $b_\nu \cdot \Delta k$ bzw. durch den Phasenfaktor $e^{ib_\nu \cdot \Delta k}$. Die Streuamplitude

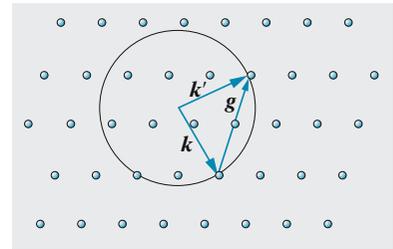


Abb. 17.14. Ewald-Konstruktion für die Richtungen k' , in die ein Kristall Röntgenlicht beugt: $k' - k$ muss ein Vektor des reziproken Gitters sein

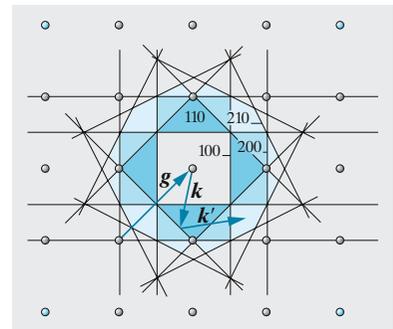


Abb. 17.15. Brillouin-Zonen eines ebenen Quadratgitters (Schnitt durch die Brillouin-Zonen eines NaCl-Gitters). Jede Zonengrenze ist die Mittelebene zweier Punkte des reziproken Gitters, das im Fall des NaCl wie das Gitter selbst aussieht. Eine Röntgen- oder Elektronenwelle wird an einer Zonengrenze normal reflektiert, denn genau in diesem Fall ist die Bedingung $k - k' = g$ erfüllt. Die Zahlen entsprechen den Miller-Indizes der entsprechenden Kristallrichtungen

der Basiseinheit wird also gegeben durch den **Basis-Strukturfaktor** $B = \sum A_\nu e^{i\mathbf{b}_\nu \cdot \Delta\mathbf{k}}$.

Bei der Bestimmung des **Atom-Strukturfaktors** A_ν zeigen sich erstmals Unterschiede zwischen **Röntgen-** und **Neutronenstreuung**. Photonen werden überwiegend an den Hüllenelektronen, kaum am Kern gestreut (große Masse); Neutronen werden umgekehrt fast nur am Kern gestreut, besonders wenn dieser leicht ist. Die folgende Diskussion bezieht sich auf Photonen, deren Streuung also Rückschlüsse auf die Elektronendichteverteilung im Kristall zulässt. Die Elektronendichte im ν -ten Atom am Ort \mathbf{x} , vom Atomschwerpunkt \mathbf{b}_ν an gerechnet, sei $n(\mathbf{x})$. Ein Volumenelement dV streut proportional zur darin enthaltenen Elektronenanzahl $n(\mathbf{x}) dV$. Damit wird der Gesamtbeitrag des Atoms zur Streuamplitude

$$\int e^{i(\mathbf{b}_\nu + \mathbf{x}) \cdot \Delta\mathbf{k}} n(\mathbf{x}) dV = e^{i\mathbf{b}_\nu \cdot \Delta\mathbf{k}} \cdot \int e^{i\mathbf{x} \cdot \Delta\mathbf{k}} n(\mathbf{x}) dV. \quad (17.5)$$

Wir identifizieren somit den Atom-Strukturfaktor

$$A_\nu = \int e^{i\mathbf{x} \cdot \Delta\mathbf{k}} n(\mathbf{x}) dV. \quad (17.6)$$

Für ein punktförmiges Atom (praktisch also für sehr lange Wellen) ist der e-Faktor 1, und es wird einfach A_ν gleich Z , der Gesamtzahl von Elektronen in der Hülle. Jede ausgedehnte Elektronenverteilung schwächt die Amplitude durch innere Interferenz, umso stärker, je größer $\Delta\mathbf{k}$, also i . Allg. je kürzer λ ist. Das Studium dieser Schwächung für verschiedene λ und verschiedene Einfallrichtungen erlaubt im Prinzip Bestimmung von $n(\mathbf{x})$. Amplitude und Elektronendichte stehen nämlich nach (17.6) im Verhältnis von Fourier-Transformierter und Originalfunktion bzw. umgekehrt. **Fourier-Transformation** des Strukturfaktors (Integration über den \mathbf{k} -Raum) liefert $n(\mathbf{x})$.

Da das oben angenommene reguläre Translationsgitter physikalisch in keinem Moment wirklich existiert, sondern die Teilchen thermische (in erster Näherung voneinander unabhängige) Zitterbewegungen ausführen, deren Amplitude immerhin einige Prozent der Gitterkonstanten ausmacht, ist es verwunderlich, dass ein so verwackeltes Gitter überhaupt scharfe Beugungsflecken erzeugt. Wie sich zeigt, hängt die Fleckenschärfe nur davon ab, ob *feste zeitlich gemittelte* Ruhelagen der Teilchen existieren, d. h. ob der Stoff überhaupt als fest anzusehen ist. Die thermischen Schwankungen um diese Ruhelagen wirken sich nur als zusätzlicher intensitätsschwächender Strukturfaktor aus. Die momentane Lage des Atoms sei $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1(t)$, wo $\mathbf{b}_1(t)$ die unregelmäßig schwankende thermische Auslenkung ist. Im Zeitmittel ist $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_0$, denn $\bar{\mathbf{b}}_1 = 0$. Für die Streuamplitude kommt es auf den Mittelwert von $e^{i\mathbf{b} \cdot \Delta\mathbf{k}} = e^{i(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1) \cdot \Delta\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{b}_0 \cdot \Delta\mathbf{k}} e^{i\mathbf{b}_1 \cdot \Delta\mathbf{k}}$ an. Der erste Faktor ist schon im Basis-Strukturfaktor B berücksichtigt. Wir entwickeln den zweiten:

$$\overline{e^{i\mathbf{b}_1 \cdot \Delta\mathbf{k}}} \approx 1 + i \overline{\mathbf{b}_1 \cdot \Delta\mathbf{k}} - \frac{1}{2} \overline{(\mathbf{b}_1 \cdot \Delta\mathbf{k})^2}. \quad (17.7)$$

Das zweite Glied verschwindet ebenso wie $\bar{\mathbf{b}}_1$ (das Skalarprodukt ist ebenso oft positiv wie negativ). Im quadratischen Glied ist das nicht der Fall. Es zählt allerdings nur die Komponente von \mathbf{b}_1 in Richtung

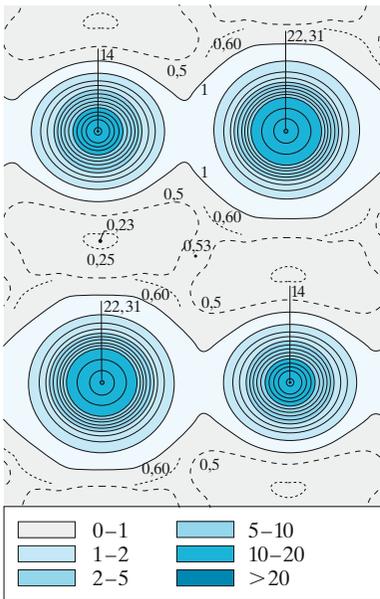


Abb. 17.16. Dichteprofil der Elektronenverteilung im NaCl-Kristall, gewonnen durch Auswertung der Atom- und Struktur-Formfaktoren (Fourier-Analyse). Die Zahlen an den „Höhenlinien“ geben die Elektronendichte im \AA^{-2} eines Ausschnitts der auf die (110)-Ebene projizierten Elementarzelle. Sehr geringe Elektronendichte zwischen den Atomen: Ionenkristall. (Nach Brill, Grimm, Hermann und Peters, aus W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

von Δk , die im Mittel $\frac{1}{3}$ des Gesamtbetrages von $\overline{b_1^2}$ ausmacht (vgl. Kinetik des Gasdrucks, Abschn. 5.2.1): $\frac{1}{2}(\overline{b_1 \cdot \Delta k})^2 = \frac{1}{6}\Delta k^2 \overline{b_1^2}$. Die Amplitudenschwächung durch thermische Schwankung wird also gegeben durch den **Debye-Waller-Faktor** (nach Rückführung in die vollständige e-Reihe):

$$f_{\text{DW}} = e^{-\frac{1}{6}\Delta k^2 \overline{b_1^2}}. \quad (17.8)$$

Das mittlere Verschiebungsquadrat $\overline{b_1^2}$ ist klassisch und quantenmechanisch verschieden zu berechnen. Für ein klassisches schwingendes Teilchen, das elastisch mit der Federkonstanten $D = m\omega^2$ an die Ruhelage gebunden ist, muss die thermische Energie $\frac{1}{2}kT$ gleich der potentiellen Energie der Schwingung $\frac{1}{2}m\omega^2 \overline{b_1^2}$ sein; $\overline{b_1^2} = \frac{1}{2}b_{10}^2$, also

$$f_{\text{DW}} = e^{-\frac{1}{12}\Delta k^2 kT / (m\omega^2)}. \quad (17.9)$$

Der quantenmechanische Oszillator behält auch bei $T \rightarrow 0$ die Nullpunktsenergie $\frac{1}{2}\hbar\omega$ für jeden Schwingungsfreiheitsgrad, im Ganzen also $\frac{3}{2}\hbar\omega$. Davon ist die Hälfte potentielle Energie, also

$$f_{\text{DW}} = e^{-\frac{1}{4}\Delta k^2 \hbar / (m\omega)}. \quad (17.10)$$

Die Intensitätsschwächung ist das Quadrat der Amplitudenschwächung, d. h. intensitätsmäßig verdoppelt sich der Exponent dieser Ausdrücke.

Was wird aus der verlorenen Intensität, speziell der vom Debye-Waller-Faktor gegebenen? Sie wird nicht elastisch am Gitter gestreut, sondern z. T. unelastisch, z. B. als **Brillouin-Streuung** zwischen Photonen und Gitterschwingungs-Phononen. Ein solches Photon stößt nicht mit dem Kristall als Ganzem, dessen überwältigende Masse Verschwinden des Energieverlustes garantiert, sondern mit einem Einzelatom und regt dabei Gitterschwingungen an oder ab. Analog beschreibt der Debye-Waller-Faktor beim **Möbbaueffekt** den Anteil der Absorption von γ -Quanten, der praktisch „rückstoßfrei“, d. h. ohne Frequenzverschiebung erfolgt, weil der Kristall als Ganzes den Rückstoß aufnimmt. Dieser Anteil steigt allgemein mit abnehmender Temperatur: Je kälter, desto härter ist der Kristall. Allerdings lässt sich diese Verhärtung, wie wir sahen, nicht durch makroskopische elastische, sondern nur durch atomare Größen ausdrücken.

17.1.4 Gitterenergie

Alle Dinge unserer näheren Umgebung werden durch Kräfte zusammengehalten, die letzten Endes elektrischer Natur sind. Sie bestimmen die mechanische Festigkeit der Stoffe, aber auch thermische Eigenschaften wie Schmelzpunkt, Siedepunkt, thermische Ausdehnung. Wir wählen sechs Eigenschaften von grundlegender Bedeutung, nämlich die Dichte ρ , die **Gitterenergie** E_0 , den **Schmelzpunkt** T_s , den **kubischen Ausdehnungskoeffizienten** β , den **Elastizitätsmodul** E und die **Bruchdehnung** δ , und versuchen sie durch eine halbphänomenologische Theorie zu verknüpfen (Tabelle 17.5). E und δ bestimmen im Idealfall das Spannungs-Dehnungs-Diagramm, erfassen aber nicht seinen „nichtelastischen“ Abschnitt, für den Gleitprozesse und Dislokationen maßgebend sind (Abschn. 17.5.4).

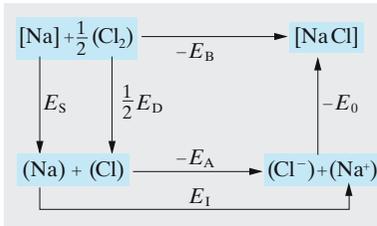


Abb. 17.17. Der Born-Haber-Kreisprozess zur Bestimmung der Bindungsenergie W_0 eines Kristalls aus bekannten Daten über Reaktions-, Verdampfungs-, Dissoziations-, Ionisierungs- und Elektronenanlagerungs-Energien

Unter den sechs Eigenschaften bedarf nur die Gitterenergie einer ausführlicheren Definition. Es ist die Energie, die man braucht, um die Gitterteilchen bis in unendlichen Abstand auseinander zu rücken, bezogen auf ein Gitterteilchen. Für ein Atom- oder Molekülgitter entspricht das praktisch der Überführung in den Gaszustand. Die Gitterenergie ist die atomare bzw. molekulare Sublimationswärme. Beim Ionengitter muss man anders verfahren (**Born-Haber-Kreisprozess**, Abb. 17.17). Man nehme z. B. 1 mol festes Na plus $\frac{1}{2}$ mol Cl_2 -Dampf, dissoziiere die Cl_2 -Moleküle unter Aufwand der Dissoziationsenergie $E_D/2$, verdampfe das Na unter Aufwand der Sublimationswärme E_S , entziehe dem Na 1 mol Elektronen unter Aufwand der Ionisierungsenergie E_I , gebe diese Elektronen an das Cl weiter unter Gewinnung der Elektronenaffinität E_A und vereinige beide Ionenarten zum Kristall unter Gewinnung der gesuchten Gitterenergie E_0 . Andererseits kann man das feste Na und den Cl_2 -Dampf auch direkt zum NaCl reagieren lassen unter Gewinn der Bildungswärme E_B . E_0 ergibt sich also aus den übrigen Energien, die alle messbar sind, zu

$$E_0 = E_B - E_A + E_I + E_S + \frac{1}{2} E_D . \quad (17.11)$$

Die Bruchdehnung δ hängt als rein technologische Materialeigenschaft stark von der Vorbehandlung des Kristallgefüges ab. Für die typischen Metalle, besonders die „Übergangsmetalle“ in der Mitte der d -Auffüllungszone und rechts davon, erreicht man Werte über 50%, bei den Nichtmetallen liegt δ um 1%.

Tabelle 17.5. Kristallbindung

Bindungstyp	Art der Bindungskräfte	Beispiele Stoff	$E_0/\text{kJ mol}^{-1}$	Merkmale
Ionenbindung (heteropolar)	Elektrostatisch, da die Atome als ungleichnamige Ionen in das Gitter eingehen	NaCl LiF	750 1 000	Starke Lichtabsorption im Ultrarot. Elektrolytische Leitfähigkeit, mit Temperatur zunehmend
Valenzbindung (homöopolar)	Gerichtete „Valenzkräfte“, d. h. die gleichen, die gleichartige Atome im Molekül zusammenhalten. Durch Valenzstriche darstellbar, quantenmechanisch deutbar, Kristall = Riesenmolekül	Diamant Ge Si	710	Große Härte; bei tiefer Temperatur zeigen reine Kristalle keine Leitfähigkeit
Dipolbindung	Durch feste Dipole der molekularen Bausteine oder durch Wasserstoffbrücken relativ schwach zusammengehalten	Eis HF	50 30	Tendenz zur Bildung größerer Molekülgruppen
van der Waals-Bindung (Molekül-Kristalle)	van der Waals-Kräfte, wie sie sich auch im nichtidealen Gas bemerkbar machen	Ar CH ₄ organische Stoffe	7,5 10	Niedrige Schmelz- und Siedetemperatur. Kompressionsmodul und Härte gering
Metallische Bindung	Zusammenhalt durch die Elektronen, die sich bei der Kristallbildung aus (gleichartigen) Atomen abspalten	Na Fe	100 390	Große elektrische Leitfähigkeit durch Elektronen. Undurchsichtig

Tabelle 17.6. Einige Eigenschaften fester Elemente

Einige Eigenschaften fester Elemente																									
H 0,088 14,01 0,01 0,02	<p>Fe Element 7,87 Dichte (g cm⁻³) 1808 Schmelzpunkt (K) 4,29 Gitterenergie (eV/Gitterteilchen) 12 lin. Ausdehnungskoeffizient (10⁻⁶ K⁻¹) 16,83 Elastizitätsmodul (10¹⁰ N m⁻²)</p> <p>Ku wird zu Rf = Rutherfordium (IUPAC 1997) Ha wird zu Db = Dubnium (IUPAC 1997) Sg = Seaborgium nach <i>Glenn T. Seaborg</i> *1912 Bh = Bohrium (IUPAC 1997) (<i>Niels Bohr</i>, dänischer Physiker 1885–1962) Hs = Hassium (lat. <i>Hassia</i> = Hessen, deutsches Bundesland) Mt = Meitnerium (<i>Lise Meitner</i>, österreichische Physikerin, 1878–1968) 111 = Eka-Gold (Dezember 1994 an der GSI synthetisiert) 112 = Eka-Quecksilber (GSI 1996)</p>																He 0,205 4,22 0,001 0,01								
Li 0,542 453,7 1,65 58 1,16	Be 1,82 1551 3,33 12,3 10,03											B 2,47 2570 5,81 17,8	C 3,52 3820 7,36 54,5	N 1,03 63,3 0,06 0,12	O 1,14 54,8 0,07	F 53,5	Ne 1,51 24,5 0,02 0,10								
Na 1,013 371,0 1,13 71 0,68	Mg 1,74 922,0 1,53 26 3,54											Al 2,70 933,5 3,34 23,8 7,22	Si 2,33 1683 4,64 7,6 9,88	P 1,82 317,2 0,54 124 3,04	S 1,96 386,0 0,11 64,1 1,78	Cl 2,03 172,2 0,106	Ar 1,77 83,95 0,080 0,16								
K 0,91 336,8 0,941 84 0,32	Ca 1,53 1112 1,825 22,5 1,52	Sc 2,99 1812 3,93 4,855 4,35	Ti 4,51 1933 4,855 9 10,51	V 6,09 2163 5,30 7,5 16,19	Cr 7,19 2130 4,10 2,98 19,01	Mn 7,47 1517 2,98 23 5,96	Fe 7,87 1808 4,29 12 16,83	Co 8,90 1768 4,387 13 19,14	Ni 8,91 1726 4,435 12,8 18,6	Cu 8,93 1357 3,50 16,8 13,7	Zn 7,13 692,7 1,35 26,3 5,98	Ga 5,91 302,9 2,78 18 5,69	Ge 5,32 1211 3,87 6 7,72	As 5,77 1090 3,0 3,94	Se 4,81 490 2,13 37 0,91	Br 4,05 266,0 0,151	Kr 3,09 116,6 0,116 0,18								
Rb 1,63 312,0 0,858 90 0,31	Sr 2,58 1042 4,387 1,16	Y 4,48 1796 4,387 3,66	Zr 6,51 2125 6,316 4,8 8,33	Nb 8,58 2741 7,47 7,1 17,02	Mo 10,22 2890 6,810 5 33,6	Tc 11,50 2445	Ru 12,36 2583 6,615 9,6 32,08	Rh 12,42 2239 5,753 8,5 27,04	Pd 12,00 1825 3,936 11 18,08	Ag 10,50 1235 2,96 19,7 10,07	Cd 8,65 594 1,160 29,4 4,67	In 7,29 429,3 2,6 56 4,11	Sn 5,76 505,1 3,12 27 5,5	Sb 6,69 903,9 2,7 10,9 3,83	Te 6,25 722,7 2,0 17,2 2,30	J 4,95 386,7 0,226 83	Xe 3,78 161,3 0,16								
Cs 1,997 301,6 0,827 97 0,2	Ba 3,59 998 1,86 1,03	La 6,17 1193 4,491 2,43	Hf 13,20 2500 6,35 10,9	Ta 16,66 3269 8,089 6,5 20,0	W 19,25 3683 8,66 4,3 32,32	Re 21,03 3453 8,10 37,2	Os 22,58 3318 8 6,6 41,8	Ir 22,55 2683 6,93 6,6 35,5	Pt 21,47 2045 5,852 9,0 27,83	Au 19,28 1338 3,78 14,3 17,32	Hg 14,26 234,3 0,694 29 3,82	Tl 11,87 576,7 1,87 29 3,59	Pb 11,34 600,6 2,04 29,4 4,30	Bi 9,80 544,5 2,15 13,5 3,15	Po 9,31 527 3	At 575	Rn 4,4 202,1								
Fr 300	Ra 5 973	Ac 10,07 1323	Ku/Rf	Ha	Sg	Bh	Hs	Mt	110	111	112														
												Ce 6,77 1071 4,77	Pr 6,78 1204 3,9	Nd 7,00 1283 3,35	Pm 1350	Sm 7,54 1345 2,11	Eu 5,25 1095 1,80	Gd 7,89 1584 4,14	Tb 8,27 1633 4,1	Dy 8,53 1682 3,1	Ho 8,80 1743 3,0	Er 9,04 1795 3,3	Tm 9,32 1818 2,6	Yb 6,97 1097 1,6	Lu 8,84 1929 4,4
												2,39	3,06	3,27	3,5	2,94	1,42	3,83	3,99	3,84	3,97	4,11	3,97	1,33	4,11
												Th 11,72 2020 5,93 11 5,43	Pa 15,37 1900 5,46	U 19,05 1405 5,405	Np 20,45 913 4,55	Pu 19,81 914 4,0 2,6	Am 11,87 1267	Cm 13,51 1610	Bk 14	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr

Quellen: Handbook of Chemistry and Physics CRC Press 1972–1973
Kittel: Introduction to Solid State Physics New York: Wiley 1971
Kohlrausch: Praktische Physik Stuttgart: Teubner 1956

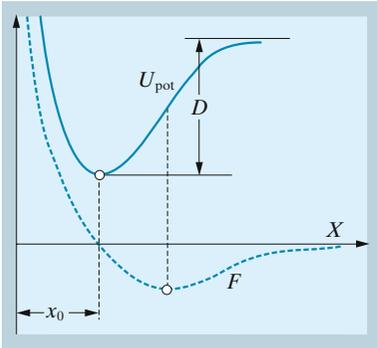


Abb. 17.18. Kraft und potentielle Energie, die auf ein Oberflächenatom im Festkörper wirken. Im Kristallinnern wird das Potential symmetrisch, wenn man ein Einzelteilchen betrachtet, das sich gegenüber dem Restgitter verschiebt. Fasst man x als Teilchenabstand auf, der eine gleichmäßige Gesamtdeformation des Gitters kennzeichnet, kommt wieder der dargestellte Verlauf heraus. D wäre für ein Molekül als Dissoziationsenergie, für die gleichmäßige Gitterdeformation als Gitterenergie aufzufassen

Tabelle 17.6 zeigt, dass diese Eigenschaften untereinander gekoppelt sind und dass sie einen sehr charakteristischen Gang im periodischen System zeigen. Ein Stoff mit hoher Gitterenergie schmilzt schwer, dehnt sich wenig aus und ist fest. Zahlenmäßig variieren alle diese Eigenschaften um mehrere Zehnerpotenzen. Am weichsten sind die Edeltgaskristalle, aber die Alkalien sind nicht viel härter. Allgemein liegen die härtesten Stoffe in der Mitte jeder Periode. Das gilt besonders für C und in den höheren Perioden für die **Übergangsmetalle**, d. h. die zehn Elemente, bei denen die Auffüllung der d -Schale nachgeholt wird. Während sonst allgemein die Härte nach den höheren Perioden zu abnimmt, ist es in der Mitte der d -Zone umgekehrt; die Flanken der d -Zone folgen noch der abnehmenden Tendenz (Zn, Cd, Hg!).

Ein Festkörper hat nur deshalb eine bestimmte **Dichte** (im Gegensatz zum Gas), weil seine Teilchen einen bestimmten Gleichgewichtsabstand r_0 voneinander einhalten. Ein solcher Gleichgewichtsabstand ist, wie immer, bestimmt durch die Konkurrenz zwischen einer Anziehung, die bei größeren, und einer Abstoßung, die bei kleineren Abständen überwiegt. Damit das so ist, muss die Abstoßung steiler vom Abstand abhängen als die Anziehung. Wir beschreiben beide durch Potenzabhängigkeiten der potentiellen Energie von r : die Anziehung durch $-Br^{-n}$, die Abstoßung durch Ar^{-m} , das Gesamtpotential durch

$$U(r) = Ar^{-m} - Br^{-n} . \tag{17.12}$$

Das ist so zu verstehen: Überlässt man den Kristall sich selber, dann sucht er den Zustand tiefster Energie, in dem nächste Nachbarparteilchen den Abstand r_0 haben. Dehnt oder staucht man ihn in allen Richtungen gleichmäßig, sodass der Abstand nächster Nachbarn auf r vergrößert oder verkleinert wird, dann ist die Energie pro Gitterteilchen $U(r)$. Für $r \rightarrow \infty$ wird offenbar $U \rightarrow 0$. Also ist $U(r_0) = E_0$ definitionsgemäß die Gitterenergie. Die Dichte ergibt sich einfach als

$$\rho = Mm_p/r_0^3 , \tag{17.13}$$

(M : rel. Molekülmasse der Gitterteilchen; m_p : Masse des Protons). Das gilt für einfach kubische Gitter; andernfalls tritt noch ein Zahlenfaktor hinzu.

Der Gleichgewichtsabstand r_0 ist da, wo die Kraft $U'(r)$ verschwindet:

$$U' = -\frac{m}{r}Ar^{-m} + \frac{n}{r}Br^{-n} = 0 .$$

Damit lassen sich die beiden Energieanteile für $r = r_0$ durch E_0 ausdrücken:

$$Ar_0^{-m} = E_0 \frac{n}{m-n} , \quad Br_0^{-n} = E_0 \frac{m}{m-n} . \tag{17.14}$$

Wir brauchen noch die Krümmung am Potentialminimum

$$U''(r_0) = \frac{m(m+1)}{r_0^2}Ar_0^{-m} - \frac{n(n+1)}{r_0^2}Br_0^{-n} = \frac{mn}{r_0^2}E_0 \tag{17.15}$$

und die dritte Ableitung, die die Asymmetrie der W -Kurve beschreibt

$$\begin{aligned}
 U'''(r_0) &= -\frac{m(m+1)(m+2)}{r_0^3}Ar_0^{-m} + \frac{n(n+1)(n+2)}{r_0^3}Br_0^{-n} \\
 &= -\frac{mn(m+n+3)}{r_0^3}E_0
 \end{aligned}
 \tag{17.16}$$

(vgl. (17.14)). Damit können wir nämlich die Form des Potentialminimums mittels der Taylor-Reihe beschreiben:

$$\begin{aligned}
 U &= E_0 + \frac{1}{2}U''(r_0)x^2 + \frac{1}{6}U'''(r_0)x^3 \\
 &= E_0 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{mn}{r_0^2}x^2 - \frac{1}{6}\frac{mn(m+n+3)}{r_0^3}x^3 \right),
 \end{aligned}
 \tag{17.17}$$

wobei $x = r - r_0$ der Abstand vom Minimum ist.

U'' gibt ganz direkt den Elastizitätsmodul, U''' die thermische Ausdehnung des Kristalls. Man setze ihn z. B. unter einen allseitigen Druck p . Auf ein Teilchen, das die Fläche r_0^2 einnimmt, entfällt dabei die Kraft $F = -pr_0^2$. Eine solche gleichmäßige Kraft leitet sich aus einem linearen Potential $U = -Fx = pr_0^2x$ ab, das dem spannungsfreien Potential $E(x)$ zu überlagern ist. Man kann auch sagen, dieses werde um einen entsprechenden Winkel nach links gekippt. Dadurch verschiebt sich das Minimum, und zwar dorthin, wo $E'(x) = pr_0^2$ ist, d. h. um $x = pr_0^2/U''$ oder relativ um

$$\frac{x}{r_0} = \frac{pr_0^3}{mnE_0}.$$

Der Faktor von p ist der reziproke Elastizitätsmodul oder die Kompressibilität, geteilt durch 3 (3 Schubrichtungen):

$$\boxed{E = \frac{mnE_0}{r_0^3}}.
 \tag{17.18}$$

Für einen Zug, also einen negativen Druck, gibt es einen Maximalwert, oberhalb dessen der Kristall mit Sicherheit zerreißt. Dieser Zug entspricht der Steigung der Wendetangente von $E(r)$. Rückstellende Kräfte treten bei solcher Belastung überhaupt nicht mehr auf. Die Lage des Wendepunktes der $E(r)$ -Kurve (17.12) ergibt sich mittels (17.14) zu

$$\boxed{r_w = r_0 \left(\frac{m+1}{n+1} \right)^{1/(m-n)}}.
 \tag{17.19}$$

Spätestens bei der Dehnung $\delta = (r_w - r_0)/r_0$ muss der Kristall reißen. Für vernünftige m und n erhält man δ -Werte zwischen 10 und 30%, was für einigermaßen duktile Metalle ganz gut stimmt. Spröde Stoffe brechen nicht infolge dieses Mechanismus, sondern schon bei viel kleineren Dehnungen, wobei Fehlstellen, besonders **Dislokationen** eine entscheidende Rolle spielen (Abschn. 17.5.4).

Die thermische Ausdehnung kommt so zustande: Bei der Temperatur T hat das Gitterteilchen die potentielle Energie $\frac{3}{2}kT$ (und ebenso viel

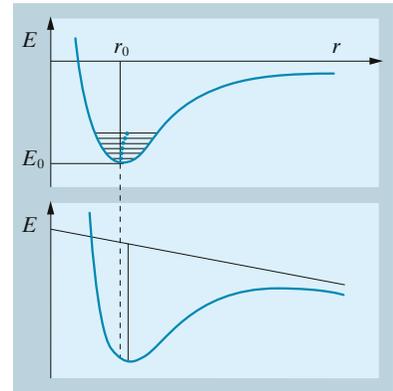


Abb. 17.19. Thermische und elastische Eigenschaften des Festkörpers. *Oben:* Potentialkurve mit Schwingungstermen. Der Schwingungsmittelpunkt rückt umso weiter nach außen, je höher der Schwingungszustand ist. Folge: thermische Ausdehnung. *Unten:* Schiefstellung der Potentialkurve durch eine elastische Spannung verschiebt das Minimum. Folge: elastische Dehnung

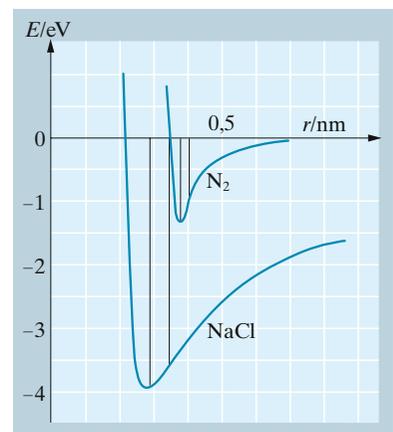


Abb. 17.20. Potentialkurven für ein Teilchen im festen Stickstoff bzw. im NaCl-Kristall. Minima und Wendepunkte sind gekennzeichnet

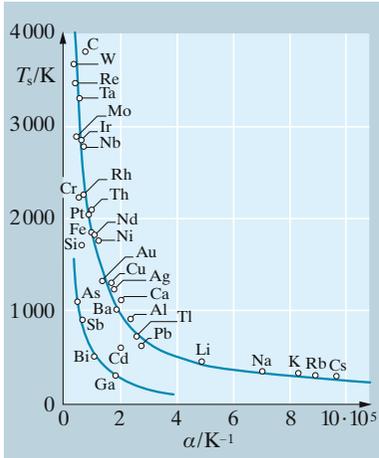


Abb. 17.21. Zusammenhang zwischen Schmelztemperatur T_s und Ausdehnungskoeffizient α . Die blauen Hyperbeln entsprechen der Theorie. Ihre Parameter sind für Metalle und Halbmetalle verschieden

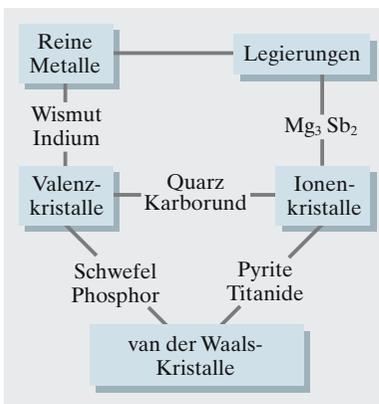


Abb. 17.22. Beziehungen zwischen den verschiedenen Bindungstypen. (Nach Seitz, aus W. Finkelnburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

kinetische). Es schwingt also in dieser Höhe über dem Topfboden hin und her. Wegen der Asymmetrie der Kurve ist es dabei öfter bei größeren als bei kleineren Abständen r : Seine mittlere Lage ist etwas rechts von r_0 , der Kristall dehnt sich aus.

Mit dem Potential (17.17) folgt für die Amplitude $x = r - r_0$ der Schwingung

$$\frac{1}{2}U''(r_0)x^2 + \frac{1}{6}U'''(r_0)x^3 = \frac{3}{2}kT.$$

Für nicht zu große T ist die Amplitude

$$\text{nach links } x = -\sqrt{\frac{3kT}{U'''(r_0)}} + \zeta,$$

$$\text{nach rechts } x = +\sqrt{\frac{3kT}{U'''(r_0)}} + \zeta.$$

Der Schwingungsmittelpunkt liegt also angenähert um

$$\zeta = \frac{\frac{1}{6}U'''(r_0)\frac{3}{2}kT}{\frac{1}{2}U''(r_0)^2} = \frac{m+n+3}{2mn} \frac{kT}{E_0} r_0$$

rechts von der Gleichgewichtslage r_0 . Der **lineare Ausdehnungskoeffizient** ist

$$\alpha = \frac{\zeta}{r_0 T} = \frac{m+n+3}{2mn} \frac{k}{E_0}. \tag{17.20}$$

Der Kristall verdampft, wenn die thermische Energie etwa gleich der Bindungsenergie ist (streng genommen ist die Entropie mit einzubeziehen; Abschn. 5.6.7). Der Kristall schmilzt, wenn kT gleich einem bestimmten Bruchteil von W_0 ist. Da andererseits $\alpha \sim E_0^{-1}$ (nach (17.20)), erwartet man einen Zusammenhang $\alpha \sim T_s^{-1}$, der von den meisten Metallen sehr gut befolgt wird (Abb. 17.21). Man liest ab, dass ein Metall schmilzt, wenn es sich von 0 K an um etwa 2% linear ausgedehnt hat. Halbmetalle wie As, Sb, Bi, Ga schmelzen wesentlich früher, was wir auf eine abweichende Form der Potentialkurve zurückführen müssen.

17.1.5 Kristallbindung

Alle Kräfte, die Kristalle zusammenhalten, sind ausschließlich elektrostatischer Natur. Magnetische Kräfte sind zu vernachlässigen. Aber diese Coulomb-Kräfte wirken sich in vielfacher Verkleidung aus und haben ganz verschiedene Größenordnung je nach der Anordnung der Kerne und Elektronen in den Gitterteilchen.

Ionenkristalle. Am klarsten ist die Lage, wenn die Gitterteilchen Ionen sind, wie z. B. im Na^+Cl^- . Sie werden zu Ionen, wenn der Übertritt eines oder mehrerer Elektronen Energie einbringt, also im Beispiel des NaCl, wenn die Elektronenaffinität E_A des Cl nicht viel kleiner ist als die Ionisierungsenergie E_I des Na, sodass zwar freie Na- oder Cl-Atome kein

Elektron austauschen, aber der zusätzliche Energiegewinn bei der Zusammenlagerung der geladenen Teilchen zum Kristall den Ausschlag bringt. Die Energiebilanz des NaCl-Kristalls sieht so aus (Werte in eV/Teilchen):

Tabelle 17.7. Energiebilanz im NaCl-Kristall

	Gewinn	Aufwand
Ionisierung des Na		$E_I = 5,1$
Anlagerung des Elektrons an Cl	$E_A = 3,6$	
Anziehender Teil des Gitterpotentials	8,8	
Abstoßender Teil des Gitterpotentials		0,9
Bindungsenergie	6,4	

In wässriger Lösung sind die Verhältnisse ähnlich. Hier gibt die Hydratationsenergie aus der Anlagerung von H_2O -Dipolmolekülen um die Ionen den Ausschlag. E_A ist für Cl so groß und E_I für Na so klein, weil der Durchgriff der Kernladung des Cl durch die fast abgeschlossene $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$ -Elektronenkonfiguration auf das letzte, zusätzliche $3p$ -Elektron mit seiner engen Bahn stark ist, dagegen der Durchgriff des Na-Kerns durch die $1s^2 2s^2 2p^6$ -Konfiguration auf sein rechtmäßiges $3s$ -Elektron mit seiner weiten Bahn nur schwach ist. Allgemein nimmt der Ionencharakter einer Bindung mit dem horizontalen Abstand der Partner im periodischen System zu. Der anziehende Teil des Gitterpotentials ist dann einfach die Coulomb-Energie zwischen den Ionen, die sich möglichst abwechselnd anordnen. Damit wird in (17.12) $n = 1$. Der abstoßende Teil des Potentials tritt erst in Aktion, wenn die Elektronenschalen einander zu durchdringen suchen, und ist dementsprechend sehr steil ($m \approx 10$; meist rechnet man mit einem exponentiell abfallenden Abschirmpotential). Nach (17.14) braucht man daher am anziehenden Potential, bezogen auf den Gleichgewichtsabstand r_0 , nur eine kleine Korrektur (Bruchteil $n/m \approx 0,1$) für das abstoßende Potential anzubringen.

Natürlich ist das anziehende Potential nicht einfach die Coulomb-Energie $-e^2/(4\pi\epsilon_0 r_0)$ zweier benachbarter Ionen, denn die Beiträge aller umgebenden Ionen sind zu berücksichtigen. Dies wird durch den **Madelung-Faktor** μ ausgedrückt:

$$E_{\text{anz}} = -\mu \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}. \quad (17.21)$$

μ hängt vom Gittertyp ab und ist 1,748 beim NaCl-Gitter, 1,763 beim kubisch-raumzentrierten CsCl-Gitter, 1,638 beim ZnS-Gitter (Diamantgitter).

Bei Ionenkristallen ist es nur beschränkt möglich, die einzelnen Gitterebenen gegeneinander zu verschieben, denn dabei müsste man über Zwischenlagen gehen, bei denen gleichnamige Ionen einander gegenüberstehen. Ionenkristalle sind daher nur sehr wenig plastisch verformbar.

Valenzkristalle. Die Bindung in einem Ionenkristall der Verbindung AB beruht auf der Verschiebung eines oder mehrerer Elektronen von A nach B . Diese Verschiebung braucht nicht vollständig zu sein. Das andere Ex-

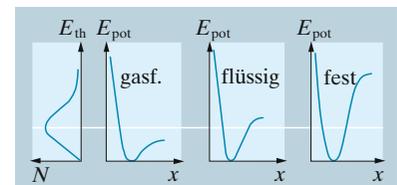


Abb. 17.23. Potentialkurven der Wechselwirkung zwischen den Teilchen, verglichen mit der thermischen Energie bei den verschiedenen Aggregatzuständen (schematisch; das dargestellte Gas wäre stark nichtideal)

trem ist ein Elektron (oder mehrere), das zwischen A und B in einer beiden Atomen gemeinsamen Bahn sitzt. Ein solches Elektron hat mehr Platz zur Verfügung und daher eine niedrigere Energie, als wenn es einem Atom allein angehörte (Abschn. 13.7.1). Diese Energieabsenkung ist die Bindungsenergie. Besonders stark wird diese Bindung, wenn sie durch zwei Elektronen vermittelt wird. Wegen des Pauli-Prinzips müssen sie entgegengesetzten Spin haben, um in die sonst gleiche Bahn zu passen. Voraussetzung für eine solche **kovalente Bindung** ist allerdings, dass beide Atome freie Elektronenbahnen in der in Frage kommenden Schale verfügbar haben. Sonst wäre Energie verzehrende Hebung in höhere Schalen nötig.

Kovalente Bindung ist die Regel zwischen Atomen gleicher Art und zwischen solchen, die im Periodensystem übereinander oder horizontal nahe beisammen stehen. Ein räumliches Gitter kommt dabei allerdings i. Allg. nur zustande, wenn die Atome mindestens dreiwertig sind. Beide Bedingungen sind am besten in der vierten, weniger gut in der dritten und fünften Spalte des Periodensystems erfüllt. C, Si, Ge, SiC sind die typischen Valenzkristalle, 3-5-Verbindungen wie GaAs, InSb haben teilweise Ionencharakter.

Kovalente Kräfte bevorzugen starre Richtungen. Das Gitter nimmt meist nicht die höchstmögliche Koordinationszahl (12 oder 8) an, sondern die von der Valenzstruktur diktierte Viererkoordination, unter Verzicht auf gute Raumerfüllung. Trotz ihrer Lockerheit sind diese Strukturen aber eben wegen der Stärke und Gerichtetheit der Bindungen sehr hart und spröde. Diamant (C), Carborund (SiC) und Bornitrid (BN) sind die härtesten Stoffe und gehören zu den höchstschmelzenden.

Molekülkristalle. Ein- oder zweiwertige Atome sättigen einander schon im Molekül ab und haben keine Bindung für die Kristallbildung frei. Im Kristall sind die Moleküle untereinander durch sehr viel schwächere Kräfte gebunden. Haben die Moleküle wenigstens ein permanentes Dipolmoment, dann tritt ein anziehendes Potential zwischen ihnen auf, das bei günstiger Anordnung ($\uparrow\downarrow$ bzw. $\rightarrow\rightarrow$) eine r^{-3} -Abhängigkeit hat (die potentielle Energie zwischen Dipol und Punktladung geht wie r^{-2} , zwischen Dipol und Dipol wie r^{-3}). Bei hinreichender Annäherung kann die Wechselwirkungsenergie bis in die Gegend von 1 eV kommen.

Ein Kristall aus zwei Molekülen A und B , von denen A ein permanentes Dipolmoment p_A hat, B nicht, hält so zusammen: Das Feld \mathbf{E} des Dipols A influenziert im benachbarten Molekül B ein entgegengesetztes Moment $p_B = \alpha_B \mathbf{E}$ (α : Polarisierbarkeit). Da $\mathbf{E} \sim r^{-3}$, geht die Wechselwirkungsenergie $U(r) \sim p_A p_B / r^3$ wie r^{-6} .

Moleküle, die beide ohne permanentes Dipolmoment sind, üben trotzdem **van der Waals-Kräfte** oder genauer **Londonsche Dispersionskräfte** aufeinander aus. Da die Elektronen im Molekül nicht fixiert sind, entsteht durch Schwankungen ihrer Verteilung ein temporäres Dipolmoment, dessen zeitlicher Mittelwert allerdings Null ist. Dieses temporäre Dipolmoment influenziert im Nachbarmolekül ein antiparalleles Dipolmoment. Das Ergebnis ist in seiner r^{-6} -Abhängigkeit das gleiche wie oben, nur sind

die Bindungsenergien noch kleiner. Edelgase H_2 , Ne, O_2 haben deswegen so niedrige Siede- und Schmelzpunkte.

Das abstoßende Potential, das den Gleichgewichtsabstand garantiert, stammt wieder vom Überlappungsverbot der besetzten Elektronenschalen und ist sehr steil. Es wird oft durch r^{-12} bzw. $e^{-r/a}$ wiedergegeben.

Zur **Dipolbindung** kommt bei manchen Molekülkristallen, vor allem beim Eis, noch die **H-Brückenbindung**. Ein Proton kann ähnlich wie ein Elektron zwischen zwei Nachbarmolekülen aufgeteilt oder ausgetauscht werden, wenn ein Protonendonator (z. B. eine OH- oder NH-Gruppe) einem Protonenakzeptor (z. B. einem „einsamen Elektronenpaar“ eines O) gegenübersteht. Der Chemiker beschreibt die Situation als tautomeres Fluktuieren zwischen Grenzstrukturen wie $NH \dots O \rightleftharpoons N^- \dots H^+O$. Die resultierende Bindungsenergie ist ein Gemisch aus der quantenmechanischen Absenkung der Nullpunktsenergie des Protons (Austauschkraft) und der elektrostatischen Anziehung zwischen den geladenen Gruppen in der einen Grenzstruktur. Solche H-Brücken halten nicht nur Wasser und Eis zusammen, sondern auch biologisch so grundlegende Strukturen wie Proteinmoleküle (besonders die **α -Helix**) und **Nukleinsäuren** (DNS-Doppelhelix).

Metalle. Bei den Metallen mit ihren leicht abtrennbaren Elektronen geht die Tendenz zur Sozialisierung dieser Elektronen noch weiter. Nicht nur zwei Nachbaratome, sondern alle Atome des ganzen Gitters teilen sich die Valenzelektronen. Diese bilden ein Elektronengas, das sich relativ frei durch das Gitter der Rumpfnionen bewegt. Die Bindungsenergie beruht auf der Absenkung der Nullpunktsenergie der Valenzelektronen, die statt einer Atomhülle jetzt das ganze Kristallvolumen zur Verfügung haben. Bei den Übergangsmetallen, in denen die *d*-Schale in Auffüllung begriffen ist, kommt noch ein kovalenter Bindungsanteil dazu und macht diese Kristalle zu den härtesten und höchstschmelzenden.

Da abgesehen hiervon die Bindung durch das Valenzelektronengas praktisch keine Richtungseigenschaften besitzt, bevorzugen Metalle dichte Packungen mit hohen Koordinationszahlen (kubisch-flächenzentriert, hexagonal dicht, kubisch-raumzentriert). Verschiebung der Gitterebenen gegeneinander ist im Gegensatz zu den Ionenkristallen möglich: Den Rumpfnionen einer Schicht ist es ganz gleich, in welche Täler der Nachbarschicht sie einrasten. Daher lassen sich Metalle unter Erhaltung des Volumens leicht verformen. Wie viel Widerstand sie der Verformung entgegensetzen, hängt vor allem vom Beitrag kovalenter Bindung ab, der bei den Übergangsmetallen besonders groß ist. Bei Legierungen und verunreinigten Metallen verzahnen Fremdatome die einzelnen Gitterebenen ineinander und erschweren ihr Gleiten.

17.1.6 Einiges über Eis

Sauerstoff hat die Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 2p^4$. An der vollen Ne-Schale fehlen ihm zwei Elektronen, und zwar zwei *p*-Elektronen. Nach dem Aufbauprinzip sitzen *2s*-Elektronen energetisch tiefer als *2p*-Elektronen. Nach der Hund-Regel werden die drei *p*-Orbitals p_x , p_y , p_z

mit ihren zueinander wechselweise senkrechten Symmetrieachsen zuerst jedes mit einem Elektron besetzt (bis zum Stickstoff). Das achte Elektron des Sauerstoffs paart eines dieser Orbitals, sagen wir p_x , ab. Es bleiben zwei ungepaarte valenzbildende Elektronen, deren ψ -Wolken Hanteln in zwei zueinander senkrechten Richtungen bilden. Sie können je eine Bindung mit einem Wasserstoff $1s$ -Elektron eingehen. Dann macht sich aber der hohe Durchgriff des O-Kerns durch seine Elektronenwolken geltend (effektive Kernladung = $2e$), anders ausgedrückt, die Tendenz des O zum Schalenabschluss oder seine hohe Elektronenaffinität oder Elektronegativität: Die Bindungselektronen werden näher an den O-Kern gezogen und entblößen teilweise die H-Kerne. Das O nimmt so eine negative, jedes H eine positive Partialladung an. Die resultierende Coulomb-Abstoßung der beiden H spreizt den Winkel von ursprünglich 90° zwischen den beiden O–H-Bindungen auf 105° . Dies kommt dem Winkel zwischen zwei Richtungen Schwerpunkt–Ecke eines regulären Tetraeders sehr nahe. Die Elektronenstruktur des O wird damit ganz ähnlich deformiert wie die des C im CH_4 . Für die acht äußeren Elektronen (sechs vom O, zwei von den H) ist es unter den gegebenen Umständen energetisch günstiger, auf die Unterscheidung zwischen s und p zu verzichten und sich zu vier Elektronenpaaren zu **hybridisieren**, die in vier tetraedrisch angeordneten Wülsten sitzen. Diese vier Wülste sind schon im freien H_2O -Molekül weitgehend gleichwertig, obwohl nur zwei von ihnen Protonen binden und die anderen „einsame Paare“ bleiben. Nur die Coulomb-Abstoßung der Protonen verhindert, dass sich auch an jedes einsame Paar ein Proton anlagert (H_4O). H_3O^+ -Ionen bilden sich im Wasser und Eis relativ häufig (s S. 906). Sie stellen das dar, was man schematisch als H-Ionen bezeichnet.

Im Eisgitter ist ein einsames Paar dem teilweise entblößten, also positiven H eines benachbarten H_2O -Moleküls gerade recht als Partner einer Nebenvalenz, genauer einer Wasserstoff-Brücke. Das O wird sich mit *vier* anderen H_2O -Molekülen zu umgeben suchen, die alle durch **Wasserstoffbrücken** mit ihm verbunden sind. Zwei dieser vier Brücken werden durch die beiden H vermittelt, die das betrachtete O ins Gitter mitgebracht hat, die anderen beiden durch „fremde“ H; aber dieser Unterschied verschimmt teilweise infolge der Freiheit des H in einer H-Brücke, zwischen den beiden erlaubten Plätzen überzuwechseln.

Eis wird also ähnlich wie Diamant in einem Gitter kristallisieren, das diese tetraedrischen Umgebungen ausnutzt. Ein Gitter aus zwei ineinander gestellten kubisch flächenzentriert dichtesten Kugelpackungen tut das (Abschn. 17.1.1), aber auch eines aus zwei ineinander gestellten hexagonal dichtesten Packungen. Diamant wählt die erste, Eis die zweite Möglichkeit (Grund: s. Aufgabe 17.1.8). Aus tetraedrischen Bausteinen (Milchtetraedern oder einfacher C-Atommodellen, wie sie jedes Chemielabor hat) kann man nicht nur das Diamantgitter, sondern auch das Eisgitter aufbauen und dabei unter anderem die nachstehenden Tatsachen ablesen.

Eis hat eine Vorzugsrichtung, die c -Achse, um die herum dreizählige Symmetrie herrscht, die manchmal wie eine sechszählige aussieht. Die c -Achse steht senkrecht auf der Ebene einer **Schneeflocke** oder in der Achse eines sehr reinen **Eiszapfens**. H_2O -Moleküle aus einer Gasphase finden

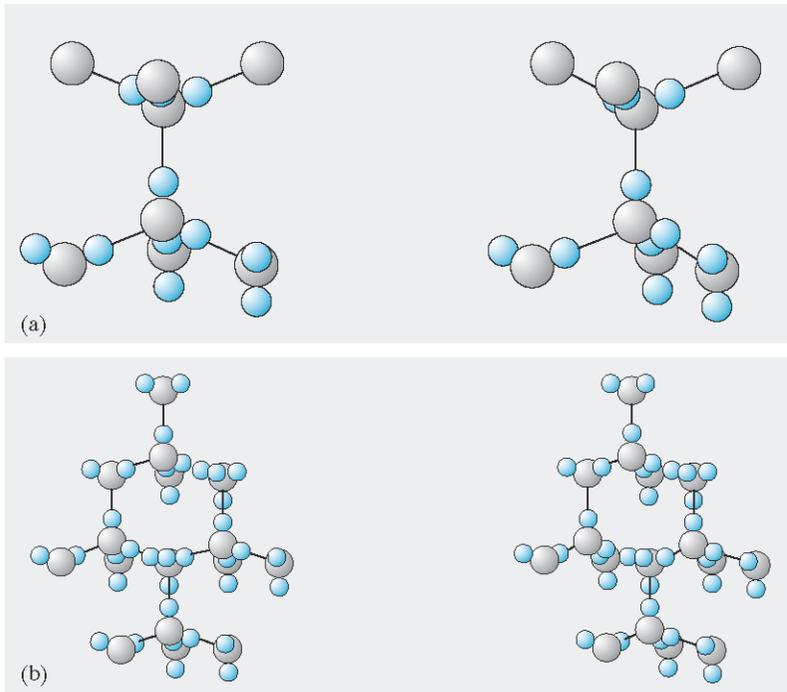


Abb. 17.24a,b. Stereo-Darstellung der Eisstruktur. Jedes O ist tetraedrisch von vier anderen O umgeben und auch von vier H, von denen normalerweise zwei kovalent, zwei als H-Brücke mit diesem O verbunden sind. Betrachten Sie die Bilder (a) und (b) einzeln aus normalem Leseabstand, ohne zu schielen. Nach einer Weile verschmelzen die Teilbilder zum Stereo-Eindruck. Notfalls benützen Sie eine Stereo-Brille

die besten Ansatzpunkte seitlich an einer teilweise ausgebildeten c -Ebene (Gitterebene senkrecht zur c -Achse). Manchmal kann ein Molekül sich nur mit einer Bindung anheften, schafft damit aber sofort eine zweite Bindung für das nächste Molekül. Neue c -Ebenen sind dagegen schwierig zu starten: Ein „Keimmolekül“ findet immer nur eine Bindung, das nächste ebenfalls, selbst das dritte, und erst ein viertes Molekül kann sich in zwei Bindungen einfügen. Deswegen wachsen Schneeflocken viel schneller in ihrer Ebene als senkrecht dazu. Beim Diamant sind die Verhältnisse anders.

Auch im flüssigen Wasser sind die Moleküle zum großen Teil im Eisgitter angeordnet. Solche eisähnlichen Bezirke, die sich ständig auflösen und Neubilden, werden getrennt durch ungeordnete und daher weniger sperrige Bereiche. Wasser besteht eigentlich also aus zwei Phasen (oder sogar mehr, falls man Eiskomplexe aus verschiedenen Anzahlen von Molekülen unterscheidet). Dies erklärt u. A. die **Dichteanomalie des Wassers**: Je höher die Temperatur, desto mehr schmelzen die sperrigen Eiskomplexe weg. Ohne die übliche thermische Ausdehnung würde also das Wasser mit steigender Temperatur immer dichter werden.

Gitterfehler im Eiskristall. Diese reguläre Eisstruktur kann offensichtlich auf zwei Arten durchbrochen werden.

- **Ionenfehler:** Ein O kann von drei statt normalerweise zwei H direkt umgeben sein. Aus Neutralitätsgründen wird es dann irgendwo im Gitter ein anderes O geben, das nur ein H direkt bei sich hat. Solche H_3O^+ -

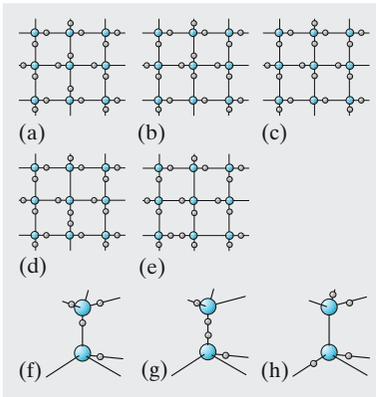


Abb. 17.25a–h. Fehler im Eiskristall und ihre Wanderung. (a) Idealkristall. (b) Ein Ionenpaar hat sich gebildet und in (c) weiter getrennt. (d) Ein Bjerrum-Fehlerpaar hat sich gebildet und in (e) weiter getrennt. (f, g, h) Wirkliche Konfiguration von Ionen-, d- und l-Fehlern

und OH^- -Ionen bilden sich paarweise, indem ein H einfach von seiner Normallage auf einer O–O-Bindung in das andere Minimum springt.

- **Bjerrum-Fehler:** Normalerweise enthält jede O–O-Bindung genau ein H. Wenn ausnahmsweise beide oder keine der Vorzugslagen mit einem H besetzt sind, spricht man von einem d- bzw. l-Fehler („doppelt“ bzw. „leer“). Man kann sich vorstellen, dass ein d- und ein l-Fehler gleichzeitig entstehen, wenn ein normal bestücktes H_2O sich um 120° um eine beliebige seiner vier Valenzrichtungen dreht. Die Abstoßung der beiden Protonen in einem d-Fehler ergibt eine erheblich höhere Energie als für die normale einfach besetzte Bindung. Ähnlich liegt auch der l-Fehler mit seinen beiden „Protonenlöchern“ energetisch höher.

Ionen- und Bjerrum-Fehler könnten im Prinzip auch kombiniert auftreten, aber dies scheint aus energetischen Gründen nur äußerst selten vorzukommen. Entsprechend führen die positive Ladungsanhäufung bzw. -verarmung in einem H_3O^+ bzw. OH^- zu einer höheren Energie eines solchen Zustandes. Bjerrum- und Ionenfehler werden daher entsprechend der Boltzmann-Verteilung umso seltener auftreten, je tiefer die Temperatur ist. Einmal erzeugt, können solche Fehler sich aber ziemlich leicht durch den Kristall bewegen. Das H_3O^+ braucht dazu nur ein Proton an ein normales Nachbarmolekül abzugeben. Dies kommt zwar seltener vor als die Abgabe an das eventuell noch nebenan sitzende OH^- , die zur Vernichtung der beiden Ionenfehler führen würde. Zum Wandern eines Bjerrum-Fehlers genügt eine weitere Drehung eines der benachbarten Moleküle, sofern sie nicht zur Vernichtung des Fehlerpaares führt. Das Wandern von Ionen- und von Bjerrum-Fehlern bedeutet einen Ladungstransport und ist verantwortlich für die Leitungs- und dielektrischen Eigenschaften des Eises.

Nullpunksentropie des Eises. Die Entropie des hexagonalen Eiskristalls, extrapoliert auf den absoluten Nullpunkt und gemessen als $3,4 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$, ist ein vorzügliches Beispiel einer rein strukturellen Entropie. Die Entropie eines Zustandes ist der Logarithmus seiner Wahrscheinlichkeit, d. h. der Logarithmus der Anzahl gleichberechtigter Realisierungsmöglichkeiten für diesen Zustand. Kenntnis des Eisgitters erlaubt, diese Möglichkeiten abzuzählen. Im Eisgitter gehen von jedem O-Atom vier Bindungen aus. Auf jeder dieser Bindungen gibt es zwei mögliche Plätze für H-Atome. Normalerweise ist nur einer davon besetzt, und zwar so, dass jedes O genau zwei H dicht bei sich hat. So sieht die energetisch günstigste Konfiguration aus. Andere enthalten Bjerrum- oder Ionenfehler und spielen daher bei tiefen Temperaturen keine Rolle mehr. Es gibt sehr viele Arten, fehlerfreie Eiskristalle aus N Wassermolekülen aufzubauen. Wie viele es sind, finden wir am einfachsten, wenn wir eine der beiden Bedingungen und schließlich beide fallen lassen und jedes Mal die Anzahl erlaubter Konfigurationen bestimmen. Eine Konfiguration ist bjerrumfehlerfrei, wenn jede Bindung genau ein H hat (aber nicht notwendig jedes O zwei H). Eine Konfiguration ist ionenfehlerfrei, wenn jedes O genau zwei H dicht bei sich hat (aber nicht notwendig jede Bindung genau ein H).

Die Anzahl *aller* Konfigurationen aus N Molekülen (ohne Rücksicht auf irgendeine Fehlerfreiheit) ergibt sich so: Wir haben $2N$ H-Atome und $2N$ Bindungen mit insgesamt $4N$ Plätzen. Es gibt $\binom{4N}{2N} = \frac{(4N)!}{(2N)!^2}$ Arten (Abschn. 19.1.2), die H

über die Plätze zu verteilen. Nach *Stirling* (Abschn. 19.1.3) lässt sich das sehr gut nähern durch $\frac{(4N)^{4N}}{((2N)2N)^2} = 2^{4N} = 4^{2N}$.

Bjerrumfehlerfreie Konfigurationen: Jede der $2N$ Bindungen bietet zwei mögliche Konfigurationen unter den 4^{2N} überhaupt möglichen. Nur eine unter $4^N (= 4^{2N}/4^N)$ der überhaupt möglichen Konfigurationen ist bjerrumfehlerfrei.

Ionenfehlerfreie Konfigurationen: Wir gehen aus von N richtig mit je zwei H bestückten O. Relativ zum Gitter kann jedes H_2O sechs wesentlich verschiedene Lagen einnehmen (drei Lagen bei Drehung um jede der vier Bindungen = 12 Lagen, von denen aber je zwei wegen der Ununterscheidbarkeit der beiden H in eine zusammenfallen; oder einfacher: $6 = \binom{4}{2}$). Jede dieser sechs Lagen für jedes der N H_2O ergibt ein ionenfehlerfreies (aber meist nicht bjerrumfehlerfreies) Gitter. Es gibt also 6^N ionenfehlerfreie Konfigurationen unter den 4^{2N} überhaupt möglichen. Nur eine unter $\left(\frac{8}{3}\right)^N (= 4^{2N}/6^N)$ überhaupt möglichen Konfigurationen ist ionenfehlerfrei.

Die Forderungen nach Ionen- und Bjerrumfehlerfreiheit sind logisch unabhängig. Man kann also annehmen, dass unter den 6^N ionenfehlerfreien Konfigurationen derselbe Bruchteil, nämlich $1/4^N$, auch bjerrumfehlerfrei ist wie unter den Konfigurationen überhaupt. So ergeben sich $6^N/4^N = (3/2)^N$ fehlerfreie Konfigurationen. Der Zustand eines ruhenden Gitters ($T = 0$) kann hiernach auf $(3/2)^N$ gleichwertige Arten realisiert werden. Das ist auch die thermodynamische Wahrscheinlichkeit P_0 dieses Zustandes. Seine Entropie ist also $S_0 = k \ln P_0 = kN \ln \frac{3}{2} = 3,37 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.

17.1.7 Kristallwachstum

Ein Kristall wächst i. Allg., indem sich Netzebenen einer oder einiger ausgezeichneter Richtungen mit kleinen Indizes, also besonders dichter Atomlage übereinander stapeln. Die Netzebene selbst wächst im einfachsten Fall atomkettenweise. In jedem Moment ist die typische Wachstumsstelle des Kristalls, d. h. die Stelle, wo sich mit großer Wahrscheinlichkeit das nächste Atom anlagern wird, die **Halbkristalllage**, das vorläufige Ende einer unvollständigen Netzebene (Kossel-Stranski-Theorie). Sie bietet den energetisch günstigsten Ansatzpunkt, d. h. den mit den meisten Bindungen zu Nachbaratomen, und zwar mit genau halb so vielen Bindungen, wie sie ein Atom im Kristallinnern betätigt: drei gegen sechs im einfach kubischen, zwei gegen vier im Diamant- und Eisgitter, vier gegen acht im kubisch-raumzentrierten, sechs gegen zwölf im kubisch-flächenzentrierten Gitter. Abtrennung eines Atoms aus einer Halbkristalllage kostet also eine **Abtrennenergie**, die gleich der Bindungsenergie des Atoms im Innern ist, denn für dieses ist ja auch nur die Hälfte seiner Bindungen energetisch zu veranschlagen (die andere Hälfte zählt für die Nachbarn mit).

Die Halbkristalllage bietet einem aus der Dampfphase oder der Lösung auftreffenden Atom den Anlagerungsquerschnitt σ . Dies ist ein effektiver, kein rein geometrischer Querschnitt, der u. A. auch berücksichtigt, dass das anzulagernde Atom in einer bestimmten Orientierung auftreten muss. Wenn Dampf oder Lösung n Atome/ m^3 enthalten, die mit v fliegen, ist die mittlere Wartezeit bis zur Anlagerung des nächsten Atoms $\tau_{\text{an}} \approx 3/(nv\sigma)$ (vgl. kinetische Gastheorie, Abschn. 5.2.1). Andererseits schwingt ein angelagertes Atom mit der Frequenz ν und hat die Wahrscheinlichkeit $e^{-E/(kT)}$, die Abtrennenergie E auf sich zu vereinen. Die

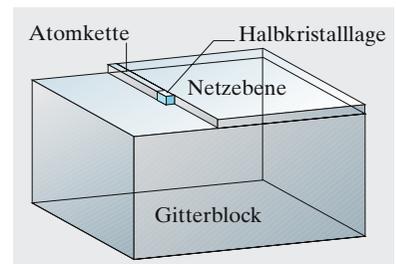


Abb. 17.26. Halbkristalllage als Ansatzpunkt eines Teilchens, das eine angefangene Teilchenkette weiterwachsen lässt. Dieses Teilchen betätigt halb so viele Bindungen wie ein Teilchen im Kristallinnern

mittlere Wartezeit bis zur Abtrennung ist also $\tau_{\text{ab}} \approx \nu^{-1} e^{E/(kT)}$. Aus diesem einfachen Ansatz folgt bereits sehr viel: Gleichgewicht herrscht bei $\tau_{\text{an}} = \tau_{\text{ab}}$, d. h. bei

$$n = \frac{3\nu}{\sigma\nu} e^{-E/(kT)}.$$

Das ist der Clausius-Clapeyron-ähnliche Ausdruck für Gleichgewichtsdampfdruck oder -konzentration. Im Gleichgewicht rückt die momentane Wachstumsstelle nur stochastisch zufällig, d. h. schwankungsmäßig vor und zurück. Zügiges Wachstum ist nur bei Übersättigung oder Unterkühlung, Absublimieren oder Auflösen bei Untersättigung oder Überhitzung möglich. Beide erfolgen umso schneller, je größer die Abweichung von den Gleichgewichtsbedingungen ist.

Man sollte meinen, dass zumindest beim einfach kubischen Gitter selbst bei leichter Übersättigung nur die jeweils angefangene Atomkette fertig gestellt werden kann, denn das erste Atom einer neuen Reihe betätigt nur zwei statt drei Bindungen und hat daher eine um $e^{E/(3kT)}$ größere Chance, wieder abgetrennt zu werden, sodass $\tau_{\text{an}} \gg \tau_{\text{ab}}$ wird. Dieses Hindernis der Kettenkeimbildung kann durch **Oberflächendiffusion** umgangen werden: Selbst wenn ein Atom sich mitten auf dem „blanken“ Teil einer Netzebene, fern von der angefangenen oder anzufangenden Atomkette niederlässt, wo es im einfach kubischen Fall nur durch *eine* Bindung festgehalten wird, nutzt es die kurze Zeit seiner Anlagerung aus, um sich von einem Platz zum nächsten weiterreichen zu lassen. Das Hüpfen zur Nachbarbindung ist wahrscheinlicher als die vollständige Ablösung. Wenn ein solches Atom, oder noch besser ein Atompaar, dabei an eine Halbkante gelangt, ist die Keimbildung geglückt, falls schnell genug andere Atome sich dort anlagern, um die neue Atomkette zu konsolidieren.

Schaffung neuer **Netzebenenkeime** ist wesentlich schwieriger. Manchmal umgeht der Kristall auch diese Schwierigkeit durch **Spiralwachstum** (Abschn. 17.5.4), ohne überhaupt solche Netzebenenkeime anlegen zu müssen.

Besonders für die Herstellung von Halbleitern ist das **epitaxiale Wachstum** wichtig. Auf der Netzebene eines Kristalls nimmt auch fremdes Material u. U. die Gitterstruktur des Substrats an. Der Übergang zwischen den unterschiedlichen Gitterparametern wird notfalls durch ein ganzes Netz von Versetzungen ermöglicht. So gewinnt man monokristalline Dünnschicht-Bauelemente, die relativ wenige Gitterfehler und daher vielfach bessere elektronische Eigenschaften haben.

Kristallzüchtung. Man kann einkomponentige Verfahren (Züchtung aus der reinen Schmelze oder dem reinen Dampf) und mehrkomponentige Verfahren (Züchtung aus der Lösung oder durch thermische Zersetzung anderer Substanzen) unterscheiden. In fast allen Fällen wird die Züchtung durch Impfung mit einem Kristallkeim eingeleitet. Die Temperatur- und Konzentrationsverteilung (Unterkühlung, Übersättigung) sind entscheidend. Zusätze erwünschter oder unerwünschter Art können in weiten Grenzen geregelt werden. Vielfach muss man unter einem Schutzgas arbeiten.

Für die Halbleiterherstellung am wichtigsten sind die **Tiegelverfahren** (Züchtung aus der Schmelze). Beim **Bridgman-Verfahren** wird der Tiegel durch einen T -Gradienten geschoben. Der Tiegel (meist ein zugespitztes Rohr) soll durch seine Form nur *einem* Keim das Wachstum erlauben. Beim **Stockbarger-Verfahren** begrenzen zwei Heizwicklungen den T -Gradienten auf die Phasengrenze. Bei *Kyropoulos* und *Czochralski* wird ein gekühlter Impfkristall in die Schmelze getaucht und sehr langsam herausgezogen.

Besonders für synthetische Edelsteine verwendet man das **Verneuil-Verfahren**: Polykristallines Pulver oder eine flüchtige Verbindung werden in eine Flamme oder einen Lichtbogen eingestreut, unter dem der wachsende Einkristall sitzt.

Polykristallines oder unreines Material können im **Zonenschmelzverfahren** durch eine schmale Heizvorrichtung aufgeschmolzen werden, die sich langsam weiterbewegt. Dahinter bildet sich bei geeigneter Anordnung ein Einkristall. Verunreinigungen, die die flüssige Phase bevorzugen (Verteilungskoeffizient!), werden so „herausgefegt“. Notfalls wiederholt man das Verfahren. Die Schmelzzone kann auch eine erwünschte Dotierung gleichmäßig verteilen (**Zonen-Nivellierung**).

Aus der Lösung gewinnt man Kristalle durch Abkühlen oder Eindampfen. Die erhöhte Löslichkeit bei hohen T und p erlaubt sogar die **hydrothermale Züchtung** von Quarz in Nachahmung geologischer Prozesse.

Aus dem Dampf entstehen **Aufdampfschichten**, die vielfach zunächst unter dem Einfluss der Unterlage amorph sind und erst bei größerer Dicke durchkristallisieren, und **Whiskers**, die meist in einer einzigen Schraubenversetzung wachsen. Ein Heizdraht (*van Arkel, de Boer*) als Aufdampfunterlage regelt die Wachstumsverhältnisse durch seine Temperatur. Aus der festen Phase gewinnt man durch Umkristallisieren andere Kristallformen, speziell unter hohen p und T wie bei der Diamantsynthese.

17.1.8 Fullerene

Die Chemie kennt zwei Grundkonfigurationen des C-Atoms, die aliphatische (tetraedrische) wie in den Kohlenwasserstoffen und die aromatische (ebene) wie im Benzol. Aus reinem Kohlenstoff kann man dementsprechend zwei räumlich im Prinzip unendliche Kristallstrukturen aufbauen: Den **Diamant**, in dem jedes C tetraedrisch von 4 gleichberechtigten Nachbarn umgeben ist, ähnlich wie das Oim Eis, nur in kubisch-flächenzentrierter, nicht in hexagonaler Anordnung (Grund: Aufgabe 17.1.8), und den **Graphit**, bestehend aus ebenen Schichten aus lauter Sechsecken, wobei diese Schichten miteinander nur schwach gebunden sind. Daher ist Graphit so weich, Diamant so hart. Trotz dieser Anisotropie ist Graphit energetisch stabiler als der so schön symmetrische Diamant: Hüten sie ihren Brillantring vor zu hohen Temperaturen, sonst ist er (selbst bei Luftabschluss) höchstens noch als Bleistift zu gebrauchen.

1985 untersuchten *Kroto* und *Smalley* (Chemie-Nobelpreis 1996) das sehr komplexe Absorptionsspektrum von interstellarem Staub und versuchten, einen ähnlichen Staub im Labor durch Verdampfen von Graphit herzustellen. In dessen Massenspektrum fanden sie intensive, sehr sta-



Abb. 17.27. Leonardo da Vinci kannte weder Fußbälle noch Fullerene, aber Strukturen wie die symmetrischen Polyeder faszinierten ihn (© EBM-Service für Verleger, Luzern)

bile Linien, die den verschiedenen Ionisationsstufen eines Moleküls C_{60} entsprachen. 60 Ecken hat der TV-Fußball, Stellen, wo ein (schwarzes) Fünfeck mit zwei (weißen) Sechsecken zusammenstößt. Betrachtet man die 12 Fünf- und 20 Sechsecke als eben, ist dies eines der 13 semiregulären Polyeder, die schon *Archimedes* untersucht hat. *Euler* fand, dass man aus Sechsecken nur dann eine in sich geschlossene Fläche bauen kann, wenn genau 12 Fünfecke dabei sind. Am einfachsten ist natürlich das Dodekaeder: 12 Fünfecke, kein Sechseck. Wegen der Ähnlichkeit mit den „geodätischen Dömen“ des Architekten und Ingenieurs R. Buckminster Fuller, polyedrischen Strukturen von theoretisch unbegrenzter Spannweite, nannte man die zunächst hypothetische Fußball-Struktur **Fulleren** oder auch **bucky ball**. Es gibt noch mehr davon, z. B. C_{70} , das aber nicht kugelig, sondern etwas länglich ist, fast wie ein american football.

Krätschmer und *Huffmann* fanden 1990 einen Weg, größere Mengen Fullerene zu erzeugen: Man verdampft Graphit z. B. im Lichtbogen unter einer He-Schutzgasatmosphäre. Die einzeln oder in kleinen Schichtfetzchen abdampfenden C-Atome können sich nicht zu Graphit-Ebenen zusammenlagern: Kleine Stücke einer Ebene haben am Rand zu viele offene Bindungen. Günstiger ist es, diese Bindungen gegenseitig zu verknüpfen, die Schicht aufzurollen. Die notwendige Krümmung erreicht man aber nur, wenn man auf einige Sechsecke verzichtet und sie zu Fünfecken macht, 12 nämlich, wenn man eine Kugel wünscht. Das Fünfeck ist energetisch weniger günstig, Krümmung bedeutet Verspannung der Valenzwinkel; die Sache lohnt nur, wenn genügend viele Sechsecke bleiben. Deswegen sind zu kleine Gebilde dieser Art, z. B. das wunderschöne Dodekaeder aus 20 aliphatischen C, nicht stabil, sondern erst C_{60} mit 12 Fünf- und 20 Sechsecken.

Außer den bucky balls bilden sich auch bucky tubes, lange Röhren, d. h. zylindrisch aufgerollte Graphit-Ebenen, meist abgeschlossen durch einen halben Fußball an jedem Ende, und bucky onions, konzentrisch ineinander geschachtelte bucky balls mit verschiedenen vielen Sechsecken, wo also nicht Einzelebenen, sondern ganze Stöße davon aufgerollt sind. C_{60} kristallisiert, indem sich die Fußbälle einfach kubisch dicht zusammenlagern. Obwohl der Ball keine echten freien Valenzen mehr hat, kann man dann andere Teilchen verschiedenster Art zwischen die Bälle und sogar in ihr leeres Inneres einlagern, dank der gleichen Kräfte, die die einzelnen Graphit-Ebenen aneinander binden. Die Eigenschaften solcher dotierten Kristalle gehen von Schmiermitteln über Halbleiter und Hochtemperatur-Supraleiter (bis 45 K Sprungtemperatur) bis zu Aids-Therapeutika, die die Vermehrung des HIV-Virus verhindern sollen. Täglich erscheinen 3–4 Publikationen über dieses faszinierende Gebiet.

17.2 Gitterschwingungen

Teilchen im Festkörper können schwingen und bedingen dadurch dessen wesentlichste Eigenschaften: Thermische, mechanische, optische, akustische, auch elektrische. Auch hier wirkt sich der Welle-Teilchen-Dualismus aus: Wie das Licht in Photonen, so zerfallen die Gitterschwingungen in Phononen.

17.2.1 Spezifische Wärmekapazität

Wenn ein Festkörper ein System von schwingungsfähigen Gitterteilchen ist, sollte jeder dieser Oszillatoren nach dem **Gleichverteilungssatz** der klassischen Physik gleich viel kinetische wie potentielle Energie haben, und zwar für jeden dieser beiden Anteile $\frac{3}{2}kT$ (drei Freiheitsgrade entsprechend den drei Raumrichtungen). Es bleibt die Frage, was als schwingungsfähige Einheit aufzufassen ist. Ein Atom? Dann erhält man für ein Grammatom jedes Stoffes $3N_A kT = 3RT$, also die spezifische Atomwärme von $3R = 25 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$, den Wert von *Dulong-Petit*. Wenn die Atome auch im Molekül unabhängig schwingen, folgt die **Neumann-Kopp-Regel**: Die Molwärme ist die Summe der Atomwärmern. Für Wasser mit der molaren Wärmekapazität von $75 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ scheint das genau zu stimmen. Für Diamant würde man $2 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ erwarten, findet aber nur $0,5 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Die beobachtete spezifische Wärme bleibt umso mehr hinter dem Dulong-Petit-Wert zurück, je tiefer die Temperatur, je leichter das Gitterteilchen (Vergleich C–Si–Ge) und je fester das Gitter ist (Vergleich Diamant–Graphit–Eis). *Einstein* zog 1907 die Parallele zur Wärmestrahlung: Auch dort versagt die klassische Rayleigh-Jeans-Formel für die Strahlungsdichte (vgl. Abschn. 11.2.3) um so mehr, je tiefer die Temperatur und je höher die Frequenz ist. Die Frequenz eines Gitterteilchens ist aber umso höher, je leichter und je fester gebunden es ist. *Einstein* schlug daher die gleiche Lösung vor wie *Planck* für die schwarze Strahlung: Die Energie der Oszillatoren, hier der Gitterteilchen, muss gequantelt sein, d. h. die Energie eines schwingenden Teilchens, auch wenn es neutral ist und daher nichts mit elektromagnetischer Strahlung zu tun hat, kann nur ein ganzzahliges Vielfaches von $\hbar\omega$ sein: $\varepsilon_j = j\hbar\omega$ (die heutige Quantenphysik zählt die **Nullpunktenergie** dazu und schreibt $\varepsilon_j = (j + \frac{1}{2})\hbar\omega$, was aber hier nichts Wesentliches ändert).

Bei der Temperatur T befinden sich im Zustand j mit der Energie $\varepsilon_j = j\hbar\omega$ nach *Boltzmann* $N_j = N_0 e^{-j\hbar\omega/(kT)}$ Teilchen, wenn N_0 im Grundzustand mit $\varepsilon_0 = 0$ sind. Die Gesamtzahl der Teilchen ist

$$N = \sum_{j=0}^{\infty} N_j = N_0 \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j\hbar\omega/(kT)} .$$

Das ist eine geometrische Reihe mit dem Faktor $e^{-\hbar\omega/(kT)}$, also der Summe $1/(1 - e^{-\hbar\omega/(kT)})$. Durch die konstante Gesamtzahl N ausgedrückt ist also die Besetzungszahl des j -ten Schwingungszustandes

$$N_j = N(1 - e^{-\hbar\omega/(kT)})e^{-j\hbar\omega/(kT)} . \tag{17.22}$$

Uns interessiert die Gesamtenergie:

$$E = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j N_j = N\hbar\omega(1 - e^{-\hbar\omega/(kT)}) \sum_{j=1}^{\infty} j e^{-j\hbar\omega/(kT)} . \tag{17.23}$$

Die Summe lässt sich durch zweimalige Anwendung der geometrischen Reihenformel ausrechnen (Abschn. 19.1.6):

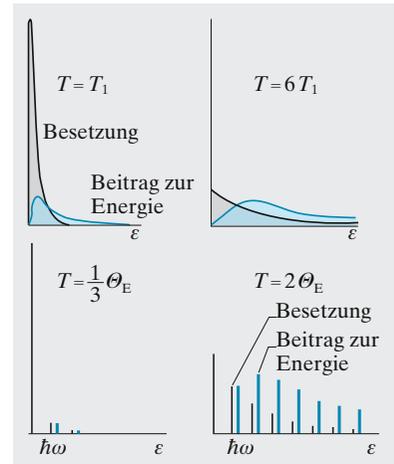


Abb. 17.28. Klassische (oben) und einsteinsche (unten) Theorie der spezifischen Wärme des Festkörpers. Schwarze Kurven bzw. Balken: Besetzungszahl der Zustände; blaue Kurven bzw. Balken: Beitrag zur Energie

$$E = N \frac{e^{-\hbar\omega/(kT)}}{1 - e^{-\hbar\omega/(kT)}} \hbar\omega = N \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/(kT)} - 1} . \quad (17.24)$$

x Beispiel...

Berechnen Sie die Summe in Gleichung (17.23). Hinweis: $\sum_{j=1}^{\infty} j q^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{v=j}^{\infty} q^{-v}$. Begründung? Hilft das Schema

$$\begin{array}{c} q^{-1} q^{-2} q^{-3} \dots \\ q^{-2} q^{-3} \dots \\ q^{-3} \dots \end{array}$$

Wenn man das Schema zeilenweise summiert, folgt sofort die angegebene Hilfsbeziehung: $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{v=j}^{\infty} q^{-v} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{-j}}{1-q} = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Wir betrachten die Grenzfälle hoher und tiefer Temperaturen. Bei $kT \gg \hbar\omega$ kann man die e-Funktion entwickeln und erhält

$$E \approx NkT \quad (kT \gg \hbar\omega) . \quad (17.25)$$

Das ist genau das klassische Resultat für einen Freiheitsgrad. Die spezifische Wärme folgt hier also der Dulong-Petit-Regel. Bei $kT \ll \hbar\omega$ überwiegt die e-Funktion weitaus, und Energie und spezifische Wärme sind viel kleiner als nach *Dulong-Petit* und verschwinden dann für $T \rightarrow 0$:

$$\begin{array}{l} E = N\hbar\omega e^{-\hbar\omega/(kT)} , \\ c = \frac{1}{Nm} \frac{\partial W}{\partial T} = \frac{\hbar^2\omega^2}{km} T^{-2} e^{-\hbar\omega/(kT)} \quad (kT \ll \hbar\omega) . \end{array} \quad (17.26)$$

Der Übergang zwischen den Grenzfällen erfolgt ungefähr bei der

$$\begin{array}{l} \text{Einstein-Temperatur} \\ T = \Theta_E = \frac{\hbar\omega}{k} . \end{array} \quad (17.27)$$

Genauere Messungen zeigen, dass Einsteins spezifische Wärme für kleine Temperaturen etwas zu steil gegen Null geht. Das liegt daran, dass *Einstein* nur eine einzige Frequenz, nämlich die der einzelnen Gitterbausteine annimmt. Das Gitter ist aber auch zu vielen niederfrequenten Schwingungen fähig, bei denen ganze Gruppen von Teilchen gegen andere Gruppen schwingen. Das mildert den Abfall von c mit T .

Diese Schwingungen sind nichts Anderes als Schallwellen. *Debye* baute den Gedanken aus, dass der Wärmehalt eines Festkörpers überwiegend in stehenden Schallwellen steckt. Wesentlich ist, dass über Einsteins Energiequantelung hinaus nicht alle denkbaren Wellen im Kristall möglich sind (das wären unendlich viele), sondern nur solche, die am Rand des Kristalls einen ganz bestimmten Schwingungszustand haben, z. B. einen Knoten (das Ergebnis ist im Wesentlichen dasselbe, wenn man einen

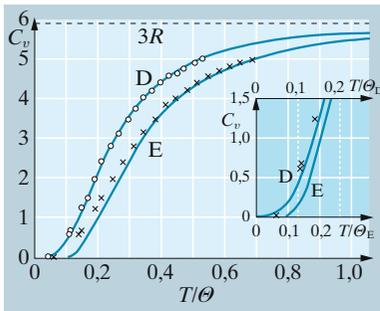


Abb. 17.29. Molare Wärmekapazität (Atomwärme) in $\text{calK}^{-1}\text{mol}^{-1}$, angepasst durch eine Einstein-Funktion (E) und eine Debye-Funktion (D). Im Hauptbild sind die gleichen Messpunkte zweimal aufgetragen, damit die Abszisse T/Θ trotz verschiedener Θ -Werte für beide theoretischen Kurven identisch ist ($\Theta_E = 1\,320\text{ K}$, $\Theta_D = 2\,000\text{ K}$). Im rechten Ausschnitt ist die Abszisse einfach T . Hier wird die Überlegenheit der Debye-Kurve für tiefe T besonders klar

Bauch fordert). Außerdem ist es physikalisch sinnlos, eine Welle anzunehmen, deren Wellenlänge kürzer ist als die doppelte Gitterkonstante, denn die Schwingungszustände in einer solchen Welle ließen sich ebenso gut auch durch eine größere Wellenlänge beschreiben (Aufgabe 17.2.1). Wir betrachten zuerst ein „lineares Gitter“ aus N äquidistanten Atomen. Damit an den Enden dieser Kette (Länge $L = Nd$) Knoten liegen, muss eine ganze Anzahl von Halbwellen in diese Länge passen: $Nd = n\lambda/2$ oder $\lambda = 2Nd/n$ oder mit der „Wellenzahl“ $k = 2\pi/\lambda$:

$$k = \frac{\pi n}{Nd} . \tag{17.28}$$

Andererseits soll $\lambda \geq 2d$ sein, d.h. $n \leq N$. Demnach gibt es genau N erlaubte Wellenformen: $n = 1, 2, \dots, N$. Dieses Ergebnis bleibt auch für ein dreidimensionales Gitter gültig: Ein Gitter hat ebenso viele stehende Wellenformen oder **Normalschwingungen** einer gegebenen Schwingungsrichtung, wie es Teilchen enthält. Die Anzahl der Normalschwingungen ist noch mit 3 zu multiplizieren (eine longitudinale und zwei transversale Schwingungsrichtungen). Jeder Wellenform ist nach *Einstein* eine gequantelte Energie mit dem Quant $\hbar\omega$ zuzuordnen. Sie trägt also $\hbar\omega/(e^{\hbar\omega/(kT)} - 1)$ zur gesamten Wärmeenergie bei. Dabei ist natürlich, wie für alle Wellen, $\omega = c_s/\lambda = kc_s$ (c_s : Schallgeschwindigkeit).

Wir müssen noch wissen, wie sich die Normalschwingungen über die Frequenzen, d.h. die Energien verteilen, d.h. wie viele von ihnen in ein Frequenzintervall ($\omega, \omega + d\omega$) bzw. ein k -Intervall ($k, k + dk$) fallen. Wir betrachten einen Würfel, eine Ecke bei Null, orientiert längs der Achsen, mit der Kantenlänge L . Eine stehende Welle, die auf der ganzen Würfeloberfläche verschwinden soll, muss den räumlichen Anteil $\sin(k_1x) \sin(k_2y) \sin(k_3z)$ haben, wobei jedes k_i die Bedingung (17.28) erfüllt: $k_i = \pi n_i/L$. Die Enden der erlaubten k -Vektoren bilden also ein Punktgitter konstanter Dichte; seine Gitterkonstante ist π/L . Bis zur Grenze $\lambda = 2d$, also $k = \pi/d$ liegen tatsächlich genau $N = (L/d)^3$ k -Punkte, d.h. ebenso viele, wie das reale Gitter Teilchen hat. Das Intervall ($k, k + dk$) der k -Beträge entspricht einer $\frac{1}{8}$ Kugelschale vom Volumen $\frac{1}{8}4\pi k^2 dk$, in dem $\frac{1}{8}4\pi k^2 dk L^3/\pi^3$ k -Punkte liegen (da n_x, n_y, n_z positiv, sind k_x, k_y, k_z ebenfalls positiv).

Im entsprechenden Frequenzintervall ($\omega, \omega + d\omega$) liegen

$$3 \frac{L^3}{8\pi^3} 4\pi \frac{\omega^2 d\omega}{c_s^3}$$

Normalschwingungen ($\omega = kc_s$; die 3 zählt die Schwingungsrichtungen: eine longitudinale, zwei transversale). Sie haben die Energie

$$dE = 3 \frac{4\pi L^3 \hbar \omega^3 d\omega}{8\pi^3 c_s^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/(kT)} - 1} .$$

Mit der Abkürzung $x = \hbar\omega/(kT)$, der Teilchenzahl $N = L^3/d^3$ und der

Debye-Temperatur

$$\Theta = \frac{\hbar\omega_{gr}}{k} = \frac{\hbar k_{gr} c_s}{k} \simeq \frac{\hbar \pi c_s}{kd} \tag{17.29}$$

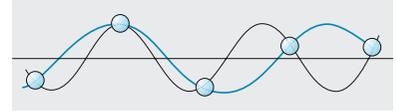


Abb. 17.30. Es ist physikalisch sinnlos, im Festkörper eine Welle mit $\lambda < 2d$ einzuführen (—). Genau die gleichen Auslenkungen aller Teilchen lassen sich auch durch eine Welle mit $\lambda > 2d$ darstellen (—)

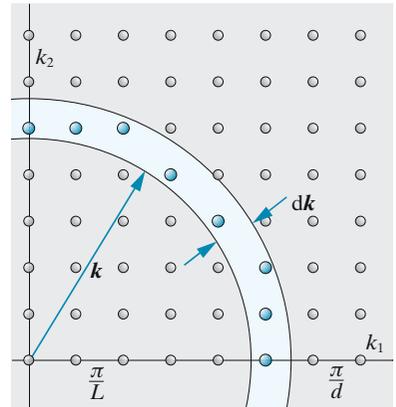


Abb. 17.31. k -Raum mit den möglichen Schwingungsmodes eines Kristallwürfels der Kante L und der Gitterkonstante d . Die Anzahl von Modes zwischen k und $k + dk$ ist proportional $k^2 dk$

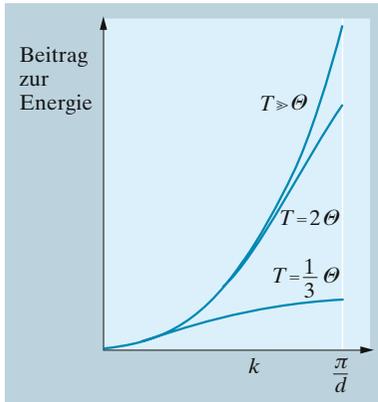


Abb. 17.32. Debye-Theorie der spezifischen Wärme des Festkörpers: Beitrag der Modes mit verschiedenen k -Werten zur Gesamtenergie bei verschiedenen Temperaturen

erhält man die gesamte Schwingungsenergie

$$E = 9NkT \frac{T^3}{\Theta^3} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (17.30)$$

Auch ohne dieses Integral auszuwerten und das Resultat nach T abzuleiten, erhält man die spezifische Wärme in den beiden Grenzfällen $T \gg \Theta$ und $T \ll \Theta$:

Bei $T \gg \Theta$ interessieren im Integranden von (17.30) nur sehr kleine x -Werte, sodass man e^x entwickeln kann. Das Integral wird $\frac{1}{3}(\Theta/T)^3$, also $E = 3NkT$, $c = 3Nk$, wie nach *Dulong-Petit*. Bei $T \ll \Theta$ kann man ohne wesentlichen Fehler bis ∞ integrieren. Das bestimmte Integral wird dann eine T -unabhängige Zahl ($\pi^4/15$), also

$$E = \frac{3\pi^4}{5} NkT \frac{T^3}{\Theta^3}, \quad c = \frac{12\pi^4}{5} \frac{k}{m} \frac{T^3}{\Theta^3}. \quad (17.31)$$

Bei $T \rightarrow 0$ geht die spezifische Wärme in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung wie T^3 gegen Null. Es ist leicht anschaulich einzusehen, wie das kommt: Bei tiefer Temperatur sind praktisch nur Schwingungen bis zur Grenze $\hbar\omega \approx kT$ angeregt, die im k -Raum eine Kugel füllen, deren Radius um den Faktor T/Θ kleiner ist als für die gesamte Kugel bis zur Grenzfrequenz. Die kleine Kugel umfasst nur den Bruchteil T^3/Θ^3 aller Normalschwingungen. Die angeregten Normalschwingungen haben die Energie $\approx kT$, also $E \sim T^4$, $c \sim T^3$.

Die Debye-Kurve mit ihrem einzigen Parameter Θ beschreibt den ganzen Verlauf $c(T)$ besser als die Einstein-Kurve, aber immer noch mit Abweichungen von den Messergebnissen, die über deren Fehlergrenzen hinausgehen. Das liegt daran, dass *Debye* die Schallgeschwindigkeit als für alle Schwingungen gleich annimmt. Wie wir sehen werden, trifft das nicht zu: Schallwellen, besonders die kurzen, auf die es hier ankommt, haben eine erhebliche Dispersion. Im übrigen stimmen die auf verschiedene Weise bestimmten **Debye-Grenzfrequenzen** (aus $\nu_{\text{gr}} = c_s/(2d)$, als optische Grenzfrequenz, aus $\nu_{\text{gr}} = k\Theta/h$) recht gut miteinander überein (Tabelle 17.8), obwohl sie aus drei ganz verschiedenen Erfahrungsbereichen (Akustik + Atomistik, Optik, Wärmelehre) stammen.

Tabelle 17.8. Debye-Frequenzen

	elastisch $\nu_{\text{gr}}/\text{THz}$ berechnet aus (17.18)	thermisch $\nu_{\text{gr}}/\text{THz}$ berechnet aus Θ_D (17.31)	optisch ν/THz UR-Absorpt. vgl. Abb. 17.39
NaCl	6,66	6,42	5,77
KCl	5,13	4,89	4,77
Ag	4,50	4,69	–
Zn	6,35	6,41	–

17.2.2 Gitterdynamik

Bei Wellenlängen, die nicht viel größer sind als die doppelte Gitterkonstante, verhält sich ein Kristall wesentlich anders als ein Kontinuum. Wir sahen schon, dass Wellenlängen unterhalb $2d$ keinen Sinn haben, denn physikalisch wesentlich sind nur die Bewegungen der Gitterteilchen, und diese lassen sich immer durch eine Welle mit $\lambda \geq 2d$ oder $k \leq \pi/d$ darstellen. Für ein Kontinuum gäbe es keine solche Begrenzung.

Ein anderer wichtiger Unterschied liegt darin, dass die elastischen Kräfte, die die Schwingungen bestimmen, nicht von der Auslenkung der Gitterteilchen gegen den „absoluten Raum“ herrühren, sondern von der Auslenkung gegen die Nachbarpartikel. Entscheidend für diese Kräfte ist der Abstand nächster Nachbarn. In einer longitudinalen Welle mit der kürzest sinnvollen Wellenlänge $\lambda = 2d$ ($k = \pi/d$) schwingen Nachbarpartikel gegenphasig. Der Abstand nächster Nachbarn ist bei größter Annäherung $d - 2a$ (a : Amplitude der Schwingung), und ändert sich zeitlich wie $d - 2ae^{i\omega t}$. Bei einer beliebigen Wellenlänge tritt anstelle der 2 der Faktor $1 - \cos(kd)$ (s. Abb. 17.33). Der Abstand nächster Nachbarn ist

$$d - a(1 - \cos(kd))e^{i\omega t}.$$

Die Abweichung vom Gleichgewichtsabstand d löst eine elastische Rückstellkraft

$$F_{el} = -Da(1 - \cos(kd))e^{i\omega t}$$

aus. Zur anderen Seite hin ist der Abstand $d + a(1 - \cos(kd))e^{i\omega t}$. Die entsprechende Kraft wirkt in der gleichen Richtung. Die eine schiebt, die andere zieht.

$$F_{el} = -2Da(1 - \cos(kd))e^{i\omega t}.$$

Andererseits sind für die Trägheitskräfte wirklich die Schwingungen gegen den „absoluten Raum“ maßgebend. Sie erfolgen wie $x = ae^{i\omega t}$ mit der Beschleunigung $\ddot{x} = -\omega^2 ae^{i\omega t}$, also der Trägheitskraft

$$F_{tr} = -m\ddot{x} = m\omega^2 ae^{i\omega t}.$$

Elastische und Trägheitskraft müssen einander aufheben, also

$$\boxed{\omega^2 = \frac{2D}{m}(1 - \cos(kd))}. \tag{17.32}$$

Dies ist die **Dispersionsrelation** für longitudinale Schwingungen in einem Gitter mit einatomiger Elementarzelle (Dispersionsrelation nennt man den Zusammenhang zwischen ω und k bzw. $c_s = \omega/k$ und λ).

Für lange Wellen ($\lambda \gg 2d$, $k \ll \pi/d$) kann man setzen $\cos(kd) \approx 1 - k^2 d^2/2$, und es folgt aus (17.32)

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}kd \quad \left(k \ll \frac{\pi}{d}\right).$$

Die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit so langer Wellen sind unabhängig von k und einander gleich:

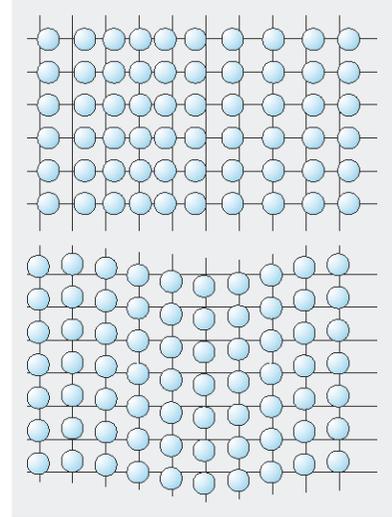


Abb. 17.33. Longitudinale und transversale Schwingung eines Kristalls. Die Auslenkungen benachbarter Teilchen unterscheiden sich um $a(\cos(kx) - \cos(k(x+d)))$. Diese Differenz bestimmt die Kräfte (man denke sich Federn zwischen Nachbarpartikeln angebracht)

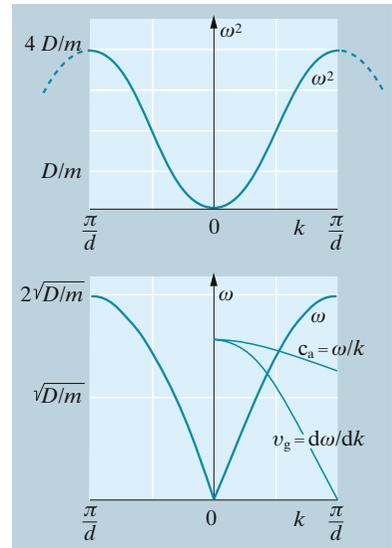


Abb. 17.34. Dispersionsrelation $\omega(k)$ eines Gitters mit einem Teilchen in der Elementarzelle und Wechselwirkung nur zwischen nächsten Nachbarn. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Wellen (c_s bzw. v_g) sind ebenfalls angegeben

$$c_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{D}{m}} d, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{D}{m}} d \quad (17.33)$$

(zur Definition von v_g vgl. Abschn. 4.2.4). Die Federkonstante D ergibt sich aus der Krümmung am Boden des annähernd parabolischen Gitterpotentialtopfs und lässt sich auch durch den Elastizitätsmodul E ausdrücken: $D = U'' = Ed$ (Abschn. 17.1.4). Für lange Wellen ergibt sich so die **Schallgeschwindigkeit** der klassischen Kontinuumstheorie:

$$c_s = v_g = \sqrt{\frac{Ed^3}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

An der kurzwelligen Grenze ($k = \pi/d$) wird aus (17.32)

$$\omega = \sqrt{\frac{4D}{m}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{D}{m}} \frac{2d}{\pi}, \quad \text{aber } v_g = 0; \quad (17.34)$$

die gegenphasigen Schwingungen von Nachbaratomen ergeben eine *stehende* Welle. $k = \pi/d$ entspricht genau der Bragg-Bedingung oder dem Rand der 1. Brillouin-Zone für senkrechten Einfall (Abschn. 17.1.3). Auch Schallwellen, die dieser Bedingung entsprechen, werden reflektiert, in diesem Fall in sich selbst zurück, sodass sich eine stehende Welle ergibt. Sie verhalten sich hierin nicht anders als Lichtwellen und Elektronenwellen (Abschn. 17.1.3).

Bei Gittern mit mehreren Atomen in der Elementarzelle kommt als wesentlich neues Element die Existenz mehrerer „Zweige“ im Schwingungsspektrum hinzu. Wir betrachten z. B. das NaCl-Gitter. Auf die Ladungen der Teilchen kommt es zunächst nicht an, sondern nur darauf, dass zwei verschiedene Sorten von Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 abwechselnd im Abstand $d/2$ in gewissen Richtungen, etwa der 100-Richtung, aufeinander folgen. Längs dieser Richtung möge eine longitudinale Gitterwelle laufen. Wegen ihrer verschiedenen Massen schwingen beide Teilchen mit verschiedenen Amplituden a_1 und a_2 . Ein Teilchen der Sorte 1, z. B. eines, das gerade maximal ausschlägt, hat zwei Nachbarn der Sorte 2 in den Abständen $d/2 - a_1 + a_2 \cos(kd/2)$ und $d/2 + a_1 - a_2 \cos(kd/2)$. Beide üben, das eine schiebend, das andere ziehend, die gleiche Kraft auf das Teilchen 1 aus, im Ganzen

$$F_{1\text{el}} = 2D(a_1 - a_2 \cos(kd/2)) = F_{1\text{tr}} = m_1 \omega^2 a_1. \quad (17.35a)$$

Entsprechend gilt für ein Teilchen der Sorte 2, das wir ebenfalls im Moment betrachten, wo es maximal ausschwingt

$$F_{2\text{el}} = 2D(a_2 - a_1 \cos(kd/2)) = F_{2\text{tr}} = m_2 \omega^2 a_2. \quad (17.35b)$$

Diese beiden homogenen Gleichungen für die Amplituden a_1 und a_2 können nur erfüllt werden, wenn die Determinante dieses Gleichungssystems verschwindet

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2D - \omega^2 m_1 & -2D \cos(kd/2) \\ -2D \cos(kd/2) & 2D - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} \\ & = 4D^2 \sin^2(kd/2) - 2D\omega^2(m_1 + m_2) + m_1 m_2 \omega^4 = 0 \end{aligned} \quad (17.36)$$

(hier ist $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ benutzt). Für jedes k sind also *zwei* ω möglich, die sich aus der quadratischen Gleichung (17.36) für ω^2 ergeben:

$$\omega^2 = \frac{D}{\mu} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{m_1 m_2} \sin^2(kd/2)} \right). \quad (17.37)$$

$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ist die reduzierte Masse. Das +- und das --Zeichen liefern zwei i. Allg. getrennte Zweige im ω, k -Diagramm, den **optischen Zweig** (+) und den **akustischen Zweig** (-) (Abb. 17.35). Für lange Wellen ($kd \ll \pi$, $\sin^2(kd/2) \approx k^2 d^2 / 4$) ergibt sich durch Entwickeln der Wurzel

$$\begin{aligned} \omega_{lo} &= \sqrt{\frac{2D}{\mu}} && \text{(optischer Zweig),} \\ \omega_{la} &= \sqrt{\frac{D}{2(m_1 + m_2)}} kd && \text{(akustischer Zweig).} \end{aligned} \quad (17.38)$$

Im optischen Zweig ist hier $v_g = 0$ (stehende Welle); der akustische verhält sich praktisch wie im Fall der einatomigen Elementarzelle. Für kürzeste Wellen ($kd = \pi$, $\sin^2(kd/2) = 1$) und z. B. $m_1 \gg m_2$ folgt

$$\begin{aligned} \omega_{ko} &= \sqrt{\frac{2D}{m_2}} && \text{(optischer Zweig),} \\ \omega_{ka} &= \sqrt{\frac{2D}{m_1}} && \text{(akustischer Zweig).} \end{aligned} \quad (17.39)$$

In dieser Grenze haben beide Wellentypen stehenden Charakter. Die $\omega(k)$ -Kurve des akustischen Zweiges steigt von $k = 0$ aus beiderseits an wie für die einatomige Elementarzelle. Wegen $\mu < m_2$ fällt sie im optischen Zweig beiderseits ab. Am nächsten kommen sich beide Zweige bei $k = \pi/d$. Wenn die Massen verschieden sind, bleibt aber zwischen ihnen eine Lücke. Für ω -Werte innerhalb dieser Lücke gibt es keine ungedämpfte Welle im Gitter.

Was das alles anschaulich bedeutet, sieht man am klarsten für eine transversale Welle. Die Amplituden a_1 und a_2 ergeben sich in diesem Fall aus Gleichungen ähnlich (17.35) als

$$m_1 a_1 = \mp m_2 a_2$$

(- für den optischen Zweig, + für den akustischen Zweig). Bei der akustischen Welle schwingen die beiden Teilchensorten miteinander, bei der optischen gegeneinander (Abb. 17.35). Bei der akustischen Welle werden die Bindungen zwischen Nachbarn umso stärker beansprucht, je

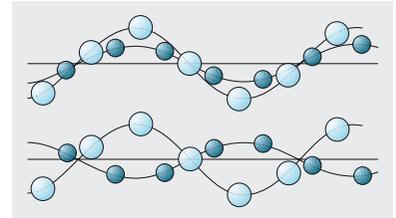


Abb. 17.35. Akustische (*oben*) und optische (*unten*) Schwingung gleicher Wellenlänge und Amplitude. Die Metallionen (●) haben hier trotz ihrer Kleinheit die doppelte Masse der Nichtmetallionen (○)

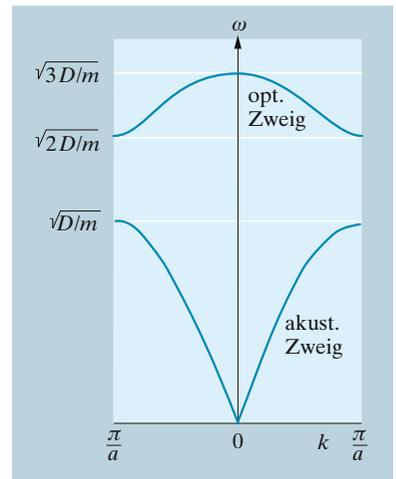


Abb. 17.36. Dispersionsrelation $\omega(k)$ für ein Gitter mit zwei Teilchen in der Elementarzelle und Wechselwirkung nur zwischen nächsten Nachbarn. Spezialfall $m_1 = 2m_2$. Optischer und akustischer Zweig sind durch einen „verbotenen“ Frequenzbereich getrennt

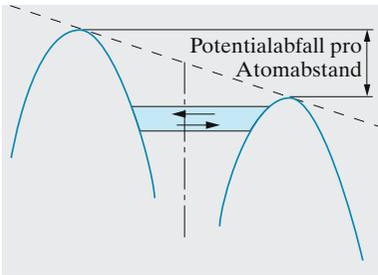


Abb. 17.37. Anknüpfung des Gitterpotentials durch ein äußeres Feld verschiebt die Elektronen im Bild nach rechts, sofern das Band nicht vollbesetzt ist. Die Elektronenanhäufung rechts erzeugt ein Gegenfeld, das die Bandkanten wieder horizontal stellt. Außerdem erleichtert das Feld den Übertritt von links nach rechts um einen Faktor, der exponentiell mit der Potentialsenkung ε ansteigt

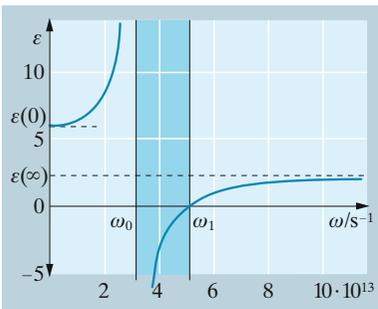


Abb. 17.38. Dispersionskurve der Dielektrizitätskonstante eines Ionenkristalls. Der Bereich mit negativem ε zwischen ω_0 und ω_1 ist der Absorptionsbereich

kürzer die Welle ist; daher ist ω dann größer. Bei der optischen ist es umgekehrt, nur sind die Unterschiede i. Allg. nicht so krass wie bei der akustischen. Falls die beiden Teilchensorten verschiedene Ladung haben (Ionenkristall), ist eine optische Welle mit einer größeren Polarisation (Dipolmoment/Volumeneinheit) verbunden als eine akustische, obwohl auch diese eine Polarisation bedingt, außer bei $m_1 = m_2$. Optische Schwingungen führen zu stärkerer Lichtabsorption, daher ihr Name.

Da die Abstände der Gitterteilchen bei transversalen und longitudinalen Schwingungen i. Allg. etwas verschieden sind, gibt es eigentlich je zwei optische und akustische Zweige, einen longitudinalen und einen transversalen, wobei der transversale entsprechend seinen beiden Schwingungsrichtungen doppelt zählt. Wenn die Elementarzelle p Teilchen enthält, gibt es 3 akustische und $3p - 3$ optische Zweige.

17.2.3 Optik der Ionenkristalle

Ionenkristalle haben i. Allg. zwei sauber getrennte Absorptionsgebiete. Das eine, im UV, stammt von den Elektronen der Ionenhülle (wenn man bedenkt, dass die losest gebundenen Valenzelektronen des einen Atoms wie Na i. Allg. zum anderen übergewechselt sind, wird klar, warum die Anregungsfrequenzen der Rumpfe selten im Sichtbaren liegen). Das andere Absorptionsgebiet beruht auf den Gitterschwingungen, besonders den optischen, und liegt im UR. Außerhalb dieser Gebiete ist der Kristall im Idealfall völlig durchsichtig. Gefärbt ist er – wieder im Idealfall – nur, wenn eines der Absorptionsgebiete ins Sichtbare hineinreicht.

Eine Lichtwelle mit der Kreisfrequenz ω trete in einen Ionenkristall vom NaCl-Typ ein. Ihr Feld E regt erzwungene Gitterschwingungen an, die sich von den freien Schwingungen (Abschn. 17.2.2) nur durch das Hinzukommen einer Kraft $\pm eE$ auf die Kationen bzw. Anionen unterscheiden. Für nicht zu kurze Wellen (d. h. solche, wo man in (17.35) $\cos(kd/2) \approx 1$ setzen kann), lauten die Bewegungsgleichungen der beiden Ionensorten

$$\begin{aligned} m_1 \omega^2 a_1 &= 2D(a_1 - a_2) + eE \\ m_2 \omega^2 a_2 &= 2D(a_2 - a_1) - eE. \end{aligned} \tag{17.40}$$

Wir brauchen die relative Auslenkung $a_1 - a_2$, denn sie bestimmt die dielektrische Polarisation $P = ne(a_1 - a_2)$ (n Kationen und n Anionen pro Volumeneinheit). Division der ersten Gleichung durch m_1 , der zweiten durch m_2 und Subtraktion liefert

$$a_1 - a_2 = \frac{eE}{\mu(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

wobei $\omega_0 = \sqrt{2D/\mu}$ die langwellige Grenzfrequenz des optischen Zweiges ist. Daraus ergibt sich die Polarisation P und aus dieser nach (6.47) die Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 \mu (\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{17.41}$$

Der Grenzwert von ε für $\omega \gg \omega_0$ müsste demnach 1 sein. In Wirklichkeit wird aber ε hier durch schneller schwingende Polarisationsanteile bestimmt, nämlich die der Hüllenelektronen. Wir beschreiben sie, indem wir die 1 durch $\varepsilon(\infty)$ ersetzen:

$$\varepsilon = \varepsilon(\infty) + \frac{ne^2}{\varepsilon_0\mu(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (17.42)$$

Andererseits wird für $\omega = 0$

$$\varepsilon = \varepsilon(0) = \varepsilon(\infty) + \frac{ne^2}{\varepsilon_0\mu\omega_0^2}.$$

Man kann also statt (17.42) auch schreiben

$$\varepsilon = \varepsilon(\infty) + (\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (17.43)$$

Diese Dispersionskurve der DK (Abb. 17.38) beschreibt das ganze optische Verhalten des Idealkristalls. Absorption und Dispersion ergeben sich aus der Brechzahl $n = \sqrt{\varepsilon}$. Zwischen ω_0 und ω_1 ist ε negativ, also n imaginär. Dabei ist ω_1 bestimmt durch

$$\varepsilon(\infty) = (\varepsilon(\infty) - \varepsilon(0)) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2},$$

also

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(\infty)} \quad (\text{Sachs-Lyddane-Teller-Beziehung}) \quad (17.44)$$

Ein imaginäres n bedeutet nach $k = \omega/(nc)$ ein imaginäres k :

$$k = i\kappa = -i \frac{\omega}{|n|c}.$$

Die Welle mit dem räumlichen Anteil $E = E_0 e^{ikx} = E_0 e^{-\kappa x}$ klingt dann exponentiell mit der Eindringtiefe κ^{-1} ab. Sie wird auch evaneszente Welle genannt. Wenn man die Dämpfung der Gitterschwingungen mitbeachtet, verbreitert sich das Absorptionsgebiet besonders links von ω_0 , denn die starken Resonanzschwingungen der Teilchen verzehren Energie aus der einfallenden Welle.

Beiderseits dieses Absorptionsgebietes ist die Dispersion „normal“, d. h. ε und n wachsen mit ω , die Phasengeschwindigkeit $c = \omega/k$ nimmt also ab. Für $\omega \ll \omega_0$ ist

$$\varepsilon \approx \varepsilon(0) + (\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)) \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad n \approx n_0 + \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)}{n_0},$$

also

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{\omega}{\omega_0^2} \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)}{n_0}. \quad (17.45)$$

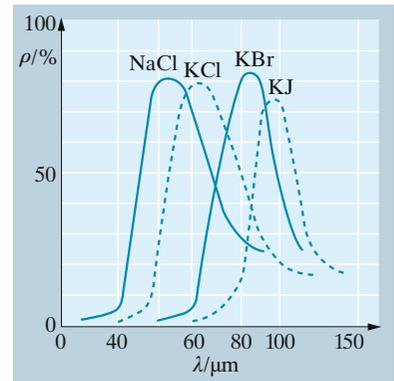


Abb. 17.39. Reflexionsgrad einiger Alkalihalogenide im Infraroten. Die Schärfe der Maxima wird in der Reststrahlmethode (*Rubens*) zur Monochromatisierung ausgenutzt. Die Absorptionsmaxima haben ähnliche Lage wie die Reflexionsmaxima

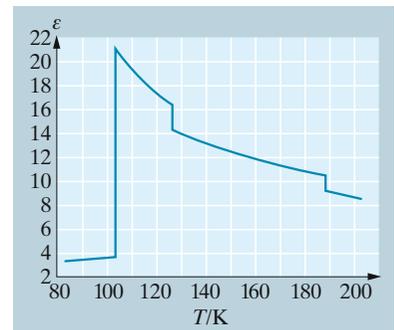


Abb. 17.40. T -Abhängigkeit der DK ε für festes H_2S bei 5 kHz. Die Debyesche T^{-1} -Abhängigkeit für den Beitrag der Dipolmoleküle, die sich selbst im Kristall noch praktisch frei einstellen können, bricht steil auf den einer reinen Molekül-Polarisierbarkeit entsprechenden Wert ab, wenn die Dipoldrehbarkeit einfriert

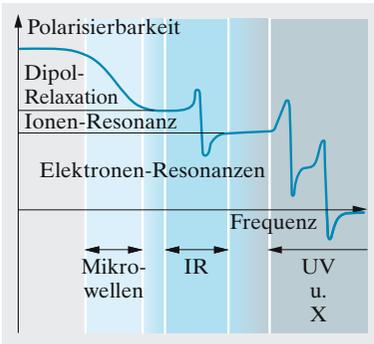


Abb. 17.41. Dispersionskurve (Frequenzabhängigkeit) der DK (Polarisierbarkeit) eines Festkörpers (schematisch). Im Mikrowellengebiet können die permanenten Dipole den Feldänderungen nicht mehr schnell genug folgen. Im IR scheidet die Verschiebung der Ionenrümpfe gegeneinander, im UV auch die Verschiebung der Elektronenhüllen gegen die Kerne als Polarisationsmechanismus aus. Relaxation und Resonanz unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Stärke der Dämpfung. Nur unterhalb der ersten Dispersionsstufe gilt die Maxwell-Relation $n^2 = \epsilon$ mit der *statischen* DK; zwischen $n(\omega)$ und $\epsilon(\omega)$ gilt sie außerhalb der Resonanzen allgemein

17.2.4 Phononen

Eine Gitterschwingung mit der Kreisfrequenz ω kann wie die Schwingung eines Einzelteilchens nur Energiewerte haben, die sich um ein ganzzahliges Vielfaches von $\hbar\omega$ unterscheiden. Daher kann z. B. eine Lichtwelle an das Gitter ebenfalls nur ganzzahlige Vielfache dieses Wertes abgeben oder sie von ihm aufnehmen. Mit dem gleichen Recht wie im Fall des elektromagnetischen Wellenfeldes deutet man dies durch die Existenz von **Schallquanten** oder **Phononen** mit der Energie $\hbar\omega$. Jeder Normal-schwingung wird je nach ihrer Gesamtenergie eine bestimmte Anzahl von Phononen zugeordnet. Vergrößert sich ihre Energie um $p\hbar\omega$, dann sagt man, es seien p Phononen in diesem Schwingungsmodus erzeugt worden.

Der Begriff des Phonons erleichtert besonders die Diskussion der An- und Abregung von Gitterschwingungen durch Licht oder Elektronen oder Neutronen. In allen diesen Fällen kann man die Prozesse als Stöße mit Phononen auffassen. Man braucht den Phononen neben der Energie nur den Impuls $\hbar\mathbf{k}_s$ zuzuordnen, wo \mathbf{k}_s der Wellenvektor der Gitterwelle ist. Natürlich gilt $\omega/k_s = c_s$ (Phasengeschwindigkeit der Gitterwelle). Bei jedem Stoß müssen Energie- und Impulssatz gelten. Daraus folgt die Berechtigung des Ansatzes $E_s = \hbar\omega$ für die Energie des Phonons. Die Berechtigung für $\mathbf{p}_s = \hbar\mathbf{k}_s$ ergibt sich auf etwas subtilere Weise. Eine Lichtwelle mit \mathbf{k} fällt ein, eine mit \mathbf{k}' soll austreten. Wie im Fall der elastischen Bragg-Streuung (ohne ω -Änderung, Abschn. 17.1.3) ist das in einem periodischen Gitter nur möglich, wenn $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ ein Vektor des reziproken Gitters ist. Nun ist aber der Wellenvektor \mathbf{k}_s einer Gitterwelle, die den Randbedingungen genügt, auch immer ein Vektor des reziproken Gitters. Also kann im allgemeinen Fall der Impuls $\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ auf beliebige Weise auf einen vom Gesamtgitter aufgenommenen Anteil $\hbar\mathbf{g}$ und einen Phononenimpuls $\hbar\mathbf{k}_s$ aufgeteilt werden. Nur der letztere gibt auch zu einer Energieänderung (ω -Änderung) des Lichtes Anlass, ist inelastisch; der Gitteranteil tut das infolge der riesigen Masse des Gitters nicht.

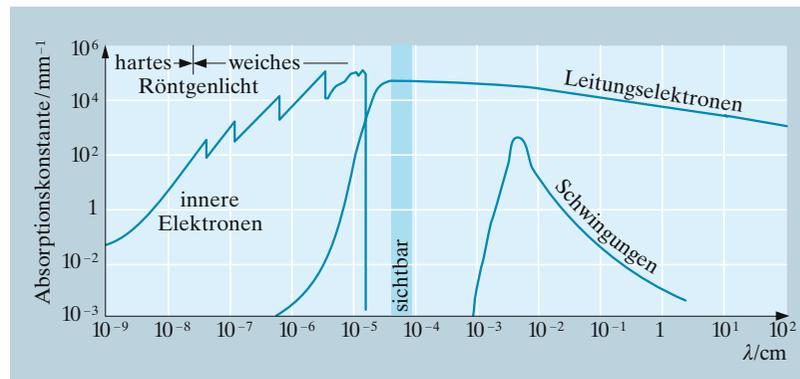


Abb. 17.42. Beiträge der Gitterschwingungen, der Leitungselektronen und der inneren Elektronen zur optischen Absorption (schematisch nach R. W. Pohl). Ionen- und Isolatorstrukturen haben einen breiteren Durchlässigkeitsbereich, weil der Leitungselektronenanteil fehlt

Auch beim Stoß mit einem Phonon ist die ω -Änderung des Photons sehr klein, wenn auch messbar. Das folgt aus den Erhaltungssätzen, z. B. für die Erzeugung eines Phonons:

Photon vor dem Stoß

$$\mathbf{p} ; E = pc \quad E\text{-Satz: } pc = p'c + p_s c_s \quad (17.46)$$

Photon nach dem Stoß Phonon

$$\mathbf{p}' ; E' = p'c \quad p\text{-Satz: } \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_s \quad \mathbf{p}_s ; E_s = p_s c_s .$$

Da $c_s \ll c$, bleibt selbst im günstigsten Fall, nämlich bei $p_s = 2p$ der Energieverlust $p_s c_s$ klein gegen pc . Es ist also $p' \approx p$: Photonen werden auch durch inelastische Gitterstöße praktisch nur umgelenkt. Es gilt dann sehr genau die Diskussion des Compton-Effekts (Abschn. 13.1.3), die dort nur ein Spezialfall war, hier jedoch alle Fälle umfasst: Der Ablenkwinkel des Photons hängt mit Phononenimpuls und -energie zusammen wie

$$p_s = 2p \sin \frac{\vartheta}{2} , \quad E_s = p_s c_s = E \frac{c_s}{c} . \quad (17.47)$$

Diese Photon-Phonon-Streuung (**Brillouin-Streuung**) setzt also sehr monochromatisches Licht voraus, da die Streulinien nur um $\Delta\omega \approx \omega(c_s/c)$ frequenzverschoben sind, d. h. um etwa ein Millionstel. Mit Laserlicht ist sie gut nachweisbar und ist eines der wichtigsten Werkzeuge zur Aufklärung des Phononenspektrums. Auch **Neutron-Phonon-Streuung** wird dazu angewandt. Alle Beziehungen bleiben gleich, wenn man für das Neutron den de Broglie-Wellenvektor \mathbf{k} ansetzt. Der einfachste Fall von Brillouin-Streuung bei nicht zu tiefer Temperatur wirkt sich so aus, dass die eingestrahlte Frequenz, die ebenfalls an Unreinheiten gestreut wird (**Tyndall-Streuung**) und daher auch in den seitlich aufgestellten Spektrographen gelangt, von zwei beiderseits verschobenen Linien begleitet ist, die der Erzeugung bzw. Vernichtung eines Phonons entsprechen.

17.2.5 Wärmeleitung in Isolatoren

In Metallen wird die Wärme ähnlich wie der Strom überwiegend durch Leitungselektronen transportiert, in **Isolatoren** durch Phononen. Wie der Wärmeinhalt eines Festkörpers als Energie seines Phononengases aufgefasst werden kann, so erfolgt die Wärmeleitung darin als Transportphänomen im Phononengas. Wärmeenergie kann in einem Gas auf zwei Arten transportiert werden: Als Zusatzenergie eines strömenden Gases, das heißer ist als seine Umgebung, wie im Wärmeaustauscher, und als Energiediffusion im ruhenden Gas unter Aufrechterhaltung eines Temperaturgradienten, wobei das Gas an jedem Ort im thermischen Gleichgewicht mit seiner Umgebung steht. Nur der zweite Vorgang ist Wärmeleitung und erlaubt Definition einer Wärmeleitfähigkeit als Proportionalitätskonstante zwischen Wärmestromdichte \mathbf{u} und T -Gradient.

Wir erinnern an die Ableitung in Abschn. 5.4.6. Beiderseits im Abstand einer freien Weglänge von einer Fläche im Gas haben die Gasteilchen die

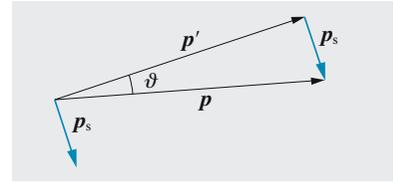


Abb. 17.43. Bei der Streuung eines Photons mit Erzeugung oder Impulsänderung eines Phonons (Brillouin-Streuung) wird die Photonenenergie kaum beeinflusst. Es gilt daher $p_s = 2p \sin(\vartheta/2)$

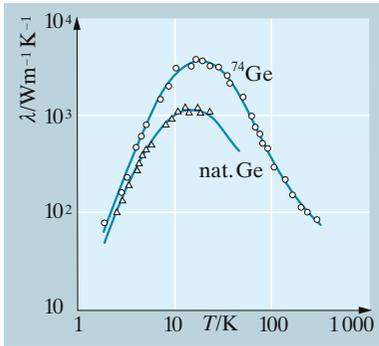


Abb. 17.44. Wärmeleitfähigkeit von natürlichem Ge (20% ^{70}Ge , 27% ^{72}Ge , 8% ^{73}Ge , 37% ^{74}Ge und 8% ^{76}Ge) und angereichertem ^{74}Ge (96%). (Daten nach T. H. Geballe und G. W. Hull)

Anzahldichte, die Temperatur und die Geschwindigkeit n_1, T_1, v_1 bzw. n_2, T_2, v_2 . Dann ist

Teilchenstromdichte

$$\text{von links } j_{\rightarrow} = \frac{1}{6}n_1v_1 \quad \text{von rechts } j_{\leftarrow} = \frac{1}{6}n_2v_2$$

$$\text{Differenz } j_{\rightarrow} - j_{\leftarrow} = 0 \quad \text{also } n_1v_1 = n_2v_2.$$

Energiestromdichte

$$\text{von links } u_{\rightarrow} = \frac{1}{6}n_1v_1\frac{3}{2}kT_1 \quad \text{von rechts } u_{\leftarrow} = \frac{1}{6}n_2v_2\frac{3}{2}kT_2$$

$$\text{Differenz } u_{\leftarrow} - u_{\rightarrow} = \frac{1}{4}nvk(T_2 - T_1) \quad \text{also } \lambda = \frac{1}{2}n\overline{v}kl$$

$$(\text{weil } T_2 - T_1 = 2l \text{ grad } T).$$

(17.48)

Das trifft ebenso gut für Phononen zu. n ist ihre Anzahldichte, v die Schallgeschwindigkeit. Die freie Weglänge l wird begrenzt durch Stöße mit Kristallitgrenzen und Verunreinigungen, und durch Phonon-Phonon-Stöße. Wenn die Gitterschwingungen völlig harmonisch wären, d. h. das Gitterpotential völlig elastisch ($U = U_0 + ax^2$), gäbe es keine Wechselwirkung zwischen Phononen, ebenso wenig wie zwischen Photonen im Vakuum. Die Wechselwirkungen der nichtlinearen Optik kommen erst in einem anharmonischen Medium wie einem Kristall bei hoher Lichtintensität zustande. Entsprechend beruhen die Phonon-Phonon-Stöße auf der Anharmonizität der Gitterschwingungen.

Nicht alle Phonon-Phonon-Stöße führen zur Begrenzung der freien Weglänge. Der normale Stoß zweier Phononen mit \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 , bei dem ein drittes mit $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ entsteht, beeinflusst offenbar weder den Impuls- noch den Energiefluss. Nur wenn das Gitter auch einen Impuls aufnimmt, kann sich thermisches Gleichgewicht mit dem Phonongas einstellen. Das Gitter kann nur einen Impuls der Form $\hbar\mathbf{g}$ aufnehmen, wo \mathbf{g} ein Vektor des reziproken Gitters ist. Solche Stöße mit der Impulsbilanz $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{g}$ heißen **Umklapp-Prozesse** (Peierls, 1929). l in (17.48) ist in reinen Kristallen die freie Weglänge für Umklapp-Prozesse. Nur bei sehr tiefen Temperaturen ist l durch die Kristallabmessungen gegeben. Dann steckt die T -Abhängigkeit von λ in der Phononendichte n , die nach Debye wie T^3 geht (Abschn. 17.2.1; n ist ja proportional der spezifischen Wärme). Wenn bei höheren Temperaturen die Phonon-Phonon-Stöße entscheidend für l werden, nimmt λ i. Allg. wieder ab, weil die Stoßwahrscheinlichkeit sehr schnell mit T ansteigt (mehr Stoßpartner, höhere Bereitschaft des Gitters zum „Umklappen“). Bei amorphen Festkörpern wie Gläsern nimmt λ auch bei höheren Temperaturen zu, denn diese unterkühlten Flüssigkeiten bestehen aus sehr kleinen quasikristallin geordneten Molekülschwärmen, deren Abmessungen immer entscheidend für die freie Weglänge sind.

17.3 Metalle

Die Wissenschaft von den Metallen ist deren Bedeutung gemäß ein riesiges Gebiet, aus dem wir hier nur wenig vom klassischen und vom Quantenstandpunkt beleuchten können.

17.3.1 Das klassische Elektronengas

Metalle sind chemisch dadurch gekennzeichnet, dass sie leicht Elektronen abgeben, d. h. durch die geringe Ionisierungsenergie ihrer Valenzelektronen. Elektronenabgabe an OH-Gruppen befähigt Metalle und Metalloxide zur Basenbildung. Auch die typischen physikalischen Eigenschaften der Metalle – hohe elektrische und Wärmeleitfähigkeit, Undurchsichtigkeit, Reflexion und Glanz – beruhen auf der leichten Abtrennung der Valenzelektronen. *P. Drude* und *H. A. Lorentz* nahmen an, die Valenzelektronen im Kristallverband des Metalls gehörten nicht mehr bestimmten Atomen an, sondern bewegten sich als Gas freier Elektronen durch das Gitter der Rumpfnionen. Dieses Bild erklärt sehr vieles erstaunlich gut, versagt aber in anderen Punkten vollkommen. Ein freies Elektron müsste nach dem Gleichverteilungssatz eine kinetische Energie $\frac{3}{2}kT$ haben, zur spezifischen Wärme des Metalls also außer den $25 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ des Rumpfnionengitters weitere 12 J/mol beitragen (1 Valenzelektron/Atom vorausgesetzt). Warum das nicht der Fall ist, zeigt erst die Fermi-Statistik (Abschn. 17.3.2).

Unter den Leistungen der **Drude-Lorentz-Theorie** ragt die Deutung des Ohm- und des Wiedemann-Franz-Gesetzes hervor. Die Elektronen fliegen mit thermischer Geschwindigkeit v , bis sie nach der mittleren freien Weglänge l , zeitlich also nach der freien Flugdauer $\tau = l/v$ durch einen Stoß abgelenkt werden. Im elektrischen Feld E wird ein Elektron mit $\dot{v} = -eE/m$ entgegengesetzt zur Feldrichtung beschleunigt. Innerhalb der freien Flugdauer erhält es so eine gerichtete Zusatzgeschwindigkeit $v = -eE\tau/m$, die sich der viel größeren, aber völlig ungeordneten thermischen Geschwindigkeit überlagert. Beim Stoß wird diese Zusatzgeschwindigkeit i. Allg. wieder verloren gehen, und das Elektron muss von vorn anfangen. Im Mittel driftet es also mit $v_d = -\frac{1}{2}eE\tau/m$ entgegen der Feldrichtung. Seine Beweglichkeit (Geschwindigkeit des Ladungstransports/Feld) ist $\mu = \frac{1}{2}e\tau/m$, die Leitfähigkeit von n Elektronen/m³

$$\sigma = en\mu = \frac{1}{2} \frac{e^2 n \tau}{m} \quad (17.49)$$

hängt nicht vom Feld ab (**ohmsches Gesetz**).

Für die Wärmeleitfähigkeit λ des Elektronengases können wir die für einatomiges Gas abgeleitete Formel (17.48) übernehmen:

$$\lambda = \frac{1}{2} n v l k . \quad (17.50)$$

Das Verhältnis von Wärme- und elektrischer Leitfähigkeit wird

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{m k v^2}{e^2} = \frac{3 k^2}{e^2} T . \quad (17.51)$$

Das ist genau das von *Wiedemann* und *Franz* empirisch gefundene Gesetz (6.86).

Für die Größen von σ und λ ist entscheidend, was unter den Stößen zu verstehen ist, die den freien Flug der Elektronen beenden. Als Stoßpartner oder **Streuzentren** kommen zu allererst die Rumpfnionen und andere

freie Elektronen in Betracht. Das würde eine freie Weglänge von wenigen Å bedeuten, die viel zu klein ist. Warum die Rumpffionen, solange sie völlig periodisch angeordnet sind, und die anderen freien Elektronen nicht streuen, wird später klar werden. Nur Störungen der Periodizität wirken als Streuzentren. Solche Störungen beruhen

- auf der Einlagerung von Fremdteilchen,
- auf Abweichungen vom idealen Gitterbau: Kristallitgrenzen, Dislokationen (wie sie bei mechanischer Deformation entstehen) usw.,
- auf thermischen Gitterschwingungen, die ebenfalls momentane Abweichungen von den idealen Abständen zwischen Gitterteilchen bedingen.

Alle diese Faktoren beeinflussen die freie Flugdauer τ und damit die Beweglichkeit μ . Dagegen ist die Elektronenkonzentration n für Metalle praktisch temperaturunabhängig. Ein Metall leitet also umso besser, je reiner, je monokristalliner und spannungsfreier und je kälter es ist. Der **Restwiderstand** bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt (nicht mit dem Supraleitungswiderstand zu verwechseln) ist daher ein hervorragendes Reinheitskriterium. Ist andererseits das Metall so rein, dass die Dislokationen die überwiegenden Streuzentren sind, so kann man es als **Dehnungsmessstreifen** zur raschen Messung mechanischer Spannungen benutzen.

Wir untersuchen die Streuung von Elektronen durch geladene Teilchen im Gitter (Anzahldichte N , Ladung Ze), genauer durch Stellen im Gitter, die einen anderen Ladungszustand haben als das normale Gitter. Diese Streuung verläuft ganz ähnlich wie die rutherfordische Ablenkung von α -Teilchen durch Kerne. Eine erhebliche Ablenkung erfolgt nur bei sehr nahem Vorbeiflug am Streuzentrum, d. h. bei sehr kleinem Stoßparameter p . Man kann die Grenze zwischen Streuung und Nichtstreuung bei einem Ablenkwinkel von 90° ansetzen. Ihm entspricht nach (13.19) ein Stoßparameter p , der gleich dem minimalen Abstand $2a$ ist, bis auf den das Elektron mit der Energie E bei zentralem Stoß an das Streuzentrum herankäme:

$$p_{\text{kr}} = 2a = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 E}.$$

Die Energie des Elektrons ist thermische Energie, also

$$p_{\text{kr}} = \frac{2Ze^2}{12\pi\epsilon\epsilon_0 kT}.$$

Der Streuquerschnitt ist $A = \pi p_{\text{kr}}^2$, die freie Flugdauer

$$\tau = \frac{l}{v} = \frac{1}{NA} \frac{1}{\sqrt{3kT/m}}$$

und die Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m} n \tau = \frac{18\pi}{\sqrt{3}} \frac{\epsilon^2 \epsilon_0^2 k^{3/2} T^{3/2} n}{m^{1/2} Z^2 e^2 N}. \quad (17.52)$$

Diese Zunahme der Leitfähigkeit mit $T^{3/2}$ ist allerdings nur selten zu beobachten. Bei den Halbleitern wird sie überdeckt durch die viel stärkere $e^{-E/(kT)}$ -Abhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration n , bei den Metallen findet man meist gerade die umgekehrte Abhängigkeit $\sigma \sim T^{-3/2}$. Sie beruht auf der Streuung von Elektronen an Verzerrungen des Gitters durch die thermischen Schwingungen, m. a. W. auf der Streuung durch Elektron-Phonon-Stöße. Eine Streuung an Objekten, deren Häufigkeit proportional zu T ist, muss nach (17.49) zu einer solchen $T^{-3/2}$ -Abhängigkeit der Leitfähigkeit führen. Bedenkt man, dass die Phononen die zu T proportionale thermische Schwingungsenergie des Gitters repräsentieren und dass die typische Energie eines Phonons unabhängig von T , nämlich $h\nu_{\text{gr}}$ ist, so ergibt sich ihre Anzahl in der Tat proportional zu T .

17.3.2 Das Fermi-Gas

Klassisch betrachtet können freie Elektronen einander zwar räumlich nicht beliebig nahe kommen, aber es besteht kein Grund, weshalb sie nicht exakt den gleichen Impuls haben sollten. Das quantenmechanische Elektron dagegen erfüllt den ganzen verfügbaren Raum als Ψ -Welle und hat dadurch die Möglichkeit, anderen Elektronen ihr Verhalten mitzudiktieren. Die Unschärferelation zeigt, dass eine solche gegenseitige Impulsbeeinflussung tatsächlich vorliegt. Elektronen seien z. B. in einem Kristall mit der linearen Abmessung L eingesperrt. Die größtmögliche Unschärfe in der Angabe ihres Ortes ist dann ungefähr $\Delta x = L$. Dieser maximalen Ortsunschärfe ist eine minimale Impulsunschärfe $\Delta p = h/L$ zugeordnet. Dieses Impulsintervall beansprucht jedes Elektron für sich und lässt kein anderes hinein (es sei denn eines mit entgegengesetztem Spin). Die strenge quantenmechanische Rechnung bestätigt dieses Resultat: Zeichnet man die möglichen Werte des Impulsvektors \mathbf{p} für ein derart eingesperrtes Elektron auf, dann bilden sie ein Punktgitter, dessen Punkte einen Abstand h/L voneinander haben. Jeder Elektronenzustand nimmt somit ein Volumen h^3/L^3 im **Impulsraum** ein. Jede solche Zelle h^3/L^3 kann höchstens mit zwei Elektronen entgegengesetzten Spins besetzt werden. Dieses Punkt- oder Zellengitter hat zunächst mit dem Kristallgitter nichts zu tun (auch nicht mit dem reziproken Gitter) und würde auch für einen völlig homogenen dreidimensionalen Potentialtopf auftreten.

Im Impulsraum mit den Koordinaten p_x, p_y, p_z entspricht einem bestimmten Wert W der kinetischen Energie ($E = p^2/(2m)$) eine Kugeloberfläche vom Radius $p = \sqrt{2mE}$. Wenn man N Elektronen möglichst energiesparend unterbringen will, was der wirklichen Verteilung bei tiefen Temperaturen entspricht, muss man die Zustände von innen, d. h. von kleinen p -Werten an auffüllen. N Elektronen brauchen $N/2$ Zellen, d. h. ein Impulsraumvolumen $\frac{1}{2}Nh^3/L^3$. Dies Volumen bildet eine Kugel, genau wie die Erde aus ähnlichen Gründen. Ihr Radius, der **Fermi-Impuls** p_F , ergibt sich aus $\frac{1}{2}Nh^3/L^3 = 4\pi p_F^3/3$ zu $p_F = h(3N/(8\pi L^3))^{1/3}$, oder mit der Teilchenzahldichte $n = N/L^3$ zu

$$p_F = h \left(\frac{3}{8\pi} n \right)^{1/3}. \quad (17.53)$$

Dem entspricht die

Fermi-Energie

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3}{8\pi} n \right)^{2/3} . \tag{17.54}$$

Ein Teilchengas, das sich verhält wie beschrieben, heißt **entartetes** oder *Fermi-Gas*. Die Temperatur, die gemäß $kT = E_F$ der Fermi-Energie entspricht, heißt **Entartungstemperatur** T_F . Bei der Temperatur T ist ein Gas entartet, wenn $T \ll T_F$. Für ein Metall mit $n = 10^{22}$ bzw. 10^{23} Elektronen/cm³ ist $E_F = 1,7$ bzw. $7,9$ eV, $T_F = 1\,970$ bzw. $9\,120$ K.

Die Anzahl der Zustände mit Energien zwischen E und $E + dE$ entspricht dem Volumen einer Kugelschale im p -Raum. Am einfachsten erhält man diese Anzahl oder vielmehr räumlich-energetische Dichte durch Auflösen von (17.54) nach n und Differenzieren nach E :

$$dn = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} dE . \tag{17.55}$$

Bei $T = 0$ sind alle diese Zustände unterhalb E_F besetzt, darüber keiner mehr. Bei höheren Temperaturen schwimmt die scharfe Grenze bei E_F : Der „Fermi-Eisblock“ schmilzt etwas ab, Elektronen wechseln von Zuständen kurz unterhalb E_F in solche kurz oberhalb über. Dieser Vorgang erfasst eine energetische Breite kT beiderseits E_F . Genauer ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand mit der Energie E besetzt ist, als

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(kT)} + 1} \tag{17.56}$$

(Herleitung s. Abschn. 19.3.2). Diese Funktion hat den Wert $\frac{1}{2}$ bei $E = E_F$ und geht beiderseits antisymmetrisch gegen 0 bzw. gegen 1. Der Abstand der Funktion von diesen asymptotischen Werten verringert sich bei einem Schritt kT in E -Richtung jedes Mal etwa um den Faktor e . Erst für $kT \gg E_F$ geht die Verteilung in die Boltzmann-Verteilung des nichtentarteten Gases über, vorher ist sie völlig anders. Man kann für $kT \ll W_F$ höchstens von einem Boltzmann-ähnlichen „Fermi-Schwanz“ reden, der über dem Fermi-Eisblock steht, wobei aber die Energie von W_F an gezählt werden muss: Für $E - E_F \gg kT$ wird $f(E) \sim e^{-(E-E_F)/(kT)}$. Alle diese Aussagen gelten auch noch, wenn den Teilchen nicht wie im freien Elektronengas alle Energien mit der Zustandsdichte (17.55) zur Verfügung stehen, sondern wenn einige Energiebereiche verboten sind wie im Bändermodell (Abschn. 17.3.5).

Im nichtentarteten Gas haben alle Teilchen eine mittlere Energie, die um kT (genauer $\frac{3}{2}kT$) höher ist als bei $T = 0$. Im Fermi-Gas gilt dies nur für die Teilchen, die in einem Streifen der Breite kT unterhalb der Fermi-Energie saßen, d. h. für einen Bruchteil kT/E_F aller Teilchen (genauer ist dieser Bruchteil im kT -Streifen $\frac{3}{2}kT/E_F$, denn die Zustandsdichte ist dort größer als im Durchschnitt). Die spezifische Wärme des Fermi-Gases ist

www.

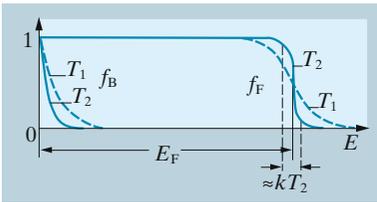


Abb. 17.45. Fermi-Verteilung und Boltzmann-Verteilung bei entsprechenden Temperaturen, aber sehr verschiedenen Teilchenzahlen. Diese Verschiedenheit der Anzahldichten erzwingt gerade den Übergang von der Boltzmann- zur Fermi-Verteilung

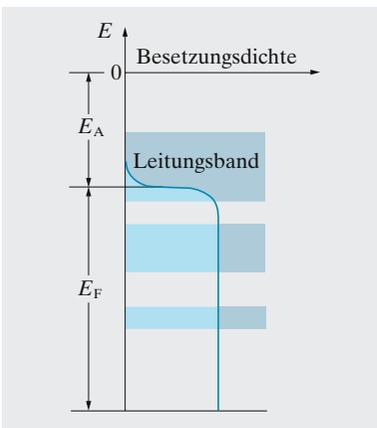


Abb. 17.46. Die Fermi-Kurve regelt den Bruchteil besetzter Zustände, unabhängig davon, ob im betrachteten E-Bereich Zustände liegen oder nicht

demnach nicht $\frac{3}{2}k/m$, sondern nur $\frac{3}{2}k^2T/(E_F m)$, oder bei exakter Ausintegration der Fermi-Schwänze (Sommerfeld-Theorie der spezifischen Wärme)

$$c_{\text{el}} = \frac{\pi^2 kT}{4 E_F m} k. \quad (17.57)$$

Der Beitrag des Elektronengases zur spezifischen Wärme eines Metalls ist also einige hundertmal kleiner als die nach *Dulong-Petit* erwarteten 25 J/mol. Damit ist das alte Paradoxon aufgeklärt, dass ein Metall nur die spezifische Wärme seiner Ionenrümpfe zeigt. Nur bei sehr tiefen Temperaturen (um 1 K und darunter), wo der Gitterbeitrag wie T^3 verschwindet, kann man den Elektronenbeitrag überhaupt messen. Man erhält dann die erwartete Abhängigkeit

$$c = c_{\text{el}} + c_{\text{gitt}} = \gamma T + \delta T^3$$

und kann aus dem gemessenen γ die Fermi-Energie E_F nach (17.57) bestimmen. Hierbei ist allerdings manchmal eine **thermische effektive Masse** der Elektronen anzunehmen, die von der üblichen Masse abweicht. Das liegt an der Wechselwirkung der Elektronen mit dem Gitter, mit Phononen und mit anderen Elektronen. So dicht gepackte Elektronen üben eine kräftige Coulomb-Wechselwirkung aufeinander aus, die das Fermi-Gas eigentlich zu einer Fermi-Flüssigkeit macht. Die Bewegung eines Elektrons beeinflusst alle anderen. Es treten kollektive Bewegungen der Fermi-Flüssigkeit auf (Abschn. 17.3.4). Entscheidenden Einfluss gewinnen diese Effekte bei sehr tiefen Temperaturen. Flüssiges ^3He ist eine Fermi-Flüssigkeit (im Gegensatz zum ^4He , das eine Bose-Flüssigkeit wird: ^3He hat halbzahligen Spin, ist ein Fermion, gehorcht der Fermi-Dirac-Statistik; ^4He hat den Spin 0, ist ein Boson, gehorcht der Bose-Einstein-Statistik).

17.3.3 Metalloptik

Eine Lichtwelle kann in das dichte Elektronengas eines Metalls ebenso wenig eindringen wie eine Radiowelle in das sehr viel dünnere Elektronengas der Ionosphäre. Die Welle wird reflektiert, das Metall zeigt selbst bei rauer Oberfläche den typischen stumpfen Glanz. Es gibt aber eine Grenzfrequenz für diese Reflexion. Sie ist gleich der **Langmuir-Frequenz** des Elektronengases und abhängig von der Teilchenzahldichte n , ebenso wie im Ionosphärenplasma (Abschn. 8.4.2):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon\epsilon_0 m}}. \quad (17.58)$$

Für $n = 10^{28}$ bzw. 10^{29} m^{-3} erhält man $\hbar\omega_0 = 3,5$ bzw. 11,1 eV, entsprechend $\lambda = 340$ bzw. 110 nm. Für ϵ ist nur die Polarisation der Ionenrümpfe maßgebend, denn die freien Elektronen fallen ja gerade bei der Frequenz ω_0 aus. Tatsächlich werden Metalle je nach ihrer Elektronenkonzentration im näheren oder ferneren UV transparent, wenigstens in dünnen Schichten (z. B. Na ab 210 nm). Gleichzeitig verlieren sie auch ihr hohes Reflexionsvermögen. Bei manchen Metallen liegt die Langmuir-Frequenz im

Sichtbaren, z. B. bei Gold im Violetten. Der Ausfall der Violettreflexion lässt Gold gelblich schimmern.

Das Absorptions- und Reflexionsverhalten lässt sich ebenso wie für Isolatoren (vgl. Abschn. 17.2.3) durch eine Dielektrizitätskonstante ε beschreiben. Im elektrischen Feld E bewegen sich freie Elektronen gemäß $m\ddot{x} = -eE$, die Amplitude ihrer Schwingungen im Wechselfeld ist also $x_0 = eE_0/(m\omega^2)$, die Polarisation (Dipolmoment/Volumeneinheit) $P = -nex_0 = -e^2nE_0/(m\omega^2)$, die DK

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{ion}} - \frac{e^2n}{\varepsilon_0m\omega^2} = \varepsilon_{\text{ion}} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right). \quad (17.59)$$

Für $\omega < \omega_0$ ist ε negativ. Hier ist keine Transmission ungedämpfter Wellen möglich. Der Absorptionskoeffizient wird

$$\alpha = \frac{\omega}{c|n|} = \frac{\omega}{c\sqrt{\varepsilon_{\text{ion}}}\sqrt{\omega_0^2/\omega^2 - 1}}.$$

Für $\omega \ll \omega_0$ wird also $\alpha \approx \omega^2/(c\sqrt{\varepsilon_{\text{ion}}}\omega_0)$, d. h. $\alpha \ll \omega/c = \lambda^{-1}$: Die Eindringtiefe einer Lichtwelle ist im typischen Metallbereich nur 0,1 Wellenlänge oder weniger.

Die Bewegungsgleichung, die zu (17.59) führt, setzt völlig freie Elektronen voraus. Dass die Leitfähigkeit überhaupt einen endlichen Wert hat, zeigt aber, dass effektiv eine Reibungskraft wirkt. Man kann sie gemäß der Definition der Beweglichkeit ausdrücken durch $e\dot{x}/\mu$; die vollständige Bewegungsgleichung wird $eE = m\ddot{x} - e\dot{x}/\mu$ oder für ein Sinusfeld $eE_0 = -\omega^2mx_0 + i\omega ex_0/\mu$. (17.59) ist also zu ergänzen zu

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{ion}} + \frac{e^2n}{\varepsilon_0(-m\omega^2 + i\omega/\mu)}$$

oder mit $\mu = \frac{1}{2}e\tau/m$:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_{\text{ion}} + \frac{e^2n}{\varepsilon_0m(-\omega^2 + 2i\omega/\tau)}}. \quad (17.60)$$

Für $\omega \gg \tau^{-1}$ gilt (17.59); für $\omega \ll \tau^{-1}$ erhält man $\varepsilon = \varepsilon_{\text{ion}} + e^2n\tau/(\varepsilon_02i\omega m) = \varepsilon_{\text{ion}} + \sigma/(\varepsilon_0i\omega)$. Der Absorptionskoeffizient (Imaginärteil von Brechzahl/Wellenlänge) wird

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega\lambda^2}} = \sqrt{\frac{\sigma\omega}{\varepsilon_0}} \frac{1}{c}. \quad (17.61)$$

Diese Formel stammt schon von *P. Drude*. Bei nicht zu guten Leitern folgt eine solche Drude-Absorption bei niederen Frequenzen ($\omega \ll \tau^{-1}$) auf die des freien Elektronengases. Bei Halbleitern und Isolatoren (ω_0 klein) mit geringer Störstellenkonzentration (τ groß) kann die Drude-Absorption die „freie“ ganz verdrängen.

17.3.4 Elektrische und Wärmeleitung

Die Drude-Lorentz-Theorie der elektrischen Leitfähigkeit (Abschn. 17.3.1) hat ihre brauchbaren Resultate durch einige sehr kühne Annahmen erkaufte: Die Elektronen bemerken bei ihrer Driftbewegung im elektrischen Feld die Anwesenheit der Ionenrümpfe praktisch nicht und werden nur an Störungen des regulären Gitters gestreut; ebenso wenig beeinflussen sie einander bei ihrer Driftbewegung. Kupfer bei Zimmertemperatur hat die Leitfähigkeit $\sigma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$. Daraus folgt nach (17.49) eine Beweglichkeit von etwa $10^{-2} \text{ m}^2/\text{V s}$ und eine freie Weglänge von etwa 100 Å. Bei 10 K ist die Leitfähigkeit mehr als 100-mal größer, d. h. die Leitungselektronen driften etwa 10^4 Atomabstände ohne Stoß. Bei Heliumtemperaturen ergeben sich bei einigen Metallen freie Weglängen von einigen cm.

Dass die Elektronen mit dem idealen Ionenrumpfgitter praktisch keine Energie austauschen, folgt aus ihren Welleneigenschaften (Abschn. 17.3.5). Die anderen Leitungselektronen selbst bilden aber keineswegs ein streng periodisches Gitter. Dass Elektron-Elektron-Stöße so selten sind, beruht teilweise auf der Abschirmung ihrer Ladungen und vor allem auf den Eigenschaften der Fermi-Kugel.

Ähnlich wie sich in einer Elektrolytlösung jede Ladung mit einer Wolke von Gegenionen umgibt, deren Abmessungen durch die Debye-Hückel-Länge $d_{\text{DH}} = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 kT / (e^2 n)}$ gegeben werden (Abschn. 6.4.6), so versammelt jede positive Ladung in einem Metall einen Überschuss von Leitungselektronen um sich, jede negative erzeugt ein partielles Elektronenvakuum. Im Ausdruck für den Radius dieser Wolke ist einfach kT durch die Fermi-Energie E_F zu ersetzen. Außerdem kommt ein Faktor $\sqrt{2/3}$ dazu, denn es handelt sich um eine kugelsymmetrische Anordnung, nicht um eine ebene wie in Abschn. 6.4.6. Die DK ϵ_{ion} berücksichtigt nur die Polarisation der Ionenrümpfe:

$$d_a = \sqrt{\frac{2\epsilon_{\text{ion}}\epsilon_0 E_F}{3e^2 n}} \tag{17.62}$$

Natürlich darf d_a nicht viel kleiner sein als die Gitterkonstante, denn das würde ja heißen, dass die Elektronen fest an die Ionen gebunden sind. Tatsächlich folgt mit dem Wert von W_F nach (17.54) $d_a \approx \sqrt{r_0 n^{-1/3}}$. Der Abschirmradius liegt zwischen dem Bohr-Radius r_0 und dem mittleren Elektronenabstand $n^{-1/3}$. Das Feld der Zentralladung reicht nur bis in etwa diesen Abstand d_a , weiter außen wird es von der Gegenelektronenwolke verzehrt. Der Stoßquerschnitt zwischen zwei Leitungselektronen oder einem Elektron und einem Ion reduziert sich also von dem klassischen Wert $A \approx (e^2 / (4\pi\epsilon_0 kT))^2 \approx 2 \cdot 10^5 \text{ Å}^2$ (Abschn. 17.3.1) auf etwa 10 Å^2 .

Man kann die Bildung der abschirmenden Wolken auch so beschreiben: Die Leitungselektronen bilden kein ungeordnetes Gas, sondern ein angenähertes Kristallgitter. Ihre Dichte ist maximal in der Nähe der Ionen. Sie halten sich gegenseitig auf Abstand und bewegen sich meist nur kollektiv durch das Gitter. Solche Kollektivbewegungen der Elektronen sind auch die **Plasmaschwingungen**, die zur Lichtabsorption führen (vgl. Abschn. 17.3.3, 8.4.2). Ein eingeschossenes Elektron oder auch Photon regt

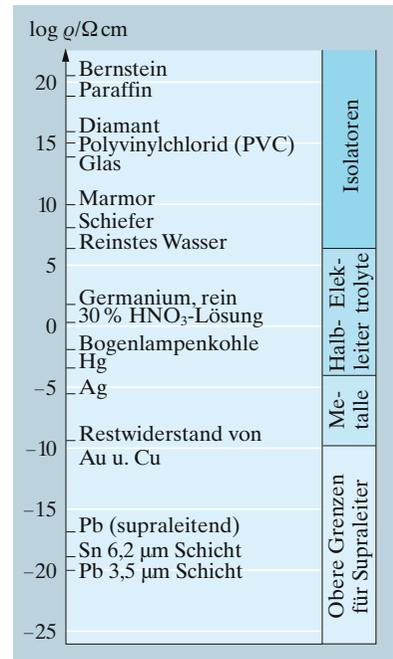


Abb. 17.47. Der spezifische Widerstand ρ ist eine der Stoffeigenschaften, die den riesigsten Größenordnungsbereich überspannt. Die angegebenen ρ -Werte für Supraleiter sind obere Grenzen; in einzelnen Fällen ist der Widerstand unmessbar klein

bei der Reflexion vom Metall oder beim Durchgang durch dieses Plasmaschwingungen an, vor allem solche mit der Langmuir-Frequenz ω_0 . Das ganze Fermi-Gas schwappt dabei relativ zum Gitter hin und her. Diese Schwingungen sind gequantelt: Das Elektron kann nur ganzzahlige Vielfache des Energiequants $\hbar\omega_0$ an die Plasmaschwingungen abgeben. Man misst eine Franck-Hertz-ähnliche Kurve des Energieverlustes bei Reflexion oder Durchgang. Ein Plasmaschwingungsquant heißt auch **Plasmon**. Auch die Impulsverhältnisse bei der Reflexion, d. h. die eventuelle Ungleichheit von Ausfalls- und Einfallswinkel, lassen sich nach dem Impulssatz beschreiben, wenn man dem Plasmon einen Impuls $\hbar\mathbf{k}$ zuordnet, wo \mathbf{k} der Wellenvektor der Plasmaschwingung ist.

Für die elektrische Leitung liefert das Bild der Fermi-Kugel (also letzten Endes Unschärferelation + Pauli-Prinzip) eine weitere Einschränkung der Häufigkeit von Elektron-Elektron-Stößen. Ein Elektron (A) sei im Feld beschleunigt worden, schwebe also in der energetischen Höhe ε über der Oberfläche der Fermi-Kugel, und versuche diese Überschussenergie im Stoß an ein anderes Elektron (B) abzugeben. Nach dem Stoß sollen sich also die Elektronen beide etwa auf einer mittleren Energie befinden. Am wirkungsvollsten wäre offenbar der Stoß mit einem energiearmen Elektron B tief im Innern der Fermi-Kugel, aber die Zustände, die den resultierenden Energien entsprechen, sind bestimmt alle besetzt. Möglich sind nur Stöße, die beide Elektronen an die Oberfläche der Fermi-Kugel oder ein wenig höher führen. Außerdem muss der Gesamtimpuls erhalten bleiben. Mögliche Stoßpartner liegen in einem Gebiet der Fermi-Kugel, das geometrisch so definiert ist: Man ziehe von dem Punkt p_A ein Bündel von Geraden auf die Fermi-Kugel zu und markiere auf jeder Geraden den Punkt p_B , der längs der Geraden ebenso weit von der Kugeloberfläche entfernt ist wie p_A . Es entsteht eine Art Mondsichel, die aber fast geradlinig begrenzt ist und so einer Kugelkalotte mit der Höhe $h = p_F\varepsilon/(2E_F)$ sehr nahe kommt. Das Volumen einer solchen Kalotte ist $\pi p_F h^2$, macht also einen Bruchteil $3\varepsilon^2/(16E_F^2)$ der ganzen Fermi-Kugel aus. Um diesen Faktor ist die Stoßfrequenz zwischen Leitungselektronen reduziert, die freie Weglänge l erhöht. Für ε ist die im Feld gewonnene Energie eEl oder die thermische Energie kT einzusetzen, je nachdem, was größer ist. Im Allgemeinen ist kT viel größer, außer bei sehr hohen Feldern im Fall „heißer Elektronen“. Also ist l um den Faktor $(kT/(eE))^2$ erhöht, und man erhält durch Einsetzen von E_F nach (17.54) und $A \approx d^2$ nach (17.62)

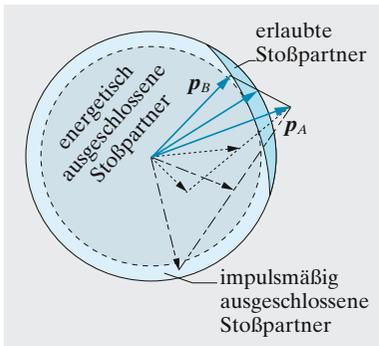


Abb. 17.48. Ein energetisch angehobenes Elektron kann nur mit sehr wenigen Elektronen in der Fermi-Kugel stoßen, weil nach Energie- oder Impulssatz sonst mindestens einer der Endzustände bereits besetzt ist

$$l \approx r_0 \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0 kT} \right)^2 \quad (17.63)$$

(r_0 : Bohr-Radius). Dies ergibt $\sigma \sim l/v \sim T^{-2}$, denn v ist die Fermi-Grenzgeschwindigkeit $v_F = p_F/m$, nicht die klassische thermische Geschwindigkeit $v \sim T^{1/2}$. Der Faktor in Klammern in (17.63) ist bei Zimmertemperatur etwa 1 000, also folgt $l \approx 10^{-2}$ cm. Das ist viel länger als die freie Weglänge für Elektron-Phonon-Stöße, die $l \sim T^{-1}$, d. h. auch $\sigma \sim T^{-1}$ bedingen (Abschn. 17.3.1; dort kam $\sigma \sim T^{-3/2}$ heraus, weil mit $v \sim T^{1/2}$ gerechnet wurde). Der Beitrag der Elektron-Elektron-Stöße überwiegt daher nur bei tiefen Temperaturen. So entsteht die **Grüneisen-Kurve** (Abb. 17.49), die für alle Metalle den Widerstand in einheitlicher Weise recht gut beschreibt, wenn man die Temperatur als Bruchteil der Debye-Temperatur Θ ausdrückt, den Widerstand als Bruchteil von R_Θ , dem Widerstand bei der Debye-Temperatur:

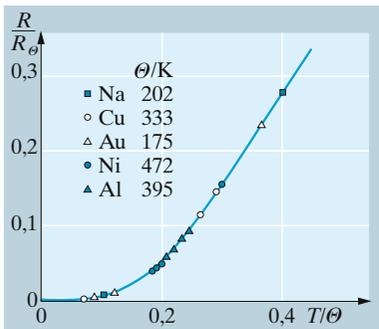


Abb. 17.49. Reduzierte Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Metallen (Grüneisen-Kurve). Θ Debye-Temperatur, R_Θ Widerstand bei $T = \Theta$. (Daten nach Bardeen)

$$R = R_\Theta \frac{1}{\Theta^2/T^2 + a\Theta/T} \quad (a \approx 0,15).$$

In einem sehr reinen Metall wird auch die Wärmeleitung überwiegend durch Leitungselektronen besorgt, bei einem weniger reinen durch Phononen, ähnlich wie im Isolator. Deshalb ist die Spanne der Wärmeleitfähigkeiten zwischen Metallen, Halbleitern, Isolatoren längst nicht so groß wie die der elektrischen Leitfähigkeit: Das Wiedemann-Franz-Gesetz gilt nicht durchgehend. Bei tiefen Temperaturen überwiegt aber in allen Metallen der Elektronenbeitrag. Hier ergibt sich die Wärmeleitfähigkeit wieder als

$$\lambda = \frac{1}{3} c_{\text{el}} v l$$

(Abschn. 5.4.6 und 17.3.1). Dabei ist $c_{\text{el}} = \pi^2 k^2 T n / (4E_{\text{F}})$ (17.57), und für v ist die Fermi-Geschwindigkeit $v_{\text{F}} = \sqrt{2E_{\text{F}}/m}$ einzusetzen, l ist die freie Weglänge nach (17.63). Andererseits ist die elektrische Leitfähigkeit

$$\sigma = ne\mu = \frac{1}{2} \frac{ne^2}{m} \frac{l}{v_{\text{F}}},$$

sodass wieder das Verhältnis

$$\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{e^2 E_{\text{F}}}{m v_{\text{F}} k^2 T v_{\text{F}}} \approx \frac{e^2}{k^2 T}$$

folgt. Das ist überraschend, wenn man bedenkt, wie verschieden die einzelnen Größen klassisch und quantenmechanisch definiert sind.

Begrenzung der freien Weglänge durch Elektronen- und Phonon-Stöße ergibt freie Weglängen, die mit fallender Temperatur wachsen. Erst wenn l bei sehr tiefen Temperaturen durch Kristallitgrößen, Abstand von Fremdlionen o. Ä. bestimmt wird, macht sich die Abhängigkeit $c_{\text{el}} \sim T$ allein geltend und führt zu $\lambda \sim T$. Unter den gleichen Umständen wird die elektrische Leitfähigkeit temperaturunabhängig.

17.3.5 Energiebänder

Wir haben die Valenzelektronen in einem Metall als freie Elektronen aufgefasst, die sich ungestört durch das periodische Potential der Rumpffionen bewegen. Dies ist eine unvollkommene Näherung, denn eine gewisse Wechselwirkung mit dem Ionengitter besteht doch, wenigstens bei gewissen Impulsen des Elektrons. Man muss ja bedenken, dass die Bewegung eines Elektrons mit der Energie E und dem Impuls p durch eine ψ -Welle mit der Frequenz $\omega = E/\hbar$, der Wellenlänge $\lambda = h/p$ oder dem Ausbreitungsvektor $k = p/\hbar$ geregelt wird. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons ist $\psi^2(\mathbf{r})$. Wenn die ψ -Welle die Bragg-Bedingung für die Reflexion an irgendwelchen Netzebenen erfüllt, ist keine fortschreitende ψ -Welle mehr möglich, sondern nur eine stehende, überlagert aus einfallenden und reflektierten Wellen. Speziell bei senkrechtem Einfall auf eine Netzebenenchar mit dem Abstand d tritt das ein bei $k = n\pi/d$ oder $p = n\pi\hbar/d$.

Für ein freies Elektron hängen E und p zusammen wie $E = p^2/(2m)$ bzw. $E = \hbar^2 k^2/(2m)$. Dieser parabolische Zusammenhang (Abb. 17.50) wird offenbar bei den kritischen p - oder k -Werten unterbrochen, die Bragg-Reflexion erlauben (dies sind die k -Vektoren, die auf einer Brillouin-Zonengrenze enden). Hier gehen die fortschreitenden Wellen in stehende

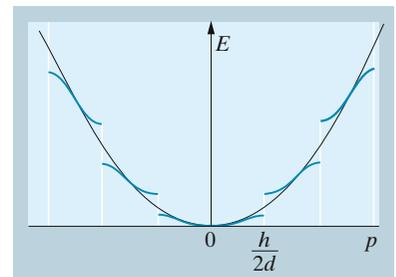


Abb. 17.50. Wechselwirkung mit dem Gitter zerreißt die $W(p)$ -Parabel des freien Elektrons in eine Serie von Energiebändern

über, z. B. für $k = \pi/d$ mit $\lambda = 2d$ (Debye-Grenzwellenlänge). Für solche stehenden Wellen gibt es zwei Hauptphasenlagen: $\psi \sim \sin(\pi x/d)$ und $\psi \sim \cos(\pi x/d)$. Im zweiten Fall ist ψ^2 am Ort der Ionen ($x = 0, d, \dots$) maximal, dazwischen 0, im ersten ist es umgekehrt. Es ist klar, dass die cos-Welle einer niedrigeren Gesamtenergie entspricht, weil sie die Nähe der Rumpfnionen ausnutzt. Der im freien Zustand eindeutig bestimmte E -Wert zu $p = \pi\hbar/d$ spaltet also in zwei Zustände mit erheblich verschiedener Energie auf. Die $E(p)$ -Parabel muss dort aufgeschnitten werden; das eine freie Ende wandert abwärts, das andere aufwärts. So entsteht eine Folge von meist etwa S -förmigen Bögen, die erlaubte Energiezustände bedeuten, mit dazwischenliegenden Lücken, den verbotenen Zonen. Die Breite der erlaubten Energiebänder ergibt sich schon aus diesem einfachen Bild typischerweise zu $p^2/(2m) = \pi^2\hbar^2/(2md^2) \approx 3 \text{ eV}$ (bei $d \approx 3 \text{ \AA}$). Für die Breite der **verbotenen Zonen**, d. h. die Differenz der potentiellen Energien von sin- und cos-Welle, erwartet man die Größenordnung $e^2/(4\pi\epsilon_0 d)$, was entsprechend der Bohr-Bedingung (Abschn. 14.1) ebenfalls einige eV ausmacht.

Die Energiebänderstruktur ist natürlich abhängig von der Kristallstruktur und der Ausbreitungsrichtung der Elektronenwelle. Brillouins Zonenkonstruktion zeigt, wo in einer gegebenen Richtung der Sprung von einem Band zum nächsten erfolgt. Die $E(\mathbf{k})$ -Fläche bleibt keine Rotationsfläche. Dementsprechend sind auch die Impulszustände in den verschiedenen Richtungen verschieden weit aufgefüllt, nämlich dort am weitesten, wo die $E(\mathbf{k})$ -Fläche am tiefsten liegt. Die Füllungsgrenze im p - bzw. k -Raum, die für das freie Elektronengas eine Fermi-Kugel war, wird im Gitter zu einer **Fermi-Fläche** mit oft sehr komplizierter Topologie. Feinere Einzelheiten des elektromagnetischen und optischen Verhaltens der Metalle können auf Grund der Topologie der Fermi-Fläche und der Energiebänder verstanden werden. Dazu gehören vor allem die Abhängigkeit des Widerstandes vom Magnetfeld (**Magnetoresistanz**), die **Zyklotronresonanz** der Leitungselektronen und -löcher, und der **de Haas-van Alphen-Effekt**, d. h. die Quantenoszillationen der magnetischen Suszeptibilität als Funktion des angelegten Magnetfeldes (ähnlich wie beim **Josephson-Wechseleffekt**, Abschn. 17.7). Umgekehrt bieten diese Effekte den wichtigsten experimentellen Zugang zu den Einzelheiten der Bänderstruktur.

Die Existenz von Energiebändern folgt auch aus einer ganz anderen Betrachtung. Wir sind vom Gas freier Elektronen ausgegangen und haben die Störung durch das periodische Rumpfnionengitter eingebaut. Man kann auch vom anderen Grenzfall, nämlich von isolierten Metallatomen (Rumpfnion + Valenzelektron) ausgehen und diese allmählich aneinander rücken. Dann beginnen die Elektronen von einem Atom zum anderen zu tunneln, d. h. ihre Aufenthaltsdauer bei einem bestimmten Atom wird begrenzt, z. B. auf τ . Nach der Unschärferelation für Energie und Zeit müssen sich dann die ursprünglich scharfen Energiezustände der Elektronen verbreitern um $\Delta E \approx \hbar/\tau$. Im Grenzfall, wenn den Elektronen, halbklassisch gesprochen, bei jedem bohrschen Umlauf, also alle $8\pi md^2/h \approx 10^{-15} \text{ s}$ das Durchtunneln gelingt, wird sicher $\Delta E \approx \hbar^2/(8\pi md^2)$. Die Elektronen tieferer Schalen haben sehr viel kleinere Tunnelwahrscheinlichkeit und entsprechend kleinere Termverbreiterung (Abb. 17.51). Es besteht

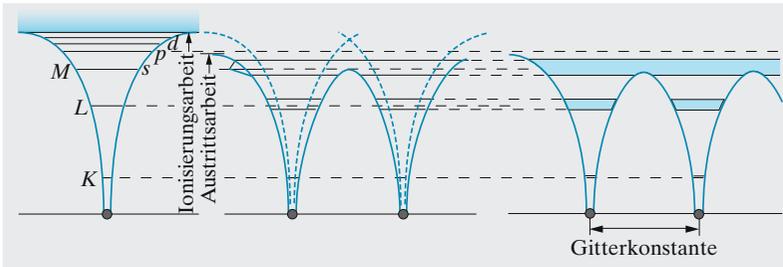


Abb. 17.51. Wenn die Einzelatome einander näherkommen, überlagern sich nicht nur ihre Potentiale zu einer Galerie von Rundbögen, sondern die ursprünglich scharfen Elektronenzustände verbreitern sich. Im rechten Teilbild ist rechts die Atomkette fortgesetzt zu denken, links liegt die Kristalloberfläche. Dort kann man auch die Austrittsarbeit für die Elektronen ablesen

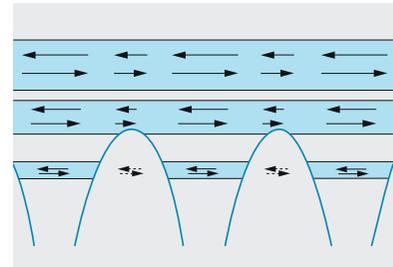


Abb. 17.52. Elektronenbänder im periodischen Potentialgebirge. Die Pfeile deuten die Beschleunigungsrichtung der Elektronen im äußeren Feld an: Die effektive Masse wechselt ungefähr in der Bandmitte ihr Vorzeichen

eine gewisse Entsprechung zwischen den Zuständen des freien Gitterbausteins und den Energiebändern des Kristalls. Sie wird dadurch kompliziert, dass nahe benachbarte Energiezustände oft überlappende Bänder liefern, die praktisch wie ein einheitliches Band wirken. Jedes Einzelband enthält ebenso viele Elektronenzustände wie die N Bausteine, die zum Gitter zusammengetreten sind, nämlich im Allgemeinen N Elektronenzustände. Dies folgt auch im Bild des fast freien Elektronengases: Die Zustände entsprechen den Phasenraumzellen der Größe h^3 , von denen die Fermi-Statistik ausgeht. Wenn in einer Raumrichtung N_x Gitterbausteine hintereinander liegen (in den anderen N_y, N_z , sodass $N_x N_y N_z = N$), was einer Abmessung $a = N_x d$ des Kristalls entspricht, ist die Impulsbreite $\Delta p = \pi \hbar / d$ des ganzen Bandes in N_x Zustände mit dem Abstand $\pi \hbar / a$ unterteilt. Damit ergibt sich auch die folgende wichtige Tatsache: In einem voll besetzten Band ist, wie in der Fermi-Kugel des freien Elektronengases, zu jedem Impuls auch der entgegengesetzte vertreten. Ein solches Band erlaubt deshalb keine Bewegung des Schwerpunkts aller Elektronen, z. B. keinen Stromfluss.

17.3.6 Elektronen und Löcher

Das Rumpfgitter bietet den Elektronen ein bestimmtes Spektrum von Energiebändern an. Wie weit dieses Spektrum mit Elektronen angefüllt ist, hängt von der Wertigkeit der Gitterbausteine ab. Chemische Verbindungen oder auch Reinelemente, deren Bausteine kovalent gebunden sind, besitzen als isolierte Moleküle einen vollständig, d. h. durch das bindende Elektronenpaar besetzten Zustand. Höher gelegene Zustände sind frei. Bei der Zusammenlagerung zum Kristall entsteht aus dem Zustand des bindenden Elektronenpaares meist ein vollbesetztes Band, über dem ganz leere Bänder liegen. Wenn die verbotene Zone dazwischen sehr breit ist, entsteht ein **Isolator**, sonst ein **Halbleiter** (der Übergang ist stetig). **Metalle** sind dadurch gekennzeichnet, dass in ihren Atomen der Ausbau einer bestimmten Elektronenschale beginnt oder jedenfalls längst nicht abgeschlossen ist (*s*-Schale bei den Alkali, *d*-Schale bei den Übergangsmetallen, *p*-Schale bei einigen anderen). Selbst bei den Erdalkalien, wo die *s*-Schale

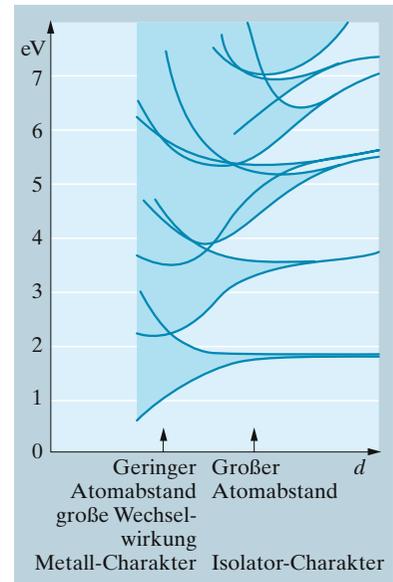


Abb. 17.53. Mit abnehmender Gitterkonstante d verbreitern sich die Elektronenzustände. Aus einem Isolator kann man durch hinreichende Kompression einen metallischen Leiter machen und umgekehrt (Rechnungen von Slater nach der Methode des selbstkonsistenten Feldes von Hartree-Fock). (Aus W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

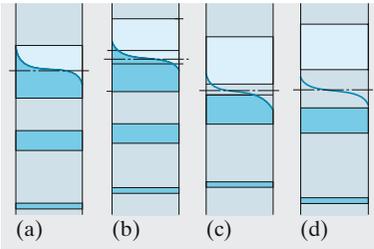


Abb. 17.54a–d. Bänderschema für (a) ein Metall mit einem Valenzelektron (Alkali), (b) ein Metall mit zwei Valenzelektronen (Erdalkali), (c) einen Halbleiter, (d) einen Isolator

abgeschlossen ist, liegt (bis auf die ersten beiden Perioden) die d -Schale energetisch so nahe, dass der Einbau oft alternierend erfolgt. Beim Zusammenbau zum Gitter überlappen sich die Bänder, zu denen sich diese benachbarten Schalen verbreitern. Das entstehende Band ist natürlich nur teilweise mit Elektronen gefüllt.

Wie bewegen sich Elektronen in Energiebändern? Wir sprechen hier nicht von dem Fall, dass das Elektron im gleichen Impulszustand, d. h. in einem der N Zustände eines Bandes bleibt und sich mit dem zu diesem Zustand gehörigen Impuls durch das Gitter bewegt. Interessanter sind die Fälle, wo das Elektron seinen Zustand ändert, speziell energetisch und impulsmäßig im Band aufsteigt. Das ist natürlich nur möglich, wenn weiter oben freie Zustände verfügbar sind. Ferner muss eine beschleunigende Kraft wirken, z. B. in einem elektrischen Feld. Das Elektron reagiert allerdings entsprechend seiner Lage im $E(k)$ -Diagramm oft recht eigenartig auf eine solche Kraft. Als Geschwindigkeit eines Elektrons ist die Gruppengeschwindigkeit eines ψ -Wellenpaketes anzusehen, aufgebaut aus Wellen eines engen Bereichs um den gewählten k -Wert. Diese Gruppengeschwindigkeit ist nach (4.62) $v_g = \partial\omega/\partial k = \hbar^{-1} \partial E/\partial k$. Für das freie Elektron mit $E = p^2/(2m) = \hbar^2 k^2/(2m)$ folgt sofort $v_g = p/m$, d. h. die übliche Geschwindigkeit. Beim Kristallelektron ist die Lage komplizierter. Wir betrachten speziell eine Beschleunigung \dot{v}_g und die dazu nötige Kraft F . Es ist

$$\dot{v}_g = \hbar^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E}{\partial k} = \hbar^{-1} \frac{\partial}{\partial k} \frac{\partial E}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial t} = \hbar^{-1} \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \dot{k}.$$

Nun ist, wie üblich, die Kraft gleich der zeitlichen Änderung des Impulses: $F = \dot{p} = \hbar \dot{k}$. Es folgt

$$\dot{v}_g = \hbar^{-2} \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} F = \frac{1}{m_{\text{eff}}} F,$$

$$\boxed{m_{\text{eff}} = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right)^{-1}}. \quad (17.64)$$

Die **effektive Masse** m_{eff} regelt die Reaktion des Kristallelektrons auf eine Kraft. Wenn die Bandbreite, wie oben nach der Näherung des freien Elektrons geschätzt, $\Delta E \approx \hbar^2/(8md)$ ist, wird natürlich m_{eff} gleich der üblichen Elektronenmasse. Das ist keineswegs allgemein der Fall. Das Elektron reagiert ja nicht als Einzelteilchen auf die Kraft, sondern es muss das ganze Gitter mitbeeinflussen. Das ist sozusagen der Preis, den es zahlen muss, um bei konstantem k so ungehindert durchs Gitter fliegen zu können. Wenn es seinen Impuls ändern soll, spielt das ganze Gitter mit. Tabelle 17.9 gibt einige effektive Massen an.

Am unteren Bandrand ist die Krümmung $\partial^2 E/\partial k^2$ i. Allg. stärker als bei der freien Parabel. Dementsprechend ist m_{eff} kleiner als die freie Masse m . Bei höheren Energien ist in unserem ganz schematischen Bild (Abb. 17.50) die alte Parabel fast erhalten geblieben, es wird $m_{\text{eff}} \approx m$. Dann folgt aber vielfach ein Wendepunkt von $E(k)$. Dort ist die Krümmung Null, also $m_{\text{eff}} = \infty$. Ganz oben im Band schlägt m_{eff} auf *negative* Werte um. Solche Elektronen beschleunigen sich in Gegenrichtung zur wirkenden Kraft.

Tabelle 17.9. Band-Band-Abstände, Elektron- und Loch-Beweglichkeiten und effektive Massen der Leitungselektronen für einige Halbleiter

	$\Delta E/\text{eV}$	$\mu^-/\text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$	$\mu^+/\text{cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$	m_{eff}/m
Diamant	5,4	1 800	1 200	–
SiC	3,0	–	–	–
Si	1,17	1 300	500	–
Ge	0,74	4 500	3 500	0,11
GaAs	1,52	–	–	0,07
GaSb	0,81	4 000	1 400	0,042
InAs	0,36	33 000	460	0,024
InSb	0,23	77 000	750	0,015
PbS	0,29	550	600	–
AgCl	3,2	50	–	0,35
KBr	–	100	–	0,43
CdS	2,58	–	–	–
ZnO	3,44	–	–	–
ZnS	0,91	–	–	–

Wenn das Band bis fast zum oberen Rand gefüllt ist, spricht man einfacher von den wenigen unbesetzten Zuständen in diesem Band, den **Defektelektronen** oder **Löchern**. Sie verhalten sich in jeder Hinsicht entgegengesetzt wie das dort fehlende Elektron: Sie haben eine positive Ladung und entgegengesetzte Werte von W und k wie das Elektron, das dort hingehörte; die effektive Masse ändert mit $\partial^2 E/\partial k^2$ ebenfalls ihr Vorzeichen, d. h. Löcher am oberen Bandrand haben wieder positive Masse. Ein Loch, gezogen von der positiven Kraft eE , beschleunigt sich im normalen Sinn, ein Elektron mit positiver effektiver Masse, gezogen von der negativen Kraft $-eE$, ebenfalls. Beide liefern einen *positiven* Beitrag zum Strom. Wie groß diese Beträge sind, hängt natürlich von den Konzentrationen und Beweglichkeiten der Elektronen und Löcher ab.

17.4 Halbleiter

Die Informationstechnik hat heute die Energietechnik an Umfang und Bedeutung weit überholt. Sie lebt von den Halbleitern, in deren Funktion wir nur einige grundsätzliche und einige spezielle Blicke werfen können.

17.4.1 Reine Halbleiter

Die meisten Halbleiter sind binäre Verbindungen aus einem p -wertigen und einem $8-p$ -wertigen Element. Man klassifiziert sie nach den Wertigkeiten bzw. nach den Spalten des Periodensystems, aus denen die Elemente stammen (Beispiele: ZnS ist II-VI-Halbleiter, GaAs ist III-V-Halbleiter, SiC ist IV-IV-Halbleiter; ähnlich wie SiC verhalten sich reines Si und Ge). Wichtig sind außerdem die Metalloxide wie Cu_2O , die nicht in diese Klassifikation fallen.

Das Schema der Energiezustände für Elektronen im reinen Halbleiter ist sehr einfach: Ein **Valenzband** ist vom **Leitungsband** getrennt durch eine **verbotene Zone** der Breite W_0 . Dies bestimmt die elektrischen und optischen Eigenschaften. Leitungselektronen können thermisch (durch Phonon-Elektron-Stoß) oder optisch (durch Photon-Elektron-Stoß, manchmal unter Mitwirkung von Phononen) angeregt, d. h. über die verbotene Zone gehoben werden. Im Leitungsband seien n Elektronen/m³, im Valenzband ebenso viele Löcher/m³. Wir schreiben die Raten von **Anregung** und **Rekombination** auf, d. h. die Anzahlen gehobener bzw. zurückfallender Elektronen pro m³ und s. Die Anregung, ob thermisch oder optisch, schöpft aus dem Vollen und gießt ins Leere. Ihre Rate hängt daher nicht von n ab. Die Rekombination hat als bimolekulare Reaktion zwischen Elektron und Loch eine Rate proportional n^2 . Die zeitliche Änderung von n ist also

$$\dot{n} = a - \beta n^2. \quad (17.65)$$

a ist umso größer, je höher T und (bei optischer Anregung) je höher die Lichtintensität ist. Im Gleichgewicht ist $\dot{n} = 0$, also

$$n = \sqrt{\frac{a}{\beta}}. \quad (17.66)$$

Dabei spielt es zunächst noch keine Rolle, ob es sich um ein echtes thermisches Gleichgewicht handelt, oder nur um eine ausgeglichene Bilanz zwischen optischer Anregung und Rekombination. Im Fall der reinen thermischen Anregung ergibt sich aus der Fermi-Verteilung sofort ein Zusammenhang zwischen a und β .

Bei $T = 0$ ist das Valenzband voll mit Elektronen besetzt, das Leitungsband ist leer, d. h. die Fermi-Energie E_F liegt in der verbotenen Zone. Bei höheren Temperaturen werden Elektronen ins Leitungsband gehoben und die gleiche Anzahl Löcher bildet sich im Valenzband. Diese Symmetrie bedeutet bei gleicher Zustandsdichte in beiden Bändern, dass E_F genau in der Zonenmitte liegt (obwohl sich natürlich nicht kontrollieren lässt, dass dort $f = \frac{1}{2}$ ist). Da $E_0 \gg kT$ ist (sonst handelt es sich nicht um einen Halbleiter, sondern um ein Halbmetall), lassen sich die Besetzungsverhältnisse mit Elektronen im Leitungsband und Löchern im Valenzband durch einen Boltzmann-Schwanz beschreiben: Der Besetzungsgrad in der Höhe ε über dem Leitungsbandrand, der seinerseits um $E_0/2$ über der Fermi-Grenze liegt, ist

$$f(\varepsilon) = \exp\left(-\frac{E_0/2 + \varepsilon}{kT}\right). \quad (17.67)$$

Entsprechendes gilt für die Löcherbesetzung im Valenzband mit nach unten gezählter Energie. Wenn die Näherung quasifreier Elektronen anwendbar ist, ergibt sich aus (17.55) die energetische Zustandsdichte im Band

$$dN = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon. \quad (17.68)$$

Von diesen Zuständen ist der Bruchteil $f(\varepsilon)$ besetzt, also ist die gesamte Anzahldichte der Leitungselektronen

$$\boxed{\begin{aligned} n &= \int_0^\infty f(\varepsilon) dN = N e^{-E_0/(2kT)} && \text{mit} \\ N &= 2 \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} = 3 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} && \text{(bei 300 K).} \end{aligned}} \quad (17.69)$$

Im Valenzband sitzen ebenso viele Löcher. Das Produkt $n^2 = N^2 e^{-E_0/(kT)}$ hängt nicht von der Lage der Fermi-Grenze ab, behält seinen Wert also auch, wenn durch **Dotierung** (Abschn. 17.4.2) die Löcherdichte (p) verschieden von der Elektronendichte n wird. Dann gilt also immer noch

$$np = N^2 e^{-E_0/(kT)}. \quad (17.70)$$

Bei gegebenem Produkt np ist die Summe der Trägerkonzentrationen $n + p$ am kleinsten, wenn $n = p$ ist. Dies ist im reinen Halbleiter der Fall, kann aber auch im gestörten Halbleiter erreicht werden, wenn die n - bzw. p -liefernden Störstellen einander kompensieren. Ein solcher **verunreinigungskompensierter Halbleiter** hat keine höhere Leitfähigkeit als der reine, während einseitig verunreinigte Halbleiter oft um viele Größenordnungen besser leiten. Für $n = p$ folgt

$$n = N e^{-E_0/(2kT)} \quad (17.71)$$

(Arrhenius-Kurve der Eigenhalbleitung), oder durch Vergleich mit (17.66)

$$a = \beta N^2 e^{-E_0/(kT)}. \quad (17.72)$$

Dieser Zusammenhang zwischen a und β gilt nur für die thermische Anregung. Für die optische mit einer Intensität I ist $a \sim I$, also bei $n = p$

$$n \sim \sqrt{I}. \quad (17.73)$$

Da die **Beweglichkeit** i. Allg. viel schwächer von T abhängt, geben die Formeln für n und p auch die Leitfähigkeit $\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$. Die Beweglichkeit ist meist höher als in Metallen, besonders hoch für 3-5-Verbindungen (bis zu Größenordnungen von $10 \text{ m}^2/\text{V s}$). Begrenzend wirken bei sehr reinen Halbleitern die Stöße mit Phononen, andernfalls die Stöße mit Gitterfehlern.

Die Breite der verbotenen Zone kommt auch als Grenzfrequenz der Absorption oder **Absorptionskante** $\omega_{\text{gr}} = E_0/\hbar$ zum Ausdruck. Kleinere Frequenzen werden nicht absorbiert (abgesehen von sehr viel kleineren, die Gitterschwingungen anregen), bei ω_{gr} setzt oft sehr steil die Absorption ein. Manchmal tritt allerdings E_0 nicht direkt als Absorptionskante in Erscheinung. Man muss nämlich beachten, dass ein Photon der hier interessierenden Frequenz einem Elektron zwar eine erhebliche Energie, aber nur einen minimalen Impuls übergeben kann (Photon: $p = h/\lambda = \Delta E/c$; Elektron: $p = mv = \sqrt{2m \Delta E}$; Phonon: $p = h/\lambda = \Delta E/c_s$; $c_s \ll c$, $\Delta E \ll mc^2$). Daher führen optische Übergänge

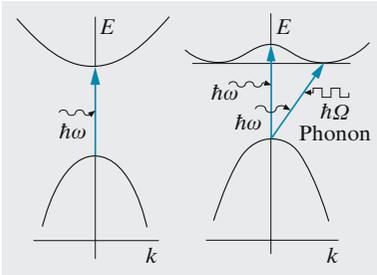


Abb. 17.55. Direkte und indirekte Bandübergänge. Der optische Übergang verläuft praktisch immer senkrecht im $E(k)$ -Diagramm, der thermische kann sich minimale Energiedifferenz aussuchen, weil Phononen die Impulsbilanz ausgleichen können

im E, k -Diagramm praktisch senkrecht nach oben, wenn kein Phonon beteiligt ist. Die Ränder von Valenz- und Leitungsband liegen aber durchaus nicht immer beim gleichen k -Wert. Die optische Absorptionskante kann also einem höheren E -Wert entsprechen als das aus der Eigenleitung folgende E_0 , denn thermische, durch Phononen vermittelte Übergänge nutzen immer den minimalen energetischen Abstand aus.

Wenn $E_0 > 3,1$ eV, ist der Halbleiterkristall farblos-durchsichtig. Wenn dagegen die Absorptionskante einen Teil des sichtbaren Spektrums (vom Violetten angefangen) abschneidet, schimmert der Kristall im reflektierten Licht in der entsprechenden Farbe, im durchgehenden Licht in der Komplementärfarbe. Bei $E_0 < 1,5$ eV wird das ganze sichtbare Spektrum absorbiert, der Kristall hat metallähnlichen Schimmer. Vielfach entsteht die Färbung aber nicht durch **Grundgitterabsorption**, sondern durch Absorption oder Streuung an Verunreinigungen. Übergangsmetalle im an sich farblosen Al_2O_3 (Korund) färben die verschiedenen Edelsteine außer Diamant; kolloides Gold in Glas streut nach *Rayleigh* überwiegend im Roten als Rubinglas.

17.4.2 Gestörte Halbleiter

Jede Störung des Idealgitters kann zusätzliche Energiezustände für Elektronen erzeugen, die oft in der verbotenen Zone liegen. Solche Störungen sind

- nichtstöchiometrische Zusammensetzung;
- Einbau von Fremtteilchen anstelle regulärer Gitterteilchen (**Dotierung**);
- unbesetzte Gitterplätze; die entsprechenden Teilchen können von vornherein fehlen (Nichtstöchiometrie) oder zum Rand hin ausgewandert sein (**Schottky-Fehlstellen**);
- Zwischengitterteilchen; diese Teilchen können von vornherein im Überschuss vorhanden gewesen sein (Nichtstöchiometrie) oder sie können aus Gitterplätzen ausgewandert sein (**Frenkel-Fehlstellen**);
- Kristallitgrenzen und Grenzen des ganzen Kristalls;
- **Versetzungen (Dislokationen)**;
- unvollständige Ordnung des ganzen Gitters, das im Extremfall zum Zufallsnetz des amorphen Halbleiters wird.

Diese Fehlstellen werden systematischer in Abschn. 17.5 diskutiert. Hier betrachten wir einen besonders durchsichtigen Fall, nämlich den Einbau eines Atoms falscher Wertigkeit auf einen regulären Gitterplatz, z. B. eines P- oder B-Atoms in ein Si- oder Ge-Gitter.

Das P-Atom stellt nicht vier Elektronen zur Bindung bereit wie das Si, sondern fünf. Es passt sich so gut es kann in das umgebende Gitter ein, sättigt also mit vier seiner Elektronen die vier Elektronen zu Paaren ab, die ihm seine Si-Nachbarn entgegenstrecken. Auf dem kompletten und neutralen Gitterhintergrund, der sich hauptsächlich durch seine DK ϵ vom Vakuum unterscheidet, sitzt das fünfte Elektron beim P-Atom wie das Elektron beim H-Atom. Allerdings sind die Bohr-Bahnradien in diesem

wasserstoffähnlichen System um den Faktor ε vergrößert, die Termenergien um den Faktor ε^2 verkleinert. Statt 13,6 eV ist die Ionisierungsenergie nur 0,1 eV oder noch kleiner, d. h. nicht viel größer als kT bei Zimmertemperatur. Das Überschusselektron sitzt in einem flachen, beim P lokalisierten Term, dem **Donatorterm**, aus dem es leicht thermisch ins Leitungsband befreit werden kann, um viele Größenordnungen leichter als eines der Bindungselektronen. Genau umgekehrt *fehlt* beim B ein Elektron an der vollen Bestückung. Ein Loch ist wasserstoffähnlich an einen **Akzeptorterm** gebunden und kann leicht ins Valenzband ionisiert werden.

Bei hinreichender Verunreinigung mit P oder As wird also ein Si- oder Ge-Kristall *n*-leitend, durch B, Al oder Ga *p*-leitend. Schon sehr geringe Konzentrationen genügen, denn die Eigenleitung ist fast um den Faktor $e^{-E_0/(2kT)} \approx 10^{-10}$ benachteiligt. Im m^3 seien D Donatoren und A Akzeptoren eingebaut. d Donatoren haben noch ihre Elektronen, a Akzeptoren ihre Löcher. Im übrigen gebe es n Leitungselektronen und p Valenzlöcher – alles auf den m^3 bezogen. Die Ladungsbilanz verlangt dann

$$n + A - a = p + D - d \tag{17.74}$$

(ionisierte Donatoren bzw. Akzeptoren sind positiv bzw. negativ geladen). Damit ist nicht gesagt, dass alle $D - d$ in den Donatoren fehlenden Elektronen im Leitungsband zu finden sind. Dies ist nur der Fall, wenn keine Akzeptoren vorhanden, d. h. Leitungsband und Donatoren ganz unter sich sind. Dann gilt die zu (17.71) analoge Beziehung

$$n = \sqrt{ND}e^{-E_d/(2kT)} \tag{17.75}$$

E_d ist der Abstand (Donator–Leitungsbandrand). Wenn Akzeptoren da sind, hat man drei Gleichgewichte zu beachten:

	Anregung	Rekombination	
Valenzband–Leitungsband	η	$= \beta n p$	(17.76)
Donatoren–Leitungsband	γd	$= \alpha n (D - d)$	
Akzeptoren–Valenzband	δa	$= \varepsilon p (A - a)$	

Eine zu Abschn. 17.4.1 analoge Betrachtung zeigt, dass $\gamma/\alpha = Ne^{-E_d/(kT)}$ und $\delta/\varepsilon = Pe^{-E_a/(kT)}$.

Es sei $A \ll D$. Bei tiefen Temperaturen sind fast alle Donatoren noch besetzt: $d \approx D$. Die wenigen n im Leitungsband zwingen nach (17.70) so viele Löcher ins Valenzband, dass die Akzeptoren sich fast ganz leeren müssen: $a \ll A$, folglich nach (17.76) $p = \delta a/(\varepsilon A)$. Wenn dann $p \ll D$, was sicher zutrifft, heißt die Ladungsbilanz $n + A = D - d = \gamma D/(\alpha n)$. Jetzt kommt es darauf an, ob n kleiner ist als A oder nicht. Für $n \ll A$ wird $n = \gamma D/(\alpha A) = NDA^{-1}e^{-E_d/(kT)}$, für $n \gg A$ wird $n = \sqrt{\gamma D/\alpha}$, was mit (17.75) identisch ist. Der Übergang zwischen beiden Fällen erfolgt bei $T = E_d/k \cdot \ln(ND/A^2)$. Bei noch höheren Temperaturen wird schließlich $d \ll D$, denn bei $n \gg A$ muss $D - d = n$ einmal den Wert D erreichen, und zwar für $T = E_d/k \cdot \ln(N/D)$. Von dort ab lautet die La-

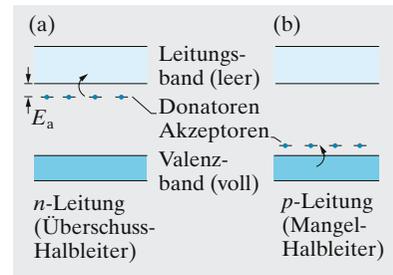


Abb. 17.56a,b. Bänderschema eines Halbleiters mit Donatoren bzw. Akzeptoren

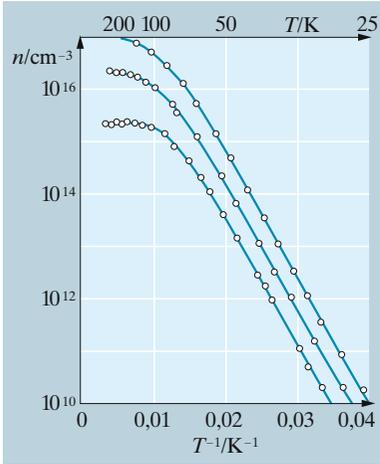


Abb. 17.57. Leitungselektronenkonzentration in Si-Einkristallen mit verschiedener As-Dotierung (Daten nach Morin und Maita). Arrhenius-Auftragung $\ln n(T^{-1})$

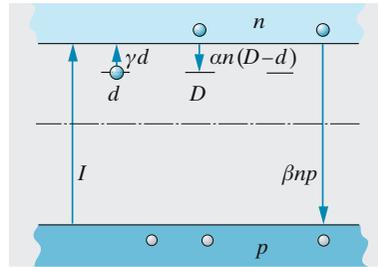


Abb. 17.58. Vereinfachtes Modell eines photoleitenden oder lumineszierenden Halbleiters mit Elektronentraps der Konzentration D , Ladungsträgerkonzentrationen n im Leitungsband, p im Valenzband, d in den Traps. Die angegebene Richtung der Übergänge entspricht dem Transport von Elektronen

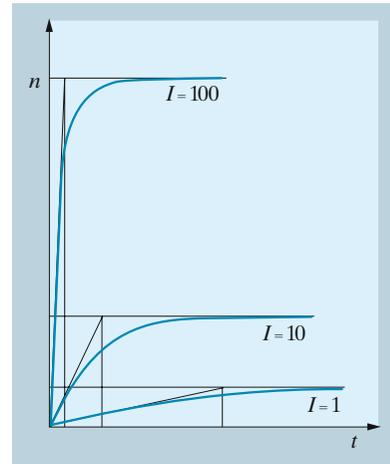


Abb. 17.59. Anklängen der Leitungselektronenkonzentration eines Photoleiters bei verschiedenen Anregungsintensitäten I nach dem Modell Abb. 17.58 für $n \ll d \ll D$

dungsbilanz einfach $n = D$: Alle Donatorelektronen sind im Leitungsband.

Abbildung 17.57 zeigt Kurven dieses Typs. Dieser $n(T)$ -Verlauf ist aber nur einer unter vielen, die das Modell erlaubt. Vielfach ergibt sich auch der Band-Band-Faktor $e^{-E_0/(kT)}$ oder $e^{-E_0/(2kT)}$.

Bandstrukturen wie in Abb. 17.56 kommen auf vielfache Weise zustande und spielen auch in anderen Halbleitertypen, z. B. photoleitenden und lumineszierenden Kristallen eine große Rolle. Wenn die Zustände unter dem Leitungsband nicht von vornherein mit Elektronen besetzt geliefert werden, nennt man sie **Haftstellen** oder **Traps**. Entsprechend können Löchertraps nahe am Valenzband liegen. Die Ladungsbilanz lautet dann mit den gleichen Bezeichnungen wie oben

$$n + d = p + a .$$

Das zeitliche Verhalten einer photoleitenden **CdS-Zelle** im **Belichtungsmesser** oder der Lumineszenzschicht einer **Fernsehröhre** hängt entscheidend von solchen Traps ab.

Wir betrachten ein sehr einfaches Modell (Abb. 17.58). Elektronen können durch Lichteinstrahlung mit der Rate I ($\text{m}^{-3} \text{s}^{-1}$) ins Leitungsband gehoben werden. Bevor sie mit den gleichzeitig im Valenzband entstandenen Löchern rekombinieren (Rate βnp), werden sie i. Allg. wiederholt von Traps eingefangen: Einfangrate $an(D - d)$, Ausheizrate γd . Bei nicht zu hohem T sind die meisten Elektronen eingefangen ($n \ll d$), bei nicht zu starkem Licht sind die Traps trotzdem nur schwach besetzt ($d \ll D$). Die Ladungsbilanz heißt dann $p = d$. Zur Zeit $t = 0$ beginne man mit der Lichteinstrahlung, vorher war $n = d = p = 0$. Die Traps verzögern das An-

klingen von n . Im stationären Zustand muss $I = \beta n p$ und $\alpha n D = \gamma d$ sein, also

$$n_{\text{gl}} = \sqrt{\frac{\gamma I}{\alpha \beta D}}, \quad d_{\text{gl}} = p_{\text{gl}} = \sqrt{\frac{\alpha D I}{\beta \gamma}}. \quad (17.77)$$

Diese Trägerkonzentration, hauptsächlich in d und p angelegt, wird bei der Erzeugungsrate I in der Zeit

$$\tau = \frac{d}{I} = \sqrt{\frac{\alpha D}{\beta \gamma I}} \quad (17.78)$$

aufgebaut. n und damit der **Photostrom** steigen in diesem Fall nicht proportional zur Lichtintensität, die $\sim I$ ist, sondern nur wie \sqrt{I} .

Je mehr Traps da sind, desto kleiner bleibt der stationäre Photostrom und desto langsamer erreicht er sein stationäres Niveau. Tiefe Traps mit ihrem kleinen γ wirken sich hier besonders stark aus, indem sie fast alle Elektronen abfangen. Ähnlich verhält sich das Abklingen des Photostroms und der Rekombination $\beta n p$, die bei der Fernsehröhre für die Lichtemission verantwortlich ist (in diesem Fall erfolgt die Anregung nicht durch Licht, sondern durch Elektronenstoß). Lage und Anzahl der Traps bestimmen also die technisch wichtigen Eigenschaften dieser Halbleiter.

17.4.3 Halbleiter-Elektronik

Wenn die klassische Elektronenröhre gegen die **Halbleiter-Bauelemente** ganz in den Hintergrund getreten ist, liegt das vor allem an dem geringeren Raumbedarf, der größeren Vielseitigkeit, der billigeren Herstellung und der größeren Zuverlässigkeit der Halbleiter. Dass man heute einen ganzen Computer im Volumen einer einzigen Elektronenröhre unterbringt, ist nicht nur ein rein konstruktiver Vorteil. Die Schaltzeit eines Elements kann nicht kürzer sein als die Abmessung seines aktiven Bereichs, dividiert durch c . Halbleiter sind schneller. Der Bereich oberhalb von 100 MHz ist durch sie erst erschlossen worden. Mit der Kompaktheit hängt auch der geringe Energiebedarf zusammen: kein Heizstrom, keine Anheizzeit, Batteriebetrieb und Tragbarkeit mit ihren technisch positiven, ästhetisch meist negativen Folgen.

Einfache **n - p -Übergänge** in verschiedener Ausführung und Kombination können fast jede physikalische Größe in fast jede andere umwandeln: Elektrische Spannung, Strom, Magnetfeld, Licht, Teilchenstrahlung, mechanische Spannung beeinflussen den n - p -Übergang so, dass eine Spannung in ihm auftritt, dass er seinen Widerstand ändert, Licht emittiert, Wärme oder Kälte, sogar mechanische Bewegung hergibt.

Von den zahllosen Halbleiter-Bauelementen, die man in den letzten Jahrzehnten entwickelt hat, können wir hier nur wenige behandeln.

Eine **Kristalldiode** ist ein Halbleiterkristall, dessen beide Hälften verschieden dotiert sind, sodass die eine n -, die andere p -leitet. Das kann z. B. durch Einbau von As bzw. Al in einen Ge-Kristall erreicht

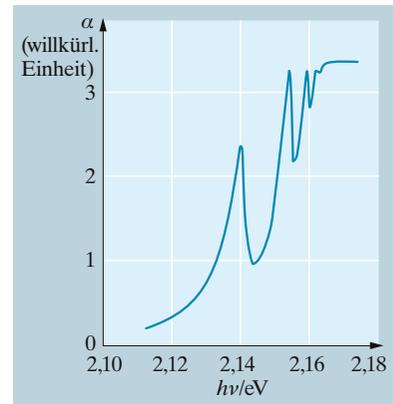


Abb. 17.60. Absorptionsspektrum von Cu_2O bei 77 K (Daten nach *Baumeister*). Der Absorptionskante sind Exzitonenpeaks vorgelagert

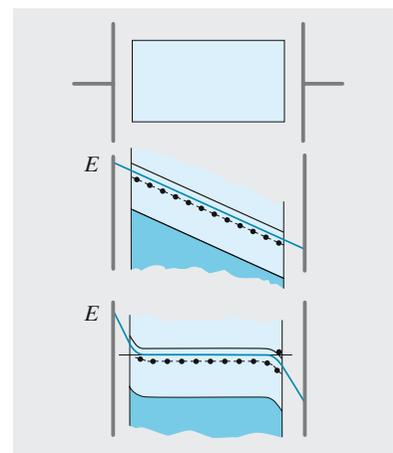


Abb. 17.61. *Oben:* der Halbleiter im elektrischen Feld. *Mitte:* unmittelbar nach Einschalten des Feldes. *Unten:* Gleichgewicht mit Ausbildung der Randschichten und horizontaler Fermi-Grenze

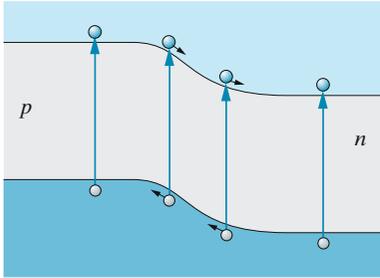


Abb. 17.62. Einbau von Elektronendonatoren hat die Fermi-Grenze angehoben (*n*-Schicht), Einbau von Akzeptoren hat sie gesenkt (*p*-Schicht). Konstanz der Fermi-Grenze (des elektrochemischen Potentials) erzwingt Bandverbiegung, d. h. ein starkes Feld in der Grenzschicht, das Elektronen aus der *n*-Schicht, Löcher aus der *p*-Schicht treibt

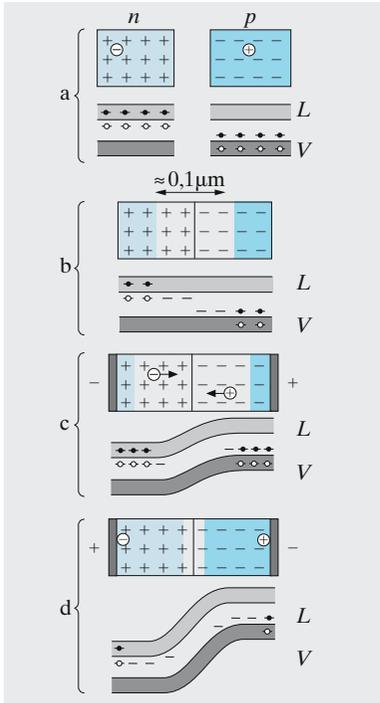


Abb. 17.63a–d. Wirkungsweise der *n-p*-Diode. In der Kontaktfläche zweier verschieden dotierter Halbleiter bildet sich eine Verarmungs-Randschicht, in der die jeweils „typischen“ Träger miteinander rekombinieren (b). Diese Randschicht erweitert sich (c) bzw. sie weht teilweise zu (d), je nach Richtung des angelegten Feldes

werden. Die *n*-leitende Hälfte hat viele Elektronen, wenige Löcher, in der *p*-leitenden Hälfte ist es umgekehrt. An der Grenze („junction“) zwischen beiden besteht ein starkes *n*-Gefälle in der einen und ein *p*-Gefälle in der anderen Richtung. Elektronen diffundieren infolgedessen in den *p*-leitenden Teil und Löcher in den *n*-leitenden, aber nur, bis sich in der entstehenden Doppelschicht ein Feld aufgebaut hat, das weiteren Zustrom von Teilchen verhindert. In diesem Zustand kompensiert der Leitungsstrom im Doppelschichtfeld den Diffusionsstrom im Konzentrationsgefälle, d. h. das elektrochemische Potential $U - kTe^{-1} \ln n$ für Elektronen bzw. $U + kTe^{-1} \ln p$ für Löcher ist überall gleich (Abschn. 6.4.6). In der Übergangsschicht muss also eine steile Stufe des rein elektrischen Potentials von der Höhe

$$U_0 = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_1} = \frac{kT}{e} \ln \frac{p_1}{p_2} \tag{17.79}$$

liegen. 1 und 2 bezeichnen die beiden Hälften des Kristalls.

Ein von außen angelegtes Feld verschiebt das Verhältnis zwischen Feldstromdichte j_{Feld} und Diffusionsstromdichte j_{Diff} , die im feldfreien Gleichgewicht beide den Wert j_0 haben. Praktisch fällt die äußere Spannung U allein an der Übergangsschicht ab, denn deren Widerstand ist sehr viel höher als für den *n*- oder den *p*-leitenden Teil. Die Potentialstufe erhöht oder erniedrigt sich also einfach um U . Für die Ladungsträger, die als Feldstrom gegen diese Stufe anlaufen, senkt bzw. steigert sich damit die Wahrscheinlichkeit hinaufzukommen um den Faktor $e^{\mp eU/(kT)}$, und zwar für *n* wie *p* im gleichen Sinn. Somit wird $j_{\text{Feld}} = j_0 e^{\mp eU/(kT)}$. Die Konzentrationsverteilung und damit der Diffusionsstrom ändern sich dagegen kaum: $j_{\text{Diff}} = j_0$. Damit fließt jetzt ein Gesamtstrom

$$j = j_{\text{Feld}} - j_0 = j_0 (e^{+eU/(kT)} - 1), \tag{17.80}$$

wenn das Feld von der *p*- zur *n*-Seite zeigt (**Flussrichtung**) und

$$j = j_0 (e^{-eU/(kT)} - 1) \tag{17.80'}$$

in umgekehrter Richtung (**Sperrichtung**). Diese **Gleichrichtercharakteristik** ist höchst unsymmetrisch: In Sperrichtung fließt praktisch immer j_0 (Größenordnung 1 mA cm^{-2}), unabhängig von U ; schon bei $U = 1 \text{ V}$ in Flussrichtung wäre j um den Faktor 10^{17} größer.

Man kann die Vorgänge in der Diode auch nach Abb. 17.63 unter Berücksichtigung der Gitterionen deuten, die als Raumladungen übrig bleiben, wenn „ihre“ Ladungsträger abgesaugt werden. In der ***p-n*-junction** entsteht durch Trägerrekombination eine Randschicht, die hauptsächlich ortsfeste Ladungen enthält und daher praktisch keinen Ladungstransport zulässt, wodurch der Weiterbildung der Schicht bereits bei etwa 10^{-7} m eine Grenze gesetzt wird. Legt man nun an die *p-n*-Diode eine Spannung an, derart, dass die verbliebenen beweglichen Ladungen noch weiter von der Grenzfläche abgezogen werden (Abb. 17.63c), so verbreitert sich die schlechtleitende Mittelschicht, d. h. der Widerstand wird größer; polt man die Spannung um (Abb. 17.63d), so schrumpft die Schicht, d. h. der Widerstand wird geringer.

Kristalldioden stellt man je nach Verwendungszweck durch verschiedene Methoden (Eindiffundierenlassen der Dotierung, epitaxiales Aufwachsen, Ätztechniken, Legierungstechniken) und in verschiedenen Formen der n - und p -Bereiche her (Spitzen- und Flächendiode, **p - i - n -Diode** mit dickerer eigenleitender Übergangsschicht, **Schottky**-, **Gunn**-, **Zener**-, **Esaki-Diode** mit besonderen Kennlinienformen, die z. T. auf einem Tunneln der Träger durch die sehr dünne Grenzschicht beruhen). Eine Flächendiode, deren Übergangsschicht so nahe der Oberfläche liegt, dass möglichst viel eingestrahles Licht in ihr absorbiert wird, ist die **Photodiode (Solarzelle)**. Die vom Licht erzeugten n - p -Paare werden vom kräftigen Feld in der Potentialstufe getrennt und vereinigen sich, falls die Beläge der n - und der p -leitenden Schicht durch einen Draht verbunden sind, lieber „hintenherum“, da der Widerstand der Schicht, des Drahtes und selbst eines Verbrauchers kleiner ist als der der Übergangsschicht. Das ist die einfachste, für Messsatelliten, aber auch für den Hausgebrauch auf Si- oder Ge-Basis benutzte Solarzelle. Gründe für den geringen Wirkungsgrad der Umwandlung (knapp 10%) sind offensichtlich: Rekombinationsverluste sind unvermeidlich; bei zu dünner Grenzschicht wird zu wenig absorbiert, bei zu dicker reicht das Feld nicht zur Trennung aus.

Etwa das Umgekehrte spielt sich in der **Elektrolumineszenz-Diode (LED)** ab: Ein angelegtes Feld treibt Elektronen und Löcher, die teilweise an den Elektroden injiziert worden sind, aufeinander zu, bis sie in der Junction unter Lichtemission rekombinieren.

Beim **Transistor** (erfunden 1947; Nobelpreis 1956 für J. Bardeen, W.H. Brattain, W.B. Shockley) schiebt man eine sehr dünne n -leitende Schicht in einen p -leitenden Kristall oder umgekehrt, schaltet also zwei p - n -Junctions, entgegengesetzt gepolt, hintereinander (p - n - p - bzw. n - p - n -Transistor). Auf jede der drei Schichten wird ein Kontakt aufgebracht (Emitter-, Basis-, Kollektorkontakt). Wir betrachten den n - p - n -Flächentransistor (Abb. 17.66). Wenn keine Spannung anliegt, ist die Potentialverteilung im Idealfall symmetrisch; es fließt kein Strom. Nun legen wir das Basispotential etwas höher (Batterie U_1). Die linke n - p -Junction ist dann in Flussrichtung vorgespannt und zieht einen Elektronenstrom, der zur Basis fließen würde, wenn wir nicht gleichzeitig das Kollektorpotential kräftig anheben (Batterie U_2). Da die p -Schicht so dünn ist, sehen die Elektronen fast nur das gegen den Kollektor hin geneigte Potential und folgen ihm größtenteils bis durch die Basis-Kollektor-Grenzschicht. Diese ist ja aber in Sperrichtung gepolt und hat daher einen viel höheren Widerstand als die in Durchlassrichtung gepolte linke Grenzschicht (vgl. die Diodenkennlinie Abb. 17.64). Die praktisch gleichen Ströme durch beide Grenzschichten erzeugen daher an der rechten einen viel größeren Spannungsabfall RI als an der linken. Der Spannungsabfall links ist U_1 plus der überlagerten Wechselspannung U_{\sim} , der viel größere rechts kann großenteils am Außenwiderstand R abgegriffen werden, der nur etwas kleiner sein muss als der Sperrwiderstand der rechten Grenzschicht. Die Eingangsspannung U_{\sim} wird also erheblich verstärkt. Um eine hohe *Stromverstärkung* zu erzielen, muss man etwas anders schalten und argumentieren. Dann kommt es vor allem auf die Raumla-

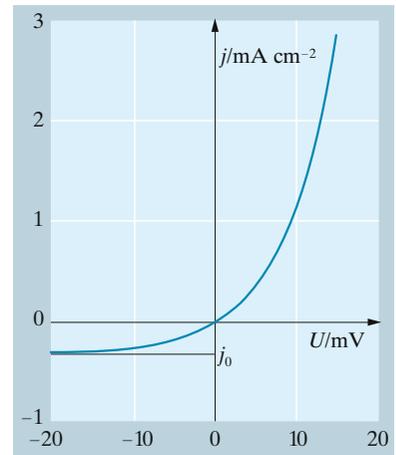


Abb. 17.64. Strom-Spannungs-Kennlinie einer Gleichrichterdiode

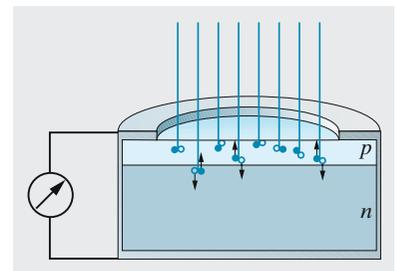


Abb. 17.65. **Photoelement.** Licht hinreichender Frequenz erzeugt Elektron-Loch-Paare, die i. Allg. bald wieder rekombinieren, außer in der Nähe der p - n -Grenzschicht, deren starkes Feld sie auseinander reißt. Die entstehende Aufladung fließt über den Verbraucher ab, wenn dessen Widerstand kleiner ist als der der Grenzschicht

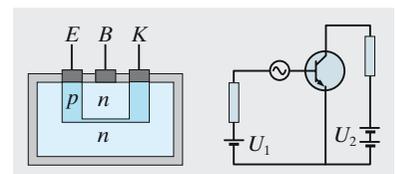


Abb. 17.66. Flächentransistor (Kristalldiode). Die Spannung an der Mittelelektrode (Basis) steuert den Strom zwischen den äußeren Elektroden (Emitter und Kollektor) praktisch stromlos

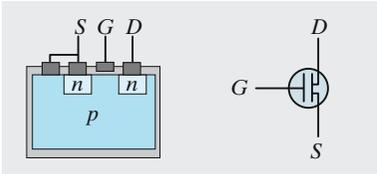


Abb. 17.67. **MOSFET**: Eine dünne Oxidschicht unter dem **Gate**-Kontakt lässt keinen Gate-Strom zu, aber ein +-Potential am Gate schiebt die Löcher im p -Bereich weg und schafft unter diesem Kontakt einen Kanal zwischen Source und Drain, durch den Elektronen fließen können. Der Sperrzustand zwischen S und G wird durch dieses Feld überwunden. ICs (integrated circuits) und Chips fassen viele MOSFETs zusammen

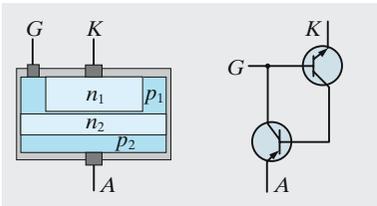


Abb. 17.68. Der **Thyristor** fasst zwei Transistoren in einem Stück zusammen; das Gate wirkt für den einen als Basis, für den anderen als Kollektor. Ohne Gate-Spannung fließt kein Anodenstrom: Der n_2p_1 -Übergang sperrt (bei Umkehr der Spannung sogar zwei Übergänge). Sowie ein Gate-Strom fließt (G leicht positiv), öffnet der n - p - n -Transistor, der andere ist sowieso offen: Elektronen fließen von K nach A . So kann man gewaltige Ströme (kA) und Leistungen steuern, z. B. durch **Phasenanschnitt** (nur ein Teil der Sinuskurve wird ausgenutzt) mit einem sehr kompakten Steuerorgan, das selbst kaum Leistung verzehrt, im Gegensatz z. B. zu einem Vorwiderstand

dungsinjektion in die Basis an, ähnlich wie bei der Röhre auf die Aufladung des Gitters.

In der **Tunnel-Diode** sind n - und p -Bereich sehr hoch dotiert, sodass die Randschicht sehr dünn wird (um 10 nm). Ihre Dicke hängt ja als Debye-Hückel-Länge von n ab wie $d \sim 1/\sqrt{n}$ (vgl. (6.100)). Elektronen können bei Durchlasspolung durch diese dünne Schicht tunneln, was zu einem negativen differentiellen Widerstand führt (der Strom fällt mit steigender Spannung).

Ein **Halbleiter-Laser** (s. Abschn. 15.3.3) erzeugt Rekombinationslicht injizierter Ladungsträger in einem p - n -Übergang ähnlich wie bei der Photodiode. Die Träger, speziell die Elektronen dicht über ihrem Bandrand, müssen durch einen Sprung der Bandkante E , die Photonen durch einen Sprung der Brechzahl n sowie an den Austrittsflächen durch halbdurchlässige Spiegel eingesperrt werden, damit die Laser-Bedingung (erzwungene Emission > Absorption + Photonenverlust) erfüllbar wird. Der einfachste Spiegel ist die glatte Spaltfläche des Kristalls: Der große Brechzahlssprung bedingt hohe Reflexion. Den E - und n -Sprung in der anderen Richtung erreicht man, indem man z. B. eine dünne ($< 1 \mu\text{m}$) aktive Region aus GaAs in zwei $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Schichten einschließt. Al erzeugt eine breitere verbotene Zone, ähnlich, wie die von C breiter ist als die von Si oder gar Ge. Dafür hat reines GaAs die höhere Brechzahl und wirkt als optischer Wellenleiter. Ein solcher Laser emittiert bei $0,9 \mu\text{m}$. Zum Anschluss an Glasfaserkabel eignen sich $1,3$ oder $1,5 \mu\text{m}$ besser; diese erzeugt man mit InP-Lasern. Fasern aus Quarzglas, die durch Brechzahlgradienten (n innen größer) zu Wellenleitern werden, können Signale, mit einigen GHz moduliert, mit Absorptionsverlusten von weniger als 1 db/km übertragen.

× Beispiel...

Warum kann man über Glasfasern so viel mehr Information übertragen als über Kupferdrähte? Wie viel etwa?

Im Prinzip kann eine Lichtwelle fast mit ihrer eigenen Frequenz moduliert werden (allerdings machen die Laser das z. Z. noch nicht mit). Dieses riesige Frequenzband bis 10^{14} Hz bzw. realistischer 10^{10} Hz kann man in 10^{10} bzw. 10^6 Kanäle von 10^4 Hz zerschneiden und auf jedem gleichzeitig z. B. ein Telefonat einwandfreier Tonqualität übertragen.

17.4.4 Amorphe Halbleiter

Glas ist eines der ältesten Syntheseprodukte menschlicher Technologie (seit mindestens 3 000 Jahren). Woher es aber seine so geschätzte Transparenz hat, weiß noch niemand so richtig. Alle Ursachen für absorbierende Fehlstellen sind im Glas vereint: Das Gitter ist fern von einer Idealstruktur, fern von Stöchiometrie, mit riesiger Verunreinigungskonzentration. Die verbotene Zone müsste mit Störtermen geradezu gespickt sein. Glasartige amorphe Halbleiter entstehen besonders aus Elementen der 4., 5., und 6. Gruppe in den verschiedensten Mischungsverhältnissen (**Chalkogenidgläser**, Se-Te-As-Ge- oder **STAG-Gläser**). Das **Xerox-Kopierverfahren** nutzt die Photoleitung in amorphem Se aus. Besonders

beim Aufdampfen auf Unterlagen mit abweichender Kristallgeometrie bilden sich auch aus reinem Si und Ge zunächst oft amorphe Schichten. Typisch für alle diese Halbleiter ist, dass ihre Leitfähigkeit sich durch **Dotierung** mit Fremdstoffen praktisch nicht steigern lässt, in krassm Gegensatz zum kristallinen Halbleiter.

Offenbar ist gerade ein amorphes Netz von Bindungen imstande, auch die abweichenden Wertigkeiten von Fremdatomen abzufangen, indem es seine Bindungsstruktur in deren Umgebung so anpasst, dass gerade alle Valenzelektronen verbraucht werden und weder Donator- noch Akzeptorenstellen übrig bleiben, wie das im regulären Gitter der Fall wäre. Allerdings sind die Bandränder nicht so scharf wie beim Idealkristall, sondern vom Valenz- und vom Leitungsband reichen energetisch quasi-kontinuierliche Ausläufer in die verbotene Zone hinein, wenn auch wahrscheinlich nicht so weit, dass sie einander überlappen, wie in älteren Modellen (*Cohen-Fritzsche-Ovshinsky*) angenommen. Die räumlich-energetische Anzahldichte $N(\varepsilon)$ der Zustände in diesen Ausläufern wird schließlich an der **Beweglichkeitskante** E_μ so gering, dass man nicht mehr von quasifreier Trägerbewegung sprechen kann (die freie Weglänge wird bei E_μ etwa gleich dem Atomabstand), sondern von thermisch aktiviertem **Tunneln** von Störstelle zu Störstelle.

Dieses **variable range hopping** erklärt die merkwürdige Tatsache, dass bei vielen Gläsern und amorphen Halbleiter-Aufdampfschichten die übliche Arrhenius-Abhängigkeit $\sigma \sim e^{-E/(kT)}$ bei tiefen Temperaturen in eine Funktion $\sigma \sim e^{-A/T^{1/4}}$ (bei sehr dünnen Schichten auch $\sigma \sim e^{-A/T^{1/3}}$) übergeht. Wenn die Fermi-Grenze E_F unterhalb E_μ liegt, gelangen bei so tiefen Temperaturen praktisch keine Träger thermisch über die Beweglichkeitskante; daher hört die Arrhenius-Leitfähigkeit auf. Etwas oberhalb E_F haben die Zustände entsprechend dem Boltzmann-Schwanz der Fermi-Verteilung den Füllungsgrad $e^{-\varepsilon/(kT)}$ ($\varepsilon = E - E_F$). Um in einen anderen Störterm zu gelangen, der in einer Entfernung r liegt, muss ein Elektron einen annähernd rechteckigen Potentialwall der Dicke r durchtunneln (Tunnelwahrscheinlichkeit $\sim e^{-\kappa r}$, Abschn. 13.7.2). Die gesamte Sprungrate j ist Elektronenangebot mal Tunnelwahrscheinlichkeit, d. h. $j \sim e^{-\kappa r - \varepsilon/(kT)}$. Bei tiefer Temperatur sind die Elektronen auf einen sehr kleinen Energiebereich beschränkt und müssen große Abstände r bis zu Störstellen passender Energie in Kauf nehmen. Bei höheren Temperaturen brauchen sie nicht so weit zu suchen. Eine Kugel vom Radius r bietet im Mittel eine andere Störstelle an, deren Energie um nicht mehr als $\Delta\varepsilon \sim r^{-3} N^{-1}$ von der gegebenen Störstelle abweicht. Maßgebend ist jeweils die Kombination von T und r , bei der j maximal, d. h. $\kappa r + \Delta\varepsilon/(kT)$ minimal wird, also bei $r_m \sim (NkT)^{-1/4}$. Je tiefer T , desto weiter müssen die Träger springen. Übergangsrate und Stromdichte erhalten so die Form

$$j \sim \exp\left(-\frac{2}{3}\kappa r_m\right) = \exp\left(-\frac{A}{T^{1/4}}\right). \quad (17.81)$$

Im zweidimensionalen Fall, d. h. wenn die Schichtdicke kleiner ist als r_m , wird der Exponent völlig analog $-A'/T^{1/3}$.

17.5 Gitterfehler

Viele Eigenschaften der Kristalle werden durch ihre Baufehler entscheidend geprägt. Wir wissen das schon von den Halbleitern und wollen jetzt solche Baufehler systematischer betrachten.

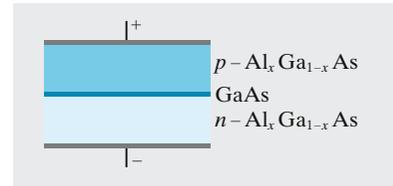


Abb. 17.69. Halbleiter-Laser, denen wir u. A. die CD-Musik verdanken, sind im Prinzip einfach gebaut, aber ihre Entwicklung war sehr schwierig. Noch schwieriger ist der Übergang von den infrarot- oder rotleuchtenden 3-5-Lasern zu den 2-6-Lasern mit ihrer breiteren verbotenen Zone, deren grünes oder blaues Licht eine noch viel höhere Informationsdichte aufzeichnen könnte

17.5.1 Idealkristall und Realkristall

Der **Idealkristall** ist durch eine streng gesetzmäßige Anordnung (Kristallstruktur) der Atome oder Ionen definiert.

Der **Realkristall** weicht in vielem vom idealen Kristallbau ab. Sieht man von den thermisch bedingten Bewegungen der Gitterbausteine um ihre Gleichgewichtslagen ab, so hat man es im Wesentlichen mit folgenden drei Arten von Gitterfehlern oder **Fehlordnungen** zu tun:

- **Thermische Fehlordnung**, bestehend aus Gitterlücken (Leerstellen) und Zwischengitterteilen.
- **Chemische Fehlordnung**, bestehend aus Fremtteilchen auf Gitter- oder Zwischengitterplätzen.
- **Versetzungen**.

Die thermischen Gitterfehler werden auch als **Eigenfehlstellen** bezeichnet, weil der Kristall sie durch thermische Aktivierung gewissermaßen aus sich selbst erzeugt; die beiden letztgenannten sind **Kristallbaufehler** im engeren Sinn des Wortes, weil sie nur durch das Kristallwachstum oder durch starke äußere Einflüsse (plastische Verformung, Bestrahlung) in den Kristall hineinkommen.

Für fast alle makroskopischen Eigenschaften, insbesondere die mechanischen und elektrischen, sind die Gitterfehler von entscheidender Bedeutung.

17.5.2 Thermische Fehlordnung

Gitterplätze können unbesetzt sein (**Schottky-Fehlordnung**); ein Teilchen kann auf einem **Zwischengitterplatz** sitzen (**Anti-Schottky-Fehlordnung**). Beides kann auch gleichzeitig auftreten: Die an gewissen Gitterstellen fehlenden Teilchen haben sich im Zwischengitter niedergelassen (**Frenkel-Fehlordnung**). Die Konzentrationen solcher Fehlstellen und ihre Änderungen werden bestimmt durch das Wechselspiel von Erzeugung und Vernichtung. Die wesentlichste Größe dabei ist die **Aktivierungsenergie** E_a der Fehlstellenbildung. Sie liegt i. Allg. zwischen 0,5 und 2 eV.

Wir stellen ein einfaches kinetisches Modell der Frenkel-Fehlordnung auf. Unter den N Gitterplätzen/ m^3 sollen n unbesetzt sein; die dorthin gehörigen Atome befinden sich an Zwischengitterplätzen, die energetisch um ΔE gegenüber den Gitterplätzen benachteiligt sind. Genauer bedeutet ΔE die Differenz der freien Enthalpien. Gitter- und Zwischengitterplatz sind durch eine Schwelle getrennt (Abb. 17.71), die vom Gitterplatz aus gesehen die Höhe E_a habe. Ein Gitteratom hat die Wahrscheinlichkeit $\nu_0 e^{-E_a/(kT)}$, in der Sekunde in einen benachbarten Zwischengitterplatz gehoben zu werden. Dort angekommen, kann das Atom wieder zurückspringen (Rekombination der Störstellen) oder auf einen anderen Zwischengitterplatz weiterspringen (**Zwischengitterdiffusion**). Die Wahrscheinlichkeiten, bezogen auf einen bestimmten Platz, für diese beiden Vorgänge sind gleich, sofern die Schwellen bei A und B in Abb. 17.71 gleich hoch sind. Im dreidimensionalen Gitter stehen aber nach allen Seiten mehr Zwischengitterplätze zum Weiterdiffundieren zur Verfügung.

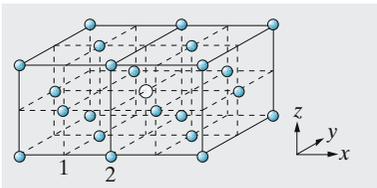


Abb. 17.70. Kubisch-flächenzentriertes Gitter mit einer Leerstelle (Schottky-Fehlstelle)

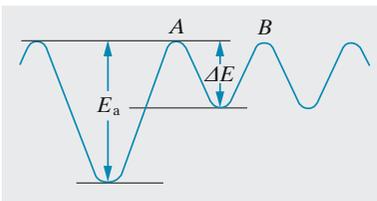


Abb. 17.71. Gitterpotential zwischen einem regulären Gitterplatz und mehreren Zwischengitterplätzen (schematisch)

Die Zwischengitteratome werden also nicht sofort rekombinieren, sondern meist längere Zeit auf Zufallsbahnen diffundieren, bis sie zufällig in einen leeren Gitterplatz fallen. Ihre freie Weglänge für diesen Vorgang ist wie üblich $l = 1/(nA_{\text{eff}})$, die Rekombinationsrate wird vn/l , wobei v die Wanderungsgeschwindigkeit, d. h. Sprungweite \cdot Sprunghäufigkeit ist: $v = dv_0 e^{-(E_a - \Delta E)/(kT)}$. Die Rekombinationsrate wird also

$$-\dot{n}_{\text{rek}} = v_0 dA_{\text{eff}} n^2 e^{-(E_a - \Delta E)/(kT)}.$$

Im Gleichgewicht ist sie gleich der Bildungsrate

$$\dot{n}_{\text{erz}} = v_0 N e^{-E_a/(kT)},$$

also

$$n_{\text{gl}} = \sqrt{\frac{N}{dA_{\text{eff}}}} e^{-\Delta E/(2kT)}.$$

Allgemein ändert sich n wie

$$\dot{n} = v_0 N e^{-E_a/(kT)} - v_0 dA_{\text{eff}} n^2 e^{-(E_a - \Delta E)/(kT)}. \quad (17.82)$$

Heizt man einen Kristall schnell auf, so hat er demnach Recht auf eine höhere Fehlordnung. Der Gleichgewichtswert n_{gl} stellt sich aber nicht sofort ein, sondern erst mit einer Zeitkonstante

$$\tau = v_0^{-1} e^{E_a/(kT)}, \quad (17.83)$$

der **Relaxations-** oder **Erholungszeit**. Sie wird bei tiefen Temperaturen sehr lang. Es kommt daher vor, dass in einem Kristall die „überthermische“ Fehlordnung **eingefroren** bleibt, die einer höheren Temperatur entspricht, wie sie z. B. bei der Herstellung des Kristalls herrschte. Diese Fehlordnung hat einfach nicht die Zeit gehabt, sich abzubauen. Wenn seitdem eine Zeit t vergangen ist, entspricht die Fehlordnung noch einer Temperatur, die mit t in der Beziehung (17.83) steht.

Messungen der thermischen Fehlordnung liegen bei Metallen und Ionenkristallen vor. Als Messgröße bietet sich vor allem der Selbstdiffusionskoeffizient $D_s = D_{s0} e^{-E/(kT)}$ an, aus dessen Arrhenius-Temperaturabhängigkeit man die Bildungsenergie der Fehlstellen bestimmen kann. Bei Ionenkristallen ist die Leitfähigkeit σ (Eigenleitung) als Selbstdiffusion von Gitterionen im Feld anzusehen. Überwiegt ein Fehlstellentyp (z. B. die Schottky-Fehlordnung), dann hängen σ und D_s über die Einstein-Beziehung

$$\sigma = \frac{ne^2}{kT} D_s \quad (17.84)$$

zusammen. Betrachten wir nämlich z. B. das kubisch-flächenzentrierte Na-Teilgitter im NaCl-Kristall, das n statistisch verteilte Leerstellen/m³ enthalte. Sie springen mit der Frequenz Γ in die Nachbarschicht im Abstand a . Die na Fehlstellen/m² einer Schicht stellen eine Teilchenstromdichte $na\Gamma$ dar. Diffusion tritt ein, wenn n räumlich variiert, d. h. von Schicht zu Schicht um an' verschieden ist: Effektive Teilchenstromdichte $a^2\Gamma n'$, Diffusionskoeffizient $D = a^2\Gamma$. Herrscht ein Feld E senkrecht

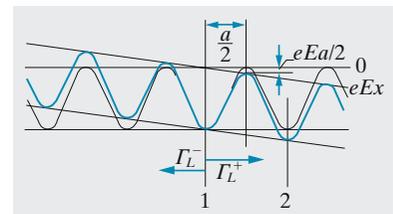


Abb. 17.72. Potential von Gitter- oder Zwischengitterplätzen ohne und mit Feld E . Das Feld E hebt die Symmetrie der Sprungwahrscheinlichkeiten nach rechts bzw. links auf

zur Schicht, wird die Sprungfrequenz in einer Richtung um den Faktor $e^{aeE/(2kT)}$ gesteigert, in Gegenrichtung um ebenso viel geschwächt. Es fließt eine Stromdichte

$$j = \frac{ea\Gamma n 2aeE}{2kT} = \frac{ne^2 DE}{kT} = \sigma E. \quad (17.85)$$

Die thermische Fehlordnung beeinflusst auch andere Kristalleigenschaften (spezifische Wärme, spezifischer Widerstand). Die Streuung der Leitungselektronen an Leerstellen und Zwischengitteratomen führt zu einer Widerstandserhöhung, die im Gegensatz zum normalen Halbleiterverhalten wie $\rho \sim n \sim e^{-E/(2kT)}$ verläuft.

17.5.3 Chemische Fehlordnung

Fremdatome können sich auf regulären Gitterplätzen oder im Zwischengitter einbauen. Der zweite Fall tritt besonders ein, wenn die Fremdatome wesentlich kleiner sind als die Wirtsatome (z. B. H, C oder N in vielen Metallen). Quantitativ beschreibt man ein solches Fremdatom als Dilatationszentrum und untersucht diese Fehlordnung in Messungen der anelastischen Eigenschaften. Geladene Fremdteilchen machen sich natürlich auch elektrisch und optisch bemerkbar.

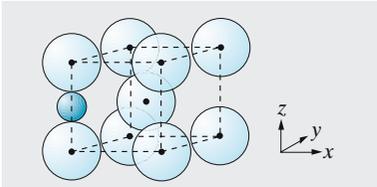


Abb. 17.73. Kubisch-raumzentriertes Gitter mit eingebautem Fremdatom (der Zwischengitterplatz in der Mitte der Würfelfläche ist nur scheinbar geräumiger; man denke sich das Gitter fortgesetzt)

Für das elastische Verhalten von Stahl spielt der **Snoek-Effekt** eine Rolle. Das kubisch-raumzentrierte Eisengitter (α -Eisen) bietet C-Atomen in den Flächenmitten und Kantenmitten (Abb. 17.73) äquivalente Plätze (Oktaederlücken, umgeben von sechs allerdings nicht gleichberechtigten Fe-Atomen). Diese Lücken sind nicht groß genug: Die C-Atome weiten das Gitter etwas auf, und zwar im spannungsfreien Fall allseitig. Herrscht eine mechanische Spannung in x -Richtung, dann werden die Oktaederlücken in den Mitten der x , y -Flächen und, was dasselbe ist, auch in der Mitte der x -Kanten größer und energetisch günstiger für den C-Einbau. C-Atome diffundieren von anderen Plätzen in diese bevorzugten Lücken ein und bewirken eine Zusatzdehnung ε_q in x -Richtung. ε_q ist proportional dem Überschuss δn_x der in x -Lücken sitzenden C-Atome über die Durchschnittskonzentration $n/3$ (n : Gesamtanzahldichte der C-Atome). Natürlich stellt sich diese Zusatzdehnung nicht momentan mit dem Anlegen der Spannung ein. Bei einer sinusförmigen Wechselbelastung (Schwingung) folgt sie erst mit einer Phasendifferenz, es entsteht eine elastische Hysteresisurve, deren Fläche den Energieverlust pro Schwingung, d. h. die Dämpfung bestimmt (vgl. Abschn. 3.4.4).

Das kinetische Modell geht davon aus, dass die Sprungwahrscheinlichkeit w von einem x - auf einen y - oder z -Platz durch eine Spannung σ um den Faktor $e^{-\Delta E/(kT)}$ mit $\Delta E \sim \sigma$ gesenkt, im umgekehrten Sinn um den Faktor $e^{\Delta E/(kT)}$ erhöht wird. Setzt man diese veränderten Sprungraten in die kinetische Gleichung für δn_x ein, ergibt sich ähnlich wie in Abschn. 17.5.2

$$\delta \dot{n}_x = \omega_0 (\delta n_{x\text{gl}} - \delta n_x),$$

wobei $\omega_0 \approx 3w$ und $\delta n_{x\text{gl}} \approx \frac{4}{9} n \Delta E/(kT)$ der Gleichgewichtswert von δn_x , d. h. der Wert ist, der sich bei sehr langer Belastung einstellt. Für die zu δn_x proportionale Zusatzdehnung ε_q folgt entsprechend

$$\dot{\varepsilon}_q = \omega_0(\varepsilon_{q\text{gl}} - \varepsilon_q) = \omega_0(I_q\sigma - \varepsilon_q). \quad (17.86)$$

I_q ist die **elastische Nachgiebigkeit**, der Kehrwert des Elastizitätsmoduls. Bei sinusförmiger Belastung $\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$ ändert sich auch ε_q sinusförmig: $\varepsilon_q = \varepsilon_{q0} e^{i\omega t}$, wenn auch mit einer Phasenverschiebung, die in dem als komplex aufzufassenden ε_{q0} steckt. Aus (17.86) folgt $i\omega\varepsilon_{q0} = \omega_0 I_{q0}\sigma_0 - \omega_0\varepsilon_{q0}$, also

$$\varepsilon_{q0} = \sigma_0 \frac{I_{q0}}{1 + i\omega/\omega_0}.$$

Die Nachgiebigkeit der Zusatzdehnung ergibt sich daraus durch Betragsbildung:

$$I_q = \frac{I_{q0}}{1 + \omega^2/\omega_0^2}. \quad (17.87)$$

Von der Relaxationsfrequenz ω_0 an wird der Kristall bei höheren Frequenzen gemäß ω^2 steifer. Die Phasendifferenz φ mit $\tan \varphi = \omega/\omega_0$ bestimmt die Hysteresiskurve.

F-Zentren. Salz (NaCl) schimmert im reflektierten Licht bläulich, im durchgelassenen gelblich. Diese Färbung lässt sich erheblich verstärken durch Röntgen-, Neutronen- oder Elektronenbeschuss und durch Erhitzen in Alkalimetall-Dampf. Welches Alkalimetall man so zusetzt, spielt für die Farbe kaum eine Rolle: Die Absorption ist eine Eigenschaft des Grundgitters, nicht der Verunreinigung. In Chlordampf heilen die Farbzentren wieder aus. Stark gefärbte Kristalle sind weniger dicht als normale.

All das spricht dafür, dass die **Farbzentren** (F -Zentren) Halogenlücken sind. Ein fehlendes Cl^- wirkt in bezug auf das Gitter wie eine $+$ -Ladung. Sie kann ein Elektron einfangen und wasserstoffähnlich binden. Die Ionisierungsenergie eines solchen Systems in der Umgebung mit der DK $\varepsilon = 2,25$ für NaCl ist $13,6 \text{ eV}/\varepsilon^2 = 2,7 \text{ eV}$, was einer Absorption bei 450 nm, also im Blauen entspricht (hier ist die optische DK $\varepsilon = n^2$ zu verwenden, nicht die statische). Die Übereinstimmung mit der Beobachtung ist nicht bei allen Alkalihalogeniden so ausgezeichnet, was kein Wunder ist, denn das Einsetzen der Kontinuums-DK ist reichlich kühn, da doch der Bohr-Radius des Elektrons nur $0,53 \text{ \AA} \cdot \varepsilon = 1,2 \text{ \AA}$ beträgt, also weniger als der Abstand Na-Cl im Gitter.

Zwei F -Zentren an benachbarten Cl-Gitterpunkten bilden ein **M-Zentrum**, drei ein **R-Zentrum**. Ein **V-Zentrum**, ist ein eingefangenes Loch.

17.5.4 Versetzungen

Wenn ein Kristallgitter sich als Ganzes unter einer Belastung deformierte, wenn z. B. unter einer Zugspannung alle Atomabstände in Zugrichtung sich gleichmäßig vergrößerten, wäre die Theorie der Potentialkurve (Abschn. 17.1.4) anwendbar. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve wäre dann einfach die zweite Ableitung der $E(x)$ -Kurve, wobei x die Dehnung, d. h. die relative Abweichung vom Gleichgewichtsabstand ist. Es käme eine gleichmäßig gekrümmte Kurve heraus, die bei Bruchdehnung und

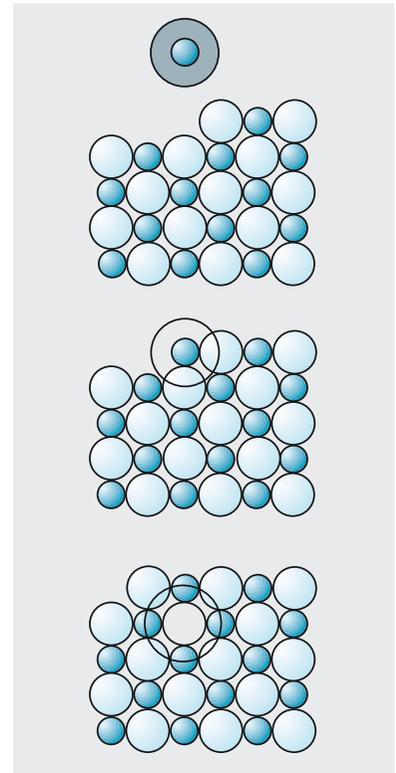


Abb. 17.74. F -Zentrum im NaCl-Kristall. Ein Na-Atom (oben links) baut sich als Ion ins Gitter ein. Sein Elektron verdrängt ein Cl^- -Ion an die Oberfläche und baut sich selbst als wasserstoffähnliches System ein. Radien der Ionen- und der Elektronenwolken maßstabsgerecht

-spannung horizontal wird. Bis dahin müssten alle Deformationen sich elastisch zurückbilden, wenn die Belastung aufhört.

Die wirkliche Spannungs-Dehnungs-Kurve (z. B. Abb. 3.79) hat zwar im Elastizitätsbereich etwa die vorausgesagte Steigung, knickt aber bei der Streckgrenze, d. h. einer relativ kleinen Spannung scharf horizontal ab ins Gebiet der plastischen Verformung. Während die Bruchdehnung in Abschn. 17.1.4 einigermaßen vernünftig herauskam, ist die Bruchspannung dementsprechend oft um Größenordnungen kleiner als vorausgesagt.

An Einkristallen sieht man deutlich, dass die **plastische Verformung** durch Gleiten längs bestimmter Netzebenen erfolgt, besonders solcher mit kleinen Miller-Indizes, also geringer Verzahnung ineinander. Ein zugbeanspruchter Draht verlängert sich vorwiegend durch solche Gleitungen längs Ebenen, die unter etwa 45° zur Zugrichtung stehen. Eine Netzebene könnte über die andere gleiten, indem sich alle ihre Atome gleichzeitig anheben. Das entspräche aber einer lokalen Dehnung von erheblichem Ausmaß (z. B. 0,225 bei der dichtesten Kugelpackung). Demnach dürfte die Festigkeitsgrenze nicht sehr viel kleiner sein als der Elastizitätsmodul (etwa $1/10$ davon), was noch immer viel zu hoch ist.

In Wirklichkeit gleitet nicht die ganze Netzebene auf einmal, sondern nur ein Teil davon, im Grenzfall eine einzige Atomreihe. So entsteht eine Störung, die sich durch das Gitter schiebt, eine **Versetzung** oder **Dislokation** (Taylor, Orowan, Polanyi, 1934). Der einfachste Typ, die **Stufenversetzung**, lässt sich auffassen als ein reguläres Gitter, in das eine unvollständige Netzebene eingeschoben ist, die in einer **Versetzungslinie** endet. In der Umgebung der Versetzungslinie ist der Kristall stark deformiert (in Abb. 17.76 hinten gestaucht, vorn gedehnt). Senkrecht zur eingeschobenen Netzebene kann die Versetzung durch geringe Atomverschiebungen leicht gleiten. Ist die Versetzung so quer durch den ganzen Kristall gewandert, dann ist längs der Gleitebene eine Verschiebung um eine Gitterkonstante erfolgt. Die Versetzungslinie läuft senkrecht zur Scherkraft und liegt in der Gleitebene.

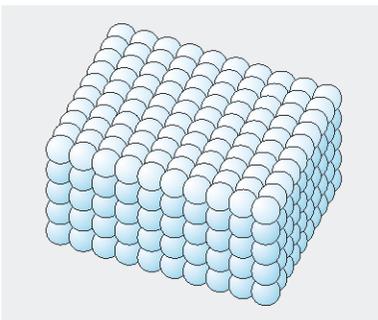


Abb. 17.75. Ungestörter kubischer Kristall

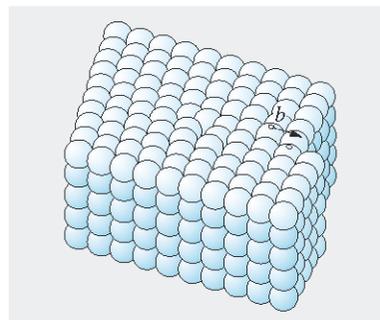


Abb. 17.76. Stufenversetzung in einem kubischen Kristall. Der Burgers-Vektor \mathbf{b} gibt an, wie Nachbaratome verschoben werden müssten, um die Störung rückgängig zu machen

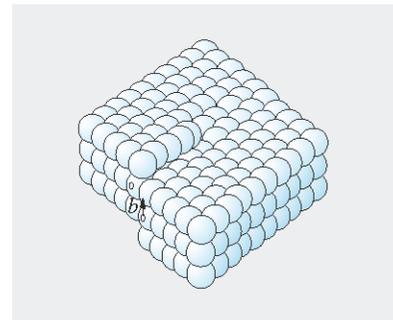


Abb. 17.77. Schraubenversetzung in einem kubischen Kristall

Unter der gleichen Scherbeanspruchung ist eine andere Art von teilweisem Gleiten zweier Netzebenen möglich (Abb. 17.77). Hier ist die Regularität des Gitters gestört durch eine Versetzungslinie, die diesmal in Richtung der Scherkraft läuft (und ebenfalls in der Gleitebene liegt). Man kann diese **Schraubenversetzung** entstanden denken, indem man das Gitter teilweise mit einem Messer, das in Richtung der Scherkraft zeigt, aufschneidet und die beiden Schnittflächen um eine Gitterkonstante gegeneinander verschiebt. Der Verschiebungsvektor \mathbf{b} wird als **Burgers-Vektor** bezeichnet und muss immer ein Gittervektor sein, da die Kristallstruktur nach dem Durchwandern der Versetzung wiederhergestellt sein muss. Bei der Schraubenversetzung ist \mathbf{b} parallel zur Versetzungslinie. Jede Gitterebene, die \mathbf{b} enthält, kann Gleitebene sein. Bei der Stufenversetzung ist \mathbf{b} senkrecht zur Versetzungsebene. Beide spannen die Gleitebene auf. Während das Gleiten ganz leicht erfolgt, erfordert das **Klettern der Versetzung**, d. h. im Fall der Stufenversetzung das Weiterschieben oder Herausziehen der eingeschobenen Netzebene senkrecht zur Gleitebene, den Transport von Gitterteilchen und ist daher nur bei höheren Temperaturen möglich.

Allgemeine Versetzungsformen kann man sich aus Stufen- und Schraubenversetzungen kombiniert denken. Die Versetzungslinie kann von Oberfläche zu Oberfläche laufen oder einen geschlossenen Ring im Gitter bilden. Über die lokalen Gitterdeformationen, die sie erzeugen, treten Versetzungen in Wechselwirkung. Aus Abb. 17.80 sieht man, dass Stu-

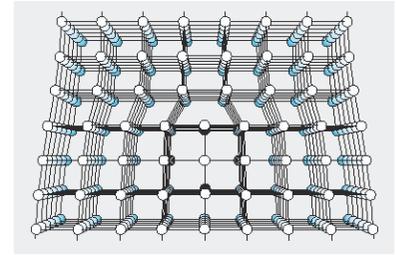


Abb. 17.78. Stufenversetzung in einem kubischen Kristall. Die eingeschobene „Extra-Netzebene“ steht senkrecht auf der Gleitebene. Beide Ebenen schneiden sich in der Versetzungslinie

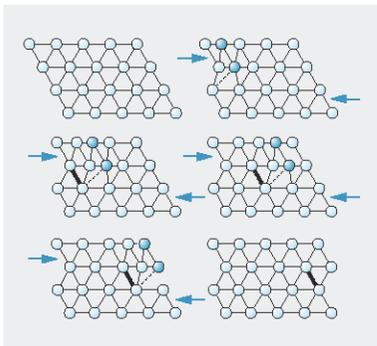


Abb. 17.79. Unter einer Schubspannung bildet sich durch Aufreißen einer linearen Reihe von Bindungen (im dargestellten Schnitt: einer einzigen Bindung) eine Stufenversetzung. Sie wandert ohne wesentlichen Energieaufwand (Auftrennen einer Bindung und Schließen einer anderen) längs der Gleitebene weiter und verschwindet, indem sie an der anderen Seite „austritt“. Deswegen sind Festkörper viel plastischer, als wenn man ganze undeformierte Netzebenen übereinander wegschieben müsste

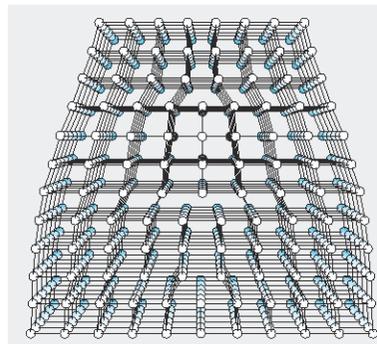


Abb. 17.80. Ein „Vorhang“ aus vielen Stufenversetzungen mit parallelen Versetzungslinien verbindet zwei Kristallite mit leicht zueinander geneigter Orientierung (Kleinwinkel-Korngrenze)



Abb. 17.81. Elektronenmikroskopische Aufnahme einer frisch gewachsenen Kristallfläche: Der Kristall hat die Schwierigkeit der Neubildung von Netzebenenkeimen durch Ausnutzung einer Schraubenversetzung überwunden (Spiralwachstum). (Nach *Gahn*, aus *W. Finkelnburg: Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

fenversetzungen sich mit Vorliebe in einer „Versetzungswand“ anordnen werden, weil sie so ihre Dehnungs- und Stauchungsgebiete energetisch vorteilhaft kombinieren. So entsteht eine **Kleinwinkel-Korngrenze**. Aus ähnlichen Gründen lagern sich Fremdatome gerne an Versetzungen an, besonders an ihrem Dehnungsgebiet. Dadurch werden Gleiten und Klettern behindert oder unmöglich gemacht. Das erklärt einen großen Teil der härtenden Wirkung von Verunreinigungen (Stahl). Bei der Deformation können Versetzungen sich ineinander verzahnen oder an Fremdatomen festgenagelt werden. Deswegen wird ein Material durch Deformationen, sofern sie nicht groß sind, gehärtet. Ein armdicker Eisen-Einkristall lässt sich ziemlich leicht biegen, aber nur einmal. Bestimmte Versetzungsformen können unter Belastung neue Versetzungen aus sich hervorquellen lassen (**Frank-Read-Quelle**).

Bei geringer Übersättigung der Lösung oder des Dampfes dürfte ein Kristall eigentlich nur äußerst langsam wachsen, denn selbst wenn diese Übersättigung die Vervollständigung einer Atomschicht erlaubt, reicht sie nicht zur Anlage neuer Schichten aus (Abschn. 17.1.7). Unter diesen Umständen hilft eine Schraubenversetzung weiter, denn an ihrer Halbkante können sich unbeschränkt Teilchen in energetisch günstigster Weise anlagern, wobei diese Halbkante um die Versetzungslinie rotiert. So kommt es zum **Spiralwachstum** eines Kristalls. Fortgesetztes Spiralwachstum um eine einzelne Schraubenversetzung ohne andere Versetzungen ist vielleicht verantwortlich für das haarähnliche Wachstum der **Whiskers** und ihre elastischen Eigenschaften, die sich denen des Idealgitters nähern (sehr hohe Scherfestigkeit und -deformierbarkeit).

17.6 Makromolekulare Festkörper

Auf die Eisen- ist die Plastikzeit gefolgt, besser die Zeit der Hochpolymere. Vergessen wir nicht, dass wir selbst aus Hochpolymeren bestehen. Auch hier müssen wir uns auf wenige physikalische Prinzipien beschränken.

17.6.1 Definition und allgemeine Eigenschaften

Festkörper, die überwiegend durch Valenzbindungen zusammengehalten werden (im Gegensatz zu den ungerichteten elektrostatischen Bindungskräften der Ionenkristalle oder Metalle), lassen sich entweder als ein einziges Riesenmolekül auffassen (z. B. Diamant) oder sind aus solchen zusammengesetzt. Je nach der Anzahl der Valenzen, die der molekulare Baustein (das **Monomer**) zur Verfügung stellt, bilden sich lineare, flächenhafte oder räumliche Valenzstrukturen (**Hochpolymere**) aus. Diese können entweder vollkristallin sein, d. h. eine röntgenographisch erkennbare regelmäßige Kristallstruktur haben, oder sie können einen unregelmäßigen (*amorph*) oder allenfalls in Teilgebieten geordneten (partiell kristallinen) Aufbau zeigen.

Beispiele für vollkristalline Hochpolymere sind Fadenstrukturen wie S, Se, Te, Polyethylen-Einkristalle $(\text{CH}_2)_m$; Schichtstrukturen wie P, As, Sb, Bi, C als Graphit; Raumnetzstrukturen wie C als Diamant, Si, Ge, Sn,

SiC, BN. Beispiele für amorphe oder partiell kristalline Hochpolymere sind die anorganischen Gläser (unregelmäßige Raumnetzstrukturen) und die organischen Natur- und Kunststoffe. Die letzteren lassen sich nach der Gestalt der Makromoleküle und der Art der zwischen ihnen wirkenden Kohäsionskräfte unterteilen in amorphe lineare Hochpolymere (z. B. Plexiglas), partiell kristalline Hochpolymere (z. B. Polyethylen) und vernetzte Hochpolymere (z. B. vulkanisierter Kautschuk). Wir beschäftigen uns im Folgenden nur mit den elastischen Eigenschaften makromolekularer Festkörper.

17.6.2 Länge eines linearen Makromoleküls

Ein typisches **Kettenmolekül** besteht aus einer großen Anzahl n von Gliedern der Länge a , die im Extremfall völlig freier Beweglichkeit statistisch aneinander gehängt sind: Jedes Glied kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit alle Richtungen einnehmen, unabhängig von der Richtung des vorhergehenden Gliedes. Wenn der eine Endpunkt einer solchen **statistischen Kette** im Koordinatenursprung liegt, ist die Frage, wo das andere Ende liegt, völlig identisch mit einem Diffusionsproblem: Man weiß, dass ein Teilchen zur Zeit $t = 0$ in $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ist; wo befindet sich das Teilchen nach Durchlaufen von n freien Weglängen der Länge a ? Genauer: Welches ist die Wahrscheinlichkeit $P(\mathbf{r}) dV$, dass das Teilchen in einem Volumenelement dV landet, das an der Stelle \mathbf{r} liegt? Da alle Richtungen gleich wahrscheinlich sind, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung kugelsymmetrisch; der Mittelwert ist Null. Das mittlere Verschiebungsquadrat ergibt sich am einfachsten aus der Annahme, dass im Durchschnitt jede neue freie Weglänge senkrecht an die vorhergehende ansetzt. Nach n Schritten ist dann ein Weg $r_0 = \sqrt{na^2}$ zurückgelegt. Es ergibt sich eine Gauß-Verteilung um $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ mit dieser Breite r_0 , d. h. $P(\mathbf{r}) dV \sim e^{-r^2/(na^2)}$. Die genaue Rechnung liefert

$$P(\mathbf{r}) dV = a^{-3} \left(\frac{3\pi}{2n}\right)^{3/2} e^{-3r^2/(2na^2)} dV = b^3 \pi^{3/2} e^{-b^2 r^2} dV, \quad (17.88)$$

$$b^2 = \frac{3}{2na^2}.$$

Fragt man nicht nach einem bestimmten Volumenelement, wo die Kette enden soll, sondern nach einer bestimmten Gesamtlänge r gleichgültig welcher Richtung, so zählt man alle Lagen, die in die Kugelschale $4\pi r^2 dr$ fallen:

$$P(r)dr = 4\pi r^2 dr b^3 \pi^{3/2} e^{-b^2 r^2}. \quad (17.88')$$

Das ist eine Art Maxwell-Verteilung (Abb. 17.83) mit der wahrscheinlichsten und der mittleren Kettenlänge

$$r_w = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2}{3}} na, \quad r_m = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \sqrt{na}. \quad (17.89)$$

In realen Makromolekülen sind die Glieder nicht völlig frei gegeneinander einstellbar, sondern nur unter Konstanthaltung des Valenzwinkels α (Abb. 17.84). Das entspricht einer statistischen Orientierung nicht über den

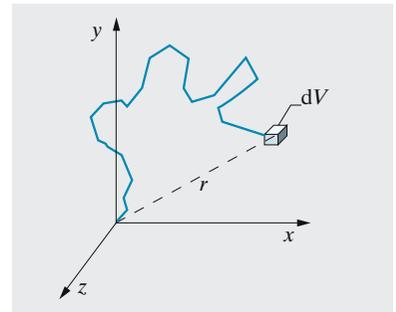


Abb. 17.82. Makromolekül als Kette von N Einzelsegmenten, deren gegenseitige Orientierung zufällig ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Kettenende in das Volumen dV fällt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen bei der Diffusion von Null aus nach N Schritten gerade in dV ankommt

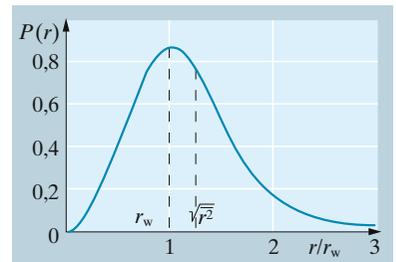


Abb. 17.83. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand zwischen den Enden einer statistischen Kette gerade r ist, ergibt sich als eine Art Maxwell-Verteilung, wenn auch die Herleitung ganz anders klingt

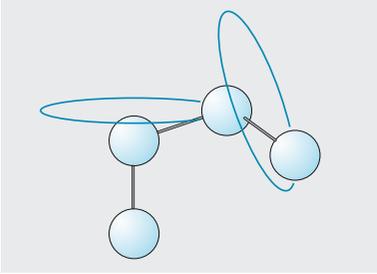


Abb. 17.84. In Wirklichkeit sind die gegenseitigen Orientierungen der Kettensegmente nicht ganz frei. Bei Polyethylen $(\text{CH}_2)_m$ muss der Tetraederwinkel zwischen zwei C-C-Bindungen eingehalten werden. Auf dem Kegelmantel ist Rotation möglich, nur leicht behindert durch die vorspringenden H-Atome, die zwei Lagen auf dem Kegelmantel (trans- und cis-Stellung) energetisch begünstigen (hier nicht eingezeichnet)

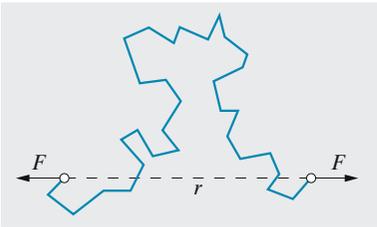


Abb. 17.85. Eine statistische Kette leistet einer Zugkraft F Widerstand, nicht infolge einer inneren Steifheit, sondern weil die Deformation die Kette in eine weniger wahrscheinliche Konfiguration zu bringen sucht: „Entropiekraft“

ganzen Raum, sondern nur auf einer Kegelfläche. Viele Ketten erlauben nicht einmal diese Art freier Drehbarkeit (**sterische Behinderung** von Seitengruppen). Bei freier Drehbarkeit auf der Kegelfläche hat die gestreckte Kette aus m Gliedern der Länge l nicht die Gesamtlänge ml , sondern nur $ml \cos(\alpha/2)$; ihre quadratisch gemittelte Länge ist nicht $r^2 = ml^2$ wie bei der statistischen Kette, sondern nur

$$r^2 = ml^2 \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = ml^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Die Kette verhält sich demnach wie eine statistische Kette mit der Gliederlänge

$$a = l \frac{\cot^2(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}$$

und der Gliederzahl

$$n = m \frac{\cos^2(\alpha/2)}{\cot^2(\alpha/2)} = m \sin^2(\alpha/2).$$

Um die Endpunkte einer statistischen Kette auf bestimmte Punkte festzunageln (Abb. 17.85), braucht man eine Kraft F , die der statistischen Knäuelungstendenz entgegenwirkt, obwohl nach Voraussetzung keine Kräfte zwischen den Kettengliedern wirken, die bestimmte Lagen bevorzugen, obwohl also die potentielle Energie U der Kette in allen Konfigurationen den gleichen Wert hat. Die Kraft F ist eine rein statistische, eine **Entropiekraft**. Man stelle sich vor, man vergrößere die Kettenlänge mittels der Zugkraft F um dr . Das entspricht einer Arbeit $dW = F dr$. Die Energiebilanz (1. Hauptsatz) lautet $dU = dW + dQ$. Da $dU = 0$ (U hängt nicht von der Konfiguration ab), und da dQ sich darstellen lässt als $dQ = T dS$, folgt

$$dW = F dr = -dQ = -T dS. \quad (17.90)$$

Die Kraft ergibt sich daraus, dass die Kette in einen unwahrscheinlicheren Zustand mit geringerer Entropie und größerer Länge gezwungen werden muss. Die Entropie der betrachteten Konfiguration der Kette ergibt sich nach (5.68) aus ihrer Wahrscheinlichkeit

$$S = k \ln P(r) dV = \text{const} - kb^2 r^2, \quad (17.91)$$

also

$$dS = -2kb^2 r dr. \quad (17.92)$$

Damit folgt

$$F = 2kTb^2 r. \quad (17.93)$$

Die Kette setzt ihrer Dehnung eine Kraft mit einer quasielastischen Längenabhängigkeit entgegen. Der Faktor T zeigt aber, dass es sich um einen thermodynamischen Effekt handelt.

17.6.3 Gummielastizität

Ein elastisches makromolekulares Material wie Gummi besteht aus Kettenmolekülen, die (im Fall des Gummis durch Schwefelatome) ineinander vernetzt sind (**Vulkanisierung**). Wir betrachten ein solches räumliches Netzwerk aus N statistischen Ketten im m^3 , die räumlich statistisch zueinander orientiert sind und in den Vernetzungspunkten enden (Verschlaufungen, freie Kettenenden und in sich geschlossene Ketten sollen vernachlässigt werden). Alle Ketten mögen die gleiche Anzahl n von Gliedern und damit gleiches b^2 und r^2 besitzen. Deformiert man das Netzwerk, dann müssen sich die Kettenlängen im gleichen Verhältnis wie die makroskopischen Dimensionen ändern. Unter diesen Voraussetzungen kann man die elastischen Konstanten des Netzwerkes bestimmen.

Ein Würfel der Kantenlänge l aus dem Netzwerk werde in x -Richtung durch die Kraft F um $\Delta l = \varepsilon l$ gedehnt. Gleichzeitig erfolgt eine Querkontraktion um $\Delta l' = -\eta l$. Das Volumen $(1 + \varepsilon)(1 - \eta)^2 l^3$ behält seinen alten Wert l^3 , weil der Kompressionsmodul bei solchen Materialien viel größer ist als die anderen Moduln (Abschn. 3.4.3). Daraus folgt $(1 + \varepsilon)(1 - \eta)^2 = 1$ oder $\eta = 1 - \sqrt{1/(1 + \varepsilon)}$. Von den Nl^3 Ketten, die der Würfel enthält, zeigen $Nl^3/3$ in x -Richtung und müssen sich von der mittleren Länge r_m auf $r_m(1 + \varepsilon)$ dehnen; die $2Nl^3/3$ Ketten in y - oder z -Richtung stauchen sich gleichzeitig auf $r_m(1 - \eta)$. Nach (17.92) ist die entsprechende Entropieänderung

$$\begin{aligned} \Delta S &= -2kb^2 r_m l^3 \left(\frac{N}{3} r_m \varepsilon - \frac{2N}{3} r_m \eta \right) \\ &= -\frac{2N}{3} kb^2 r_m^2 l^3 \left(\varepsilon - 2 + 2\sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon}} \right) \\ &\approx -Nkl^3 \left(\varepsilon - 2 + 2 - \varepsilon + \frac{3}{4}\varepsilon^2 \right) = -Nkl^3 \frac{3}{4}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Die Deformationsarbeit ist $W = -T \Delta S = \frac{3}{4} Nl^3 kT \varepsilon^2$,

die Kraft $F = 2W/(\varepsilon l) = \frac{3}{2} NkTl^2 \varepsilon$,

die Zugspannung $\sigma = F/l^2 = \frac{3}{2} NkT \varepsilon$,

der Elastizitätsmodul $E = \sigma/\varepsilon = \frac{3}{2} NkT$.

Für den Schubmodul findet man aus einer analogen Betrachtung

$$G = NkT.$$

Gummi ist umso härter, je höher sein Vernetzungsgrad N , also sein Schwefelgehalt ist. Der Elastizitätsmodul steigt auch mit der Temperatur: Unter konstanter Last zieht hochpolymere Material sich mit steigender Temperatur zusammen. Die Temperaturabhängigkeit wird allerdings weitgehend überdeckt von einem steilen Sprung des Elastizitätsmoduls bei Abkühlung unter eine gewisse Grenze: Gummi wird in flüssiger Luft steinhart und spröde. Diese Grenztemperatur ist dadurch bestimmt, dass dort die bisher vorausgesetzte freie Drehbarkeit der Kettenglieder auf der Ke-

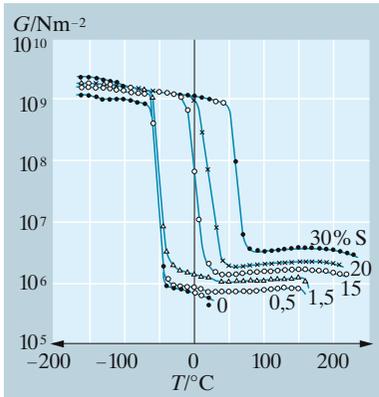


Abb. 17.86. Schubmodul von verschieden stark vulkanisiertem (mit Schwefel vernetztem) Kautschuk in Abhängigkeit von der Temperatur. Die freie Drehbarkeit der Kettenglieder friert in einem ziemlich engen T -Bereich ein

gelfläche „einfriert“. Bei einer solchen Drehung haben die Glieder (meist CH_2 -Gruppen) Widerstände zu überwinden; wenn benachbarte H-Atome einander gegenüberstehen, ist die potentielle Energie um W_0 größer, als wenn sie kreuzweise stehen. Die Wahrscheinlichkeit für die Überwindung dieser Drehungshürde ist proportional zu $e^{-W_0/(kT)}$, nimmt also mit fallender Temperatur so schnell ab, dass der Übergang von der Gummielastizität zur normalen Elastizität der praktisch starren Ketten fast so scharf ist wie ein Phasenübergang.

x Beispiel ...

Welche Größe der freibeweglichen Kettenglieder ergibt sich aus Abb. 17.86?

Aus $G = NkT$ folgt links: $N = 2 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$, $a = 1,7 \text{ \AA}$ (CH_2 -Gruppe ist Kettenglied); rechts bei 1% Schwefel $N = 2 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$, $a = 17 \text{ \AA}$ (jedes S bildet einen Netzpunkt). Deswegen wird Gummi z. B. in flüssiger Luft so hart und spröde, dass ein Hammerschlag ihn zersplittert.

17.6.4 Hochpolymere

Wir Tiere bestehen im Wesentlichen aus polymeren Aminosäuren (Proteinen), die Pflanzen aus polymeren Zuckern (Zellulose, Stärke). Beider Bauplan ist in Polymeren aus Phosphat, Zucker, Purinen oder Pyrimidinen (DNS, RNS) codiert. Polymeren Kunststoffen kann man fast jede mechanische Konsistenz geben, von Flüssigkeiten über weiches und biegsames Polyethylen bis zu hartem Plexiglas. Diese Eigenschaften, nicht nur die mechanischen, auch z. B. die thermodynamischen, werden bestimmt durch Länge, Struktur und Flexibilität, evtl. auch Vernetzung der Molekülketten. Natürlich ist das Modell des **random walk**, analog zur Diffusion eines Teilchens, das wir bisher benutzt haben, sehr unvollkommen, denn anders als der Diffusionsweg eines Teilchens darf sich die Kette nicht selbst überschneiden: Es kommt nur ein **self avoiding walk** in Frage. Man darf auch keine freie Biegsbarkeit, d. h. keine Gleichwahrscheinlichkeit aller Winkel zwischen Kettengliedern und i. Allg. keine freie Drehbarkeit um deren Achsen voraussetzen. Dies ist viel schwieriger zu behandeln als das einfache Diffusionsmodell. Das Quadratmittel der Länge R einer Kette aus N Gliedern der Länge l ist nicht mehr analog zur Diffusion $R^2 = Nl^2$, sondern $R^2 = N^\beta l^2$ mit $\beta > 1$.

Erst 1972 fand *P. G. de Gennes* (Nobelpreis 1991) eine exakte Theorie für dieses β , wobei sich überraschende Parallelen zu vielen ganz anderen Phänomenen ergaben, speziell zu Phasenübergängen zwischen magnetisiertem und unmagnetisiertem Eisen, Normal- und Supraleitern, normalem und suprafluidem Helium, den verschiedenen Konfigurationen von Flüssigkristallen (isotrop, nematisch, smektisch). Die Idee der **Skaleninvarianz**, die nach *K. G. Wilson* besonders bei der Aufklärung der Phasenübergänge 2. Ordnung eine entscheidende Rolle spielt, hat sich auch in der Quantenelektrodynamik (Problem der Renormierung) wie in der Theorie der Elementarteilchen bewährt und charakterisiert die Fraktale,

z. B. in der nichtlinearen Dynamik. Abgesehen von ihrer theoretischen Bedeutung haben diese Ideen geholfen, praktische Probleme wie die Funktion von LCD-Anzeigen, das Bruchverhalten von Plexiglas oder die Eignung von Polymeren als Klebstoffe zu lösen.

17.7 Supraleitung

Taucht man Quecksilber, das bei so tiefen Temperaturen längst fest ist, in flüssiges Helium, das man durch Abpumpen seines Dampfes etwas unter seinen normalen Siedepunkt von 4,211 K gekühlt hat, dann fällt der Widerstand des Hg urplötzlich um viele Zehnerpotenzen: Beim Unterschreiten des **Sprungpunktes** $T_c = 4,183$ K setzt **Supraleitung** ein (*Kamerlingh Onnes* 1911 in Leiden, 3 Jahre nach Gelingen der Helium-Verflüssigung im gleichen Labor). Seitdem hat man Supraleitung in mehr als tausend verschiedenen Metallen, Legierungen, intermetallischen Verbindungen, selbst Halbleitern nachgewiesen. Der Widerstand eines Reinelements wird i. Allg. unmessbar klein, mindestens 20 Zehnerpotenzen kleiner als im Normalzustand.

Die Supraleiter verteilen sich in eigentümlicher Weise über das periodische System. Merkwürdig, aber durch die Theorie erklärbar ist, dass die typischen guten Leiter (Cu, Ag, Au, Alkalien, Erdalkalien) nicht supraleitend werden. Auch Ferromagnetismus und Supraleitung scheinen einander auszuschließen: Schon Spuren von Fe und Gd zerstören die Supraleitung in einem Material, das im reinen Zustand supraleitet. Bevorzugt sind Anfang und Ende der *d*-Metallreihe (Ti, V; Zr, Nb, Mo, Tc, Ru; La, Ta, W, Re, Os, Ir; Zn, Cd, Hg) und der Anfang der *p*-Reihe (Al; Ga, In, Sn; Tl, Pb). In jeder dieser Reihen hat jedes zweite Element ein besonders hohes T_c : Elemente mit ungerader Anzahl von Valenzelektronen $\neq 1$ sind die besten Supraleiter (Regel von *Mathias*). Dabei sind die höheren Perioden bevorzugt. Dies zeigen auch die Aktiniden (Th, Pa, U supraleitend) im Vergleich zu den seltenen Erden (nichtsupraleitend, außer La, dessen Supraleitung durch Beimischung seltener Erden, besonders Gd, zerstört wird). In einigen Fällen, bei Elementen am Übergang zwischen Metall und Nichtmetall, ist nur eine mehr metallartige Hochdruck-Kristallmodifikation supraleitend (Si, Ge, Se, Sb, Bi). Den Sprungtemperatur-Rekord für Metalle hält z. Z. $\text{Nb}_3\text{Ge}_{0,2}\text{Al}_{0,8}$ mit $T_c = 20,9$ K. Man spekuliert über die Existenz von **Exciton-Supraleitern**, deren T_c sehr viel höher liegen könnte (s. unten).

In typischen Supraleitern ist der spezifische Widerstand ρ so exakt Null, dass einmal erzeugte Ströme jahrelang ohne messbare joulesche Schwächung weiterfließen. Wegen $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$ kann im Supraleiter kein elektrisches Feld existieren. Supraströme werden meist induktiv erzeugt: Man schaltet ein Magnetfeld ab, das vorher einen supraleitenden Ring durchsetzte.

Ein perfekter Leiter mit $\rho = 0$ wäre schon merkwürdig genug, angesichts dessen, dass für die klassische Physik schon die fast ungehinderte Bewegung von Elektronen durch das Gitter in einem Normalleiter rätselhaft ist. Die Merkwürdigkeit der Supraleiter geht aber viel weiter als

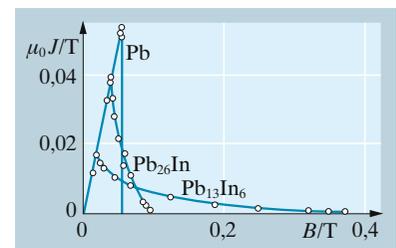


Abb. 17.87. Weiche und harte Supraleiter (Typ I und Typ II). Der echt supraleitende Bereich, in dem die innere Magnetisierung das äußere Feld vollkommen kompensiert, geht beim reinen Pb schlagartig in den Normalzustand über (kritisches Feld B_c). Bei Pb-Legierungen schiebt sich ein Fluss Schlauchzustand mit unvollständiger Kompensation (unvollständigem Meißner-Ochsenfeld-Effekt) dazwischen. (Daten nach *Livingstone*)

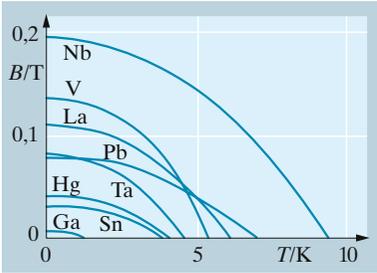


Abb. 17.88. Übergang supraleitend-normal im $B(T)$ -Diagramm für verschiedene Reinelemente. Alle Übergangskurven sind in guter Näherung parabolisch (siehe Text)

$\varrho = 0$. Dies zeigt der **Meißner-Ochsenfeld-Effekt**. Man bringt eine noch normalleitende Probe in ein Magnetfeld. Dieses Feld wird durch das Vorhandensein der Probe praktisch nicht verzerrt, es durchsetzt sie einfach (hier interessieren ja nur Nichtferromagnetika mit $\mu \approx 1$). Kühlt man aber unter den Sprungpunkt T_c , dann drängt die Probe im Moment, wo sie supraleitend wird, das Feld aus sich heraus: Im Innern eines Supraleiters (vom Typ I, s. unten) ist immer $B = 0$. Das steht im krassen Gegensatz zum Verhalten des (hypothetischen) perfekten Leiters, bei dem B keinen Grund hätte, sich zu ändern, selbst wenn plötzlich $\varrho = 0$ würde (Aufgabe 17.7.1).

Beim geschilderten Experiment darf das äußere Feld B_a nicht zu hoch sein, einfach weil sonst keine Supraleitung eintritt. Allgemein senkt ein Magnetfeld die Sprungtemperatur (Abb. 17.88): T_c wird eine Funktion des Feldes $T_c(B)$, oder umgekehrt das kritische Feld $B_c(T)$ eine Funktion von T . Bei einem bestimmten Feld B_m wird $T_c = 0$. Der durch $T_c(B)$ gegebene Übergang zwischen einem supraleitenden und einem normalen Gebiet der B, T -Ebene lässt sich in allen Richtungen reversibel durchlaufen. Die Existenz des **kritischen Feldes** von nur einigen Hundertstel Tesla (Maximum für Reinelemente: 0,198 T für Nb) scheint die Möglichkeiten für Supraleitungs-Magnete weit unter die üblicher Magnete einzuengen. Wir werden unten sehen, wie die **harten Supraleiter** (Typ II) mit ihrem unvollständigen Meißner-Effekt diese Hürde überwinden.

Der Meißner-Ochsenfeld-Effekt wird verständlich, wenn man annimmt, in einer dünnen Oberflächenschicht des Supraleiters zirkulierten Ströme, die das äußere Magnetfeld hindern, ins Innere einzudringen. In einem dünnen Draht, dessen Achse parallel zu B ist, umkreisen diese Ströme einfach den Draht. Die Schichtdicke, in der sie fließen, ergibt sich (Aufgabe 17.7.2) zu einigen hundert Å. Tatsächlich zeigen dünne supraleitende Schichten, die sich dieser Dicke nähern, nur noch einen unvollständigen Meißner-Effekt. Die Kreisströme wirken sich so aus, als sei das Innere des Drahtes homogen magnetisiert. Dass dort kein B herrscht, bedeutet nach (7.18) für einen Stoff mit $\mu_r \approx 1$ einfach

$$\text{außen: } B_a = \mu_0 H_a ; \quad \text{innen: } B = \mu_0 (H_a + J) = 0 ,$$

also wird die Magnetisierung des Inneren $J = -B_a/\mu_0$. Diese Magnetisierung *entgegen* der Feldrichtung kostet Arbeit, und zwar pro Volumeneinheit

$$E = \int_0^{B_a} J dB = -\frac{1}{\mu_0} \int_0^{B_a} B dB = -\frac{1}{2\mu_0} B_a^2 . \tag{17.94}$$

Um diesen Betrag liegt der Supraleiter im äußeren Feld energetisch *höher* als ohne Feld. Obwohl zunächst nicht einzusehen ist, warum die Elektronen im Supraleiter entgegen aller Erfahrung quer zum statischen Magnetfeld ausweichen (ohne E -Feld) und dadurch noch dazu ihren Supraleiter energetisch benachteiligen sollen, erwies sich diese Annahme als Schlüssel u. A. zum Verständnis des kritischen Feldes.

Der Übergang normal-supraleitend lässt sich nämlich thermodynamisch als Phasenübergang auffassen. Stabil ist bei gegebenem T und p

immer der Zustand mit dem kleineren $G = U - TS$ (wir schreiben U , nicht H , um Verwechslung mit dem Magnetfeld zu vermeiden; U soll aber Druck- und vor allem magnetische Arbeit umfassen). Wenn ein Magnetfeld herrscht, sind die Verhältnisse formal genauso wie beim Schmelzen oder Verdampfen: Wie der feste gegenüber dem flüssigen, liegt der supraleitende Zustand energetisch und entropiemäßig tiefer als der normale. Bei kleinen T ist er wegen seines kleineren U stabil, bei höheren T setzt sich die größere Entropie (geringere Ordnung) des Normalzustandes durch. Der Sprungpunkt ergibt sich aus $G_s = G_n$ als

$$T_c = \frac{U_n - U_s}{S_n - S_s}.$$

Direktmessungen der Entropiedifferenz $S_n - S_s$ geben bei $T \approx 0$ Werte um $10^{-3} \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$, d. h. etwa $10^{-4} k$ pro Atom. Es ist, als ob nur ein Atom (oder besser: ein Elektron) unter 10^4 sich den Entropiegewinn zunutze machte, der aus einer Entscheidung zwischen zwei oder mehr Möglichkeiten folgt ($S = k \ln 2 = 0,693 k$ für eine binäre Entscheidung wie z. B. Spin oben – Spin unten). Die Stabilisierungsenergie $U_n - U_s = T_c(S_n - S_s)$ ist ebenfalls winzig (etwa 10^{-8} eV/Atom).

Je größer das Magnetfeld, desto geringer wird dieser Unterschied $U_n - U_s$, denn die für den Meißner-Ochsenfeld-Effekt nötige Magnetisierungsarbeit $B^2/(2\mu_0)$ macht ihn teilweise zunichte. Beim maximalen kritischen Feld $B_m = B_c(0)$ ist diese Arbeit gerade gleich der Stabilisierungsenergie $U_n - U_s$:

$$\frac{1}{2\mu_0} B_m^2 = U_n - U_s.$$

Daher siegt für $B_a > B_m$ der entropiegünstigere Normalzustand. Wenn die U und S temperaturunabhängig wären, erhielte man für die Grenzkurve $T_c(B)$ allgemein eine zu kleinen T -Werten geöffnete Parabel:

$$G_s = U_s + \frac{1}{2\mu_0} B^2 - TS_s = G_n = U_n - TS_n,$$

$$T_c(B) = T_0 \left(1 - \frac{B^2}{B_m^2} \right).$$

In Wirklichkeit erhält man zwar sehr häufig eine Parabel, aber sie ist um 90° gedreht, d. h. zu kleinen B hin geöffnet. U und besonders S sind nämlich keineswegs T -unabhängig. Speziell muss bei $T \rightarrow 0$ die Entropiedifferenz zwischen den beiden Phasen nach dem 3. Hauptsatz gegen 0 gehen. Das führt dazu, dass die Grenzkurve bei $T = 0$ immer senkrecht auf die B -Achse mündet. Die Aufgaben 17.7.6–17.7.8 diskutieren die Grenzkurve genauer.

Reine Metalle zeigen meistens den beschriebenen scharfen Übergang zwischen normal und supraleitend mit vollständigem Meißner-Effekt (Typ I-Supraleiter). Bei manchen Legierungen schiebt sich zwischen beide ein **Vortex-Zustand** oder **Flussschlauch-Zustand**, in dem die Magnetisierung durch die Supraströme nicht ausreicht, um das äußere

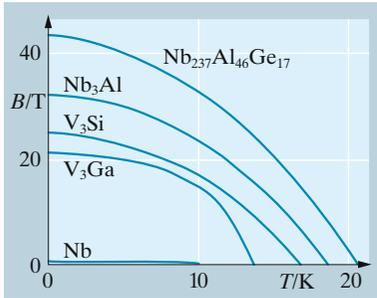


Abb. 17.89. Übergang supraleitend-normal im $B(T)$ -Diagramm für einige Legierungen mit besonders hoher Sprungtemperatur. Die Übergangskurve des „besten“ Reinmetalls (Nb) ist in diesem Maßstab kaum noch zu sehen. Die Übergangskurven von Legierungen sind nicht immer parabolisch. (Daten nach Foner u. A.)

Feld ganz abzuschirmen (Abb. 17.87). Dann dringen regelmäßig angeordnete parallele magnetische Flussschläuche ins Innere ein, deren Kern normalleitend ist. Diese Flussschläuche und ihr Wandern im elektrischen Feld bedingen einen endlichen Widerstand, der sich aber durch Kunstgriffe wie „Festnageln“ der Schläuche an **Pinning-Zentren** so weit herabsetzen lässt, dass man Stromdichten bis 10^7 A/cm^2 erreicht. Entsprechend dem unvollständigen Meißner-Effekt ist auch die Magnetisierungsarbeit kleiner und das kritische Feld höher (bis zu 100-mal höher als beim Typ I-Supraleiter). Mit diesen **harten Supraleitern** erzeugt man praktisch ohne Energieaufwand phantastische Magnetfelder mit ihren utopisch klingenden Anwendungen: reibungsfreie Hochvakuum-Wälzlager, reibungsfreie Aufhängung von Einschienenbahnen, Magnetfallen für Fusionsreaktoren, superschnelle Kernspeicher für Computer (Aufgabe 17.7.3).

Auf eine weitere wichtige Tatsache führt eine Messung der spezifischen Wärme eines Supraleiters. Diese folgt – im Gegensatz zum Verhalten im Normalzustand – oft einer exakten Arrhenius-Kurve $c = ae^{-\Delta E/(kT)}$, wo bei den meisten Stoffen $\Delta E \approx 3,5kT_0$ ist. Man deutet diese Wärme als Hebungenergie von Elektronen über eine **Energielücke** ΔE hinüber, die die bei $T = 0$ vollbesetzten Elektronenzustände von solchen trennt, die bei $T \neq 0$ durch einen „Fermi-Schwanz“ besetzt sind. Wenn das stimmt, muss man analog zum Fall des Halbleiters eine Absorptionskante finden: Photonen mit $h\nu < \Delta E$ können keine Elektronen über die Lücke heben, kürzerwellige können es. Allerdings liegen diese Photonen im cm-Wellengebiet. Eine andere Bestätigung ergibt sich aus dem Einelektronen-Tunneleffekt: Eine sehr dünne Isolatorschicht zwischen zwei Leitern kann von Elektronen durchtunnelt werden. Die Strom-Spannungs-Kennlinie setzt bei Normalleitern sofort ein, wenn auch sehr steil, dagegen bei Supraleitern erst bei einem Feld, das mit Isolatorstärke und e multipliziert genau die Energielücke ΔE ergibt. Die Energielücke ist übrigens physikalisch sonst völlig verschieden von einer verbotenen Zone im Halbleiter: Diese ist an das Gitter gebunden, die Energielücke nur an das Elektronengas.

Die Existenz der Lücke ΔE erklärt die Widerstandsfreiheit der Supraströme. Energie- und Impulssatz verbieten einen Impulsaustausch zwischen Elektronengas und Gitter, sofern ihre Relativgeschwindigkeit einen kritischen Wert nicht übersteigt, der eng mit ΔE zusammenhängt (Aufgabe 17.7.4). Die Lücke selbst wird in der **Bardeen-Cooper-Schrieffer-Theorie (BCS-Theorie)** gedeutet als Trennarbeit eines **Cooper-Paares**. Normalerweise binden zwei Elektronen passenden Impulses einander durch indirekte Wechselwirkung über Gitterphononen; um einzelne Elektronen zu machen, muss man solche Paare aufbrechen. Die Wechselwirkung kann man sich ganz grob so vorstellen: Ein Elektron erzeugt um sich eine Gitterpolarisation, indem es positive Ladungen näher an sich heranzieht, und gräbt sich so selbst einen flachen Potentialtopf. Ein anderes Elektron kann von diesem Topf mitprofitieren. Dieses primitive Bild verschweigt, warum nur jeweils zwei Elektronen beteiligt sind, warum die Bindung über so große Abstände (bis 10^4 \AA) erfolgt und vieles andere. Dass Gitterschwingungen die Supraleitung wesentlich bedingen, war schon lange experimentell aus dem **Isotopieeffekt** bekannt: Die Sprung-

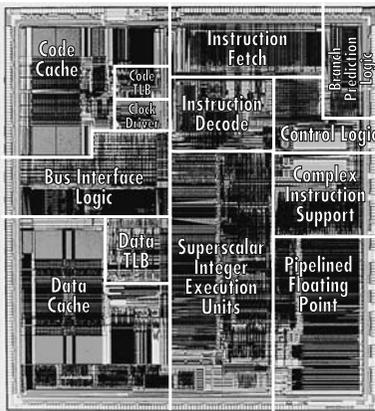
temperaturen der Isotope eines Elements hängen von der Massenzahl A genauso ab wie die Debye-Temperatur, also die typische Phononenergie: $T_c \sim A^{-1/2}$.

Elektronen können auch Cooper-paarweise durch dünne Isolatorschichten tunneln und verhalten sich dann ganz anders als Einzelelektronen (s. oben), nämlich scheinbar völlig absurd. Ohne jedes angelegte Feld fließt schon ein Tunnel-Gleichstrom (**Josephson-Gleichstrom**). Das wäre noch kein Wunder, wenn die Isolatorschicht irgendwo unterbrochen wäre, denn ein kompakter Supraleiter kann das auch. Legt man aber eine kleine *konstante* Spannung U an die Josephson-junction, dann fließt ein *Wechselstrom* mit der Frequenz $\omega = 2eU/\hbar$, die bei durchtunnelbaren Schichtdicken (etwa 10 \AA) und damit vereinbaren Spannungen (μV , höchstens mV) schon im mm- bzw. Ultrarotgebiet liegt (**Josephson-Wechseleffekt**). Die Herstellung eines solchen Mikrowellengenerators ist im Prinzip spottbillig: Man dampft einen Metallstreifen auf ein Deckglas, lässt etwas Luft in die Aufdampfanlage, bis sich eine Oxidhaut gebildet hat, dampft dann kreuzweise einen anderen Streifen darüber, bringt Elektroden an, schirmt gegen das Erdmagnetfeld ab und steckt das Ganze in flüssiges Helium. Auch theoretisch ist die Sache „ganz einfach“, sobald man Quantenmechanik kann, und den Mut zum scheinbaren Paradoxon hat, wie der Student *Brian Josephson* (Nobelpreis 1973). Elektronen sind ψ -Wellen. Das ganze Cooper-gekoppelte Elektronengas hat eine ψ -Welle mit einem gemeinsamen Wert der Phase. Diese feste Phasenkopplung wird durch die Isolatorschicht durchbrochen. Es wäre Zufall, wenn beide Supraleiter mit derselben Phase schwängen. Ein Elektronenpaar, das den Potentialwall der Isolierhaut durchtunneln will, ändert dabei seine Phase um einen bestimmten Betrag. Nun kommt es darauf an, ob es drüben mit der richtigen Phase ankommt, wie sie das dortige Elektronengas hat; nur dann kann es sich in dessen Schwingung einfügen; wenn nicht, wird es an der Grenzfläche reflektiert und geht wieder heim auf die andere Seite, wo es im Idealfall automatisch mit der richtigen Phase ankommt. Man kann sich leicht überlegen, dass die Zulassungsbedingungen für die beiden Stromrichtungen verschieden streng sind, außer in dem praktisch ausgeschlossenen Fall, dass die Phasenänderung innerhalb der Isolierhaut ein exaktes Vielfaches von π ist. Die Differenz der beiden Stromrichtungen ist der Josephson-Gleichstrom.

Eine Gleichspannung U verschiebt die Energieniveaus von Cooper-Paaren in den beiden Supraleitern um $2eU$ gegeneinander. Wegen $E = \hbar\omega$ sind die beiden ψ -Wellen dann um $\Delta\omega = 2eU/\hbar$ verstimmt. Mit dieser Schwebungsfrequenz wechseln die Zulassungsbedingungen ihren Sinn, wechselt also der Tunnelstrom sein Vorzeichen. Wie ein elektrisches Feld die Phase zeitlich moduliert, so moduliert ein Magnetfeld sie räumlich. Wie die Schwebungsfrequenz aus $\hbar\omega = 2eU$, so folgt die Wellenlänge dieser räumlichen Modulation aus $\hbar k = h/\lambda = 2eBd$. Längs der Isolierhaut (Länge l) wechseln Bereiche mit verschiedener Stromrichtung ab, und wenn l eine ganze Anzahl solcher Wellenlängen λ enthält, heben sich alle Teilströme auf: Der Josephson-Gleichstrom, über B aufgetragen, oszilliert mit der Periode $\Delta B = h/(2eld)$. Dieser Effekt unterscheidet den Josephson-Gleichstrom vom trivialen Fall einer löchrigen Isolierhaut.

Wenn man mit Magnetfeldern normaler Größe solche Interferenzen der Teilströme in einer Josephson-junction erzeugen will, muss man diese sehr großflächig machen (Aufgabe 17.7.5). Die Interferenz tritt aber auch in einem Draht ein, der durch *zwei* junctions unterbrochen ist. Man misst dann direkt und äußerst genau den Magnetfluss, den der Ring umschließt. Diese **Quanteninterferenz** kann zwischen zwei meterweit auseinander liegenden junctions eintreten, obwohl das Magnetfeld überhaupt nicht in den verbindenden Draht eindringen kann. Die Anwendungsmöglichkeiten des Josephson-Effekts sind mit Mikrowellengeneratoren, der Präzisionsmessung von e/h und Hochleistungs-Magnetometern sicher noch längst nicht erschöpft.

Seit Müller und Bednorz (1986, Nobelpreis 1987) die scheinbar unüberwindbare 23 K-Schranke durchbrachen, ist die Rekord-Sprungtemperatur bis über 100 K geschnellt. Nach anfänglicher Skepsis hat man bei diesen „heißen“ Supraleitern alle drei Signaturen des Überganges zur Supraleitung bestätigt: Verlust des Widerstandes, Meißner-Effekt (Übergang zum idealen Diamagnetismus) und Anomalie der spezifischen Wärme infolge des Entropiesprunges. Es handelt sich um Metalloxide wie z. B. $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ mit so genannter perowskit-ähnlicher Struktur. Beim Perowskit ABO_3 sitzt im Zentrum eines B-Würfels ein A (und umgekehrt, Abb. 6.53); die Kantenmitten sind durch O besetzt, sodass jedes B von einem O-Oktaeder umgeben ist. Die Aufklärung des Supraleitungsmechanismus in diesen **Hochtemperatur-Supraleitern** ist ein aktuelles Forschungsgebiet der theoretischen Physik. Sprödigkeit, komplizierte Synthese und bereits in der atomaren Struktur angelegte starke Anisotropie sind z. Z. noch Nachteile für die technische Anwendung, denen der mögliche Wegfall der He-Kühlung und ein relativ geringer Isolationsaufwand gegenübersteht.



Der Pentium-Mikroprozessor von Intel. 3,3 Millionen Transistoren (MOSFETS) wurden auf einer Fläche von $1,6 \times 1,6 \text{ cm}^2$ integriert. Taktfrequenz 66 oder 100 MHz, Busbreite 32 bits, minimale Strukturen $0,5 \mu\text{m}$ in 3 Metallisierungsebenen (kleiner als die Bildschirmpixels)

▲ Ausblick

Das jüngste Teilgebiet der Physik hat in wenigen Jahrzehnten den bedeutendsten Industriezweig Ostasiens, auch der USA begründet und ziemlich die einzigen Waren produziert, die rapide billiger werden: Nach dem „Gesetz“ von Moore (s. Beispiel S. 528) sinkt der Preis für ein Speicherbit in Cents wie $e^{-t/3}$ (t in Jahren seit 1970). CD, CCD, LCD, PC und eine Flut anderer Akronyme bezeichnen eine Revolution, der wir fast alle materiell gierig, geistig weniger vollständig folgen. Ob spätere Historiker auf die Eisen- eine Siliziumzeit folgen lassen werden, wie Hans Queisser in seinem schönen Buch „Kristallene Krisen“ vermutet, oder ob der Biochip das Si bald ablösen wird? C kann ja noch viel mehr als Si, unser Gehirn bei wesentlichen Aufgaben mehr als der Cray-Computer. Bistabile organische Moleküle als vorläufig äußerste Stufe der Miniaturisierung von 0-1-Speichern gibt es zur Genüge; schwierig ist es nur, sie zusammenzuschalten. In künstlichen, wenn auch noch groben und langweiligen Welten kann man schon spazieren gehen. Wird man unsere Weltprobleme bald mit künstlicher Intelligenz besser lösen als mit der natürlichen?

✓ Aufgaben ...

WWW CD

●● 17.1.1 Eisen-Kristall

Bis 910 °C aufwärts kristallisiert reines Eisen im α -Gitter (**kubisch-raumzentriert**, ferromagnetisch), oberhalb im γ -Gitter (**kubisch-flächenzentriert**, nichtferromagnetisch). In welchem der beiden Gitter gibt es mehr Zwischenraum? In welchem haben kugelförmige Zwischengitterteilchen mehr Platz? Wie viele dafür geeignete Plätze gibt es in den beiden Gittern? Wenn zwischen den obigen Aussagen ein scheinbarer Widerspruch auftritt, wie behebt er sich? Was schließen Sie daraus über das Verhalten von Zwischengitterteilchen, z. B. C-Atomen, beim Abkühlen aus der Schmelze, beim Anlassen (Erhitzen auf 200–600 °C), beim Abschrecken des angelassenen Werkstücks? Wenn bei einer dieser Gelegenheiten das Gitter zu eng wird für die C-Atome, was wird die Folge sein? Ziehen Sie Schlüsse über Härte, Duktilität usw.

●● 17.1.2 Diamant-Schleiferei

Der Diamantschleifer unterscheidet Oktaeder-, Dodekaeder- und Würfelflächen, die entsprechende Wuchsformen des Kristalls begrenzen, die er aber auch im Innern erkennt. Können Sie diesen Flächen bestimmte Netzebenen zuordnen? Der Schleifer spaltet einen Diamanten, indem er einen Stahlkeil längs einer bestimmten potentiellen Kristallfläche ansetzt und kurz und scharf mit einem Hämmerchen zuschlägt. Wie ist das möglich, da doch Diamant viel härter ist als Stahl? Am leichtesten spaltet man längs Oktaederflächen, wesentlich weniger leicht längs Dodekaederflächen, noch schlechter längs Würfelflächen und praktisch gar nicht in anderer Richtung. Innerhalb jeder Flächenart muss man, um die verbleibenden Unebenheiten wegzubringen oder ganze Schichten abzutragen, in bestimmten „guten“ Richtungen schleifen. In der Würfelfläche ist die Kantenrichtung gut, die Diagonale schlecht. In der Oktaederfläche schleift man besser auf eine Kante zu als auf eine Spitze. Der Schlag eines spitzen Meißels senk-

recht auf eine Oktaederfläche erzeugt eine sechseckige, auf eine Würfelfläche eine quadratische, auf eine Dodekaederfläche eine rhombische Narbe. Können Sie diese empirischen Regeln atomistisch deuten?

●● 17.1.3 Madelung-Konstante

Bestimmen Sie die Gitterenergie für eine eindimensionale Kette von abwechselnd positiven und negativen Ionen. Probieren Sie zunächst, wie die auftretende Reihe konvergiert. Dann erinnern Sie sich an die In-Reihe: $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - + \dots$. Wenden Sie dies an auf eine NaCl-Kette mit einem Ionenabstand wie im vollständigen Kristall (Dichte von NaCl 2,165 g cm⁻³).

●● 17.1.4 Gitterpotential

Die Potentialkurve eines Gitteratoms ergebe sich aus einer Coulomb-Anziehung ($E_{\text{pot}} = -Ar^{-1}$) und einer viel steileren Abstoßung ($E_{\text{pot}} = Br^{-n}$). Lesen Sie aus einem solchen Potential ab: Lage und Tiefe des Potentialminimums, Krümmung in seiner Umgebung. Wie muss man über die Konstanten A , B und n verfügen, damit ein vernünftiger Kristall herauskommt? Sind diese Parameterwerte selbst vernünftig? Welche empirischen Daten kann bzw. muss man zu einer solchen Anpassung benutzen: Gitterkonstante, Verdampfungswärme, Gitterschwingungsfrequenzen, o. Ä.?

●● 17.1.5 Thermische Ausdehnung

Führen Sie die im Abschn. 17.1.4 angegedeutete Theorie der **thermischen Ausdehnung** quantitativ durch (rechnerisch oder graphisch, am besten beides). Legen Sie vereinfachend den Schwingungsmittelpunkt mitten zwischen die Endpunkte der Schwingung auf der Potentialkurve. Ist das eine zulässige Vereinfachung?

●● 17.1.6 E-Modul

Ein Festkörper sei einer elastischen Spannung (z. B. einer Zugkraft) ausgesetzt. Welchen Einfluss hat das auf die Potentialkurve des Gitterteilchens?

Wie verschiebt sich speziell ihr Minimum? Wie sind also die elastischen Konstanten (**E-Modul** usw.) durch die Parameter der Potentialkurve auszudrücken? Ergibt sich auch die Festigkeitsgrenze, und sind die Werte, die für sie herauskommen, vernünftig? Wenn nein, warum wohl nicht?

●● 17.1.7 Gitterenergie

Welche Größenordnung erwarten Sie für die Gitterenergie in den verschiedenen Bindungstypen aus dem atomistischen Modell? Hinweise: Es handelt sich manchmal, aber nicht immer um die Wechselwirkungsenergie nächster Nachbarn. Das Dipolmoment des H₂O kommt so zustande, dass das O 0,3 negative, die H je 0,15 positive Elementarladungen tragen: der O-H-Abstand ist ziemlich genau 1 Å, der Valenzwinkel 105°; zwei Moleküle in Wasser oder Eis sind 2,6 Å voneinander entfernt (vgl. die makroskopische Dichte). Beim Na wirkt auf das Valenzelektron (3s) als effektive Kernladung nur noch etwa $2e$ (warum?); wie groß ist der Bohrradius? Welche Nullpunktsenergie hat ein Elektron in einem Potentialtopf dieses Durchmessers? Das Metall bietet den Leitungselektronen einen gemeinsamen Potentialtopf an, der so weit ist, dass die Nullpunktsenergie gleich der Fermi-Energie wird.

●● 17.1.8 Diamant und Eis

Die C-Atome im **Diamant** und die H₂O-Moleküle im **Eis** sind effektiv beide vierwertig und haben tetraedrische Bindungssymmetrie. Warum wählt trotzdem Diamant die kubisch-flächenzentrierte, Eis die hexagonale Kristallstruktur? Es genügt, ein Paar nächster Nachbarteilchen und die Verteilung der Ladungen über ihre Bindungen zu betrachten.

●● 17.1.9 Reziprokes Gitter

Zeigen Sie, dass man auf folgende Weise das Beugungsbild eines Kristalls im monochromatischen Röntgenlicht erhält: Man hält das Auge dahin, wo der Kristall war, und stellt ein Modell des reziproken Gitters, ebenso

orientiert wie der Kristall und z. B. im Maßstab $10^8:1$ (1 cm für 1 Å), im Abstand $2\pi 10^8/\lambda$ in Richtung des Primärstrahls vor das Auge. Dann sieht man Gitterpunkte genau in den Richtungen, wo Reflexe liegen.

●● 17.1.10 Bucky ball

Wenn man aus regulären Fünfecken und Sechsecken ein Polyeder bauen will, geht das nur mit genau 12 Fünfecken. Wieso? Wie viele Sechsecke müssen dazukommen?

●● 17.2.1 Abtasttheorem

Zeichnen Sie das Momentbild einer Sinuswelle in ein eindimensionales Punktgitter ein. Stellen Sie die gleiche Welle auch analytisch dar. Gibt es eine andere Welle, die genau die gleichen Auslenkungen der Gitterpunkte darstellt? Betrachten Sie die Fälle $\lambda < 2d$ und $\lambda > 2d$ (d : Gitterkonstante). Wenn es eine äquivalente Welle gibt, untersuchen Sie die Beziehung zwischen ihrer Wellenlänge λ' und dem λ der ursprünglichen Welle. Jetzt gehen Sie zu fortschreitenden Wellen über. Wie verhalten sich die Ausbreitungsrichtungen der beiden äquivalenten Wellen? Vereinfachende Annahme: Phasengeschwindigkeit unabhängig von λ . Alle Fragen lassen sich leichter analytisch beantworten (besonders wenn man den k -Vektor einführt), obwohl die Zeichnung anschaulicher ist.

●● 17.2.2 Einsteins spezifische Wärme

Führen Sie folgende Betrachtungen parallel für die klassische und die **Einstein-Theorie der spezifischen Wärme** eines Festkörpers durch. Kontrollieren Sie dabei quantitativ Abb. 17.28. Wie kommt die T -Unabhängigkeit der Gesamtzahl von Oszillatoren zum Ausdruck? Welchen Einfluss hat die Temperatur? Welche Energie haben die meisten Oszillatoren? Welche Oszillatoren leisten den größten Gesamtbeitrag zur Energie? Wie viele solche Oszillatoren gibt es? Wie breit ist die Verteilung des Energiebeitrags? Schätzen Sie daraus die Gesamtenergie und die spezifische Wärme. In welchem Grenzfall

geht die Einstein-Theorie in die klassische über? Kann man das anschaulich sehen? Wie erklärt sich anschaulich die Abweichung zwischen beiden Theorien im anderen Grenzfall?

●● 17.2.3 Debyes spezifische Wärme

Setzen Sie in Aufgabe 17.2.2 für „klassische“ das Wort „debyesche“ und beantworten Sie alle Fragen. Was können Sie über die Güte der T^3 -Näherung für **Debyes spezifische Wärme** anschaulich sagen? Warum gilt sie nur bei so kleinen Temperaturen? Was geschieht im Übergangsbereich?

●● 17.2.4 Wie zählt man Wellen?

Eigentlich hat *Rayleigh* die Idee gehabt, die *Wien* und *Planck* für ihre Strahlungsgesetze und *Debye* für seine spezifische Wärme nutzen konnten. Zeigen Sie Analogien und Unterschiede zwischen (11.11), (11.12), (11.13) und (17.29) auf.

●● 17.2.5 Dispersion

Bei $m_1 = m_2$ lässt sich die Wurzel in der **Dispersionsformel** (17.37) einfach „ziehen“. Worin besteht der Unterschied zum Fall (17.32)? Kommt ein optischer Zweig zustande? Wenn ja, wie ist das trotz der Massengleichheit möglich? Existiert zwischen den beiden Zweigen ein verbotener ω -Bereich? Bestimmen Sie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit für beide Zweige.

●● 17.2.6 Phononenstoß

Zwei Phononen mit λ dicht oberhalb $2d$ und nicht zu verschiedenen Ausbreitungsrichtungen kollidieren und bilden ein drittes Phonon. Welche Werte von λ , k , v hat das neue Phonon (Annahme: keine Dispersion)? Wie sieht die entsprechende Gitterwelle aus? Befolgt sie **Debyes** Abschneidebedingung? Wenn nein, kann man die gleiche Bewegung der Gitterpunkte auch durch eine zulässige Welle darstellen? Welchen k -Vektor hat diese Welle (k_3)? Unter welchen Umständen ist k_3 dem k der ursprünglichen Phononen entgegengerichtet?

Wie muss man den Vorgang deuten? Gilt Impulserhaltung unter den drei Phononen, oder wie sonst? (Vgl. Aufgabe 17.2.1.)

●● 17.2.7 Steinsalzoptik

Welche Beziehungen bestehen zwischen DK, Absorptionsgrad und Reflexionsgrad eines Kristalls? Vergleichen Sie z. B. Abb. 11.33 und 17.38.

●● 17.2.8 Leitet Diamant?

Diamant (besonders synthetischer) ist ein besserer Wärmeleiter als Kupfer, aber ein sehr guter elektrischer Isolator. Wie erklären Sie diese flagrante Verletzung der Regel von *Wiedemann-Franz*?

●● 17.2.9 Leitet Germanium?

Diskutieren Sie Abb. 17.44. Warum leitet reines ^{74}Ge die Wärme besser als das natürliche Isotopengemisch? Wie würden Sie die Funktion $\lambda(T)$ bei sehr tiefen Temperaturen quantitativ darstellen, und wie erklären Sie dieses Verhalten? Warum nimmt λ bei höheren Temperaturen wieder ab?

●● 17.3.1 Fermi-Grenze

Wie hoch liegt die **Fermi-Grenze** für die Leitungselektronen in einem Metall, einem Halbleiter, einem Plasma? Beschaffen Sie sich vernünftige Werte für die erforderlichen Größen. Sind diese Elektronengase entartet?

●● 17.3.2 Brillouin-Zonen

Wir betrachten einen einfachkubischen Kristall mit der Gitterkonstante d . Bei den „kritischen“ Werten nh/d des Elektronenimpulses treten eigentümliche Effekte für ein Elektron in einem solchen Kristall auf; welche? (**Braggs Reflexionsbedingung!**) Gibt es fortschreitende ψ -Wellen mit solchen Impulsen? Welche Phasenlagen kommen für stehende Wellen in Frage? Wo ist die Elektronendichte maximal? Wie wirkt sich das auf die Energie der Zustände aus? Wie viele W -Werte existieren demnach für jeden „kritischen“ Impuls? Wie muss sich die für ein freies Teilchen übliche Beziehung zwischen Energie und Impuls bei einem Kristallelektron verzerren? Kann man in diesem Bild

Energiebänder und verbotene Zonen wiedererkennen?

●● 17.3.3 Effektive Masse

Wenn ein „Teilchen“ nicht mehr lokalisierbar ist, kann man auch nicht mehr im üblichen Sinne von Geschwindigkeit und Beschleunigung reden. Sein mechanisches Verhalten muss vielmehr durch Energie und Impuls, bzw. durch Frequenz und Wellenlänge seiner ψ -Welle ausgedrückt werden. Die Geschwindigkeit lässt sich nur als Gruppengeschwindigkeit dieser Welle angeben. Wie drückt sie sich durch die $E(p)$ -Abhängigkeit aus? Wie findet man daraus die Größe, die die Rolle der trägen Masse spielt (**effektive Masse**)? Man beachte: Nach wie vor ist die Kraft gleich der zeitlichen Impulsänderung. Wenn die $E(p)$ -Kurve verzerrt ist wie im Kristall, wird die effektive Masse abhängig von W . Wie verhält sie sich an den Rändern bzw. in der Mitte der Bänder?

●● 17.3.4 Elektron und Loch

Arbeiten Sie die Analogie zwischen Elektronen und Defektelektronen (Löchern) heraus. Kann man den Löchern Ladung, Masse, Energie, Impuls zuschreiben? Ist ein Loch ein Antiteilchen?

●● 17.3.5 Quanten-Hall-Effekt

Klaus v. Klitzing (Nobelpreis 1985) fand, dass der **Hall-Widerstand** R_H (Querspannung/Strom) in manchen sehr dünnen Halbleiterschichten bei riesigen Magnetfeldern B und sehr tiefen Temperaturen T , als Funktion der Spannung U aufgetragen, Stufen bei den R_H -Werten $nh/(2e^2)$ aufweist. Drücken Sie R_H durch die geometrischen und sonstigen Eigenschaften des Halbleiters aus. Warum müssen die Werte B , T usw. so extrem sein, damit man den Effekt messen kann? Geben Sie sinnvolle Kombinationen dieser Werte an. Versuchen Sie eine Erklärung auf folgender Basis: Immer, wenn auf ein Elektron im Halbleiter genau ein magnetisches **Flussquant** oder eine ganze Zahl davon entfällt, passiert etwas Besonderes. Haben die

Kreisbahnen im entsprechenden Magnetfeld etwas mit Bohr-Bahnen zu tun?

●● 17.4.1 Reiner Halbleiter

Bei einem **Isolator** sind das höchste vollbesetzte und das niederste leere Band durch eine verbotene Zone der Breite E_0 getrennt. Diskutieren Sie die Bildung thermischer Ladungsträger und ihre Rekombination. Kommt es für die Gleichgewichtsbesetzung der Bänder auf den Rekombinationskoeffizienten an? Wenn nicht, wo spielt dieser eine Rolle? Welche Temperaturabhängigkeit erwarten Sie für den spezifischen Widerstand? Wie kann man aus Widerstandsmessungen die Breite der verbotenen Zone bestimmen?

●● 17.4.2 Isolator

Die besten Isolatoren haben eine Breite der verbotenen Zone von 3–5 eV (warum nicht mehr?) und relative Verunreinigungen von etwa 10^{-6} (ein Fremtteilchen auf 10^6 Gitterteilchen). Welche Größenordnungen für Trägerbeweglichkeit und Leitfähigkeit ergeben sich daraus?

●● 17.4.3 Dotierung

Die Dielektrizitätskonstante von Ge ist 31, von Si 17,3. Ein Einkristall eines dieser Stoffe enthalte einige As- und Ga-Atome. Was wird aus den überschüssigen bzw. fehlenden Elektronen dieser Fremdatome? Was für lokalisierte Zustände sind mit den Fremtteilchen verbunden? Kann man sie als **wasserstoffähnliche Systeme** auffassen? Können Sie Energie, bohrsche Radien usw. für diese Zustände angeben?

●● 17.4.4 Beweglichkeit

Sie wollen Konzentration, Beweglichkeit und Vorzeichen der Ladungsträger in einem Halbleiter bestimmen. Welche Messungen müssen Sie mindestens ausführen?

●● 17.4.5 Randschicht

Ein metallisch leitender oder halbleitender Kristall wird in ein Kondensatorfeld gebracht (ohne Kontakt

mit den Kondensatorplatten). Zeichnen Sie die evtl. Verschiebung in der Bandstruktur und der Fermi-Grenze. Wo sitzt die Flächenladung und wie groß ist sie? Kann sie in einer unendlich dünnen Schicht konzentriert sein? Benutzen Sie die Begriffe des elektrochemischen Potentials und der Debye-Hückel-Länge. Vergleichen Sie mit der im Text gegebenen Dicke der **Randschicht** in Dioden und Transistoren.

●● 17.4.6 Kontaktierung

Ein n -Halbleiter ist mit einem Metall kontaktiert, dessen Fermi-Grenze tiefer liegt als das Donatorniveau des Halbleiters. Was geschieht beim Kontaktieren mit den Bändern und Elektronen? Zeichnen Sie die Bandstruktur vor und nach der Kontaktierung. Wie läuft die Fermi-Grenze danach? Wie dick ist die Randschicht? Welche Gesamtladung sitzt darin? Felder welcher Größenordnung sind nötig, um die Randschicht ganz „zuzuwehen“? Was geschieht, wenn man eine Spannung zwischen Metall und Halbleiter legt? Betrachten Sie beide Polaritäten.

●● 17.4.7 Diodenkennlinie

In Abb. 17.63 ist der Verlauf der Bandränder nicht ganz exakt gezeichnet. Wenn Sie den Fehler finden, haben Sie die Berechnung der Strom-Spannungs-Kennlinie der Diode in der Hand. Hinweise: Warum sind die Bänder außen horizontal und nur in der Übergangsschicht geneigt? Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen rechts und links? Wie dick muss die Übergangsschicht sein, um den Übergang zu vermitteln? Wodurch sind die Widerstände in Sperr- und Durchlassrichtung bestimmt?

●● 17.4.8 Thermolumineszenz

Ein Halbleiter habe Donatoren (Traps), die ziemlich tief (ca. 1 eV) unter dem Leitungsbandrand liegen. Wie können die dort sitzenden Elektronen ins Leitungsband kommen? Diskutieren Sie besonders die thermische Befreiung. Welche T -Abhängigkeit erwarten Sie für die Freisetzungsrate?

Wie kann man die Traptiefe aus Leitfähigkeitsmessungen bestimmen (Aktivierungsenergie)? Was geschieht, wenn man die Temperatur allmählich steigert (Thermolumineszenz oder **Glowkurve**)?

●● 17.4.9 Kristallphosphor

Schnelle Elektronen, die in ZnS oder ähnlichen Kristallen gebremst werden, heben Valenzelektronen ins Leitungsband, von wo sie unter Lichtemission zurückfallen können. Kann man solche „Phosphore“ für Fernsehschirme benutzen? Welche Bedingungen stellen Sie an das Emissionsspektrum, die Nachleuchtdauer usw. eines solchen **Phosphors**? Wie drücken sich diese Bedingungen im Bändermodell aus? Welche Eigenschaften ergeben einen guten Phosphor für Leuchtzifferblätter?

●● 17.4.10 Trägerkonzentration

Diskutieren Sie Abb. 17.57. Was hat man gemessen, um diese Daten zu gewinnen? Was bedeutet der geradlinige Abfall, was bedeutet seine Neigung? Warum erfolgt Sättigung bei höheren Temperaturen? Wie werden sich die drei Proben unterscheiden? Können Sie die As-Konzentration schätzen? Warum biegen die höheren Kurven erst später in die Sättigung ein? Verlaufen die $\sigma(T)$ -Kurven sehr viel anders? Annahme: $\mu \sim T^{-3/2}$; was berechtigt zu dieser Annahme? Welche weiteren Messungen braucht man, um sie zu prüfen?

●● 17.4.11 Minimale Leitfähigkeit

Schätzen Sie die „minimale metallische Leitfähigkeit“, die einer freien Weglänge von der Größenordnung des Atomabstandes entspricht. Unter welchen Umständen erwartet man solche Werte?

●● 17.4.12 Excitonen

Abbildung 17.60 zeigt den Absorptionskoeffizienten von Cu_2O bei 77 K als Funktion der Photonenenergie. Wie sieht ein Cu_2O -Kristall aus? Hängt die Farbe wesentlich von der

Dicke des Kristalls ab? Was bedeuten die Peaks? Können Sie ein Seriengesetz für die Peakenergien aufstellen? Wo erwarten Sie den Grundzustand? Kann man aus diesem Energiewert etwas über die Eigenschaften des Kristalls schließen (DK)? Kann man aus der Breite der Peaks Aussagen über den Kristall machen? Wie wird die Absorptionskante aussehen, wenn man sie bei Zimmertemperatur misst?

●● 17.4.13 Solarzelle

Warum haben **Solarzellen** nur 10–20% Wirkungsgrad? Denken Sie an die Form der Diodenkennlinie!

●● 17.4.14 Goethes Leuchtsteine

Um 1630 fand der Schuster und Alchimist *Vincenzo Casciarolo* in Bologna, dass gewisse schwere und glänzende Steine vom nahen Monte Paterno, mit Kohle und Kalk geglüht, nachts leuchten, nachdem sie vorher beleuchtet worden waren. Goethe berichtet in der „Italienischen Reise“, er habe „ein Achtelzentner dieses Schwerspats aufgepackt“, und in der „Farbenlehre“, er habe die Steine durch verschiedenfarbige Glasscheiben beleuchtet: „Den Bononischen Phosphoren teilt sich das Licht mit durch blaue und violette Gläser, keineswegs aber durch gelbe und gelbrote; ja ... die Phosphoren, welchen man durch violette und blaue Gläser den Glühschein mitgeteilt, wenn man solche nachher unter gelbe und gelbrote Scheiben gebracht, früher verlöschen als die, welche man im dunklen Zimmer ruhig liegen lässt.“ 50 Jahre später fand *Edmond Becquerel*, dessen Sohn Henri die Uranstrahlung entdeckte, dasselbe mit einem Prisma, ohne eine Erklärung zu wissen. Wissen Sie eine?

●● 17.6.1 Diffusion

Weisen Sie nach, dass (17.88) eine Lösung der **Diffusionsgleichung** ist und der Anfangsbedingung entspricht, dass bei $t=0$ alle Moleküle am gleichen Platz waren.

● 17.6.2 Escargots gratinés

Man sagt, alle deutschen Weinberg-schnecken seien aus kulinarischen

Gründen durch die Mönche importiert worden. Unter vernünftigen Annahmen über Dichte und Gründungszeit der Klöster, die mittlere Marschgeschwindigkeit einer Schnecke und die Wegstrecke, nach der sie Halt macht, um dann in irgendeiner anderen Richtung weiterzukriechen: Wie lange hat es gedauert, bis von den Kloostergärten aus ganz Deutschland von Schnecken bevölkert worden ist?

● 17.6.3 Random walk

Ein Betrunkener torkele zwar noch mit normaler Schrittfrequenz, aber der nächste Schritt könne mit gleicher Wahrscheinlichkeit in alle Richtungen erfolgen, unabhängig von der Richtung des vorherigen Schrittes. Er erkenne sein Haus erst und mache Anstalten zum Eintreten, wenn er direkt davorsteht. Das Haus habe eine Breite b und eine Entfernung a vom Wirtshaus. Wie lange dauert im Mittel der Heimweg?

●● 17.7.1 Perfekter Leiter

Ein normaler Leiter im statischen Magnetfeld B wird durch die Maxwell-Gleichungen und das ohmsche Gesetz beschrieben. Weisen Sie nach, dass danach B sich nicht ändern kann, wenn die Leitfähigkeit sich beliebig ändert, selbst wenn sie sehr groß wird. Wenn man nach diesem Übergang zum perfekten Leiter das äußere Magnetfeld abschaltet, bleibt es im Leiterinnern trotzdem „eingefroren“. Vergleichen Sie mit dem Verhalten eines Supraleiters.

●●● 17.7.2 Meißner-Ochsenfeld-Effekt

(a) Wie dick ist die supraströmführende Schicht, die beim Meißner-Ochsenfeld-Effekt das Innere feldfrei hält? Benutzen Sie die Maxwell-Gleichungen und die Stromdichte $j = nev$. Betrachten Sie z. B. einen langen Draht mit der Achse parallel zum äußeren Magnetfeld. (b) Zeigen Sie, dass die Feldverhältnisse beschrieben werden, wenn man annimmt, dass überall im Supraleiter für die Elektronen die Größe $mv - eA$

verschwindet. A ist das Vektorpotential, aus dem sich das \mathbf{B} -Feld wie $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ und der induktive Beitrag zum \mathbf{E} -Feld wie $-\dot{\mathbf{A}}$ ableitet (im Ganzen also $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \dot{\mathbf{A}}$). Würde $m\mathbf{v} - e\mathbf{A} = 0$ auch für den perfekten Leiter mit $\rho = 0$ zutreffen? Wenn nicht, wie mag sich das abweichende Verhalten des Supraleiters erklären? (c) Zeigen Sie, dass für einen Supraleiterring $m\mathbf{v} - e\mathbf{A} = 0$ nur erfüllt sein kann, wenn der durch den Ring tretende Magnetfluss gequantelt, d. h. ein ganzzahliges Vielfaches von h/e ist. Beachten Sie dabei, dass der Drehimpuls der im Ring umlaufenden Elektronen genauso gequantelt ist wie für um den Kern „umlaufende“ Elektronen (warum? vgl. Abschn. 13.7.1), beachten Sie die Zusammenhänge zwischen v , p und k .

●● 17.7.3 Magnetaufhängung

„Die Welt“, 1.4.1999: Die Supra-Einschienebahn Berlin–Hamburg „rollte“ um 10^{00} von der Kreuzberg-Rampe (350 m ü. d. M.) ab und erreichte die Hamburger Michaelsrampe (ebenfalls 350 m) um 10^{59} . Aufenthalt 1 Minute. Seitdem funktioniert die 1-Stunde-Intercityverbindung Tag und Nacht. Die Frage nach den Motoren quittieren die Ingenieure mit dem gleichen Grienien wie vor hundert Jahren die Frage, wo denn das Pferd in der Lokomotive sei: Es gebe keine, weder im Zug noch außerhalb. Die blanken Zylinder seien „Helium-Superinsulators“. – Für wie utopisch halten Sie das?

●● 17.7.4 Cooper-Paar

Einzelelektronen im Supraleiter haben i. Allg. die Energie-Impuls-Abhängigkeit $W = \Delta W + p^2/(2m)$. ΔW ist die Energielücke. Was bedeutet diese Abhängigkeit? Die energetisch höchsten **Cooper-Paare** liegen bei $W = 0$. Ein Gas von Cooper-Paaren bewege sich als Ganzes mit v gegen das Gitter. Der Impuls ist dann im System des bewegten Elektronengases zu rechnen, denn die

Lücke ist an dieses gebunden. Gebremst werden können die Elektronen nur, indem Paare aufgebrochen und Elektronen in Zustände mit passenden Impulsen gehoben werden. Zeigen Sie, dass Energie- und Impulssatz eine solche Bremsung nur oberhalb einer gewissen kritischen Geschwindigkeit erlauben, und schätzen Sie diese. Wie groß können also Suprastromdichten werden?

●● 17.7.5 Josephson-Wechselstrom

Schätzen Sie den Tunnelstrom durch eine 10 \AA -Oxidschicht zwischen zwei Supraleitern (Abschn. 13.7.2; das Elektronenpotential im Oxid liege etwa um 3 V höher als im Metall). Mit welcher Frequenz oszilliert der **Josephson-Strom**, wenn man 1 mV an die Junction legt? Die Kontaktfläche habe 1 cm Seitenlänge. Bei welchem Magnetfeld wechselt erstmalig das Vorzeichen des Josephson-Gleichstroms?

●● 17.7.6 Energielücke

Die Breite W_g der Lücke im Energiespektrum des Elektronengases eines Supraleiters ist temperaturabhängig: Bei $T \approx 0$ hat sie ihren vollen Wert $W_{g0} \approx 3,5kT_0$, bei Annäherung an die Sprungtemperatur T_0 (für $B = 0$) nimmt sie sehr schnell ab und verschwindet ganz für $T = T_0$. Bei $T = T_0$ bleibt keinerlei Unterschied zwischen supraleitendem (s) und normalem (n) Zustand. Vergleichen Sie den Übergang $s \leftrightarrow n$ im Magnetfeld und ohne Magnetfeld mit dem zwischen Wasser und Dampf. Vergleichen Sie vor allem die Werte G , H , S der beiden jeweils konkurrierenden Phasen. Wie verhalten sich speziell H_n , H_s bzw. S_n , S_s bei $T = T_0$? Gibt es ein analoges Verhalten im Fall der Verdampfung? Betrachten Sie den ganzen Verlauf der Siede-Grenzkurve. *Ehrens fest* definierte **Phasenübergänge 1., 2., 3. Ordnung**: Am Übergang 1. Ordnung macht H einen Sprung, am Übergang 2. Ordnung nur einen Knick (Unstetigkeit der ersten Ableitung),

beim Übergang 3. Ordnung ist erst die zweite Ableitung von H unstetig usw. Von welcher Ordnung sind die diskutierten Übergänge? Wie verläuft die spezifische Wärme, speziell bei konstantem Druck, am Übergang? Wie verläuft die Entropie? In welchen Fällen tritt eine „latente“ Umwandlungswärme auf? Wann sind Überhitzung und Unterkühlung möglich, wann ist Keimbildung nötig?

●● 17.7.7 Sprungpunkt

Wie in Aufgabe 17.7.6 festgestellt, werden supraleitender und normaler Zustand am feldfreien Sprungpunkt T_0 identisch. Bei $T = 0$ muss $S_n = S_s = S_0$ sein (3. Hauptsatz). Für eine beliebige Temperatur ist $S(T) = S_0 + \int_0^T c \, dT/T$. Warum? s - und n -Leiter unterscheiden sich nur durch den Zustand ihres Elektronengases, d. h. die Existenz der Energielücke und ihre Folgen. Zeichnen Sie die Energieverteilung der Elektronen in beiden Leitern für verschiedene T . Beachten Sie das Schrumpfen der Energielücke mit wachsendem T . Wie groß ist c_n (vgl. Sommerfeld-Theorie des Fermi-Gases)? Ist der Ansatz $c_n = \gamma T$ berechtigt, und was bedeutet γ ? Ist c_s größer oder kleiner (a) bei $T \approx 0$, (b) bei $T \approx T_0$? Wie sähe $c_s(T)$ bei konstanter Energielücke aus? Häufig kann man setzen $c_s(T) = \alpha T^3$. Heißt das, dass es sich um die Debye-Wärme des Gitters handelt? Wie müssen α und γ zusammenhängen, damit der Phasenübergang bei T_0 von 2. Ordnung ist?

●● 17.7.8 Grenzkurve

Mit den Ergebnissen von Aufgabe 17.7.7 diskutieren Sie die Form der Grenzkurve zwischen Supra- und Normalleitung im B, T -Diagramm. Wie erfolgen speziell die Einmündungen in der B - und T -Achse? Kommt eine exakte Parabel als Grenzkurve heraus? Was muss man messen, um alle in Aufgaben 17.7.6–17.7.8 benutzten Größen angeben zu können, (a) wenn man sicher ist, dass die Grenzkurve eine Parabel ist, (b) wenn man diese Sicherheit nicht hat?

Kerne und Elementarteilchen

■ Inhalt

18.1	Kernbausteine	969
18.2	Radioaktivität	981
18.3	Schnelle Teilchen	988
18.4	Elementarteilchen	1002
18.5	Kosmische Strahlung	1030

▼ Einleitung

Für viele Leute ist Physik heute gleich Hochenergiephysik. Hier liegt allerdings die Front der Grundlagenforschung, und faszinierenderweise berührt sich hier das Kleinste mit dem Größten, mit Struktur und Entwicklung des Weltalls. Atomkerne sind 10 000-mal kleiner als die Atome, wie wir aus *Rutherfords* Experiment wissen. Sie sind aber ihrerseits aus fundamentalen Bausteinen der Materie zusammengesetzt. In Abschn. 18.1 und 18.2 werden wir nachvollziehen, wie man Existenz und Eigenschaften des Kerns erschlossen hat. Abschnitt 18.4 gibt dann einen notgedrungen immer hinter der Entwicklung nachhinkenden Einblick in die neuere Forschung.



„... dass bei der Bildung eines Pfundes Helium aus Wasserstoff ebenso viel Energie frei wird wie bei der Verbrennung von 8000 t reinen Kohlenstoffs. *Eddington* und *Perrin* vermuten, die Strahlung der Sonne und heißer Sterne beruhe hauptsächlich auf dieser Energiequelle.“

Ernest Rutherford, 1923

18.1 Kernbausteine

Das Ergebnis der Rutherfordexperimente (s. Abschn. 13.5.2) hatte gezeigt, dass Kernmaterie eine nahezu konstante Dichte besitzt, der Radius daher proportional ist zur (Massenzahl A)^{1/3}:

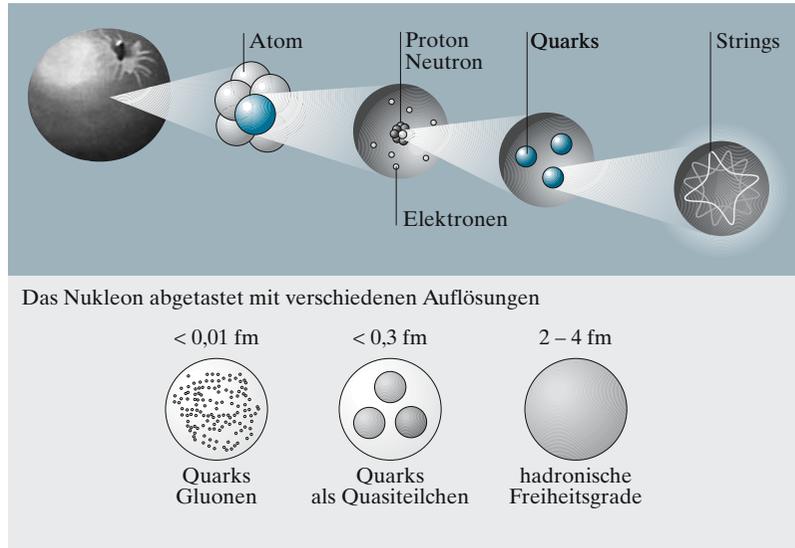
$$r = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m } \sqrt[3]{A}. \quad (18.1)$$

Die Kräfte zwischen den Kernbausteinen sind komplexerer Art als die Coulomb-Kraft, die die Dynamik atomarer Hüllenelektronen regiert. Phänomenologische Modelle spielen daher auch heute eine bedeutende Rolle.

18.1.1 Kernbausteine und Kernkräfte

Sobald man wusste, dass der Kern so klein ist, konnte man bereits abschätzen, dass man es mit Kräften und Energien von bisher ungeahnter Größenordnung zu tun bekommen würde. Der Faktor 10^5 bis 10^6 zwischen der Sprengkraft der gewöhnlichen und der Atombombe war schon damals voraussehen. Der Energiemaßstab ist nämlich einfach umgekehrt proportional zum Längenmaßstab, sofern das Coulomb-Gesetz oder ein ähnliches r^{-1} -Gesetz für die Wechselwirkungsenergie gilt. Dies trifft zu bis zu Annäherungen von weniger als 10^{-14} m an den Kern, denn

Abb. 18.1. Das Bild zeigt eine Übersicht über den Aufbau der Materie: Bei genauerem Hinsehen (bei stärkerer Vergrößerung) werden immer wieder neue Strukturen sichtbar. Beschleuniger dienen als Mikroskope, um die Einzelheiten der Kerne und Elementarteilchen sichtbar werden zu lassen



sonst wären die rutherfordischen Ergebnisse und ihre Deutung gar nicht möglich gewesen. Für noch kleinere Abstände muss dann allerdings die Coulomb-Abstoßung der positiven Kernbausteine durch eine noch stärkere Anziehung überwunden werden, sonst könnte der Kern nicht zusammenhalten. Man kommt so zum **Fujiyama-Modell** des Kernpotentials oder der potentiellen Energie einer positiven Elementarladung als Funktion des Abstandes vom Kern (Abb. 18.2). Chemische Reaktionen wie Verbrennung oder Explosion spielen sich in der Elektronenhülle ab, also bei $r \approx 10^{-10} \text{ m}$, Kernvorgänge dagegen um 10^{-15} m , wo allein der Coulomb-Berg schon etwa 10^5 -mal höher ist. Der radioaktive Zerfall mit seiner scheinbar unerschöpflichen Energie (etwa 1 MeV für jeden Elementarvorgang verglichen mit maximal einigen eV in der Chemie) gab einen Vorgeschmack.

Die eigentlichen Kernkräfte, die bei Abständen unterhalb 10^{-14} m die Coulomb-Abstoßung überwinden, haben offenbar sehr kurze Reichweiten, denn schon um 10^{-14} m merkt man von ihnen nichts mehr. Man deutet sie seit *Yukawa* (Nobelpreis 1949) als **Austauschkräfte** zwischen den Nukleonen, die durch Austausch von **Mesonen** zustandekommen. Die Reichweite r_Y dieser Kräfte hängt mit der Masse m_π des ausgetauschten Teilchens zusammen wie

$$r_Y = \frac{\hbar}{m_\pi c} \tag{18.2}$$

(Erklärung: Abschn. 18.4.5). Mit der Masse des Pions von 273 Elektronenmassen ergibt sich eine Reichweite $r_Y = 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$. Die **Quantenelektrodynamik** erklärt alle Wechselwirkungskräfte, auch die elektrostatischen, als Austauschkräfte.

Um die Kernmasse aufzubauen, wäre es am einfachsten, den Kern aus Wasserstoffkernen oder **Protonen** zusammenzusetzen. Für ein Atom der Massenzahl A brauchte man A Protonen. Dann wäre aber die Ladung zu

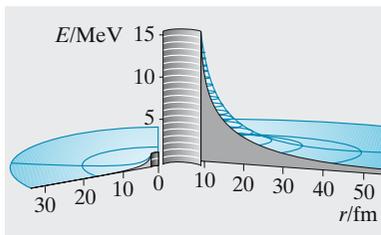


Abb. 18.2. Potentielle Energie eines Protons im Abstand r von einem leichten (^3He) und einem schweren Kern (^{238}U): „Fujiyama-Modell“; die Flanke des Berges Fuji bildet allerdings keine $1/x$ -, sondern eine $\ln x$ -Kurve; wissen Sie warum?

Tabelle 18.1. Arten der Wechselwirkungen

Wechselwirkung	Maßgebliche Eigenschaft	Relative Stärke in Kernnähe	Reichweite	Ausgetauschtes Teilchen
Gravitation	Masse	10^{-41}	groß	Graviton
Schwache W.		10^{-15}	klein	W- und Z-Bosonen
Elektromagnetische W.	El. Ladung	10^{-2}	groß	Photon
Starke W.	„Farbe“	1	klein	Gluon

groß, nämlich Ae statt der Ze , die die Neutralität des Atoms gegen die Z Außenelektronen verlangt. Zur Kompensation könnte man $A - Z$ Elektronen mit in den Kern einzubauen versuchen. Dies ist aus mehreren Gründen nicht möglich: Ein Elektron, auf so engem Raum eingesperrt, hätte eine so hohe quantenmechanische Nullpunktsenergie, dass es den Wall des „Kernkraters“ einfach überspringen würde. Außerdem stimmen die beobachteten Spins der Kerne nicht mit der Annahme von $2A - Z$ Teilchen (A Protonen, $A - Z$ Elektronen) überein. Man braucht also außer Elektron und Proton ein neues Elementarteilchen, das im einfachsten Fall neutral sein und etwa die Protonenmasse haben sollte, das **Neutron**, das 1932 von *Chadwick* entdeckt wurde. Der Kern enthält demnach Z Protonen und $A - Z$ Neutronen. Beide schweren Teilchen werden als **Nukleonen** zusammengefasst. Diese Annahme erklärt viele wesentliche Eigenschaften der Kerne.

× Beispiel ...

Welche Nullpunktsenergie hätte ein Elektron im Kern?

Wenn seine Ortsunschärfe auf den Kernradius r eingeschränkt werden soll, muss die Impulsunschärfe auf $\Delta p \approx h/r$ anschwellen. Dem entspräche nichtrelativistisch eine kinetische Energie $E = \frac{1}{2} \Delta p^2 / m \approx 10 \text{ GeV}$, richtiger relativistisch $E = \Delta p c \approx 100 \text{ MeV}$ (analog zu Aufgabe 18.1.1: Schwer wie ein Pion!). Es würde hoch über dem Rand des Kernkraters schweben, der maximal 20 MeV hoch ist. Außerdem verhalten sich Spin und magnetisches Moment der Kerne genau, als bestünden sie aus Z Protonen und $A - Z$ Neutronen, nicht aus A Protonen und $A - Z$ Elektronen.

18.1.2 Massendefekt, Isotopie und Massenspektroskopie

Proton und Neutron haben fast die gleiche Masse ($1,6727$ bzw. $1,6748 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$). Zählt man zum Proton ein Elektron hinzu, schrumpft der Unterschied noch mehr. Wenn die Kerne nur aus Protonen und Neutronen bestehen, sollten also die Atommassen durchweg nahezu ganzzahlige Vielfache der Masse des H-Atoms sein. Tatsächlich gibt es erhebliche Abweichungen. Sechs Protonen, sechs Neutronen und sechs Hüllenelektronen haben eine Gesamtmasse von $20,089 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, für das C-Atom misst man aber nur $19,922 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Beim U-Atom errechnet man $398,4 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, misst aber $395,0 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Ungefähr zwei Protonenmassen sind verschwunden. Dieser **Massendefekt** erklärt sich aus der Äquivalenz von

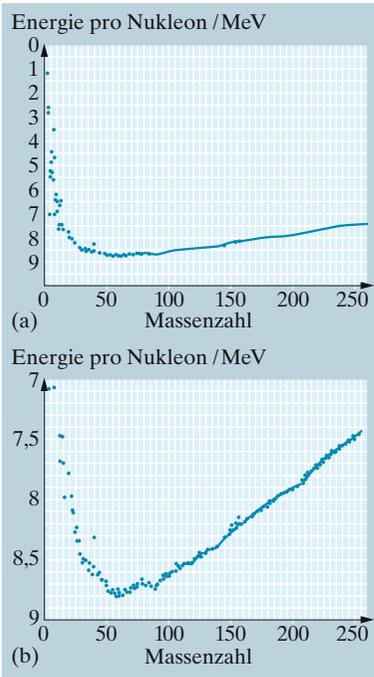


Abb. 18.3a,b. Mittlere Bindungsenergie eines Nukleons in Abhängigkeit von der Massenzahl des Kerns. In (b) kann man die Unregelmäßigkeiten, besonders die magischen Zahlen als Buckel nach unten besser sehen

Masse und Energie. Wenn bei der Bildung des Kerns aus den Nukleonen eine Bindungsenergie ΔE frei wird und den Kern z. B. als γ -Strahlung verlässt, tritt damit auch ein Massenschwund

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \quad (18.3)$$

auf. Besonders groß ist der Massendefekt des He-Kerns ($6,6465 \cdot 10^{-27}$ kg gegen $6,6968 \cdot 10^{-27}$ für je zwei Protonen, Neutronen und Elektronen). Er entspricht einer Bindungsenergie von 28,3 MeV, die bei der **Kernfusion** ausgenützt wird.

Wie Abb. 18.3 zeigt, kommt bei schwereren Kernen auf jedes Nukleon im Mittel eine Bindungsenergie von 8 MeV, was etwa 0,008 Protonenmassen entspricht. Man erreicht daher eine bessere Annäherung an die Ganzzahligkeit der Massenzahlen, wenn man als **atomare Masseneinheit** nicht die Masse des H-Atoms, sondern $\frac{1}{12}$ der Masse des C-Atoms (genauer: nächster Absatz) zugrundelegt, wobei das Proton die Massenzahl oder relative Atommasse 1,007 97 erhalten muss.

Einige Abweichungen von der Ganzzahligkeit bleiben trotzdem bestehen, z. B. erhält Chlor die Massenzahl oder relative Atommasse 35,457. Fast jedes chemisch reine Element besteht nämlich noch aus mehreren **Isotopen**, die sich mit physikalischen und auch verfeinerten chemischen Methoden unterscheiden lassen. Beim Chlor sind es zwei Isotope, deren Massen sich nun wirklich um weniger als 1% von 35 bzw. 37 unterscheiden. Man kennzeichnet die Isotope durch die hochgestellte Massenzahl. Auch C hat außer dem Isotop ^{12}C noch ein Isotop ^{13}C , dessen Anteil allerdings nur 1% beträgt (das instabile Isotop 14 ist noch viel seltener). Das Isotop ^{12}C stellt auch mit $\frac{1}{12}$ seiner Masse die atomare Masseneinheit. Aus der chemischen Fast-Identität isotoper Atome folgt, dass sie die gleiche Anzahl und Konfiguration von Elektronen besitzen und folglich auch gleiche Ordnungszahl, d. h. gleich viele Protonen. Sie unterscheiden sich nur in der Neutronenzahl. Feine Unterschiede im chemischen Verhalten diskutiert Aufgabe 19.2.12.

Das genaueste und direkteste Verfahren zur Trennung von Isotopen und Bestimmung ihrer Massen ist die **Massenspektrographie** (*F. W. Aston*, 1919). Die zu untersuchenden Atome werden mittels einer elektrischen Entladung ionisiert und treten als Kanalstrahlen in ein homogenes elektrisches Feld ein (Abb. 18.4), wo sie umso stärker abgelenkt werden, je kleiner ihre kinetische *Energie* ist. Dahinter kommt ein Magnetfeld, das die Ionen in umgekehrter Richtung ablenkt, umso stärker, je kleiner ihr *Impuls* ist. Da Energie und Impuls verschieden von Masse und Geschwindigkeit abhängen, kann man die Geometrie von Feldern und Detektor (Photoplatte) so einrichten, dass alle Ionen gleicher Masse (genauer gleicher spezifischer Ladung Ze/m) trotz verschiedener Geschwindigkeiten wieder durch einen Punkt laufen. Zudem liegen alle diese Punkte für verschiedene Ze/m auf einer Geraden. Ein Film, dessen Ebene diese Gerade enthält, zeichnet sie als eine Reihe von Punkten oder – bei spaltförmiger Eingangsblende – von feinen Linien auf, aus deren Lage man die spezifischen Ladungen und damit auch die Masse auf bis zu 6 Dezimalen genau entnehmen kann.

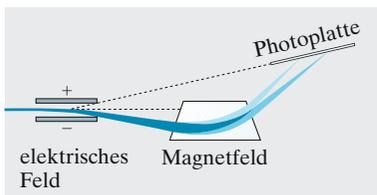


Abb. 18.4. Prinzip des astonschen Massenspektrographen

Die meisten Elemente erweisen sich so als Isotopengemische. Zinn z. B. hat 10 stabile Isotope. Auch im Wasserstoff ist mit 0,015% Anteil ein schweres Isotop $^2\text{H} = \text{D}$ vorhanden. Es wird als **Deuterium**, sein Kern (ein Proton, ein Neutron) als **Deuteron** bezeichnet. Das dritte Wasserstoffisotop $^3\text{H} = \text{T}$ heißt **Tritium**. Es zerfällt in 12,3 Jahren. Einen Kern, gekennzeichnet durch Ordnungszahl und Massenzahl, z. B. ^{35}Cl , nennt man ein **Nuklid**. Dieser Begriff ist allgemeiner als der des Isotops, den man heute nur noch auf Kerne verschiedener Massenzahl anwendet, die zu einem und demselben Element gehören.

18.1.3 Kernmodelle

Kernkräfte zwischen zwei Nukleonen wirken praktisch nur bei direktem Kontakt. Bei solchem Abstand sind sie stärker als die elektrischen, aber schon bei 10^{-14} m sind sie kaum noch spürbar, wie aus Rutherfords Versuchen hervorgeht und im Fujiyama-Modell dargestellt ist. Ganz ähnlich verhalten sich die Kräfte zwischen Molekülen in einer Flüssigkeit. Bringt man ein Nukleon an die Kernoberfläche oder ein Molekül an die Flüssigkeitsoberfläche, dann verliert es einen Teil seiner Bindungspartner. Die Verlustenergie ist die Oberflächenenergie pro Teilchenquerschnitt. Eben wegen dieser „Kontaktklebekräfte“ hat ja die Kernmaterie nahezu konstante Dichte, und so erklären sich die Erfolge des **Tröpfchenmodells**, das den Kern als geladenes Flüssigkeitströpfchen mit einer Oberflächenspannung auffasst.

Wenn je zwei Nukleonen, sofern sie unmittelbar benachbart sind, eine Anziehungsenergie ε haben, erhält man als Gesamtenergie eines Kerns aus Z Protonen und $A - Z = N$ Neutronen (Weizsäcker-Formel)

$$E = \left. \begin{aligned} & Zm_{\text{p}}c^2 + Nm_{\text{n}}c^2 - 6\varepsilon A \\ & + 6\varepsilon A^{2/3} + \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \\ & + \eta \frac{(N - Z)^2}{A} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} -\frac{\delta}{A} \quad \text{für gg} \\ \pm 0 \quad \text{für gu, ug} \\ +\frac{\delta}{A} \quad \text{für uu.} \end{array} \quad (18.4)$$

g und u bedeuten Geradheit oder Ungeradheit der Protonen- bzw. Neutronenzahl. Die ersten beiden Glieder sind die Massenenergien von Protonen und Neutronen. Das dritte Glied ist die Wechselwirkungsenergie der A Nukleonen, die in der dichtesten Kugelpackung je 12 nächste Nachbarn haben (jedes Nukleonenpaar darf aber nur einmal gezählt werden, daher $6\varepsilon A$ statt $12\varepsilon A$). Ein Bruchteil, der proportional $A^{2/3}$ ist, von diesen Nukleonen sitzt an der Oberfläche und verliert daher einige der oben bereits mitgezählten Bindungen. So kommt das vierte Glied, die **Oberflächenenergie** zustande. Die Coulomb-Abstoßung der gesamten Protonenladung Ze über einen mittleren Abstand $r \approx A^{1/3}r_0$ ergibt das fünfte Glied. Ohne das sechste Glied wären Kerne aus lauter Neutronen am stabilsten, weil bei ihnen die Coulomb-Abstoßung wegfällt. Dieses Glied beruht auf dem **Pauli-Prinzip**. Da Neutronen und Protonen den gleichen Energiezustand besetzen können, nicht aber zwei identische Teilchen, wäre ein Aufbau aus

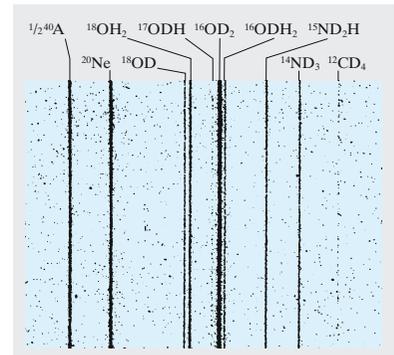


Abb. 18.5. Ein Massenspektrometer kann Massenunterschiede nachweisen, die unterhalb von 10^{-3} Atommasseinheiten liegen. Die Massenzahl aller registrierten Ionen ist 20, die exakten Ionenmassen liegen zwischen 19,9878 und 20,0628. (Nach Bieri, Everling und Mattauch, aus W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

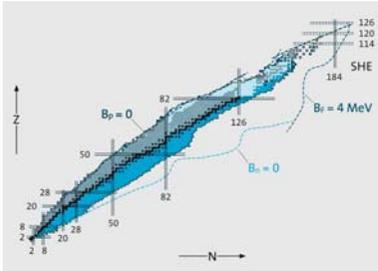


Abb. 18.6. Die bisher bekannten Nuklide. Z, N Anzahlen der Protonen bzw. Neutronen, ■ stabile Nuklide, ■ β^+ -Strahler, ■ β^- -Strahler, ■ α -Strahler; Magische Protonen- und Neutronenzahlen sind durch *Doppelstriche*, die Existenzgrenzen möglicher Kerne durch *gestrichelte Linien* angedeutet. B_n, B_p : Austrittsenergien von Neutronen bzw. Protonen aus einem System aus Nucleonen
© Prof. Dr. Peter Armbruster, Gesellschaft für Schwerionenforschung, Darmstadt

gleich vielen Neutronen und Protonen energetisch am günstigsten, abgesehen von der Coulomb-Energie. Das letzte Glied ist kleiner als die übrigen; es beruht auf einer **Spinabsättigung** von Teilchenpaaren und bevorzugt die gg-Kerne, benachteiligt die uu-Kerne.

Die Anwendung dieser Energieformel zeigt, warum die stabilen Kerne sich im **Energietal** (Abb. 18.6) zusammendrängen, flankiert von instabilen Kernen; sie liefert auch feine Einzelheiten der Topographie dieses Energietals; Verteilung und Energie von β^- - und α -aktiven Kernen, Möglichkeit und Energien von Kernspaltungs- und Kernfusionsprozessen usw.

Allerdings kann das Tröpfchenmodell in dieser Form (d. h. ohne Eingehen auf die „Kristallographie“ der Nucleonenpackung) nur Eigenschaften erklären, die sich monoton mit der Ordnungszahl der stabilen Kerne ändern. Dagegen zeigt z. B. der **Einfangquerschnitt für Neutronen** sehr starke Schwankungen, z. B. scharf ausgeprägte Minima für ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{87}_{37}\text{Rb}$, ${}^{136}_{54}\text{Xe}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$. Kurz vorher ist der Einfangquerschnitt besonders groß. Das erinnert an das Verhalten der Elektronenhülle; Edelgase verweigern die Aufnahme weiterer Elektronen, Halogene sind besonders gierig danach (hohe Elektronenaffinität). Auch das leicht abtrennbare Leuchtelektron der Alkalien hat sein Gegenstück: ${}^5_2\text{He}$, ${}^{87}_{36}\text{Kr}$, ${}^{137}_{54}\text{Xe}$ strahlen ihr überschüssiges Neutron spontan aus.

Es gibt also auch im Kern Schalen, deren Abschluss bei **magischen Nucleonenzahlen** erfolgt. Aus den genannten Beispielen liest man die magischen Zahlen 2, 8, 50, 82, 126 ab; dazu kommen noch 14, 20, 28. Für Protonen gilt bis 82 die gleiche Reihe. Die magischen Zahlen zeichnen sich in vielen anderen Eigenschaften ab, z. B. in der **kosmischen Häufigkeit** der Nuklide (maximal für ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{28}_{14}\text{Si}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, daneben aber auch für die nichtmagischen Vielfachen des α -Teilchens ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{20}_{10}\text{Ne}$, ${}^{24}_{12}\text{Mg}$, ${}^{32}_{16}\text{S}$ sowie überhaupt für gg-Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl, z. B. ${}^{56}_{26}\text{Fe}$), ferner in der Anzahl der stabilen Isotope (den Rekord hält ${}_{50}\text{Sn}$ mit 10 Isotopen; Abb. 18.6, waagerechte Reihen), und der stabilen Nuklide mit gegebener Neutronenzahl N (Isotone, Abb. 18.6, senkrechte Reihen: 7 mit $N = 82$, 6 mit $N = 50$). ${}^{208}_{82}\text{Pb}$, das häufigste Blei-Isotop, Endprodukt der Thorium-Zerfallsreihe, ist sogar doppelt-magisch (82 Protonen, 126 Neutronen), und zwar ist dies wegen der Abweichung des Energietals von 45° der einzige schwere Kern mit dieser Eigenschaft bis zu der hypothetischen **Insel der Stabilität** um $Z = 114$.

Die drei ersten magischen Zahlen sind ziemlich einfach zu verstehen, wenn man die Nucleonenzustände als Eigenschwingungen im kugelsymmetrischen Kernpotential auffasst. Man beobachtet sie ganz ähnlich im akustischen oder elektromagnetischen Hohlraumresonator. Der niederfrequenteste Grundzustand hat keinen Knoten, außer an der Wand, wenn diese fest ist (Kastenpotential); bei anderem Potential klingt die Amplitude nach außen asymptotisch ab. Es folgen drei Zustände mit Knotenebenen längs der Koordinatenebenen, die natürlich gleiche Energie (Frequenz) haben. Je drei Zustände mit Knoten-Doppelkegeln bzw. zwei Knotenebenen sind i. Allg. energetisch verschieden, nur beim Oszillatorpotential $U = U_0 + ar^2$ entarten sie, d. h. fallen energetisch zusammen. Wenn man jeden Zustand doppelt besetzt (mit entgegengesetzten Spins), hat man die magischen Zahlen 2, $2 + 6 = 8$, $2 + 6 + 12 = 20$. Bei leichten Kernen dürfte das Kernpotential irgendwo zwischen Oszillator- und Kastenpotential liegen, bei schweren wird es allerdings kastenförmiger. Auch im Oszillatorpotential kommen die höheren magischen Zahlen nicht richtig heraus.

1949 lösten *Goepfert-Mayer, Haxel, Jensen* und *Süß* das Problem. Auch sie beschreiben den Kern analog zur Hülle durch zwei weitgehend ähnliche Folgen von

Zuständen (eine für die Protonen, eine für die Neutronen), die beim Kernaufbau nach und nach besetzt werden. Große Energieabstände in dieser Termleiter entsprechen einem Schalenabschluss. Jeder Zustand ist wie in der Hülle durch einen Bahn- und einen Spindrehimpuls gekennzeichnet. Die Wechselwirkung der dicht gepackten Nukleonen und ihrer magnetischen Momente ist aber so groß, dass die „Feinstruktur“-Aufspaltung oft größer wird als die Energieabstände für benachbarte Hauptquantenzahlen. Die großen Lücken in der Termleiter treten daher an ganz anderen Stellen auf als für die Hülle.

Dieses **Schalenmodell** steht scheinbar in scharfem Gegensatz zum Tröpfchenmodell. Wie sollen die Nukleonen sich auch nur annähernd so frei durch ihre dichtgepackten Nachbarn bewegen wie die Elektronen im Vakuum um den Kern? Auch mehrere Elektronen im Atom üben ja aber aufeinander ebenso große Wechselwirkungen aus wie mit dem Kern und beschreiben trotzdem geregelte Bahnen. Im Sonnensystem wäre eine solche Stabilität undenkbar, wenn Planeten und Sonne vergleichbare Massen hätten. Entscheidend für die Stabilität der „Bewegungen“ in einem quantenmechanischen System ist nicht die Größe der Wechselwirkung, sondern die Quantelung selbst zusammen mit dem Pauli-Prinzip. Ein Teilchen kann nur aus einem Umlauf gebremst werden, indem es ein anderes Teilchen entsprechend energetisch anhebt. Wenn unter ihm nur vollbesetzte Zustände sind, ließe das höchstens auf einen Austausch mit einem anderen Teilchen hinaus, der am Gesamtzustand nichts änderte.

Da das Schalenmodell keine ganz befriedigende Beschreibung der Kernmomente liefert und auch bei vielen Kernreaktionen versagt, versuchten *A. Bohr*, *Mottelson*, *Nilsson* u. A. eine gewisse Synthese zwischen Schalen- und Tröpfchenmodell im **kollektiven Kernmodell**. Danach stehen die Einzelneutronen in Wechselwirkung mit dem Kernrumpf, der sich deformieren, schwingen und rotieren kann und damit selbst einen Beitrag zum magnetischen Dipol- und elektrischen Quadrupolmoment leistet. Im Energiespektrum treten wie bei den Molekülen Rotationsbanden auf.

Speziell zur Behandlung von Kernreaktionen haben *Feshbach*, *Porter* und *Weisskopf* das **optische Kernmodell** entwickelt. Streuung und Einfang von Geschossteilchen werden durch einen Potentialtopf des Targetkerns beschrieben, der einen imaginären Potentialanteil enthält, wie er in der Optik eine Absorption ergibt. Der Kern verhält sich dann gegen das als Welle aufgefasste Geschoss wie eine trübe Glaskugel (**cloudy crystal ball**). Hochenergetische Stöße beschreibt man außerdem mit verschiedenen statistischen Ansätzen. Der Stoß soll die Kernmaterie, die manchmal wie eine Fermi-Flüssigkeit behandelt wird, auf eine hohe Temperatur aufheizen, aus der sie dann nach statistischen Gesetzen Sekundärteilchen verdampfen lässt.

Die Annahme kugelsymmetrischer Kerne ist sicher nur eine Näherung; denn fast alle Kerne besitzen einen Drehimpuls (**Spin**) um eine im Kern festliegende Achse und demzufolge ein magnetisches Moment (Abschn. 14.3). Es liegt daher nahe, als nächsthöhere Näherung für die Gestalt des Atomkerns ein homogen geladenes Rotationsellipsoid anzunehmen. Es ist bisher nicht gelungen, alle Kerne einer Probe – etwa durch äußere magnetische Felder – auszurichten. Jedoch orientieren sich die Kerne in charakteristischer Weise gegenüber dem magnetischen Feld, das die umlaufenden Hüllenelektronen am Ort des Kerns erzeugen. Diese werden umgekehrt von der Kernorientierung beeinflusst, was sich in winzigen Aufspaltungen der sichtbaren Spektrallinien äußert (**Hyperfeinstruktur**; *Kopfermann*, *Schüler* 1931, Abschn. 14.9.2). Daraus kann man entnehmen, dass die Abweichungen von der Kugelgestalt gering sind. Nur bei den sel-

tenen Erden und bei den schwersten Kernen stellt man Achsenverhältnisse bis 1,5 fest, meist im Sinn einer Streckung in Richtung der Kernachse.

18.1.4 Kernspaltung

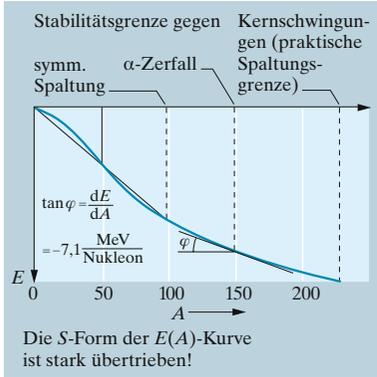


Abb. 18.7. Abhängigkeit der Bindungsenergie E der Kerne von der Nukleonzahl. Die S-Form der Kurve ist stark übertrieben. Stabilitätsgrenzen gegen einige Zerfallsprozesse sind eingezeichnet

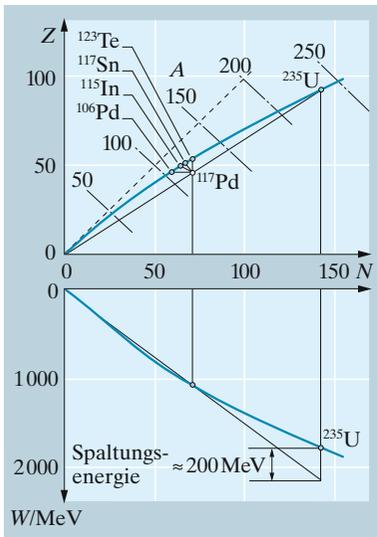


Abb. 18.8. Kernspaltung. *Oben:* Symmetrische Spaltung eines schweren Kerns liefert einen Neutronenüberschuss, der teils durch Neutronen-, teils durch β^- -Emission abgebaut wird. *Unten:* Die Spaltung liefert etwa 200 MeV

Ein Kern mit einer Massenzahl über 100 hat weniger Bindungsenergie als zwei Kerne von der halben Massenzahl, wie man aus Abb. 18.3 oder der Gleichung (18.4) ablesen kann. Eine (symmetrische) Spaltung wäre somit oberhalb von $A \approx 100$ energetisch vorteilhaft. Obwohl solche mittelschweren und schweren Kerne also eigentlich instabil sind, würde ihre Spaltung die Überwindung einer riesigen Energieschwelle erfordern. Der Kern müsste ja zunächst irgendwie aus der Kugelgestalt in eine verlängerte Form übergehen, wobei die Oberfläche und die Oberflächenenergie (Glied 4 in (18.4)) stark zunehmen. Die Coulomb-Energie (Glied 5) nimmt dabei zwar ab, weil sich die Protonen im Mittel weiter voneinander entfernen, aber diese Abnahme kann die Zunahme der Oberflächenenergie erst bei den allerschwersten Kernen in der Gegend des U kompensieren. In seiner Formstabilität ähnelt ein solcher sehr schwerer Kern also weniger einer Orange als einer Kugel aus Götterspeise. Durch Zufuhr weniger MeV, am einfachsten durch die Anlagerungsenergie eines weiteren Neutrons, kann er zu Schwingungen angeregt werden, die über ein Ellipsoid zur Birnenform und schließlich zur meist unsymmetrischen Spaltung führen.

Da das Tal der stabilen Kerne gekrümmt verläuft, können bei einer solchen Spaltung nie zwei stabile Teilchen herauskommen, sondern stets **Fragmente**, deren Neutronenzahl zu groß ist. Aus Abb. 18.8 oder (18.4) liest man einen Überschuss von etwa 7 bis 8 Neutronen pro Fragment ab. Üblicherweise wird ein solcher Überschuss durch β^- -Emission abgebaut (diagonaler Weg in Abb. 18.8 oben); bei hohem Überschuss sind aber die Wände des Energietals schon so steil, dass ein radikalerer Weg möglich wird, nämlich direkte Emission von Neutronen (horizontaler Weg in Abb. 18.8 oben). Neben einer Kette von β^- -Prozessen werden so bei jeder ^{235}U -Spaltung etwa 2,5 Neutronen frei, z. T. sofort als „Spritzer“ beim Zerplatzen des Tröpfchens, z. T. etwas verzögert. Diese Neutronen sind es, die die **Kettenreaktion** von einem einzigen Spaltungsakt lawinenartig anschwellen lassen, bis sie makroskopische Substanzmengen erfasst.

Die Höhendifferenz der E/A -Kurve (Abb. 18.3) bei $A = 235$ bzw. $A \approx 117$ (oder genauer $A \approx 95$ bzw. 140 bei der unsymmetrischen Spaltung) ergibt, mit 235 multipliziert, die bei der Spaltung freiwerdende Energie. Man liest etwa 200 MeV ab. Diese Energie steckt z. T. in der β^- - und γ -Strahlung der Fragmente, z. T. in deren kinetischer Energie.

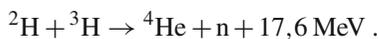
Otto Hahn und *Fritz Straßmann* bewiesen die Existenz dieser Spaltung 1938 durch den Nachweis, dass beim Neutronenbeschuss von Uran mittelschwere Elemente wie Ba und La entstehen. *Enrico Fermi* hatte die gleichen Versuche schon 1934 gemacht, aber die Spaltstücke als Transurane gedeutet. *Irène Joliot-Curie* und *Ida Tacke* ahnten zwar den wahren Sachverhalt, kamen aber gegen die anfänglichen Zweifel von *O. Hahn* und *Lise Meitner* nicht auf.

Der **Kernreaktor** setzt die Spaltungsenergie langsam und kontrolliert frei, indem er sich genau an der **kritischen Grenze** hält. Der erste Reaktor wurde 1942 unter *Fermis* Leitung kritisch. Spaltbares Material (Uran, Plutonium) wird in Graphit, D₂O und H₂O eingebettet. Neutronen, die die erste Spaltung einleiten können, sind in der kosmischen Strahlung immer reichlich vorhanden. Von den 2,5 Neutronen, die bei jeder Spaltung entstehen, entweichen einige nach draußen oder zerfallen oder werden von nichtspaltbaren Kernen eingefangen; die übrigen werden im Graphit, im D₂O oder im H₂O **moderiert**, d. h. annähernd auf thermische Energien verlangsamt und damit für weitere Spaltungen verfügbar gemacht. Wenn die Anzahl der Neutronen pro Spaltung, die eine weitere Spaltung auslösen, die kritische Grenze 1 erreicht, brennt der Reaktor stationär, d. h. erzeugt ständig Energie, die durch eine geeignete Flüssigkeit abgeführt und ausgenutzt werden kann. Um den Prozess zu regeln, sind Stäbe aus einem stark neutronenabsorbierenden Material (z. B. Cd) vorgesehen. Durch Einsenken dieser Stäbe kann man die Kettenreaktion bremsen oder unterbrechen. In homogenem spaltbarem Material hängt es vor allem von dessen Masse ab, ob genügend viele Neutronen weitere Spaltung ausführen können. Mehrere Stücke, deren jedes einzelne zu klein ist, können, wenn sie sehr plötzlich vereinigt werden, die **kritische Masse** überschreiten und eine anschwellende Kettenreaktion unterhalten. Das geschieht bei der Zündung einer **Atombombe**. Bei der Spaltung entstehen mehrere verschiedene Kombinationen von Fragmenten, jedes mit einer ganzen Kette radioaktiver Folgeprodukte. Im Reaktor und in der Atombombe bilden sich so große Mengen radioaktiver Isotope. Ihre sinnvolle Ausnutzung bzw. Beseitigung ist eine weitere Aufgabe der Kerntechnik.

Militärische Kreise wünschen sich seit langem eine „taktische“ Kernwaffe kleineren Ausmaßes, die zwar Lebewesen tötete, Material und Gebäude aber praktisch unbeschädigt ließe. Leider haben ihnen die Wissenschaftler nach vielen Versuchen mit verstärkter radioaktiver Wirkung (Kobaltbombe, weiträumiger **radioaktiver Fallout**) mit der **Neutronenbombe** anscheinend ein für ihre Zwecke ideales Mordwerkzeug zugespielt, das den nuklearen Krieg „machbar“ erscheinen lässt. Es handelt sich um eine kombinierte Spaltungs-Fusions-Bombe mit viel geringerer Explosionswirkung, aber höherer Neutronen- und γ -Strahlung als für die U- oder gar H-Bomben. Als Fusionsmaterialien dienen ³H und ²H, die zu ⁴He verschmelzen, wobei jedes Mal ein Neutron entsteht.

18.1.5 Kernfusion

Abbildung 18.3 zeigt, dass die Verschmelzung leichter Kerne (bis zu Massenzahlen um 20) ebenfalls Energie liefert. Am günstigsten sind Reaktionen, die ⁴He mit seiner besonders hohen Bindungsenergie ergeben, z. B.



Diese **Fusion** zweier Kerne setzt voraus, dass sie sich trotz der gleichnamigen Ladungen so weit nähern, bis die kurzreichweitige Kernkraft die Oberhand gewinnt. Dazu muss der gesamte **Coulomb-Wall** (Abb. 18.11) überwunden werden, der auch bei den leichten Kernen schon einige MeV

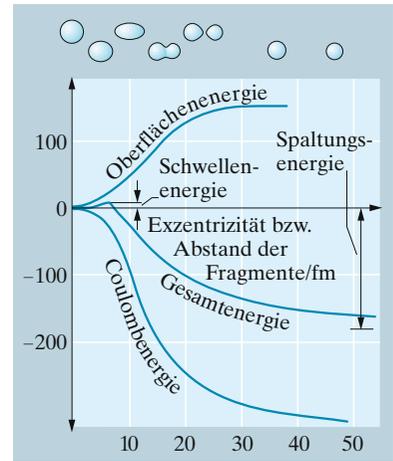


Abb. 18.9. Der ²³⁵U-Kern hat bei der Spaltung nur noch einen sehr kleinen Potentialberg zu überwinden. Neutroneneinfang mit den daraus resultierenden Schwingungen genügt schon

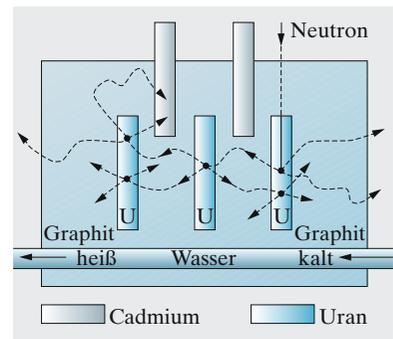


Abb. 18.10. Anordnung eines Kernreaktors, schematisch

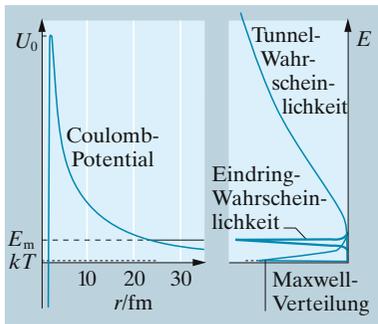


Abb. 18.11. Bei der Kernfusion wird der Potentialwall durchtunnelt. Am wirksamsten sind die Teilchenenergien, für die das Produkt von Maxwell-Wahrscheinlichkeit und Tunnelwahrscheinlichkeit maximal ist

hoch ist. Mit Teilchenbeschleunigern kann man diese Energie zwar leicht erreichen, aber die Ausbeute ist wegen des winzigen Reaktionsquerschnitts ($< 10^{-29} \text{ m}^2$) hoffnungslos klein. Kernfusion kann nur als **thermische Kernreaktion** zur Energieerzeugung in Frage kommen. Allerdings liegt selbst bei Temperaturen von 10^7 bis 10^8 K , wie sie im Sonneninneren herrschen, die *mittlere* thermische Energie erst in der Größenordnung 1 bis 10 keV. Da die Maxwell-Verteilung ungefähr wie $e^{-E/(kT)}$ abfällt, gibt es bei solchen Temperaturen nur sehr selten einmal ein Teilchen, das einen 1 MeV-Wall übersteigen kann. Dies ist aber auch gar nicht nötig. Schon bei wesentlich geringeren Energien wird der Wall so dünn, dass auch ein Proton oder Deuteron in den Zielkern „hineintunneln“ kann. Dieser Kombination einer statistischen und einer quantenmechanischen Gesetzmäßigkeit (**Maxwell-Verteilung, Tunneleffekt**) „verdanken“ wir die **thermonukleare Bombe**, aber auch die Sonnenstrahlung und die Hoffnung, im Kernfusionsreaktor praktisch unbegrenzte Energiemengen erzeugen zu können.

Die **H-Bombe** braucht eine Uranbombe als Zünder, die die erforderlichen Temperaturen erzeugt. Die Sterne beziehen ihre Energie zumeist aus zwei Fusionsreaktionen, der **pp-Reaktion** und bei etwas höheren Temperaturen dem **CN-Zyklus**:

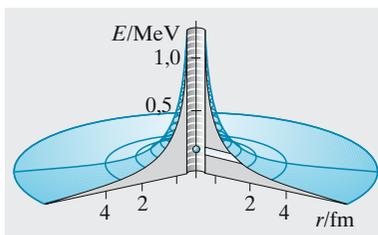
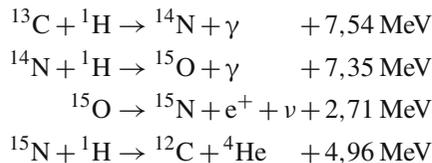
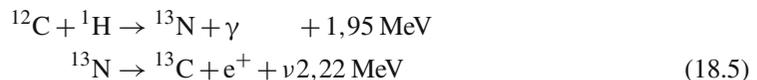
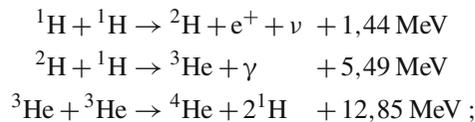


Abb. 18.12. Coulomb-Berg und Kernkraft-Krater eines leichten Kerns gegenüber einem anfliegenden Proton. In Wirklichkeit liegt der optimale Tunnel noch tiefer (für die pp-Reaktion mit 10^8 K liegt er bei 50 keV, also etwa 5% der Kraterandhöhe). Für den Austritt eines α -Teilchens aus einem schweren Kern stimmen die Verhältnisse ungefähr

Beide verwandeln im Gesamteffekt Wasserstoff in Helium.

Die technische Bedeutung der Fusionsenergie liegt in der praktischen Unerschöpflichkeit ihres Brennstoffs und der relativen Pollutionsfreiheit eines Fusionsreaktors. Bisher zieht man überwiegend die Reaktion $\text{D} + \text{T} \rightarrow \text{He} + \text{n}$ in Betracht, deren Wirkungsquerschnitt mehr als 10-mal größer ist als z. B. für die DD- oder die D^3He -Reaktion, obwohl ihre Reaktionsenergie etwas unter der von D^3He oder D^6Li liegt.

Bei einer Teilchenenergie kT des Potentialwalls, wird nach Abb. 18.11 der Reaktionsquerschnitt σ gleich dem geometrischen Kernquerschnitt, der von der Größenordnung **1 barn** ($= 10^{-28} \text{ m}^2$) ist. Dies tritt für die DT-Reaktion um $2 \cdot 10^8 \text{ K}$ ein, entsprechend 20 keV. Hier wird $\sigma \approx 3 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$, also $\sigma v \approx 6 \cdot 10^{-21} \text{ m}^3/\text{s}$.

Das frei werdende Neutron kann gleich zur Tritium-Produktion ausgenutzt werden: ${}^7\text{Li} + \text{n} + 2,5 \text{ MeV} \rightarrow \text{T} + \text{He} + \text{n}$, ${}^6\text{Li} + \text{n} \rightarrow \text{T} + \text{He} + 4,6 \text{ MeV}$ (Li-Mantel um das Reaktionsgefäß). Die Ausgangsprodukte sind

demnach D und Li. Natürlicher Wasserstoff hat ein **Isotopenverhältnis** $D : H = 1 : 6\,000$. Die Ozeane enthalten also über 10^{16} kg D, natürliches Lithium hat 10% ${}^6\text{Li}$, 90% ${}^7\text{Li}$. Die Erdkruste enthält 0,004 Gewichtsprozent Li, die obersten 2 km haben also etwa ebenso viel Li, wie das Meer D enthält.

Damit Fusionsreaktionen eintreten, muss der Brennstoff stark aufgeheizt werden und wird dabei automatisch zum praktisch vollionisierten **Plasma**. Höchstens schwere Verunreinigungsatome behalten einen Teil ihrer Elektronenhülle. Die investierte Aufheizenergie soll durch die Energieausbeute der Fusionsenergie mindestens wiedergewonnen werden. Ob das der Fall ist, kann man so abschätzen: Das Plasma enthalte im m^3 n Kerne (z. B. $n/2$ Deuteronen + $n/2$ Tritonen) und ebenso viele Elektronen. Bei jedem Fusionsakt werde die Energie Q frei. Die investierte Aufheizenergie bzw. das heiße Plasma kann unter irdischen Verhältnissen nur eine begrenzte Lebensdauer τ haben, bis das Plasma explosiv auseinander fliegt oder die Energie oder das Plasma selbst aus den Undichtigkeiten der Magnetfalle entweicht. Die Anzahl der Reaktionsakte pro m^3 und s ist $\frac{1}{4}\sigma vn^2$. Der Reaktionsquerschnitt σ steigt nach Abb. 18.11 sehr steil (etwa exponentiell mit der Temperatur). Während der **Einschlusszeit (confinement time)** τ wird also die Energie $\frac{1}{4}\sigma vn^2 Q\tau$ frei, die allerdings nur mit dem Wirkungsgrad ϱ verfügbar ist. Andererseits ist auch die Aufheizenergie, die einfach $3nkT$ beträgt ($2n$ Teilchen/ m^3 auf die Temperatur T gebracht) nur z. T. verloren; ein Bruchteil η kann im nächsten Fusionszyklus wieder verwendet werden. Die Fusion wird energetisch lohnend, wenn $(1 - \eta)3nkT < \frac{1}{4}\varrho\sigma vn^2 Q\tau$ oder

$$n\tau > \frac{12(1 - \eta)}{\varrho} \frac{kT}{\sigma v Q} \quad (\text{Lawson-Kriterium}) .$$

Da σ so steil mit T ansteigt, ist die rechte Seite umso kleiner, je größer T ist. Die D,T-Reaktion hat ein Minimum von $T/(\sigma v)$ bei etwa $2 \cdot 10^8$ K. Einsetzen der Zahlenwerte mit $\varrho \approx \eta \approx \frac{1}{3}$ liefert $n\tau > 10^{20}$ s/ m^3 . Man kann dieses Kriterium auf zwei extreme Arten erfüllen: Durch sehr hohes n bei sehr kleinem τ (Laser-Fusion) und durch relativ großes τ bei sehr kleinem n (magnetisch eingeschlossenes Plasma). Dazwischen liegen viele Übergangslösungen. Das Plasma wird geheizt durch den Laserstrahl selbst, durch Stoßwellen, adiabatische Kompression, Hochfrequenzwellen, Einschuss schneller Ionen oder Atome, meist durch Kombination dieser Mechanismen.

Laserfusion. Eine feste Brennstoffpille wird durch viele genau synchrone Hochleistungs-Laserpulse, die von allen Seiten auf die Pille konvergieren, komprimiert. Selbst um eine winzige Pille von 1 mm^3 auf die Optimaltemperatur von 10^8 K zu bringen, braucht man mehr als 5 J, also bei 100%ger Ankopplung der Laserenergie eine Gesamtpulsenergie von ca. 10^6 J, die heute noch nicht erreichbar ist. In Wirklichkeit ist die Ankopplung längst nicht ideal, und zwar weil der Laserstrahl kaum in das Plasma eindringen kann, ebenso wenig wie eine Radiowelle in die Ionosphäre. Die „Abschneidetiefe“, in der er steckenbleibt und sogar reflektiert wird, ist bestimmt

durch die Ladungsträgerkonzentration n , bei der die **Langmuir-Frequenz** $9\,000\sqrt{n}$ gleich der Frequenz ν des Laserlichts wird (vgl. (8.45)). Selbst UV-Laserlicht von 300 nm oder $\nu = 10^{15} \text{ s}^{-1}$ wird bei $n \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}$ abgeschnitten, d. h. schon durch das erste Plasmawölkchen, das aus der getroffenen Pille herauspufft. Der weitere Energiekontakt mit dem Brennstoffplasma erfolgt dann durch Teilchenstöße (Wärmeleitung) und weiter innen durch eine Stoßwelle, die allerdings so intensiv ist, dass sie das Plasma auf Dichten bis 10^6 kg m^{-3} komprimieren kann, d. h. die Materie in die Nähe des Zustandes in weißen Zwergsternen bringt.

Nach dem Abklingen des Laserpulses dehnt sich das Plasma mit Schallgeschwindigkeit aus. Da die gegenwärtigen Hochleistungs-Laserpulse sehr kurz sind (kürzer als 1 ns), wird die Lebensdauer τ des heißen Plasmas durch diese Ausdehnungszeit bestimmt, obwohl die Schallgeschwindigkeit nach (4.54) bei 10^8 K und einer mittleren relativen Teilchenmasse 1 Werte um 10^6 bis 10^7 m s^{-1} erreicht. Für eine Pille von ursprünglich 1 mm^3 und eine Kompression um den Faktor 1 000 ($\tau \approx 10^{10} \text{ s}$ und $n \approx 10^{32} \text{ m}^{-3}$) wäre damit das Lawson-Kriterium erfüllt, selbst wenn man den geringen Wirkungsgrad des Lasers ($\lesssim 0,1$) und der energetischen Kopplung zwischen Laser und Plasma (ebenfalls $\lesssim 0,1$) berücksichtigt.

Magnetisch eingeschlossenes Plasma. Ein Plasma lässt sich in einem Magnetfeld B einsperren, wenn der Druckgradient, der die Teilchen nach außen treibt, nicht größer ist als die Lorentz-Kraft auf die Ionen:

$$\text{grad } p \leq evB .$$

Die Ströme ev selbst schwächen das angelegte Magnetfeld. Eine genauere Betrachtung (Aufgabe 18.1.13) zeigt, dass das Feld B einen Druck aushalten kann, der etwa gleich seiner Energiedichte ist:

$$p \approx BH .$$

Der Strom, der das Feld B erzeugt, fließt größtenteils als Ionenstrom im Plasma selbst und dient damit zu dessen joulescher Aufheizung. Die Aufheizrate Qj^2 wird umso ungünstiger, je heißer das Plasma ist: $Q \sim T^{-3/2}$. Dies liegt daran, dass der effektive Stoßquerschnitt zwischen geladenen Teilchen wie T^{-2} geht. Zur Ableitung bedenke man, dass ein wirksamer Stoß ungefähre Gleichheit von potentieller und kinetischer Energie voraussetzt (Abschn. 17.3.1). Daher muss die Joule-Heizung durch andere „Zündhilfen“ unterstützt werden. Hierzu dient besonders die adiabatische Kompression des Plasmas in einem sehr rasch zunehmenden Magnetfeld (**pinch-Effekt**).

Energieverluste treten ein durch Wärmeleitung und Diffusion zur Wand, Undichtigkeiten des magnetischen Einschlusses (reduziert durch ringförmige Anordnung des B -Feldes), Stöße mit eventuellen Neutralverunreinigungen, die sich vom Feld nicht einsperren lassen, **Bremsstrahlung** und **Zyklotronstrahlung**. Diese beiden Strahlungsarten beruhen auf Beschleunigungen der geladenen Teilchen, die erste auf der Bremsung bei Stößen, die zweite auf der Beschleunigung beim Umlauf im Ring selbst. Leitungs-, Diffusions- und Bremsstrahlungsverluste sind i. Allg. proportional v , also $T^{1/2}$, werden also schließlich von der

Zyklotronstrahlung überholt, die mit T geht. Man kann das so verstehen: Die Hertz-Strahlungsleistung einer mit a beschleunigten Ladung ist nach Abschn. 7.4.6 proportional a^2 . Für den Umlauf um die Feldlinien gilt Zentrifugalkraft = Lorentz-Kraft, d. h. $m\omega^2 r = evB = e\omega r B$, also $\omega = eB/m$, $r = mv/(eB)$. Die Strahlungsleistung ist also proportional $a^2 \sim \omega^4 r^2 \sim B^2 v^2 \sim B^2 T$.

Zu den aussichtsreichsten Anordnungen gehören ringförmige wie **Tokamak** und Stellarator sowie lineare wie der θ -pinch (vgl. auch Aufgabe 18.1.13). Bei JET (Joint European Torus) in Culham ist man dem Ziel sehr nahe.

Katalysierte Fusion. Vielleicht wird man die Kernfusion einmal auch ohne so extreme Temperaturen realisieren können. Diese Möglichkeit ergibt sich direkt aus dem Bohr-Modell. Die hohen Temperaturen sollen ja nur die Coulomb-Abstoßung der Kerne überwinden helfen. Zwischen zwei H-Atomen herrscht keine solche Abstoßung, solange die Außenelektronen die Kernladung abschirmen, d. h. für Abstände oberhalb etwa 1 \AA , die allerdings viel zu groß sind. Das schwere Elektron oder Myon würde den Kern nach (14.1) in einem 207-mal engeren Abstand umkreisen, wegen seiner entsprechend größeren Masse. Ein Proton könnte sich also einem Myo-Wasserstoffatom auf fast 10^{-13} m nähern, ohne von dessen Kernladung etwas zu spüren. Von diesem Abstand aus hätte der Tunneleffekt durch die verbleibende Potentialschwelle bereits eine vernünftige Wahrscheinlichkeit. Man könnte so in einem kalten Gas Fusion erzielen, womit die meisten technischen Schwierigkeiten der thermischen Kernreaktionen entfielen. Noch besser ginge es mit anderen „exotischen“, noch massereicheren Teilchen statt Elektronen, z. B. K^- -Mesonen.

Allerdings kann man **Myo-Wasserstoffatome** zurzeit nur in wenigen Exemplaren erzeugen. Die Situation wäre also nicht besser als in einem Teilchenbeschleuniger, wo man auch ohne weiteres *einzelne* Protonen, Deuteronen oder Tritonen zu Helium verschmelzen kann. Aber mehrere Umstände kommen uns zu Hilfe: In einem Gemisch aus Protonen und Deuteronen sucht das Myon von sich aus die Deuteronen auf, und beim Fusionsakt wird das Myon abgeschleudert und als Katalysator für weitere Fusionsakte verfügbar, wenn auch vorläufig für viel zu wenige, da es in $2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ zerfällt. Außerdem ist vorläufig die Herstellung von Myonen energetisch viel zu teuer. Trotzdem ist diese **katalysierte Fusion**, deren Einzelheiten Sie in Aufgabe 18.1.18 selbst nachrechnen können, eine interessante Möglichkeit.

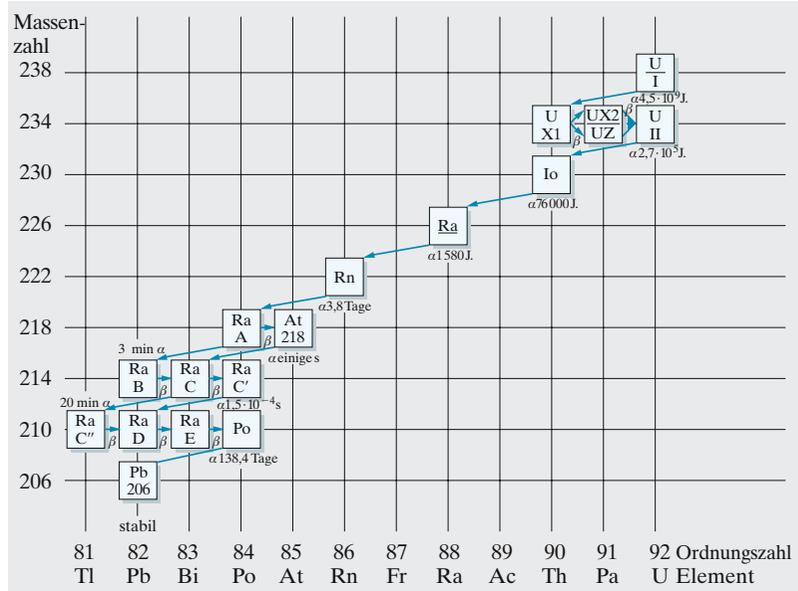
18.2 Radioaktivität

Als *Henri Becquerel* (1896) und besonders *Marie* und *Pierre Curie* (ab 1896) die spontane Kernumwandlung entdeckten, rüttelten sie, ohne es zu wollen, an den drei damals heiligsten Naturgesetzen, der Unveränderlichkeit der Elemente, dem Energiesatz und dem Kausalgesetz. Von diesem Schlag hat sich nur der Energiesatz erholt und sogar noch mehr Kraft gewonnen.

18.2.1 Elementumwandlung

Becquerel fand auf einer dicht verpackten Photoplatte, auf der er versehentlich ein Stück Uranpechblende liegen gelassen hatte, ein präzises Abbild dieses Stückchens. Uran sendet eine durchdringende Strahlung aus. Die

Abb. 18.13. Radioaktive Familie des Urans mit den historischen Namen der Nuklide und ihren Halbwertszeiten



Curies isolierten in jahrelanger Arbeit aus der Pechblende Beimischungen, die Millionen Mal stärker strahlen als Uran, u. A. **Polonium** und **Radium**. Woraus diese Strahlung besteht, wurde klar, als man ihre Ablenkbarkeit im Magnetfeld untersuchte. Ein Anteil (β) wird schon in mäßigen Feldern im Sinn negativer Teilchen abgelenkt, ein anderer (α) sehr viel schwächer im Sinn positiver Teilchen, ein dritter (γ) gar nicht. Kombination von elektrischer und magnetischer Ablenkung ergibt für die α -Strahlung eine spezifische Ladung

$$\frac{e'}{m} = 4,826 \cdot 10^7 \text{ C kg}^{-1}, \tag{18.6}$$

also halb so viel wie für H-Ionen. Demnach könnte das **α -Teilchen** ebenso gut ein ^{12}C - wie ein ^4He -Kern sein. Messung der Ladung Q , die ein α -Strahlbündel in einen Faraday-Becher trägt, der mit einem empfindlichen Elektrometer verbunden ist, und gleichzeitig Messung der Anzahl n der emittierten α -Teilchen mit einem Zählrohr oder Szintillationszähler ergibt die Ladung der Teilchen: $e' = Q/n = 2e$. Mit (18.6) findet man für die α -Teilchen die vierfache Protonenmasse, womit sie als Heliumkerne identifiziert sind.

Für die **β -Strahlung** ergibt sich eine mehr als 1 000-mal größere spezifische Ladung, wie sie nur für Elektronen möglich ist. Abweichungen von dem an langsamen Elektronen gemessenen Wert e/m erklären sich durch die relativistische Massenzunahme (Abschn. 8.2.5).

Tatsächlich lässt sich spektroskopisch aus dem allmählichen Auftreten der He-Linien nachweisen, dass ein α -Strahler ständig Helium erzeugt: Nach Aufnahme zweier Elektronen verwandeln sich die α -Teilchen in He-Atome. Aus dem Radium, einem Erdalkalimetall z. B., entsteht gleichzeitig ein weiteres Gas, das **Radon** Rn (oder die Radium-Emanation), das sich

wie ein Edelgas verhält und damit im Periodensystem auf den Platz 86, unter das Xe gehört, d. h. zwei Plätze vor das Radium. Dies war der erste Hinweis auf die Gültigkeit der **Verschiebungssätze von Rutherford und Soddy**, die sich aus der Massen- und Ladungsbilanz von selbst ergeben: Beim α -Zerfall nimmt die Massenzahl um 4, die Ordnungszahl um 2 ab; beim β -Zerfall bleibt die Massenzahl konstant, die Ordnungszahl nimmt um 1 zu.

Meist ist der beim Zerfall entstehende Kern auch instabil. Alle schweren natürlich-radioaktiven Kerne ordnen sich so in drei **Zerfallsreihen**, an deren Spitze ^{238}U , ^{232}Th bzw. ^{235}U stehen. Die Massenzahlen aller Glieder der drei Ketten lassen sich durch $4n + 2$, $4n$ bzw. $4n + 3$ darstellen. Es fehlt in der Natur die Reihe mit $4n + 1$, die erst nach Entdeckung der Kernspaltung als ^{237}Np -Reihe gefunden wurde. In der Natur kommt sie nicht vor, weil sie kein Glied mit Milliarden Jahren Lebensdauer enthält und daher längst abgebaut ist. Alle drei Reihen enden in Isotopen des Bleis mit magischer Protonen- und nahezu magischer Neutronenzahl, die infolgedessen stabiler sind als ihre Nachbarn (Mulde in der $W(A)$ -Kurve, Abb. 18.3). Außer diesen drei Zerfallsreihen gibt es noch je ein Isotop von K, Rb, Sm und Lu, die langlebig genug sind, die ganze Geologie überlebt zu haben.

Die **Kernchemie** hat gezeigt: Man kann Elemente verwandeln – auch z. B. Quecksilber in Gold –, wenn auch nicht mit den Mitteln der Alchimisten und meist mit viel zu großem Aufwand. Die radioaktiven Zerfälle entsprechen dem spontanen exothermen Zerfall chemischer Verbindungen, Spaltung und Fusion streben einen energetisch günstigeren Zustand an, müssen aber durch Energiezufuhr gezündet werden, um die Aktivierungsschwelle zu überwinden. Allgemein wird eine **Kernreaktion** durch Einschuss eines Teilchens a in einen Kern A ausgelöst, der nach meist sehr kurzer Zeit unter Aussendung eines Teilchens b in einen anderen Kern B übergeht. Man schreibt kurz $A(a, b)B$. Hierbei kann $a = b$ sein: Das eingefangene oder ein vorher im Kern enthaltenes gleichartiges Teilchen wird in anderer Richtung wieder ausgesandt (**elastische Streuung**), wobei manchmal der **Zwischenkern** vorher oder hinterher durch γ -Strahlung in einen energieärmeren Zustand übergeht, sodass eingefangenes und ausgesandtes Teilchen a verschiedene Energie haben (**inelastische Streuung**). Allmählicher Aufbau immer schwererer Kerne gelingt durch **Neutroneneinfang** (n, γ) und (n, e^-), Abbau vor allem durch den **Kernphotoeffekt** (γ, n) und (γ, p).

Zu den fast 500 in der Natur vorkommenden Nukliden hat man durch solche Reaktionen über 1 000 weitere, instabile erzeugt. Nuklide mit zu hohem Neutronenanteil verringern diesen meist durch e^- -Zerfall, bei zu hohem Protonenanteil neigen sie zum e^+ -Zerfall (Aussendung eines Positrons). Jedes instabile Nuklid lässt sich i. Allg. durch eine bestimmte **Lebensdauer (Zerfallskonstante)** kennzeichnen. Manchmal findet man allerdings trotz gleicher Protonen- und Neutronenzahl mehrere Gruppen von Zerfällen mit verschiedenen Zerfallskonstanten. Man sagt, das Nuklid habe mehrere **Isomere**, die sich durch ihren Drehimpuls und damit auch durch ihre Energie unterscheiden und die durch γ -Strahlung ineinander übergehen können.

Tabelle 18.2. Typen von Kernreaktionen; rechts stehen die eingestrahelten, links die ausgestrahlten Teilchen (Sp: Spaltung; M: Mößbauer-Effekt)

Teilchen	Teilchen				
	p	d	α	n	γ
p		+	+	+	+
d	+				
α	+	+		+	
n	+	+	+		+
2n		+		Sp	+
γ	+			+	M

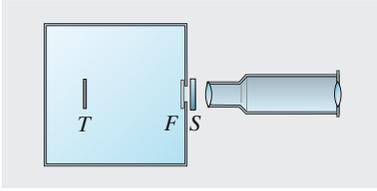


Abb. 18.14. Rutherford's Anordnung zur ersten Kernumwandlung

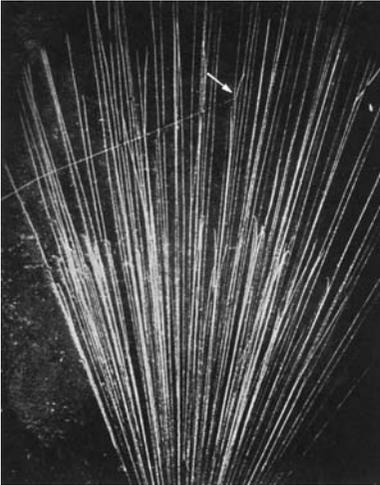


Abb. 18.15. Umwandlung eines Stickstoffkerns durch ein energiereiches α -Teilchen (Blackett und Lees, aus W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

Ein Kern kann seinen Protonenüberschuss außer durch e^+ -Emission auch durch Einfang eines seiner Hüllenelektronen verringern, meist aus der K-Schale. Nach einem solchen **K-Einfang** rutschen die übrigen Elektronen der Hülle in die Lücke nach, und man beobachtet die charakteristische Röntgenstrahlung des Tochteratoms, das im Periodensystem links neben dem ursprünglichen steht.

Die erste künstliche Kernumwandlung wies Rutherford 1919 nach. Auf dem ZnS-Schirm *S* (Abb. 18.14) sieht man im Mikroskop Szintillationen, obwohl die vom α -aktiven Präparat auf dem Träger *T* ausgehenden Teilchen im Stickstoff der Kammer sicher absorbiert werden (ihre Reichweite ist kleiner als der Abstand TF). Rutherford deutete dies als $N(\alpha, p)O$ -Reaktion. Das herausgeschleuderte Proton kann wegen seiner kleineren Ladung und großen Energie den Schirm erreichen. Den direkten Nachweis brachte etwas später die Nebelkammeraufnahme (Abb. 18.15). Ein $^{14}_7N$ schluckt ein α , der Zwischenkern $^{18}_9F$ zerfällt fast sofort in $^{17}_8O$ (kurze dicke Spur) und p (lange dünne Spur). Für eine solche Umwandlung braucht man etwa 500 000 α -Teilchen, hier aus ^{214}Po , bei geringerer α -Energie noch viel mehr. Der **Wirkungsquerschnitt** solcher Reaktionen ist so groß wie oder kleiner als der Kernquerschnitt (10^{-30} – 10^{-29} m²). Liegt er ausnahmsweise um 10^{-28} m², sprechen die Kernphysiker von einem „Scheunentor“, engl. **barn**: 1 barn = 10^{-28} m². Je energiereicher das Projektil und je geringer die Ladung des **Targets** (Zielkerns) ist, desto näher erlaubt die Coulomb-Kraft beiden, aneinander heranzukommen, desto größer wird also der Reaktionsquerschnitt.

18.2.2 Zerfallsenergie

Wenn die Curies spätabends in ihr Behelfslabor gingen, leuchtete das vor einigen Wochen hergestellte Radium immer noch geheimnisvoll grünlichblau. 1 g reines Radium strahlt kalorimetrisch messbar 0,015 W ab. Eine elektrochemische Batterie, die pro Gramm etwa ebenso viel Leistung hergibt, ist nach ein paar Stunden leer, die Strahlung des Radiums ist erst nach 1 500 Jahren auf die Hälfte gesunken und hat in dieser Zeit 10^4 -mal mehr Energie hergegeben als 1 g Kohle beim Verbrennen. Das war der erste Hinweis auf Energien ganz neuen Ausmaßes, 15 Jahre bevor Rutherford fand, dass es einen Kern gibt und wie klein er ist, woraus mit dem Coulomb-Gesetz sofort diese Größenordnungen folgen.

Heute kann man schon im Anfänger-Praktikum die Energie radioaktiver β -Teilchen messen. Wenn z. B. ein Magnetfeld von 0,1 T diesen Teilchen einen Krümmungsradius von 10 cm aufzwingt, würde nichtrelativistisch aus (8.14) folgen $E \approx 3$ MeV, was aber wegen $v \approx 10^9$ m/s nicht sein kann. Die relativistische Rechnung liefert etwa 2 MeV. Die 7 300-mal schwereren α -Teilchen werden bei gleicher Energie 43-mal schwächer abgelenkt. Genauere Messung zeigt weitere Unterschiede zwischen α - und β -Strahlung: Alle α -Teilchen aus einem bestimmten Nuklid haben die gleiche Energie (seltener gibt es mehrere β -Gruppen mit verschiedenen scharfen Energiewerten).

Aus Ablenkmessungen kann man bei bekannter Masse und Ladung auch Impuls und Energie der Teilchen ermitteln. Man findet für alle α -

Teilchen aus einem bestimmten Nuklid die gleiche Energie (oder wenige Gruppen von α -Teilchen mit verschiedenen, aber jeweils einheitlichen Energien). Dieses Linienspektrum der α -Energien ist so scharf, dass es zur Identifizierung des emittierenden Nuklids dienen kann. Dagegen ist das **Energiespektrum der β -Teilchen** kontinuierlich: Die Teilchen können alle Energien zwischen 0 und einer Maximalenergie haben. Diese Maximalenergie ist wieder für das Nuklid charakteristisch (Abb. 18.18). Einzelne scharfe β -Linien, die sich gelegentlich dem Kontinuum überlagern, stammen nicht aus dem Kern, sondern entstehen durch Absorption der gleichzeitig emittierten γ -Strahlung in der Elektronenhülle des Tochteratoms (**Konversionselektronen**). α - und β -Energien liegen in der Größenordnung MeV.

Das diskrete α -Spektrum lässt auf die Existenz diskreter Quantenzustände auch im Kern schließen. Bei den β -Übergängen scheint dieses Prinzip verletzt zu sein. Es sieht so aus, als führte die Emission verschieden schneller β -Teilchen zu Tochterkernen mit verschiedenem Energiegehalt. Es zeigt sich aber, dass die Tochterkerne eines β -Zerfalls in Wirklichkeit alle identisch sind; z. B. erfolgt ein sofort anschließender γ -Übergang bei allen in völlig gleicher Weise. Man muss annehmen, dass die *Maximalenergie* des β -Spektrums der Energiedifferenz zwischen Mutter- und Tochterkern entspricht und dass diese ebenso diskret ist wie beim α -Zerfall. Dann kann die Energie, die den meisten β -Teilchen fehlt, nur durch ein anderes, noch unbeobachtetes Teilchen abgeführt worden sein. Dieses Teilchen muss ungeladen sein (sonst würde es sich durch Ionisierung bemerkbar machen); es darf keine merkliche Ruhmasse haben (das folgt aus der Energiebilanz). Die Bestätigungen für die Existenz dieses von *Pauli* und *Fermi* postulierten **Neutrinos** haben sich immer mehr gehäuft, bis es 1956 direkt nachgewiesen wurde (Abschn. 18.4.4).

Da α -Teilchen mit genau bestimmter Energie, also auch genau bestimmtem Impuls emittiert werden, erhält der Restkern der Masse M einen Rückstoß, der sich aus dem Impulssatz ergibt. Die kinetische Energie E hängt mit dem Impuls p zusammen wie $E = p^2/(2m)$ oder $p = \sqrt{2mE}$. Also folgt für die Energie des **Rückstoßkerns** $p = \sqrt{2m_\alpha E_\alpha} = \sqrt{2ME}$ oder $E = E_\alpha m_\alpha / M$. Bei solchen Energien (Größenordnung 10^5 eV) ionisieren die Rückstoßkerne bereits und zeichnen in der Nebelkammer eine allerdings sehr kurze Spur.

× Beispiel ...

^{210}Po hat eine α -Energie von 5,30 MeV. Wie groß sind Rückstoßenergie und -geschwindigkeit sowie Reichweite der Produktteilchen?

^{206}Pb und α bekommen gleich große Impulse p , also Energien $E = \frac{1}{2} p^2 / m$. Von den 5,30 MeV entfallen 5,2 auf α , 0,1 auf Pb. $E = \frac{1}{2} v p$, also $v = 1,6 \cdot 10^7$ bzw. $3,2 \cdot 10^5$ m/s. Die Reichweiten gehen wie E^2 / m (s. (18.18)): α kommt einige cm weit, Pb kaum 1 μm .

Beim β -Zerfall werden wegen der viel kleineren Masse des Elektrons sehr viel weniger Impuls und Energie übertragen (Größenordnung 10 eV), sodass es nicht zur Ionisierung kommt. Man kann aber die Geschwindigkeit



Abb. 18.16. Geschwindigkeitsspektrum von α -Strahlung

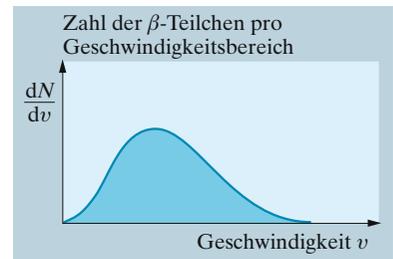


Abb. 18.17. Geschwindigkeitsspektrum von β -Strahlung

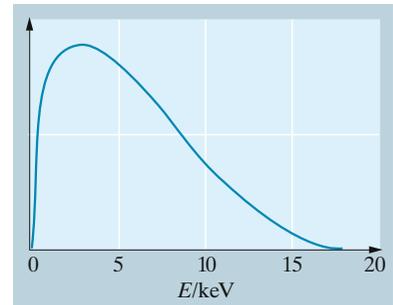


Abb. 18.18. Das Energiespektrum der β -Teilchen aus dem Zerfall des Tritiums ^3H

der Rückstoßkerne leichterer β -Strahler (z. B. ^{32}P) direkt messen, indem man feststellt, wie lange sie für einen bestimmten Flugweg brauchen. Gleichzeitig findet man durch magnetische Ablenkung Geschwindigkeit und Impuls des β -Teilchens, das bei diesem individuellen Zerfallsakt emittiert worden ist. Es ergibt sich, dass der Rückstoßimpuls der Atome durchweg größer ist als der β -Impuls. Dies ist ein weiterer Hinweis auf die Existenz eines Neutrinos, das den fehlenden Impuls abführt. Setzt man dessen Ruhmasse gleich Null, so ergibt sich die richtige (relativistische) Bilanz von Impuls und Energie.

Auch bei der γ -Emission erhält der Kern einen Rückstoß und damit kinetische Energie, sodass nicht die ganze freiwerdende Energie in das γ -Quant übergeht. Nur wenn der emittierende Kern in ein Kristallgitter eingebaut ist, das als Ganzes die Rückstoßenergie aufnimmt, bleibt dieser Effekt aus, und es entsteht eine unverschobene γ -Linie, die oft äußerst scharf ist (**Möbbaueffekt**, Abschn. 13.1.4).

18.2.3 Das Zerfallsgesetz

Ein Radiumkern, der in der nächsten Sekunde zerfallen wird, unterscheidet sich in nichts von einem, der noch 10 000 Jahre leben wird. Allgemein kennt man kein Merkmal, das atomare Einzelakte wie einen Kernzerfall oder den Übergang eines H-Atoms von einem stationären Zustand in den anderen voraussagen gestattet. Die meisten Physiker glauben sogar mit *J. von Neumann*, dies liege nicht nur an unserem unzureichenden Einblick, sondern es könne prinzipiell keine solchen **verborgenen Parameter** geben, die atomare Einzelakte vorausbestimmen.

Sehr exakt angebar ist dagegen die *Wahrscheinlichkeit*, dass ein gegebener Ra-Kern in der nächsten Sekunde zerfällt. Sie ist zahlenmäßig gleich der **Zerfallskonstanten** λ und wird in einer großen Anzahl von Kernen durch die tatsächlich beobachtete relative Häufigkeit der Zerfallsakte beliebig gut angenähert. Von n Kernen zerfallen im nächsten Zeitintervall dt im Mittel $\lambda n dt$:

$$\boxed{dn = -\lambda n dt}, \quad (18.7)$$

woraus durch Integration folgt:

$$n = n_0 e^{-\lambda t} \quad (\text{Zerfallsgesetz}). \quad (18.8)$$

Dabei ist n_0 die Zahl der Atome zur Zeit $t = 0$, n die Zahl der zur Zeit t noch vorhandenen Atome. λ heißt die *Zerfallskonstante*. Nach Ablauf der Zeit $\tau = 1/\lambda$ hat die Zahl der Atome auf den e-ten Teil abgenommen; τ ist ihre **mittlere Lebensdauer**. Die **Halbwertszeit** $T_{1/2}$, nach der die Zahl der anfangs vorhandenen Atome durch Zerfall auf die Hälfte abgenommen hat, ist gegeben durch $n_0/2 = n_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$ oder

$$\lambda T_{1/2} = \ln 2 = 0,693. \quad (18.9)$$

Die exponentielle Abhängigkeit der Radioaktivität von der Zeit ist so streng erfüllt, dass der radioaktive Zerfall zur **Altersbestimmung** von Mineralien u. Ä. verwendet wird.

Für historische Zeiten ist folgendes Verfahren geeignet: Der atmosphärische Stickstoff wird durch Neutroneneinfang zu einem kleinen Bruchteil in ein Kohlenstoffisotop der Masse 14 verwandelt ($^{14}_6\text{C}$). Dieses ist radioaktiv, d. h., es zerfällt unter β -Strahlung mit einer Halbwertszeit von 5 730 Jahren. Ein Teil der ^{14}C -Atome wird vom atmosphärischen O_2 zu CO_2 oxidiert. Organische Substanzen entnehmen dieses zum Aufbau ihrer Kohlenwasserstoffe aus der Atmosphäre und bauen somit auch immer ^{14}C -Atome ein, im gleichen Mengenverhältnis, mit dem sie in der Atmosphäre enthalten sind. Vom Zeitpunkt des Absterbens der organischen Substanz, d. h. sobald kein CO_2 mehr assimiliert wird, sinkt der Gehalt an ^{14}C exponentiell mit der Halbwertszeit 5 730 a ab. Aus der verbliebenen β -Aktivität kann man also auf den Zeitpunkt des Absterbens, d. h. auf das Alter des Fundstückes schließen.

Für α -strahlende Nuklide besteht ein Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante und Reichweite R , die ein bequemes Maß für die Energie der ausgesandten α -Teilchen ist:

$$\log \lambda = A + B \log R \quad (\text{Geiger-Nuttall-Regel}) \quad (18.10)$$

A und B sind Konstanten, B hat für alle Zerfallsreihen den gleichen, A für jede Familie einen besonderen Wert (Abb. 18.19). Man erkennt, dass einer um den Faktor 2 größeren Reichweite eine um 19 Zehnerpotenzen größere Zerfallskonstante bzw. kleinere Lebensdauer entspricht!

Für β -Strahler gilt eine ähnliche Beziehung, die **Sargent-Regel**: Je größer die Energie der schnellsten Elektronen des kontinuierlichen Spektrums, desto größer ist auch die Zerfallskonstante des Elementes.

Diese empirisch gefundenen Regeln fanden durch die Quantenmechanik eine vollständige Deutung (Abschn. 13.7.2, 18.4.5).

In einem frisch gereinigten langlebigen radioaktiven Präparat, z. B. Ra, steigt die Aktivität, d. h. die Anzahl der Zerfallsakte pro Sekunde, i. Allg. zunächst an. Bevor sich die Abnahme nach dem Zerfallsgesetz geltend macht, stellt sich ein **radioaktives Gleichgewicht** ein, in dem die Aktivität konstant ist. Der Grund für diesen Anstieg ist, dass sich dem Mutter-Nuklid allmählich die übrigen Nuklide einer Zerfallsreihe zugesellen, von denen jedes im Gleichgewicht ebenso viel Aktivität hat wie das Mutter-Nuklid. Von jedem Glied der Zerfallsreihe zerfallen dann in der Zeiteinheit gleich viele Kerne. Das heißt, dass sich die Menge aller Zwischenglieder im Gleichgewicht nicht ändert, denn sie werden ebenso schnell nachgeliefert wie sie zerfallen. Als Gesamteffekt zerfallen nur ebenso viele Kerne des Mutter-Nuklids, wie stabile Kerne des Endgliedes der Reihe entstehen.

Das Mutterpräparat mit der Zerfallskonstante Λ enthalte N Atome, vom nächsten Glied der Zerfallsreihe seien schon n Atome vorhanden, n wächst in der Zeit dt durch Zerfall von Mutteratomen um $\Lambda N dt$ und nimmt durch den eigenen Zerfall um $\lambda n dt$ ab:

$$\dot{n} = \Lambda N - \lambda n \quad (18.11)$$

Gleichgewicht, d. h. $\dot{n} = 0$, stellt sich ein bei einem Mengenverhältnis $n/N = \Lambda/\lambda$. Diesem Gleichgewicht nähert sich n asymptotisch wie

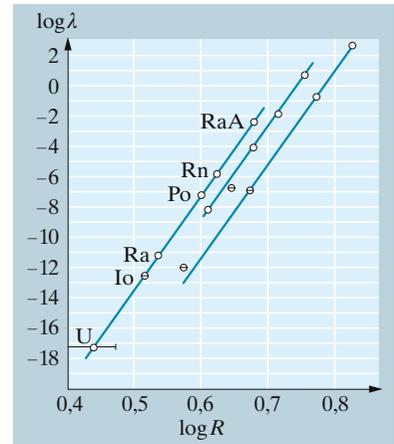


Abb. 18.19. Die Geiger-Nuttall-Regel; (R in cm Luft, λ in s^{-1} ; dekadische Logarithmen)

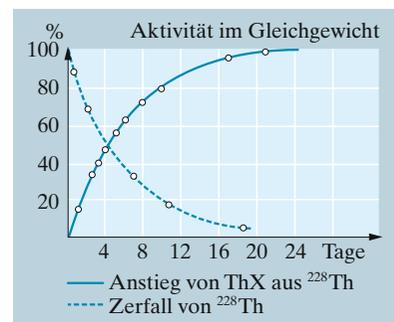


Abb. 18.20. Anstieg des radioaktiven Elements ThX ($=^{224}\text{Ra}$) aus dem langlebigen Mutterelement RdTh ($=^{228}\text{Th}$)

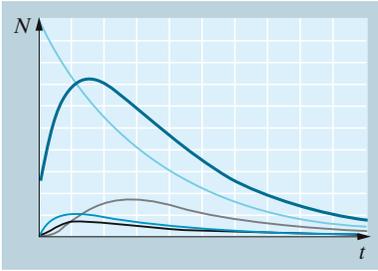


Abb. 18.21. Ein zunächst reines radioaktives Präparat zerfällt (*obere blaue Kurve*), allmählich gesellen sich seine drei kurzlebigeren Zerfallsprodukte dazu (*untere Kurven*), sodass die Gesamtaktivität zunächst ansteigt (*obere schwarze Kurve*). Da Mutter, Tochter, Enkelin . . . nicht allzu verschiedene Halbwertszeiten haben (Faktoren 0,15; 0,1; 0,3), kann sich hier kein Gleichgewicht einstellen, in dem alle vier gleich stark strahlen

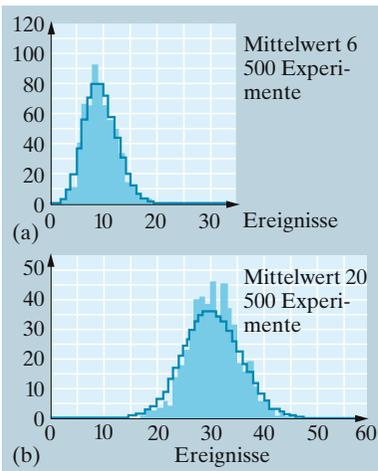


Abb. 18.22a,b. Poisson-Verteilung von Zählrohr-Impulsraten. Abszisse: Anzahl der Impulse innerhalb der Messzeit (a) 24 s, (b) 1,5 min; Ordinate: Anzahl der Messungen, die die jeweilige Impulszahl lieferten. Die dargestellte Impulsrate ist typisch für die natürliche Hintergrundstrahlung (kosmische Strahlung, atmosphärische und Bodenaktivität)

$$n = N \frac{\Lambda}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) = N_0 \frac{\Lambda}{\lambda} e^{-\Lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) \tag{18.12}$$

(Lösung von (18.11); N klingt ja auch ab, wenn auch viel langsamer: $\Lambda \ll \lambda$). Folgen noch weitere Glieder in der Zerfallsreihe, dann klingt ihre Atomanzahl mit jeweils der größten der bis dahin vorkommenden Zeitkonstanten an.

Das Zerfallsgesetz beschreibt nur das *mittlere Verhalten* sehr vieler Kerne. Bei schwachen Präparaten beobachtet man **statistische Schwankungen**. Ein Geiger-Zähler gibt in einem schwachen Strahlungsfeld ein unregelmäßiges Ticken von sich, ein Szintillationsschirm flackert bald hier, bald dort unregelmäßig auf. Nur über sehr lange Zeiten erhält man einen konstanten Mittelwert der **Zählrate** ν , d. h. der Anzahl von Impulsen geteilt durch die Beobachtungszeit, meist in Minuten ausgedrückt.

Jede Folge von Ereignissen, die völlig unabhängig voneinander sind, und deren jedes im einfachsten Fall eine zeitunabhängige Wahrscheinlichkeit für sein Eintreten hat, muss solche Schwankungen zeigen. Man beobachte einen Geiger-Zähler jeweils eine Minute und notiere die Impulsanzahl; je öfter man dies wiederholt, desto genauer findet man im Durchschnitt den Wert ν . Es kommen aber auch Minuten mit stark abweichender Impulszahl vor, wenn auch umso seltener, je größer die Abweichung ist (Abb. 18.22). Die Häufigkeit der verschiedenen Impulszahlen wird beschrieben durch die **Poisson-Verteilung**: Unter N Versuchen findet man z_n -mal die Impulszahl n , wobei

$$z_n = N \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu} \tag{18.13}$$

Dieses Gesetz folgt aus Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen ganz allgemein für unabhängige, d. h. zeitlich, räumlich oder sonstwie *statistisch verteilte* Ereignisse. Die *mittlere Schwankung* oder **Standard-Abweichung** Δn ist diejenige Abweichung, die nur bei einem Bruchteil $e^{-1} \approx 0,37$ der Versuche überschritten wird. Sie entspricht ungefähr den Wendepunkten der Verteilungskurve in Abb. 18.22. Für die Poisson-Verteilung gilt

$$\Delta n = \sqrt{\nu} \tag{18.14}$$

oder für die relative Abweichung

$$\frac{\Delta n}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \tag{18.15}$$

Zählt man im Durchschnitt 100 Impulse pro Minute, so sind Minuten mit weniger als 90 oder mehr als 110 Impulsen ziemlich selten (Wahrscheinlichkeit 37%).

18.3 Schnelle Teilchen

Was richten schnelle Teilchen in Materie an, speziell in lebender? Wie erzeugt man sie? Wie weist man sie nach?

18.3.1 Durchgang schneller Teilchen durch Materie

Schießt man einen Teilchenstrahl nicht zu hoher Energie (bis zu einigen eV) in Materie ein, so schwächt sich dieser Strahl nach einem ähnlichen Absorptionsgesetz wie ein Lichtbündel: Beim Durchdringen einer Schichtdicke dx wird ein Bruchteil der Teilchen abgebremst oder seitlich weggestreut und verschwindet so aus dem Strahl. Dieser Bruchteil ist unabhängig von der Anzahl der Teilchen, die noch im Strahl sind, und annähernd unabhängig von der Teilchenenergie. Ein einziger Stoß mit einem Atom reicht zur Bremsung oder Streuung aus. Damit ergibt sich ein **Absorptionsgesetz** mit exponentieller Schwächung: $dI = -\alpha I dx$ oder $I = I_0 e^{-\alpha x}$, ähnlich wie für Licht, einschließlich Röntgenlicht.

Teilchen höherer Energie, z. B. α - und β -Teilchen, verhalten sich anders. Die Spuren der α -Teilchen aus einem radioaktiven Präparat haben keineswegs exponentielle Längensverteilung, sondern brechen alle praktisch bei der gleichen Länge ab („Rasierpinsel“ Abb. 18.23), und zwar so scharf, dass man aus einer Spurlänge die Anfangsenergie ablesen kann. In Abb. 18.23 gibt es demnach zwei α -Gruppen mit verschiedener Energie. Die Energieverluste, meist durch Stöße mit Elektronen bewirkt – abgesehen von den viel selteneren Kernstößen mit hoher Energieübertragung –, sind hier viel kleiner als die Energie des schnellen Teilchens. Es gehören also zahlreiche Stöße dazu, das Teilchen abzubremsen. Sind z. B. 100 Stöße nötig, so gibt es immer eine nennenswerte Anzahl „glücklicher“ Teilchen, die auf der gleichen Strecke, wo das durchschnittliche Teilchen 100 Stöße erleidet, erst $100 - \sqrt{100} = 90$ Stöße hinter sich haben, also etwa noch 10% weiter laufen können.

Diese Betrachtung benutzt die **Poisson-Verteilung** unabhängiger Stoßereignisse und wäre vollkommen richtig, wenn die Stoßakte über die ganze Reichweite mit gleicher Wahrscheinlichkeit verteilt wären. Auf sehr guten Nebelkammeraufnahmen sieht man aber die Spuren am Ende deutlich verdickt. Der Energieverlust geht gegen Ende der Bahn, wo die Energie schon kleiner geworden ist, schneller vor sich. Dass ein schnelles Teilchen weniger Energie verliert als ein langsames, liegt daran, dass es nur kürzere Zeit im Einflussbereich des Teilchens bleibt, mit dem es wechselwirkt, und ihm daher weniger Energie und Impuls übertragen kann. Die quantitative Durchführung dieser Gedanken durch *Bohr, Bethe* u. A. führt auf die Formel

$$\frac{dE}{dx} = \frac{Z^2 n Z' e^4 M}{8\pi \epsilon_0^2 m} \frac{1}{E} \ln \frac{4mE}{MI} \quad (18.16)$$

für den Energieverlust auf der Strecke dx in Abhängigkeit von der Teilchenenergie. M und m sind die Massen des einfliegenden Teilchens und des Elektrons, n , Z' und I sind Anzahldichte, Ordnungszahl und mittlere Ionisierungsenergie der Atome der bremsenden Materie (Herleitung: Aufgaben 18.3.3–18.3.14).

Die verlorene Energie wird in Wechselwirkung mit Elektronen, also zu meist in **Ionisierung** angelegt. Im Endeffekt entstehen fast immer Ionenpaare. Die Erzeugung eines Ionenpaares kostet in den einzelnen Stoffen

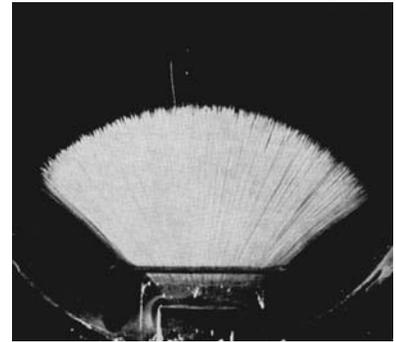


Abb. 18.23. Nebelkammeraufnahme des α -Zerfalls von RaC' . Das einzelne energiereiche Teilchen (längere Spur) wird aus einem angeregten Zustand des gleichen Kerns emittiert. (Nach *Philipp*, aus *W. Finkelnburg: Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

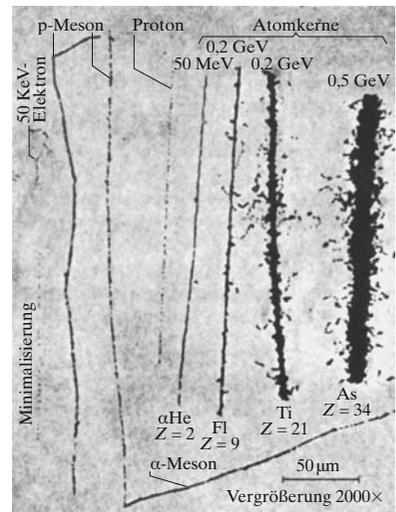


Abb. 18.24. Spuren geladener Teilchen in einer elektronenempfindlichen Photoemulsion. (Zusammengestellt von *Leprince-Ringuet*, aus *W. Finkelnburg: Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

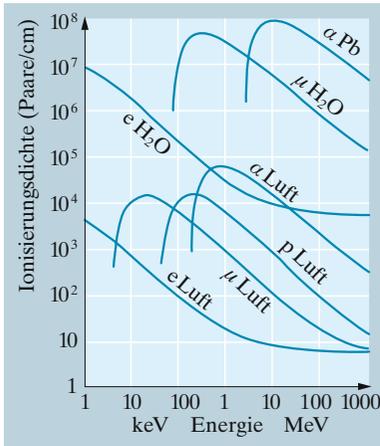


Abb. 18.25. Ionisierungsdichten durch verschiedene Teilchenarten in Abhängigkeit von der Energie

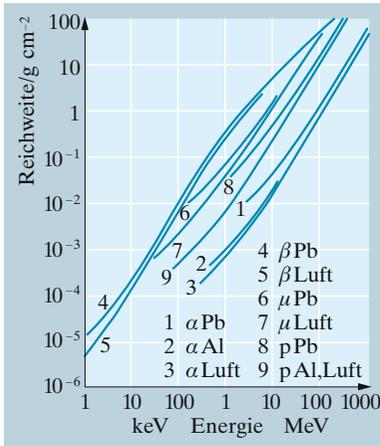


Abb. 18.26. Reichweiten verschiedener Teilchenarten in Abhängigkeit von der Energie. Die Reichweiten lassen sich nur angenähert allein durch die Massendichte ausdrücken; daher sind die Kurven für leichte und schwere Bremssubstanzen etwas verschieden

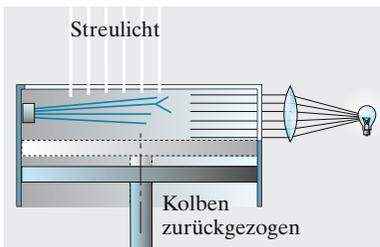


Abb. 18.27. Wilson-Kammer, schematisch

etwas verschieden viel Energie. Ein guter Durchschnittswert für leichtere Atome (vom H bis Ar) ist 33 eV/Ionenpaar. Damit misst dE/dx direkt die Anzahl der auf einer Längeneinheit der Bahn erzeugten Ionenpaare, die **Ionisierungsdichte**. Sie ist nach (18.16) ungefähr umgekehrt proportional der Teilchenenergie.

Sieht man von dem langsam veränderlichen \ln -Glied in (18.16) ab, so ergibt sich für die Energie, die von einem Anfangswert E_0 nach einer Laufstrecke x noch übrig ist

$$E = \sqrt{E_0^2 - \frac{Z^2 n Z' e^4 M}{4\pi\epsilon_0^2 m} x} \quad \text{(Whiddington-Gesetz)} \quad (18.17)$$

Die **Reichweite** ist dasjenige x , wo die Energie Null wird:

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0^2 m}{Z^2 n Z' e^4 M} E_0^2 \quad (18.18)$$

Das \ln -Glied, das wir vernachlässigt hatten, schwächt den Abfall der Energie; dementsprechend erhält man nicht $r \sim E_0^2$, sondern nur etwa $r \sim E_0^{1.5}$ (**Reichweitengesetz von Geiger**).

Der Einfluss der Bremssubstanz steckt hauptsächlich in ihrer Elektronenkonzentration nZ' , in zweiter Linie in der Ionisierungsenergie I . Ein Stoff mit nZ' Elektronen/m³ hat auch nZ' Protonen/m³; für die leichten Elemente ist das Atomgewicht doppelt so groß wie die Ordnungszahl. Daher ist n und damit der Energieverlust im Wesentlichen proportional der Dichte der Bremssubstanz. Die Bremsfähigkeit eines Schirms für schnelle Teilchen lässt sich daher in kg/m² ausdrücken. 1 cm Wasserschicht schirmt ebenso gut ab wie etwa 800 cm Luft bei 1 bar und 20 °C.

Verschiedenartige schnelle Teilchen werden nach (18.16) entsprechend ihrer Masse und ihrer Ladung verschieden stark gebremst. Die Ionisierungsdichten von schweren Ionen, α -Teilchen, Protonen, Myonen, Elektronen nehmen in dieser Reihenfolge ab, und zwar annähernd mit MZ^2 . Für relativistische Teilchen (für Elektronen also schon unterhalb 1 MeV) ändert sich die Bremsformel etwas; die Reichweite nimmt ab.

18.3.2 Nachweis schneller Teilchen

Geladene schnelle Teilchen werden hauptsächlich an ihren Ionisierungswirkungen erkannt, ferner dadurch, dass sie die durchflogene Materie zur Lichtstrahlung anregen oder chemische Reaktionen (Dissoziation, Radikalbildung) in ihr auslösen. Elektrisch neutrale Teilchen wie Neutronen oder Neutrinos zeigen i. Allg. so schwache Wechselwirkung mit Materie, dass man sie meist auf indirektem Wege nachweist, nämlich indem man durch sie eine Kernreaktion auslösen lässt, die ihrerseits geladene Teilchen produziert.

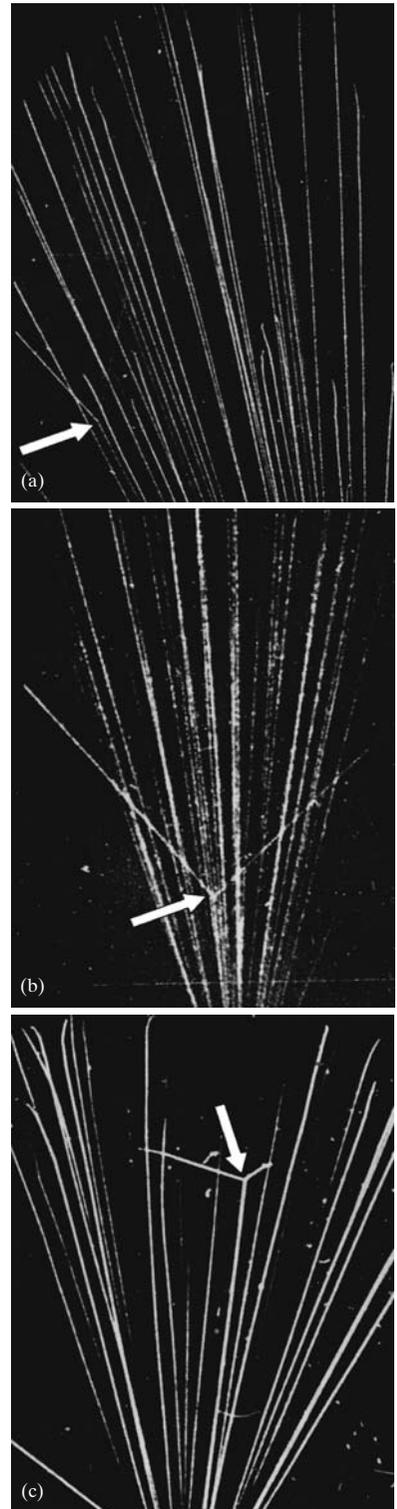
a) Ionisationskammer und Halbleiterzähler. Ionisierende Strahlungen können mittels der **Ionisationskammer** (Abschn. 8.3.1) nachgewiesen werden. Jedoch ist selbst bei sehr großen Kammern und sehr energie-

reichen Strahlen die Anzahl der Ionenpaare, die von *einem* Teilchen oder Quant erzeugt werden, und somit die zu messende Elektrizitätsmenge nur mit Verstärkeranordnungen messbar. Natürlich ist die Energie des einfliegenden Teilchens nicht genauer messbar als bis auf den Energieverlust ΔE in der Kammer. Als **Energieauflösung** bezeichnet man daher das Verhältnis $E/\Delta E$. Offensichtlich sind der Messstrom ($\sim \Delta E$) und die Energieauflösung gegenläufige Größen.

Günstiger in dieser Hinsicht sind **Halbleiter-Detektoren (Zähldioden, Sperrschichtzähler)**. Sie sind meist als dünne Halbleiterplättchen ausgebildet, die einen pn-Übergang enthalten (Abschn. 17.4.3). Ionisierende Strahlung erzeugt darin Paare von Elektronen und Löchern, und zwar mit viel geringerem Energieaufwand als für die Ionisierung eines Gasmoleküls (etwa 1 eV oder wenig mehr, verglichen mit etwa 30 eV in Luft). Die im rein p- oder rein n-leitenden Bereich erzeugten Paare rekombinieren bald wieder. In der pn-Übergangsschicht aber werden Elektronen und Löcher durch das dort herrschende starke Raumladungsfeld getrennt, das Löcher ins n-, Elektronen ins p-Gebiet treibt. Wenn die beiden Stirnflächen des Zählers über einen Widerstand an eine Spannungsquelle gelegt sind, entsteht so ein kurzer Stromstoß. Entsprechend dem geringeren Energieverlust ΔE ist die Energieauflösung $E/\Delta E$ viel größer als in der Ionisationskammer. Die Energie von γ -Quanten wird meist durch die Lichtmenge gemessen, die ein bei der Absorption des γ -Quants entstehendes Photoelektron in einem NaJ-Kristall erzeugt (**Szintillationspektrometer**).

b) Nebel- und Blasen-kammer. Die **Nebelkammer** (Wilson, 1912, Nobelpreis 1927) besteht aus einem zylindrischen Gefäß, das auf der einen Stirnfläche mit einer Glasplatte, auf der anderen mit einem verschiebbaren Kolben verschlossen und mit einem wasserdampfgesättigten Gas (meist Luft) gefüllt ist. Durch Zurückreißen eines Kolbens wird das Gas etwa auf $\frac{4}{3}$ seines ursprünglichen Volumens expandiert. Die adiabatische Ausdehnung kühlt das Gas ab, und es ist nun mit Wasserdampf übersättigt. Dieser scheidet sich aber erst dann in Form kleiner Wassertropfen (Nebeltropfen) aus, wenn Kondensationskerne, z. B. kleine Staubteilchen oder auch geladene Gasmoleküle (positive oder negative Ionen) vorhanden sind. Lässt man unmittelbar nach der Expansion in das Kammerinnere Strahlen eintreten, die auf ihrer Bahn Ionen erzeugen, so kondensieren sich Nebeltröpfchen daran, ehe sich die Ionen durch Diffusion merklich verschieben. Beleuchtet man gleichzeitig intensiv von der Seite, so wird das Licht an diesen Tröpfchen gestreut, und man kann die Spur des Teilchens durch die obere Deckplatte der Kammer als hell leuchtenden Nebelstreifen auf dem dunklen Untergrund des geschwärzten Kolbens beobachten oder

Abb. 18.28a–c. Atomstöße in der Wilson-Kammer. (a) Stoß eines α -Teilchens mit einem Proton. Man beachte den spitzen Winkel und die schwächere Spur des Protons. (b) Stoß zweier α -Teilchen. Der Winkel erscheint im Bild etwas kleiner als $\pi/2$, weil die Aufnahmerichtung nicht genau senkrecht zur Spurebene steht. (c) Stoß eines α -Teilchens mit einem Fluor-Kern. [Nach W. Gentner, H. Maier-Leibnitz, und W. Bothe. (a) ist aufgenommen von P.M. S. Blackett und D. S. Lees (1932), (b) von P. M. S. Blackett (1925) und (c) von I. K. Böggild]



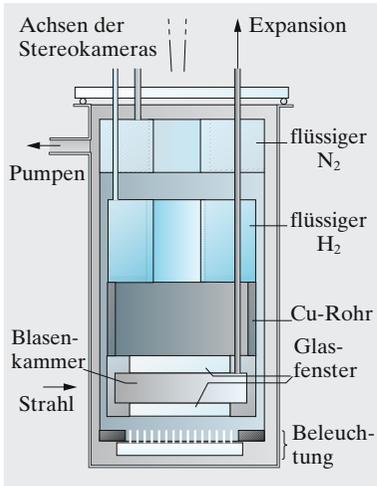


Abb. 18.29. Wasserstoff-Blasen-kammer; schematisch

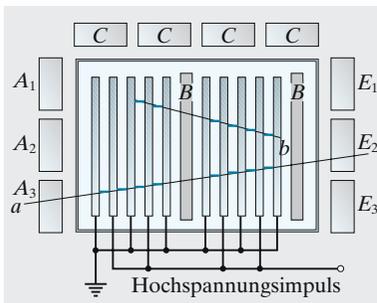


Abb. 18.30. Anordnung einer Funken-kammer; schematisch

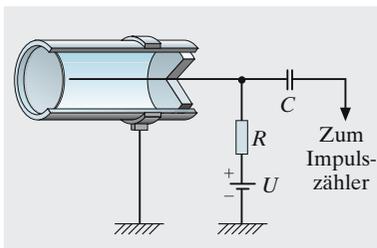


Abb. 18.31. Zählrohr

photographieren. Die Nebelkammer hat zahllose wichtige Erkenntnisse über das Verhalten von Elementarteilchen erbracht. Abbildungen 18.15, 18.23 und 18.28 geben Nebelkammeraufnahmen wieder.

Schwach ionisierende Teilchen erzeugen im Füllgas wegen dessen geringer Dichte zu wenig Ionen. Man hat daher Kammern entwickelt, die mit einer siedenden Flüssigkeit gefüllt werden, sodass bei plötzlicher Expansion kurzzeitig Überhitzung eintritt. An den Ionen bilden sich dann Dampfbläschen (**Blasen-kammer**, Glaser 1952, Nobelpreis 1960), die durch geeignete Beleuchtung sichtbar gemacht werden. Als Füllflüssigkeit hat sich flüssiger Wasserstoff (Dichte 70 kg m^{-3}) besonders bewährt, der zunächst bei 5 bis 6 bar schwach unterkühlt und völlig blasenfrei ist; dann wird innerhalb weniger ms der Druck auf die Hälfte reduziert. Für wenige weitere ms, nämlich bis das Sieden einsetzt, ist dann die Blasen-kammer für Teilchen, die nun durch dünne Metallfenster eintreten, empfindlich. Eine schematische Darstellung einer Wasserstoff-Blasen-kammer, die natürlich von einem Vakuummantel umgeben sein muss, zeigt Abb. 18.29. Man hat Kammern gebaut, die 1 000 Liter flüssigen Wasserstoff enthalten. Abbildung 18.36 zeigt eine Blasen-kammeraufnahme.

Nebel- und Blasen-kammern werden häufig in einem Magnetfeld angebracht. Aus der Krümmung der entstehenden Bahn kann man auf Energie und Impuls der auslösenden Teilchen schließen.

c) Funkenkammer. Zum Nachweis von Teilchen mit besonders geringer Wechselwirkung mit Materie eignet sich die **Funkenkammer**. Sie besteht aus einer Reihe von etwa m^2 -großen und cm-dicken Al-Platten, die parallel zueinander in einer Edelgasatmosphäre angeordnet sind (Abb. 18.30). Die Platten 1, 3, 5 usw. sind geerdet; an die Platten 2, 4 usw. kann für die Dauer von jeweils etwa $0,2 \mu\text{s}$ eine Spannung von 20 kV gelegt werden, die gerade noch nicht ausreicht, um einen Funken zwischen zwei benachbarten Platten überspringen zu lassen. Dringt ein geladenes Teilchen ein (a), so wird das Gas längs der Teilchenbahn ionisiert, und es bilden sich, wenn gerade das elektrische Feld eingeschaltet ist, zwischen zwei Platten dort durch Stoßionisation leuchtende Funken aus, die photographiert werden können.

Die Teilchenbahnen sind zwar nicht so scharf gezeichnet wie bei der Blasen-kammer. Dafür hat die Funkenkammer den Vorzug, dass sie gesteuert ausgelöst werden kann. Dazu dienen die sie umgebenden Zähler (A_{1-3} , E_{1-3} , B und C), die dafür sorgen, dass der Spannungsstoß nur dann angelegt wird, wenn eines der zu untersuchenden Teilchen in die Kammer eingetreten oder in ihr entstanden ist.

d) Zählrohr. Dies genial einfache, heute auf der ganzen Welt verbreitete Gerät (H. Geiger, 1921) besteht meist aus einem Metallrohr von einigen cm Durchmesser, das mit Luft oder Argon von einigen mbar bis zum Atmosphärendruck und etwa 10 mbar Alkoholdampf gefüllt ist (Abb. 18.31). In der Achse ist ein möglichst dünner Wolfram- oder Stahldraht gespannt, der über einen hohen Widerstand (mehr als $1 \text{ M}\Omega$) mit dem positiven Pol einer Hochspannungsquelle verbunden ist, deren negativer Pol wie die Rohrwand zur Erde abgeleitet wird. Die Spannung reicht noch nicht zu einer andauernden selbstständigen Glimmentladung aus, die Drahtan-

ode bleibt zunächst stromlos. Tritt aber ein ionisierendes Strahlteilchen in das Rohrrinnere, so leiten die von ihm erzeugten Ionen einen Entladungsstoß ein, der wesentlich durch die Wirkung der Alkoholmoleküle schnell wieder erlischt. Die zum Draht und von dort zur Erde abfließenden negativen Ionen und Elektronen erzeugen am sehr großen Widerstand R einen Spannungsabfall, der verstärkt, in einen elektronischen (digitalen) Normimpuls umgewandelt und anschließend einem elektronischen Zähler zugeführt wird. Nach jedem Entladungsstoß bleibt das Zählrohr gegen neu eintretende Strahlteilchen unempfindlich, bis die in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes entstandenen positiven Ionen an die Kathode abgewandert sind. Erst nach Ablauf dieser **Totzeit** und anschließender **Erholungszeit**, die sich zusammen etwa über einige 10^{-4} s erstrecken, ist es zum Nachweis eines folgenden Teilchens bereit. Ein solches **Auslöse-Zählrohr** spricht bereits auf ein einziges schnelles Elektron an; die Größe des ausgelösten Impulses ist unabhängig von der Menge der Elektronen oder Ionen, die vom registrierten Elementarteilchen erzeugt werden.

In einem gegebenen Strahlungsfeld hängt die Impulsrate, die ein Zählrohr angibt, von der angelegten Spannung ab, wie Abb. 18.32 zeigt. Unterhalb der Einsatzspannung kann keine Entladung ausgelöst werden. Darüber steigt die Zählrate schnell an. Etwa 50 V über der Einsatzspannung hört dieser Anstieg auf, und die Spannung kann um mehrere 100 V erhöht werden, ohne dass mehr Impulse kommen: Jeder Impuls entspricht gerade einem durchgehenden schnellen Teilchen. Unterhalb dieses Plateaus können die von einem Teilchen erzeugten Ionen nur eine unselbstständige Entladung (Abschn. 8.3.2) unterhalten. Die Anzahl der Ionen, die im hohen Feld am Draht durch Stoßionisation entstehen, ist dann der Anzahl primär erzeugter Ionen proportional, sodass man aus der Größe der Impulse am Elektrometer auf die Natur der ionisierenden schnellen Teilchen schließen kann. Im **Proportionalbereich** kann ein Zählrohr also z. B. zwischen stark ionisierenden α -Teilchen und schwach ionisierenden β -Teilchen unterscheiden.

e) Szintillationszähler. Die älteste Methode zur Beobachtung einzelner atomarer Teilchen ist die Szintillationsmethode. Wenn ein solches energiereiches Teilchen in einen ZnS-Kristall eindringt, wird seine kinetische Energie schrittweise fast vollständig auf die Kristallatome übertragen und von diesen als Licht ausgestrahlt. Auf einer mit ZnS-Kriställchen belegten Glasplatte beobachtet man dann bei gut adaptiertem Auge mit einem schwach vergrößernden, aber lichtstarken Mikroskop schwache Lichtblitze. Auf diese Weise wurden die Versuche mit α -Teilchen ausgeführt, aus denen *Rutherford* auf die Existenz der Atomkerne schloss. Heute lässt man das Licht dieser Blitze auf die Photokathode eines Elektronenvervielfachers (Abschn. 8.1.4) fallen und von ihm ein Zählwerk betätigen.

f) Tscherenkow-Zähler. Ebenso wie eine Schallquelle, die sich schneller als mit Schallgeschwindigkeit bewegt, einen Mach-Kegel hinter sich herzieht (Abschn. 4.3.5), erzeugt auch ein elektrisch geladenes Teilchen eine kegelförmige elektromagnetische Welle, wenn es sich schneller als mit der Phasengeschwindigkeit des Lichtes durch eine Substanz bewegt. Für den

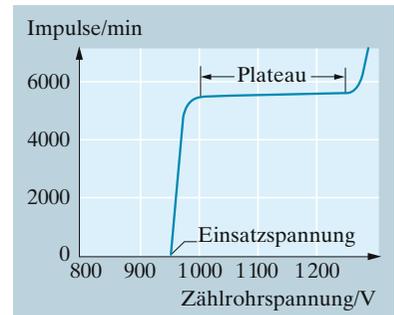


Abb. 18.32. Charakteristik eines Zählrohres

Öffnungswinkel α des Kegels gilt ebenfalls

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} = \frac{c_0}{nv},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit in der Substanz, n deren Brechzahl, c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit und v die Teilchengeschwindigkeit ist. Wegen $\sin \alpha \leq 1$ können nur Teilchen mit $v \geq c_0/n$ Tscherenkow-Strahlung erzeugen.

Beim **Tscherenkow-Zähler** wird ein Zylinder aus einem durchsichtigen, stark brechenden Material (etwa Plexiglas) vor einem Elektronenvervielfacher (Abschn. 8.1.4) angeordnet, möglichst so, dass nur für einen bestimmten Öffnungswinkel α Licht von diesem aufgenommen wird. Dann zählt das Gerät nur Teilchen, die mit einer bestimmten Geschwindigkeit aus einer Richtung einfallen. Neben der Möglichkeit der Geschwindigkeitsanalyse weist der Tscherenkow-Zähler noch den Vorteil eines sehr hohen zeitlichen Auflösungsvermögens auf (10^{-9} s). Teilchen mit $v < c_0/n$, die sonst oft einen schädlichen „Störpegel“ bilden, werden überhaupt nicht registriert.

g) Kernspur-Platten. Abgesehen von den Neutronen und Neutrinos haben alle einigermaßen energiereichen Strahlenarten die Fähigkeit, photographische Platten zu schwärzen. Das beruht darauf, dass einzelne Moleküle der in der Gelatine der Emulsion eingebetteten AgBr- oder AgCl-Kriställchen durch Bestrahlung dissoziiert werden und die frei gewordenen Ag-Atome dann Kristallkeime bilden, die durch den anschließenden Entwicklungsprozess das ganze Kriställchen in ein Ag-„Korn“ umwandeln. Der Verstärkungsprozess, der in der Nebel- oder Blaskammer sich fast momentan durch Tröpfchen- bzw. Blasenbildung vollzieht, spielt sich hier also erst nachträglich beim Entwickeln ab. Auf diese Art hinterlassen energiereiche geladene Teilchen auf der entwickelten Platte Spuren, die aus einer Kette von geschwärzten Körnern bestehen. Korngröße, Korndichte, Ketten- und Lückenlänge und dergleichen werden unter dem Mikroskop ausgemessen und ermöglichen meist, das Teilchen zu identifizieren und seine Energie zu ermitteln. Eine **Kernzertrümmerung** zeichnet sich als gegabelte Spur, eine Kernexplosion oder **Kernverdampfung** als ein Sternchen ab (vgl. Abb. 18.53).

Das Verfahren hat den großen Vorzug, dass es beliebig lange aufnahmebereit ist und demnach schwache Strahlung akkumuliert. Man benützt es daher zur Untersuchung der Strahlung an schwer zugänglichen Orten, z. B. in den höchsten Atmosphärenschichten. Dazu lässt man Kernspurplatten oder ganze Pakete von Emulsionsschichten mit unbemannten Ballonen 20 bis 30 km hoch aufsteigen und durchmustert sie nach der Entwicklung nach bemerkenswerten Ereignissen.

h) Drahtkammer. Geiger- und Tscherenkow-Zähler sowie Funkenkammer können den Durchgang schneller Teilchen nicht genau genug lokalisieren, Nebel- und Blaskammer sowie Kernspurplatten sind nicht kontinuierlich aufnahmebereit, um die vielen hundert Teilchen zu registrieren und zu diskriminieren, die bei jedem Stoß in modernen Beschleunigern auseinander spritzen. 1968 fand *G. Charpak* (Nobelpreis 1992), dass jeder einzelne von sehr vielen in mm-Abstand gespannten Anodendrähten

als Proportionalzähler wirken und nahebei entstehende Trägerlawinen über einen individuellen Verstärker registrieren kann. Moderne Elektronik erlaubt in der **Driftkammer** sogar die Zeit zwischen primärem Ionisationsakt und Ankunft der Lawine am Draht zur noch genaueren Lokalisierung auf wenige μm auszunutzen. In Speicherring-Experimenten umgibt man das Gebiet, wo die Teilchen aufeinander prallen, mit vielen Lagen solcher Drähte. Solche Detektoren erreichen ein riesiges Volumen und enthalten fast eine Million Drähte.

18.3.3 Teilchenbeschleuniger

Fast alles, was wir über die Struktur der Materie im subatomaren Bereich wissen, verdanken wir schnellen Teilchen. Man verwendet sie für elastische oder inelastische Streuversuche, in denen die Geschosse im Feld der untersuchten Strukturen abgelenkt werden, wie in Rutherfords α -Streuversuch, bzw. in denen andere Teilchen aus vorhandenen Strukturen herausgeschlagen oder ganz neu erzeugt werden, wie in den ersten „Atomzertrümmungen“ der Rutherford-Schule. Je höher die Energie der Teilchen, desto feinere Einzelheiten kann man sondieren. Das liegt an der Wellennatur der Materie, speziell an der de Broglie-Relation $\lambda = h/p$. Wenn Abstoßungs- oder Anziehungskräfte wirken, bestimmt die Energie des Geschosses, wie nahe es dem abstoßenden Target kommt bzw. aus wie kleinen Strukturen es Teilchen herauslösen kann. Schließlich ist Neuerzeugung eines Teilchens der Masse m höchstens bei der Geschossenergie $W = mc^2$ möglich, meist erst bei sehr viel höheren Energien. Es kommt aber nicht nur auf die Energie der Teilchen an, auch auf ihre Intensität (Anzahl pro s und m^2). Die Energie bestimmt die Art der möglichen Ereignisse, die Intensität ihre Wahrscheinlichkeit. Was die Energie betrifft, werden wir die schnellsten kosmischen Teilchen vermutlich nie erreichen (sie gehen bis über 10^{12} GeV), aber solche Teilchen sind so selten, dass man nur zufällig in vielen Jahren eins beobachtet. Systematische und reproduzierbare Versuche erfordern also Beschleunigungsmaschinen hoher Energie und Intensität.

Jede neue Beschleuniger-Generation hat etwa ein Entwicklungsjahrzehnt gebraucht und eine höhere Zehnerpotenz an Teilchenenergie und eine neue Tiefenschicht in der Struktur der Materie erschlossen. Die 1 MeV-Geräte von *Cockcroft-Walton* und *van de Graaff* (1920–30) lösten die ersten Kernumwandlungen mit wirklich künstlichen Geschossen aus. **Zyklotron**, **Betatron** und die frühen **Linearbeschleuniger** (um 10 MeV, 1930–40) vertieften diese Erkenntnisse. Mit dem **Elektronen-Synchrotron** (einige 100 MeV, 1940–50) konnte man Pionen und Myonen erzeugen, die man allerdings schon aus der kosmischen Strahlung kannte. Verbesserte Fokussierung brachte 1950–60 mehrere GeV und damit Erzeugung von Antinukleonen und *K*-Mesonen. 1960–70 stießen **Protonen-Synchrotron** und größere Linearbeschleuniger weit über 10 GeV vor, erzeugten eine Fülle neuer Resonanzteilchen und sicherten den Aufbau der Hadronen aus Quarks, deren Anzahl sie von drei auf sechs erhöhten. Gegenwärtig hat man die 100 GeV-Schwelle überwunden, Gluonen, *W*- und *Z*-Bosonen nachgewiesen und ringt um die Einzelheiten der

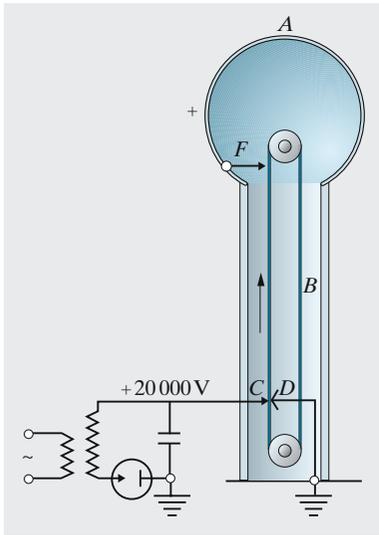


Abb. 18.33. Elektrostatischer van de Graaff-Generator. Das Plastik- oder Papierband *B* wird bei *C* durch eine Corona-Entladung besprüht und trägt die Ladung ins feldfreie Innere der Metallhohlkugel *A*, wo sie bei *F* entnommen wird. Das Äußere der Hohlkugel kommt so auf Spannungen bis über 1 MV. Spannungsbegrenzung nur durch Verlust infolge Sprühentladung. (Nach Brüche und Recknagel, aus W. Finkelnburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

Quarkdynamik und der **großen Vereinheitlichung** von schwacher, elektromagnetischer und starker Wechselwirkung, die sich in diesem Bereich auch experimentell manifestieren sollte. Selbst mit dem Einbruch in den TeV-Bereich und sogar mit dem Super-Ringkanal rund um den Äquator (Aufgabe 18.3.23) wären wir noch weit hinter den kosmischen Beschleunigern zurück, die Teilchen von mehr als 10^{20} eV liefern, allerdings äußerst selten.

Beschleunigen, also mit kinetischer Energie versehen, kann man nur geladene Teilchen mittels elektrischer Felder. Die Lorentz-Kraft in einem Magnetfeld steht nämlich immer senkrecht auf der Bahn und kann daher keine Arbeit leisten. Magnetfelder können Teilchen nur führen, nicht beschleunigen. Die Hochspannungstechnik kann wenige MV liefern (**Kaskadengenerator** von *Cockcroft* und *Walton*, **elektrostatischer Generator** von *van de Graaff* (Abb. 18.33); selbst bei Vermeidung aller Kanten und Spitzen werden dabei schon mehrere Meter Luft durchschlagen!). Man muss also dafür sorgen, dass die geladenen Teilchen die Beschleunigungsspannung mehrfach durchlaufen.

Das geschieht im **Tandem-van de Graaff** zweimal. Zunächst werden negative Ionen bis zur positiven Mittelelektrode beschleunigt (bis zu 10 MV). Dort treten sie durch einen **Stripper**, meist eine dünne C-Folie, die ihnen möglichst viele Elektronen abstreift. Die entstandenen positiven Ionen werden im Feld jenseits der Mittelelektrode nochmals entsprechend ihrer Ladung erheblich beschleunigt.

Bei den **Linearbeschleunigern** liegen viele Beschleunigungsstrecken auf der geraden Bahn hintereinander, bei den Zirkularbeschleunigern ist es nur eine solche Strecke (oder wenige), die auf geschlossener Bahn sehr oft durchlaufen wird. Auf einer solchen geschlossenen Bahn werden die Teilchen durch ein magnetisches Führungsfeld gehalten, das durch seine Struktur die Teilchen schwach oder stark bündelt, indem es Abweichungen von der Sollbahn korrigiert und so die Intensität steigert (**schwache** bzw. **starke Fokussierung**). Die Intensität hängt ferner davon ab, ob der Teilchenstrahl kontinuierlich oder gebündelt fließt, und wie viele Teilchen aus der ursprünglichen Quelle aus dem Beschleunigungstakt geraten und verloren gehen, oder ob zeitliche Abweichungen automatisch korrigiert werden (**Phasenstabilität**).

Linearbeschleuniger (Idee von *Wideroe*, 1930). Eine große Anzahl von Rohrstücken liegt abwechselnd an den beiden Polen einer Wechselspannungsquelle. In einem solchen Rohr herrscht kein Feld; die Beschleunigung erfolgt jedes Mal zwischen zwei Rohrstücken. Die Frequenz der Wechselspannung muss so sein, dass die Teilchen an jeder Trennstelle eine beschleunigende Phase des Feldes vorfinden. Ihre Laufzeit durch jedes Rohrstück muss eine halbe Feldperiode sein; daher müssen die Stücke immer länger werden. Die Teilchen werden also in zeitlich diskrete Pakete gebündelt, und zwar gelangen auch viele in falscher Phase eingeschossene Teilchen schließlich in diese optimal beschleunigten Pakete: Es herrscht **Phasenstabilität**. Dasselbe System, das bei der Wanderfeldröhre als Generator dient, also Energie vom Teilchenstrahl auf das Wellenfeld überträgt (Abschn. 8.2.9), arbeitet hier als Motor. Ein Magnetfeld ist prinzipiell nicht nötig, wird aber oft zur Fokussierung angebracht, d. h. um

den Strahl zu konzentrieren. Im linearen Strahl verlieren die Teilchen keine Energie durch **Zyklotron-** oder **Synchrotron-Strahlung** (Abschn. 11.3.2), aber solche Anlagen erreichen bald sehr unhandliche Längen.

Zyklotron (*E. O. Lawrence*, 1932). Bei nichtrelativistischer Geschwindigkeit beschreibt ein geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld eine Kreisbahn, deren Kreisfrequenz *unabhängig vom Bahnradius* immer gleich der Larmor-Frequenz ist (Abschn. 8.2.2)

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{e}{m} B. \quad (18.19)$$

Ein solches Magnetfeld B kann also die Teilchen immer im richtigen Augenblick in ein Beschleunigungsfeld führen, falls dieses die Wechselfrequenz $\nu = \omega/(2\pi)$ hat. Dieses Feld herrscht im engen Spalt zwischen zwei Gittern, die an einen Schwingkreis angeschlossen sind (Abb. 18.34). Den Rest des evakuierten Spalts zwischen den Magnetpolschuhen bilden zwei D-förmige Laufräume. Darin beschreiben die Teilchen Halbkreise, die sich zu einer Auswärts-Spirale zusammenfügen; die Krümmung wird ja nach jedem Durchgang durchs E -Feld geringer. So gelangt das Teilchen in Randnähe, wo es durch ein Hilfsfeld E durch das Fenster F aufs Target gelenkt wird. Magnete vernünftiger Größe und Stärke können nur leichte Teilchen (Elektronen, in sehr großen Anlagen auch Protonen) lange genug auf Kreisbahnen halten. Schon um 100 keV wächst aber die Masse der Elektronen merklich, ihre Umlaufzeit wächst nach (18.19), sie bleiben nicht mehr im Takt mit dem Feld. Dem wirkt man entgegen, indem man im Einklang mit der Massenzunahme die Feldfrequenz zeitlich abnehmen lässt (**Synchrozyklotron**), womit man natürlich nur jeweils einem Teilchenpaket folgen kann und auf den kontinuierlichen Teilchenstrom des normalen Zyklotrons verzichten muss. Anlagen in Genf, Berkeley, sowie Dubna und Gatschina erreichen mit Magneten um 6 m Durchmesser und fast 2 T Feldstärke Protonenenergien von knapp 1 GeV. Einen anderen Trick benutzt das **Mikrotron**: Man führt den Elektronen bei jeder Beschleunigung eine Ruhenergie von 511 keV zu, sodass nach (18.19) das Elektron zum ersten Umlauf eine Feldperiode braucht, zum zweiten zwei Perioden usw. Diese Periode kann daher konstant bleiben. Schließlich kann man auch das Magnetfeld mit der Teilchenmasse anwachsen lassen, was zum Synchrotron führt.

✘ Beispiel...

Warum kann man Elektronen i. Allg. mit einem Zyklotron kaum beschleunigen? Welchen Vorteil bietet es, 511 kV an den Beschleunigungskondensator zu legen?

Teilchen geraten außer Takt, wenn ihre Masse sich wesentlich relativistisch geändert hat. Elektronen haben $E_0 = m_0 c^2 = 511 \text{ keV}$ (heute lächerlich wenig). Mit 511 keV am Beschleunigungskondensator nimmt m bei jedem Halbumlauf um m_0 zu, der n -te Halbumlauf dauert n -mal so lange wie der erste: Bei hoher Energie Kreisbahnbedingung $p = mv = erB$, $E = pc = eBrc$, $T = 2\pi r/c = 2\pi W/(eBc)$. Die Phasen stimmen dann wieder.

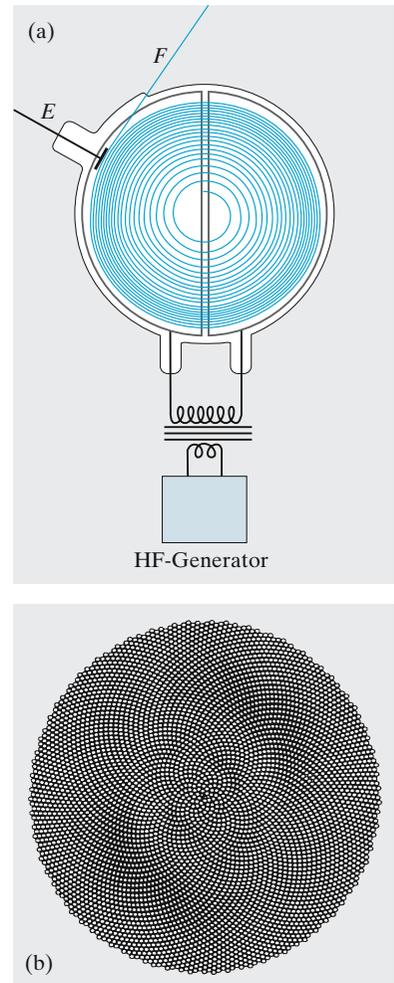


Abb. 18.34. (a) Zyklotron, (b) in der Sonnenblume gibt es viele Spiralen. Wissen Sie, warum es Zyklotron-Spiralen sind? Einige springen ins Auge, die primäre Spirale, die alle Einzelheiten in der Reihenfolge ihrer Entstehung verbindet, ist schwerer zu finden, weil sie sehr flach verläuft

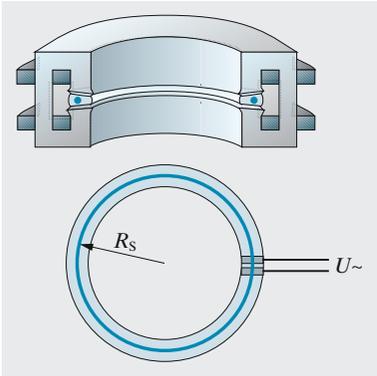


Abb. 18.35. Ringmagnet des Synchrotrons

Synchrotron (*W. I. Weksler*, 1944). Im Zyklotron können die Teilchen sich ihre Bahn im magnetischen Führungsfeld selber suchen, im Synchrotron ist eine ganz enge Sollbahn vorgeschrieben. Das Feld kann so auf einen viel engeren Raum beschränkt werden, es muss allerdings mit zunehmender Teilchenenergie nach einem sehr exakten Programm anwachsen, was natürlich nur im Impulsbetrieb gelingt. An einer oder einigen Stellen dieser Bahn erfolgt die Beschleunigung durch ein ebenfalls programmiertes hochfrequentes elektrisches Wechselfeld. Man kann auch nach dem Trafo- oder Betatron-Prinzip induktiv durch rasche Magnetfeldänderung beschleunigen. Beim Elektronen-Synchrotron (z. B. DESY, Hamburg) erreichen die Teilchen sehr bald praktisch Lichtgeschwindigkeit und damit eine energieunabhängige Laufzeit, bei Protonen tritt das erst bei einigen GeV ein.

Um den Kammerquerschnitt zu reduzieren und Teilchenverluste auf dem bis zu 10^6 km langen Gesamtweg zu verringern, muss man **fokussieren**, d. h. Abweichungen von der Sollbahn rückgängig machen. Auf einer vereisten, als schiefe Ebene überhöhten Straßenkurve rutschen alle Fahrzeuge, die nicht genau die richtige Geschwindigkeit haben, entweder über den äußeren oder den inneren Rand hinaus. Eine Bobbahn dagegen hat einen gekrümmten Querschnitt und wird nach außen immer steiler. Zu schnelle Schlitten werden nach außen, dann aber wieder in die normale Bahn getrieben. Die variable Hangneigung mit ihrer rücktreibenden Kraft steht hier für das B -Feld mit der Lorentz-Kraft. Einen passenden **Feldgradienten** erreicht man durch Formgebung der Polschuhe, z. B. Aufsetzen schmaler Schienen. Allerdings kann man jeweils nur immer in einer Ebene fokussieren; beim Schlitten reicht das, beim Teilchenstrahl nicht. Ein wesentlicher Fortschritt auf dem Weg zu immer höheren Energien und Intensitäten war die Fokussierung durch **alternierende Gradienten**: Man fokussiert abwechselnd in einer und in der dazu senkrechten Ebene. Prinzipiell kann man durch solche starke Fokussierung sogar die zeitliche Modulation des Magnetfeldes vermeiden und hofft mit dieser FFAG-Methode (fixed field alternating gradient) in den TeV-Bereich vorzustoßen.

Wie im Zyklotron und Betatron führt die Zentrifugalbeschleunigung der Teilchen zu einem Energieverlust durch Strahlung. Dasselbe gilt für die Schwingungen der Teilchen um ihre Sollbahn im Betatron oder Synchrotron. Bei enger Bahn sind diese Verluste sehr erheblich und begrenzen z. B. die Einsetzbarkeit des Betatrons.

Speicherringe. Mit dem kräftigsten Hammerschlag kann man kaum eine frei am Zweig hängende Nuss zertrümmern: Sie weicht einfach aus, und nach den Stoßgesetzen geht die Energie des Hammers fast ganz in die gemeinsame Schwerpunktsbewegung über. Im relativistischen Bereich wird dieser Ausnutzungsgrad der Energie für „Ereignisse“ immer kleiner, weil der Hammer immer schwerer wird. Der für Reaktionen verfügbare Anteil der Teilchenenergie E wächst dann nur noch wie \sqrt{E} , d. h. bei gleichem B -Feld auch wie die Wurzel aus dem Radius der Synchrotron-Bahn. Man werfe die Nuss auf den schweren Hammer, oder wenn das Hämmerchen ebenso schwer ist, werfe man sie ihm ebenso schnell entgegen. Dann vermeidet man den Energieverlust in Form von Bewegung des Schwerpunkts, denn dieser ruht im Laborsystem. Man schieße also die schnellen Teilchen

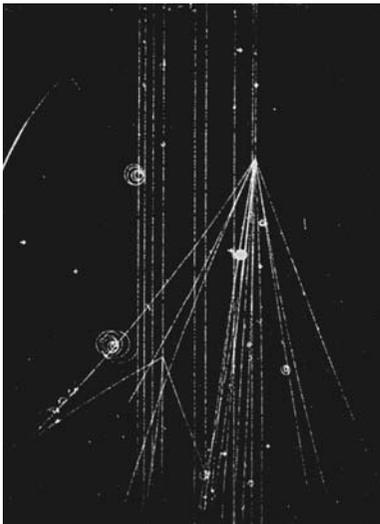


Abb. 18.36. Erzeugung von zwölf schweren Teilchen aus der Energie eines 24 GeV-Protons; Blasenkammeraufnahme

nicht auf ein ruhendes Target, sondern schieße zwei Strahlen gleicher Teilchen einander direkt oder unter sehr spitzem Winkel entgegen. Dann wird die gesamte kinetische Energie beider Teilchen für Reaktionen verfügbar. Natürlich bietet ein solcher Strahl nie so hohe Teilchendichten als Zielscheiben an wie ein festes Target. Man erhöht die Dichte, indem man die Teilchen aus vielen Impulsen in der Rennbahn speichert, was sehr exakte Steuerung erfordert.

Von ihrer Erzeugung her weichen die einzelnen Teilchen in Energie und Impuls in zufälliger Weise von der durch die Beschleunigungsfelder bedingten Schwerpunktsbewegung ab; dieser Zufallsbewegung lässt sich eine Temperatur zuordnen. Daher brechen die Teilchen längs aus dem Paket oder sogar quer aus dem Strahl aus. Damit man keine Intensität verliert, muss man „kühlen“, d. h. diese Abweichungen unterdrücken. Elektronische Steuerorgane sind heute so schnell, dass sie die Schwankungen messen, ein Korrektursignal berechnen und dieses den ablenkenden und beschleunigenden Feldern überlagern können, bevor das Teilchenpaket (mit $c!$) das nächste Mal vorbeikommt. Sogar am Gegenpunkt der Ringbahn kommt das Signal noch rechtzeitig an, um die Ausreißer wieder einzufangen. Diese **stochastische Kühlung** (*S. van der Meer*) im Proton-Antiproton-Speicherring von CERN ermöglichte erst die Entdeckung des W - und des Z -Teilchens sowie vermutlich des t -Quarks durch *C. Rubbia*¹ und seine Gruppe (Nobelpreis 1984 für *Rubbia* und *van der Meer*).

Schwerionen-Beschleuniger. Zumindest für sehr kurze Zeiten kann man Kerne herstellen, die noch weit schwerer sind als die Transurane. Man schießt zwei Kerne mit solcher Energie aufeinander, dass der Coulomb-Wall zeitweise überwunden wird. Im Coulomb-Feld so schwerer Kerne treten ganz neue Effekte auf, z. B. die spontane Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren aus Bindungsenergie (**Zerfall des neutralen Vakuums**, Abschn. 16.2.4). Durch Fusion schwerer Ionen gelang in Darmstadt der Aufbau der Elemente 106 bis 109 und 111 und 112.

18.3.4 Strahlendosis und Strahlenwirkung

Zur Gefährlichkeit eines radioaktiven Präparats tragen seine Aktivität und die Art seiner Strahlung bei.

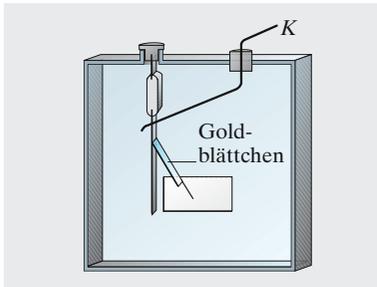
Aktivität ist die Anzahl der Zerfallsakte pro Sekunde, ihre Einheit **1 Becquerel = 1 Bq = 1 Zerfall/s**. Früher benutzte man als Einheit das **Curie (Ci)**. Es entspricht der Aktivität von 1 g reinen, d. h. auch von seinen Folgeprodukten befreiten Radiums.

Aus der relativen Atommasse von ^{226}Ra und seiner Halbwertszeit (1 580 Jahre) ergibt sich

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Zerfälle/s}.$$

Für die biologische und sonstige Wirkung der Strahlung sind außer der Aktivität der Quelle ihr Ionisierungsvermögen (biologische Strahlenreaktionen verlaufen fast immer über ionisierte Zwischenstufen) und ihre Reichweite, d. h. ihre Abschirmbarkeit maßgebend.

¹ Hochenergie-Experimente können längst nicht mehr von einzelnen Forschern durchgeführt werden, sondern von Arbeitsgruppen, die Dutzende oder gar Hunderte von Mitarbeitern umfassen. Wir nennen hier immer nur den Gruppenchef.

Abb. 18.37. γ -Strahlungselektroskop

Speziell für γ -Strahler mit ihrer besonders durchdringenden Strahlung kann man die Aktivität durch Absoluteichung (Zählung der Zerfälle im Geiger- oder Szintillationszähler mit einer Korrektur für die im Strahler selbst stecken bleibenden γ -Quanten) oder durch Vergleich mit einer Standardquelle messen. Hierzu dient ein **γ -Elektroskop** (Abb. 18.37), ein geerdeter Bleikasten, dessen Wandstärke (3 mm) weder α - noch β -Strahlung durchlässt. Von einem isolierten Bleichstreifen kann sich ein dünnes Goldblättchen abspreizen. Ein Quarzfaden am Ende des Blättchens dient als Zeiger. Man lädt das Elektrometer über die schwenkbare Kurbel K auf und beobachtet, wie schnell das Blättchen in die senkrechte Ruhelage zurückkehrt. Das hängt vom Ionisierungsgrad der Luft im Kasten, also von der γ -Intensität ab. So kann man die Aktivität einer γ -Quelle mit der eines Standardpräparats (meist Radium) vergleichen, wenn man noch das r^{-2} -Abstandsgesetz für die Intensität beachtet.

Die Gesamtwirkung einer Strahlung auf Materie nennt man **Dosis**, die in einer kurzen Zeit anfallende Dosis dividiert durch diese Zeit heißt **Dosisleistung**. Die Dosis kann entweder durch die insgesamt in kg absorbierte Strahlungsenergie ausgedrückt werden (Energiedosis) oder durch die Ionisierungswirkung, d. h. die Anzahl der im kg erzeugten Ionenpaare (Ionendosis). Einheit der **Ionendosis** ist das **Röntgen (R)**.

Die Dosis von 1 R war ursprünglich so definiert, dass sie in 1 cm^3 Luft bei 1 bar und 20°C eine elektrostatische Einheit ($3 \cdot 10^9 \text{ A s}$) an positiven und ebenso vielen negativen Ionen erzeugt, also $2,08 \cdot 10^9$ Ionenpaare. Auf 1 kg umgerechnet erhält man

$$1 \text{ R} \cong 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ A s kg}^{-1} .$$

Diese Definition ist jetzt unabhängig von der speziellen Substanz, in der die Ionendosis erzeugt wird. Durch Multiplikation mit der mittleren Ionisierungsenergie bzw. -Spannung findet man auch die absorbierte Energie, also die **Energiedosis**. Für Luft mit $E_{\text{Ion}} = 33 \text{ eV}$ findet man, dass 1 R einer Energiedosis von $0,0084 \text{ J/kg}$ entspricht, für Wasser $0,0093 \text{ J/kg}$.

Der gerundete Wert $0,01 \text{ J/kg}$ bildet die alte Einheit der Energiedosis, genannt **1 rd** (gesprochen **rad**) und entspricht für biologische Gewebe annähernd einem Röntgen. Die moderne Einheit **1 Gray = 1 Gy = 1 J/kg** schließt sich direkter ans SI an.

Die biologische Wirkung einer Strahlung lässt sich nicht pauschal durch Energie- oder Ionendosis erfassen. Schwere Teilchen sind i. Allg. gefährlicher als γ - oder β -Strahlung gleicher Ionisierungswirkung. Dies drückt man, speziell für den menschlichen Körper, durch einen **Qualitätsfaktor QF** der betreffenden Strahlung aus (Tabelle 18.3).

Tabelle 18.3. Qualitätsfaktoren

Strahlungsart	QF/SvGy ⁻¹
Röntgen- und γ -Strahlung	1
β -Strahlung	1
Schnelle Neutronen	10
Langsame Neutronen	5
α -Strahlung	10
Schwere Rückstoßkerne	20

So erhält man als halbempirisches Maß der biologischen Strahlenwirkung das **Dosisäquivalent**:

$$\text{Dosisäquivalent} = \text{Energiedosis} \cdot \text{QF}$$

mit der alten Einheit **1 rem** („Röntgen equivalent man“), die 1 rd entspricht, oder der neuen Einheit **1 Sievert = 1 Sv**, die 1 Gy entspricht.

Bei allen Umrechnungen von der Aktivität eines Präparates auf die Dosis im bestrahlten Material ist zu beachten, dass die Gesamtzahl ionisierender Teilchen oder Quanten beim Eintritt in Materie zunächst größer werden kann, z. B. durch Paarbildung, Abspaltung schneller Elektronen, Brems- oder Tscherenkow-Strahlung. Letztlich wird sich aber jede Strahlung in Materie totlaufen. Tabelle 18.4 gibt die ungefähre **Reichweite** verschiedener Strahlenarten in Wasser an; in organischem Gewebe ist die Reichweite nahezu die gleiche, in Luft entsprechender Dichte rund 1 000-mal größer. α -Strahlung kommt durch eine solche oder wenig größere Schichtdicke überhaupt nicht mehr durch (Abschn. 18.3.1), für γ -Strahlung, die exponentiell (nach *Lambert-Beer*) absorbiert wird, sind diejenigen Schichtdicken angegeben, nach deren Durchsetzung noch etwa 1% der Anfangsintensität vorhanden ist.

Die Entwicklung starker Strahlungsquellen hat zu neuen Anwendungen und Untersuchungsmethoden geführt, z. B. künstliche Erzeugung von Störstellen, Versetzungen und Baufehlern in Kristallen, Änderung der Eigenschaften von Hochpolymeren (Vernetzung), Materialprüfung mit γ -Strahlen etc. Ein neues Teilgebiet der Chemie, die **Strahlenchemie**, beschäftigt sich mit der Zerlegung und der Erzeugung chemischer Verbindungen unter der Einwirkung energiereicher Strahlung.

Radioaktive Strahlung ionisiert in einer Körperzelle direkt oder indirekt Atome und Moleküle. Dabei entstehen chemisch sehr aggressive Stoffe (Zellgifte, freie Radikale), die über weitere im Einzelnen noch wenig bekannte chemische Reaktionen die für die Zelle lebenswichtige Synthese der Desoxiribonukleinsäure (DNS-Synthese) blockieren, was den Strahlentod der Zelle zur Folge hat. Dabei kann auch eine Veränderung der Chromosomen bzw. der Gene in den Zellkernen eintreten (**somatische Mutation**), die sich bei der Zellteilung den Tochterzellen mitteilt und unter Umständen erst nach Jahren zu einer erkennbaren Schädigung führt (Spätschäden, z. B. Strahlenkrebs). Tritt letzteres bei den Keimzellen ein, so können Erbschäden bei der Nachkommenschaft auftreten, z. B. Missbildungen (genetische Mutation).

Der Mensch besitzt kein Sinnesorgan, um schädigende Strahlung wahrzunehmen; der Körper reagiert zwar auf Umwegen, jedoch viel zu spät. Tabelle 18.5 gibt als Beispiel einen Überblick über die Auswirkung der γ -Strahlung.

Beruflich mit Strahlung umgehende Personen sollten höchstens eine Dosis von 0,05 Sv pro Jahr aufnehmen; bei 40 Std Arbeitszeit entspricht dies einer durchschnittlichen *Dosisleistung* von $2,5 \cdot 10^{-5}$ Sv/h. Diese Dosis stellt einen Kompromiss dar und ist keinesfalls als Schwellenwert zu betrachten, unterhalb dessen die Strahlung völlig ungefährlich wäre.

Bei der Bestrahlung von außen werden nach Tabelle 18.4 α -Strahlen bereits in den obersten Hautschichten absorbiert, sie sind also unschädlich. Umso größer ist ihre Wirkung, wenn α -Strahler in den Körper gelangen und durch den Blutkreislauf verteilt werden. Besonders gefährlich sind radioaktive Isotope, die vom Körper nicht wieder ausgeschieden werden, sondern sich wegen ihrer chemischen Verwandtschaft zu Ca in den Knochen ablagern (z. B. Ra und Sr, sog. knochensuchende Elemente).

Tabelle 18.4. Reichweite verschiedener Strahlungsarten in Wasser oder organischem Gewebe

Strahlung	Energie	Reichweite
α	5 MeV	40 μm
β	0,02 MeV	10 μm
	1 MeV	7 mm
γ	0,02 MeV	6,4 cm
	1 MeV	65 cm
Schwere Rückstoßkerne	50 MeV	1 μm
Neutronen	1 MeV	20 cm

Tabelle 18.5. Strahleneffekte nach kurzzeitiger Ganzkörperbestrahlung des Menschen mit γ -Strahlung

Dosis	Wirkung
< 0,5 Sv	Geringe vorübergehende Blutbildveränderung
0,8–1,2 Sv	Übelkeit und Erbrechen in 10% der Fälle
4–5 Sv	50% Todesfälle innerhalb 30 Tagen, Erholung der Überlebenden nach 6 Monaten
5,5–7,5 Sv	Letale Dosis, 100% Todesfälle
50 Sv	Schwere Nervenschädigungen, Tod innerhalb einer Woche

Warum die **tödliche Dosis** gerade in der Gegend von 10 Sv liegt, lässt sich so abschätzen: 10 Sv entsprechen 0,2 C/kg, also etwa 10^{18} Ionenpaaren/kg. Der mittlere Abstand zweier Ionen ist also etwa 0,1 μm . Der Mensch hat etwa $2 \cdot 10^9$ Nukleotidbasenpaare in der DNS jedes Zellkerns. Bei einer mittleren relativen Molekülmasse eines Nukleotids (Base + Ribose + Phosphat) von 330 bedeutet das etwa $7 \cdot 10^{11}$ für einen DNS-Strang, d. h. ein Volumen von etwa 10^{-18} m^3 . Bei der tödlichen Dosis erfolgen also in der DNS jedes Zellkerns ziemlich viele (etwa 1 000) Ionisationen. Kritisch sind offenbar nur Treffer an bestimmten Stellen des Moleküls, z. B. solchen, wo sich die Basen strukturell unterscheiden.

18.4 Elementarteilchen

Moleküle bestehen aus Atomen, Atome aus Kern und Elektronen, Kerne aus Nukleonen, Nukleonen aus Quarks – ob man mit Quarks und Elektronen die Grenze der Teilbarkeit erreicht hat, weiß noch niemand.

18.4.1 Historischer Überblick

Das Paradies idealer Einfachheit, in dem zwei Teilchen, Elektron und Proton, zum Weltbau auszureichen schienen, ist seit über einem halben Jahrhundert dahin. Schon 1920 bezweifelte *Rutherford*, dass sich Elektronen im Kern unterbringen ließen, und Energie- und Drehimpulsbetrachtungen führten zum Postulat des **Neutrons**, das 1932 von *Chadwick* experimentell nachgewiesen wurde. 1928 sagte *Dirac* die Existenz eines Antiteilchens zum Elektron, genauer eines unbesetzten Zustandes im Spektrum negativer Energiezustände des freien Elektrons voraus. *Anderson* fand das **Positron** 1932 in der kosmischen Strahlung, bald darauf brauchte *Joliot* das Positron, um gewisse Zerfallsakte künstlich radioaktiver Kerne zu erklären (β^+ -Zerfall). Länger hat es gedauert von der theoretischen Voraussage des **Neutrinos** (*Pauli* und *Fermi*, 1931; um die Energie-, Impuls- und Drehimpulsbilanz des β -Zerfalls in Ordnung zu bringen) bis zu seinem sicheren Nachweis (*Cowan* und *Reines*, 1956). Der Grund liegt in der außerordentlich geringen Wechselwirkung des Neutrinos mit Materie, des ersten bekannten Teilchens, das *nur* der schwachen Wechselwirkung unterliegt. Auch das **Pion** wurde zunächst (1935) von *Yukawa* theoretisch als Überträger der Kernkräfte postuliert und erst 1946 von *Powell* u. A. in der kosmischen Strahlung entdeckt. Diese Teilchen – Proton, Neutron, Elektron, Positron, Neutrino, Pion – schienen wieder einmal auszureichen, um eine sinnvolle Welt einschließlich der Sterne aufzubauen und alle Prozesse einschließlich der Kernkräfte befriedigend zu beschreiben. Schon ihre Entdeckungsgeschichte zeigt ihre Rolle im vergleichsweise einfachen und rational abgeschlossenen damaligen Weltbild: Zunächst eben zur formalen Vereinheitlichung dieses Weltbildes postuliert, wurden sie dann zur allgemeinen Befriedigung auch richtig nachgewiesen.

Der erste Fremdkörper war das **Myon**; es ist eigentlich bis heute ein Fremdkörper geblieben. Ebenfalls von *Anderson* und *Neddermeyer* in der kosmischen Strahlung entdeckt, wurde es zunächst fälschlicherweise für *Yukawas* Kernkraftquant gehalten, bis man erkannte, dass es viel zu geringfügig (nämlich nur elektromagnetisch) mit Nukleonen wechselwirkt. Seitdem sind die Experimentatoren i. Allg. dem theoretischen Verständnis in der Auffindung neuer Teilchen vorausgeeilt.

Tabelle 18.6. Die bekannten langlebigen Teilchen und einige Resonen. [m : Masse (Ruhenergie in MeV); Q : Ladung (Einheit e); J : Spin; P : Parität; μ : Multiplizität; Y : Hyperladung; I Isospin; I_3 : Isospin-Komponente; S : Strangeness; τ : Lebensdauer (in s); bei Resonen Halbwertsbreite (in MeV)]

	Teilchen	Anti- teilchen	m	Q	J^P	μ	Y	I	I_3	S	τ	Zerfallsmodes (Anteil in %)		
Photon	γ		0	0	1^-						∞			
Leptonen	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0?	0							∞			
	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0?	0	$\frac{1}{2}$						∞			
	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0?								∞			
	e^-	e^+	0,511	-1							∞			
	μ^-	μ^+	105,66	-1							$2,20 \cdot 10^{-6}$	$e\nu_\mu\bar{\nu}_e(100)$		
	τ^-	τ^+	1784								$5 \cdot 10^{-13}$			
Hadronen														
Mesonen	π^-	π^+	139,6	-1	}3			1	1	0	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$\mu\nu_\mu(100)$		
	π^0	π^0	135,0	0			0	0	0	$0,8 \cdot 10^{-16}$	$\gamma\gamma(99)$	$\gamma e^- e^+(1)$		
	K^-	K^+	493,7	-1	}2	0^-	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$1,24 \cdot 10^{-8}$	$\mu\nu_\mu(64)$	$\pi\pi^0(21)$	$3\pi(7)$
	K^0	K^0	497,7	0		1	0		$-\frac{1}{2}$	1	$\begin{cases} 0,89 \cdot 10^{-10} \\ 5,2 \cdot 10^{-8} \end{cases}$	$\pi^+\pi^-(69)$	$\pi^0\pi^0(31)$	$3\pi^0(22)$
	η^0		548,8	0				0	0		$2,5 \cdot 10^{-19}$	$\pi\mu\nu_\mu(27)$	$2\gamma, 3\pi^0(72)$	$\pi^+\pi^-\pi^0(28)$
Baryonen														
Nukleonen	p	\bar{p}	938,28	1	}2	$\frac{1}{2}^+$		1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\infty?$		
	n	\bar{n}	939,57	0								918	$pe^- \bar{\nu}_e(100)$	
Hyperonen	Λ^0	$\bar{\Lambda}^0$	1115,6	0	}3	1	0	0	0	-1	$2,6 \cdot 10^{-10}$	$p\pi^-(64)$	$n\pi^0(36)$	
	Σ^+	$\bar{\Sigma}^+$	1189,4	1			$\frac{1}{2}^+$	0	1	0	0	$0,8 \cdot 10^{-10}$	$p\pi^0(52)$	$n\pi^+(48)$
	Σ^0	$\bar{\Sigma}^0$	1192,5	0			$\frac{1}{2}$	1	0	0	-1	$<1,0 \cdot 10^{-14}$	$\Lambda\gamma(100)$	
	Σ^-	$\bar{\Sigma}^-$	1197,3	-1					-1		$1,5 \cdot 10^{-10}$	$n\pi^-(100)$		
	Ξ^0	$\bar{\Xi}^0$	1314,9	0	}2	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2		$3,0 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda\pi^0(100)$	
	Ξ^-	$\bar{\Xi}^-$	1321,3	-1		$\frac{3}{2}^+$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$		$1,7 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda\pi^-(100)$	
	Ω^-	$\bar{\Omega}^-$	1672,3	-1	1	-2	0	0	0	-3	$1,3 \cdot 10^{-10}$	$\Xi\pi(50)$	$\Lambda\bar{K}(50)$	
Resonen														
Meson- resonanzen	ρ		770	0	1^-			1	1	0	125	$\pi\pi(\approx 100)$		
	ω		783,9	0	1^-			0	0	0	11,4	$\pi^+\pi^-\pi^0(90)$	$\pi^0\gamma(9)$	
	$K^{*-}K^{0*}\bar{K}^{0*}K^{*+}$		892,6		1^-			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	50,3	$\pi^+\pi^-(1)$	$K\pi(\approx 100)$	
Baryon- resonanzen	$\Delta^-\Delta^0\bar{\Delta}^+\Delta^{*+}$		1232		$\frac{3}{2}^+$	4		$\frac{3}{2}$		0	110	$N\pi\pi(99,4)$	$N\pi\pi, N\gamma$	
	$\Sigma^{*-}\Sigma^{0*}\bar{\Sigma}^{*+}$		1385		$\frac{3}{2}^-$	3	0	1	-	-1				
	$\Xi^{*-}\Xi^{0*}$		1530		$\frac{3}{2}^-$	2	-1	$\frac{1}{2}$	-	-2				

Dass jedes Teilchen ein Antiteilchen hat, das ihm bis auf die entgegengesetzte Ladung – allgemeiner bis auf entgegengesetzte Werte aller ladungsartigen Quantenzahlen – völlig gleicht, wurde bald nach Dirac allgemein akzeptiert. Das Neutrino, das beim β^- -Zerfall mitemittiert wird, muss eigentlich als **Antineutrino** bezeichnet werden (die Leptonzahl muss erhalten bleiben). Jeder Kernreaktor erzeugt also große Mengen von Antineutrinos, von denen man aber aus den erwähnten Gründen nichts merkt, ebenso wenig wie von den Neutrinos, die in der Sonne wie in jedem Fusionsprozess zusammen mit Positronen erzeugt werden, und die, im

Gegensatz zu diesen Positronen, das Weltall und selbst dichte Planeten praktisch ungestört durchdringen. Erst in den 50er Jahren erlaubten die immer stärker werdenden Beschleuniger, auch Antinukleonen herzustellen: Das **Antiproton** (*Chamberlain* u. A., 1955, Nobelpreis 1959), das **Antineutron** (*Cork* u. A., 1956), beide am Bevatron in Berkeley. Das erste Atom **Antimaterie** (Antiwasserstoff) wurde 1970 in Nowosibirsk aus Speicherring-Positronen bzw. -Protonen zusammengebaut. Auch zu den meisten der „neuen“ Mesonen und Hyperonen ist das Antiteilchen bekannt.

Diese neuen Teilchen, die man auch aus etwas tieferliegenden Gründen als **strange particles** zusammenfasst, sind das **Kaon** (*Powell* u. A., 1949, Nobelpreis 1950) und die **Hyperonen**, die in der kosmischen Strahlung und später in den großen Beschleunigern immer zusammen mit einem Teilchen entgegengesetzter **strangeness** (nicht notwendig ihrem eigenen Antiteilchen) erzeugt werden und wegen der Gabelbahn dieser beiden Teilchen in der älteren Literatur als **V-Teilchen** bezeichnet wurden. Man kennt das Λ -, das Σ -, das Ξ - und das Ω -Hyperon, die in verschiedenen Ladungszuständen und als Teilchen oder Antiteilchen vorkommen. Kaonen und Hyperonen zerfallen in etwa 10^{-10} s (das K^+ in 10^{-8} s).

Sehr viel kürzer sind die Lebensdauern der Resonanzteilchen oder **Resonen** (typischerweise 10^{-23} s). Von ihnen kennt man weit über 100, die teils als Mesonen-, meist aber als Baryonen-Resonanzen klassifiziert werden.

Ursprünglich klassifizierte man diese Fülle von Teilchen einfach nach ihrer Masse: **Leptonen** (Elektron, Neutrinos, Myon), **Mesonen** (Pionen, Kaonen), **Baryonen** (Nukleonen, Hyperonen). Die Unterscheidung der vier Wechselwirkungen, die für alles Folgende grundlegend ist, hat diese Einteilung in viel tiefergehender Weise gerechtfertigt. Diese Wechselwirkungstypen mit ihren Symmetrien, Invarianzen und Quantenzahlen erlauben eine wenigstens vorläufige Übersicht über Arten, Eigenschaften und Zerfallsmechanismen der Elementarteilchen.

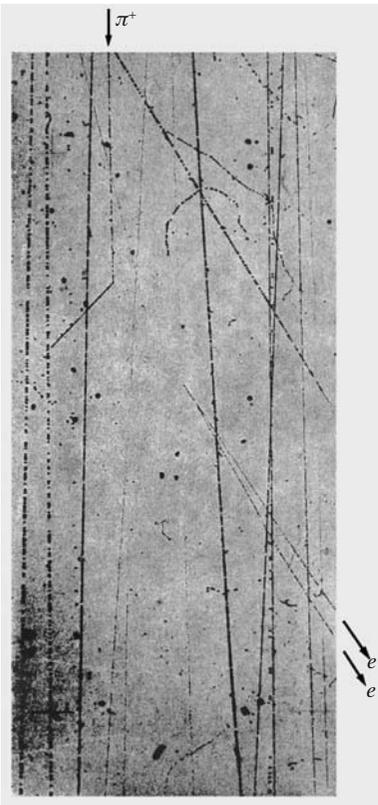


Abb. 18.38. Blasenkammer-Aufnahme: Von oben fällt ein schnelles π^+ ein und reagiert mit einem Neutron eines C-Kerns nach $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$. Das π^0 bildet kurz darauf zwei γ -Quanten; eins von diesen erzeugt ein Elektron-Positron-Paar. (Nach *Glaser*, aus *W. Finkelburg: Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

18.4.2 Wie findet man neue Teilchen?

Ursprünglich war ein Teilchen für den Experimentator etwas, was eine Blasen- oder Nebelkammerspur hinterlässt, d. h. in einem sehr engen, ungefähr zylindrischen Flüssigkeits- oder Gasvolumen hinreichend viele Ionen erzeugt, an denen sich Gasblasen oder Tröpfchen bilden. Neutrale Teilchen ionisieren nicht direkt, aber zeichnen sich meist entweder durch einen Knick in der Spur des Teilchens ab, aus dem sie entstehen, oder gehen schließlich direkt oder indirekt in geladene, ionisierende Teilchen über.

Blasen-, oder Nebelkammerspuren sind zunächst durch ihre Dicke und Länge gekennzeichnet, d. h. durch die Ionendichte und die Laufstrecke, nach der das Teilchen seine Ionisierungsfähigkeit verliert. Beide geben angenehme Aufschlüsse über Masse und Energie des Teilchens (Abschn. 18.3.1). Die Bahnkrümmung im Magnetfeld liefert direkt Ladungsvorzeichen und Impuls. Analyse der Zerfalls- und Wechselwirkungsakte erfordert sehr genaue stereoskopische Ausmessung der entsprechenden Spurverzweigungen unter Anwendung der Erhaltungssätze speziell für

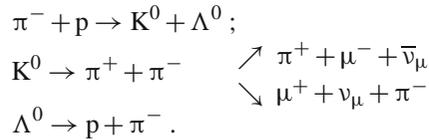
Energie und Impuls, i. Allg. in relativistischer Form. Wir führen zwei Analysen von Blasenkammeraufnahmen sehr angenähert durch.

Abbildung 18.38 zeigt viele Teilchen, die meist von oben ins Bild eintreten. Eine der dünneren Spuren (siehe Pfeil) knickt scharf ab und scheint dabei plötzlich dicker zu werden. Die Winkelhalbierende einer noch dünneren Gabelspur (Pfeile oben) führt praktisch zum Knickpunkt. Bei gleicher Energie und Ladung ionisiert ein Teilchen umso stärker, je größer seine Masse ist (Abschn. 18.3.1). Vergleich mit α - und β -Spuren erweist die dünnen Gabelzinken als Elektronen, die dicke Spur nach dem Knick als Proton. Die dünne Ausgangsspur muss von einem Teilchen mittlerer Masse stammen. Es kann sich nicht um einen freien Zerfall handeln (denn dabei kann kein schwereres Teilchen entstehen), sondern um einen Stoß. Die Häufigkeit derartiger Prozesse schließt ein Myon als Primärteilchen aus, weil es zu schwach mit Materie wechselwirkt. Also ist es ein offenbar geladenes **Pion**. Beim Stoß entstehen ein Proton und ein neutrales Teilchen mit unsichtbarer Bahn, das etwas später in ein Elektron-Positron-Paar zerfällt. Aus Ladungsgründen muss das Primärteilchen also ein π^+ sein. Es hat offenbar nicht einfach ein Proton aus dem Molekül- oder Kernverband des Füllgases (Kohlenwasserstoff) herausgeschlagen, sondern sich nach dem Stoß mit einem Neutron umgeladen: $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$. Das π^0 zerfällt zwar nicht direkt in ein Elektronenpaar (kein Teilchen außer dem Photon tut das), sondern in zwei Photonen von mindestens je $\frac{1}{2}m_\pi c^2 = 67 \text{ MeV}$, die sehr bald (eines schon im Bild) ihrerseits Elektronenpaare erzeugen. Die geringe Abweichung (1 bis 2°) der Winkelhalbierenden der e^+e^- -Gabel von der Richtung zum Knick zeigt, wie wenig die beiden γ -Richtungen divergieren. Dies zeigt, wie viel größer die Energie des π^0 ist als seine Ruhenergie (ein ruhendes Pion würde ja die beiden γ in entgegengesetzten Richtungen emittieren). Man erhält einige GeV für π^0 und noch etwas mehr für π^+ .

Wir analysieren auch Abb. 18.39, die undeutlicher ist und auch genauere kinematische Ausmessung erfordert. Eine solche Ausmessung zeigt, dass man die beiden Gabelspuren (am unteren Rand markiert) auf die in der Bildmitte aufgehörende Spur (oben markiert) zurückführen kann. Die Verbindungsstücke sind also unsichtbare Bahnen von neutralen Teilchen. Analog zu Abb. 18.38 könnte man zunächst an eine Umladung wie $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ denken, aber die Gabeln, die man sieht, haben nichts mit der dünnen e^+e^- -Doppelgabel bzw. mit der pe^- -Gabel des Neutronenzerfalls zu tun. Drei der vier Zinken entsprechen in ihrer Ionisierungsdichte, also auch in der Teilchenmasse der Primärspur (π oder μ), nur die unterste entspricht einem Proton. Offenbar stammt die linke Gabel vom Zerfall eines Teilchens mit mehr als Nukleonenmasse, einem neutralen **Hyperon**. Da ein Pion nie z. B. in zwei Myonen zerfällt, kann die rechte unsichtbare Bahn kein π^0 darstellen (eine Umladung wie $\pi^0 + n \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ wäre zwar ladungsmäßig, aber nicht baryonenzahlmäßig möglich, Abschn. 18.4.8). Es handelt sich um ein **K^0 -Meson**, das wie immer **assoziiert** mit einem Hyperon erzeugt wird. Es zerfällt in ein π^+ und ein π^- , von denen das obere gleich wieder in ein Myon und ein Neutrino zerfällt.



Abb. 18.39. Blasenkammer-Aufnahme: Ein $1,1 \text{ GeV}$ - π^- stößt auf ein Proton und erzeugt ein K_1^0 und ein Λ^0 . Das Λ^0 zerfällt links unten wieder in ein p und ein π^- , das K_1^0 rechts unten in zwei geladene Pionen; eines davon macht kurz darauf einen $\pi \rightarrow \mu$ -Zerfall durch. (Nach Glaser, aus W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))



Die Möglichkeit $\pi^+ + n$ für den ersten Stoß wird dadurch ausgeschlossen, dass die Kammer eine reine H-Füllung hatte. Wenn das Λ^0 (und das K^0) überhaupt messbare Bahnlänge haben (1 cm oder mehr, was einer Lebensdauer von 10^{-10} s oder mehr entspricht), müssen sie gegenüber der starken Wechselwirkung stabil sein, denn sonst würden sie nur etwa 10^{-23} s leben. Man hätte das von so schweren Teilchen nicht erwartet. Daher der Name **strange particles** für Kaonen und Hyperonen.

Wenn ein Teilchen zu schnell wieder zerfällt, kann es keine Spur von sichtbarer Länge erzeugen, selbst wenn es fast mit c fliegt. Mit **Kernspurplatten**, in deren Emulsion man die durch Ionisierung geschwärzten Silberkörner mit dem Mikroskop sieht, kann man Spuren von einigen μm Länge, d. h. Teilchen mit Lebensdauern bis 10^{-14} s untersuchen. Wie überbrückt man die Spanne bis 10^{-23} s, der typischen Lebensdauer von Teilchen, die durch starke Wechselwirkung zerfallen? Ihre Spur wäre nur etwa einen Kernradius lang!

Solche Teilchen entstehen in energiereichen Stößen und zerbrechen fast sofort wieder in andere Teilchen, die länger leben. Im Endeffekt entstehen also mindestens drei sichtbare Teilchen. Wir vergleichen mit dem β - und dem α -Zerfall (Abschn. 18.2.2, auch Aufgabe 18.4.18). Der β -Zerfall $X \rightarrow X' + e + \nu$ ist ein Aufbrechen von X in drei Stücke, von denen sich zwei (e und ν) praktisch die volle Ruhenergiedifferenz E_m zwischen X und X' teilen, weil X' bei seiner großen Masse kaum kinetische Energie aufnimmt. Das „sichtbare“ Teilchen (e) kann daher jede Energie zwischen 0 und E_m haben (kontinuierliches E -Spektrum). Beim α -Zerfall $X \rightarrow X' + \alpha$ zerbricht X in zwei Stücke, von denen eines (X') allerdings meist bald danach seinerseits zerfällt: z. B. $X' \rightarrow X'' + \alpha$. Man könnte pauschal auch einen Dreiteilchenzerfall $X \rightarrow X'' + 2\alpha$ ansetzen. Der Unterschied zum β -Zerfall liegt nur darin, dass zwei der Produktteilchen, X'' und α , eine Weile als X' vereinigt waren. Dieser Unterschied markiert sich im *scharfen* Energiespektrum auch des ersten α -Teilchens: Beim ersten Zerfall bekommt das α die volle Energie $E_m = (m_X - m_{X'})c^2$ mit. Diese Energie wäre auch dann scharf (wenn auch nicht mehr gleich E_m), wenn X' nicht durch seine große Masse verhindert würde, Energie aufzunehmen; dies fordert der Impulssatz. Eine wichtige Einschränkung: Wenn X' sehr schnell (in der Zeit τ) weiter zerfällt, kann seine Energie nur bis auf die von der Heisenberg-Relation festgelegte Unschärfe $\Delta E \approx \hbar/\tau$ bestimmt sein. Ebenso unscharf wird auch der „scharfe“ Peak im Energiespektrum des α -Teilchens (beim α -Zerfall ist diese Unschärfe unmessbar klein).

Wenn eine Reaktion im Endeffekt zu drei Produktteilchen führt, erkennt man im Idealfall also schon aus dem kontinuierlichen oder mehr oder weniger scharfen Energiespektrum *eines* dieser Teilchen, ob es einen gebundenen Zwischenzustand gab. Der Experimentator zeichnet sein Energiespektrum im Laufe der Messung oder danach als Histogramm, indem

er für jedes beobachtete Teilchen z. B. ein Kreuz in den seiner Messgenauigkeit entsprechenden Bereich über der Energieskala einträgt (Abb. 18.40, unten). Die üblichen „schönen“ Energiespektren sind Idealisierungen. Unter schwierigen Umständen sollte man möglichst zwei der drei Produktteilchen (B und C) analysieren, um die statistische Genauigkeit der Auswertung zu steigern. Wenn vier Teilchen entstehen, muss man das auf alle Fälle tun. Man trägt also die Energie der Teilchen B und C in ein zweidimensionales E_B, E_C -Diagramm ein. Jedes Ereignis, d. h. jeder Punkt (E_B, E_C) liefert einen Beitrag zu zwei Histogrammen, den empirischen E -Spektren von B und C . So entsteht der **Dalitz-Plot**, eines der wichtigsten Auswertungsmittel der Hochenergiephysik (Abb. 18.40). Ein Peak im E -Spektrum eines Teilchens, besonders wenn er durch einen entsprechenden Peak für das andere Teilchen bestätigt wird, deutet auf einen kurzlebigen Zwischenzustand hin, dessen Lebensdauer durch die Peak-Breite ΔE und dessen Energie durch die Peak-Lage (unter Berücksichtigung der Ruhenergien von Ausgangs- und Produktteilchen) gegeben wird. Die typische Lebensdauer eines stark zerfallenden Teilchens (10^{-23} s) ergibt eine Breite $\Delta E \approx \hbar/\tau_0 \approx 10^2$ MeV, also etwa die Ruhenergie des Pions. Dies ist nicht verwunderlich, denn $\tau_0 \approx l_0/c$, und l_0 , als Yukawa-Radius definiert, ist $\hbar/(m_\pi c)$, also $\Delta E \approx m_\pi c^2$. Die gesamte Reaktionsenergie muss natürlich wesentlich größer sein als diese 10^2 MeV, damit sich die Peaks abheben.

So kurzlebige Teilchen wurden bisher nur bei Stoßprozessen höchster Energie in Beschleunigungsanlagen nachgewiesen. Bei einem solchen Stoß zwischen einem schnellen und einem ruhenden oder (besser) zwei schnellen Teilchen (Speicherring) werden Energie- und Impulssatz dadurch gewahrt, dass die Bremsenergie in neuerzeugte Teilchen übergeht. Diese Bremsenergie, zweckmäßigerweise im Schwerpunktsystem von Geschoss und Zerteilchen (Target) ausgedrückt, ist bei ruhendem Target nur ein kleiner Bruchteil der Geschossenergie; den Hauptteil verbraucht das Target selbst, um auf Schwerpunktschwindigkeit zu kommen. Die einander entgegenfliegenden Teilchen im **Speicherring** können dagegen praktisch ihre volle Energie in neue Teilchen umsetzen. Als Geschoss und Target benutzt man Nukleonen, besonders Nukleon-Antinukleon-Paare, Pionen, Kaonen und neuerdings immer mehr Elektron-Positron-Paare, deren elektromagnetische Wechselwirkung theoretisch leichter zu übersehen ist und nicht den strengen Auswahlregeln der starken Prozesse unterliegt.

So kurzlebige Teilchen machen sich auch auf scheinbar ganz andere Art bemerkbar. Abbildung 18.41 zeigt für ein berühmtes Experiment (1974) die Abhängigkeit des Hadronenbildungsquerschnitts von der Energie des primären Elektronenpaares. Der außerordentlich steile Peak (man beachte die Enge des W -Intervalls und die logarithmische σ -Auftragung!) wird so gedeutet, dass bei dieser Energie (3 095 MeV) ein neues Teilchen erzeugt werden kann, bezeichnet als Ψ/J (3 095), das einen besonders vorteilhaften Umsatz der Bremsenergie in Hadronen ermöglicht.

Wenn das stimmt, müsste Ψ/J als das zunächst alleinerzeugte Teilchen im Schwerpunktsystem ruhen (Impulssatz) und dementsprechend auch keine kinetische Energie haben. Demnach sollte man zunächst einen

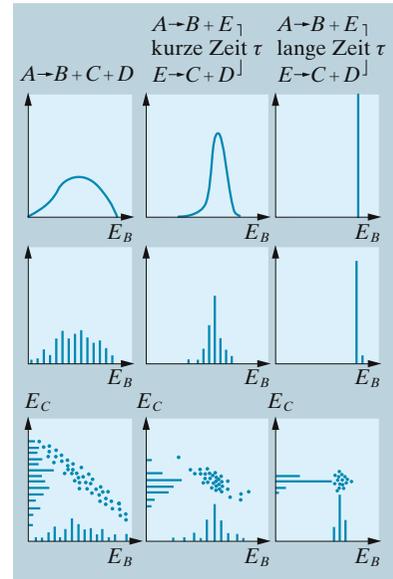


Abb. 18.40. Idealierte Energieverteilungen, experimentelle Histogramme und Dalitz-Plots für einen Dreiteilchenzerfall, bei dem zwei der Produktteilchen gar nicht oder verschieden lange zusammenbleiben

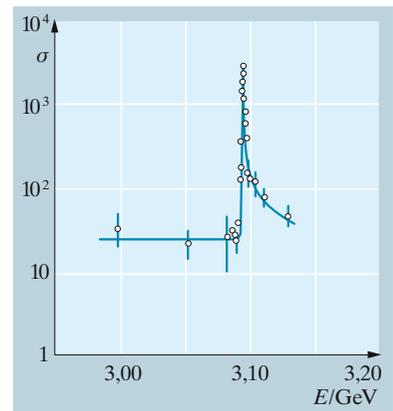


Abb. 18.41. Hadronen-Erzeugungsquerschnitt als Funktion der e^-e^+ -Stoßenergie. Der Resonanzpeak wird als Ψ/J -Teilchen gedeutet, eigentlich ein Meson, das aus einem neuen, „charmed“ Quark-Antiquark-Paar $c\bar{c}$ besteht („Charmonium“). (Nach Sidney Drell)

scharfen Resonanzpeak bei genau 3 095 MeV erwarten. Das Ψ/J -Teilchen zerfällt ja aber nach einer kurzen Zeit τ , und nach der Unschärferelation ist seine Energie – auch seine Ruhenergie – nur bis auf $\Delta E \simeq \hbar/\tau$ bestimmt. Aus ΔE , der Breite des Peaks, liest man so die Lebensdauer des Ψ/J zu 10^{-20} s ab. Dies ist überraschend viel für ein Teilchen, das eigentlich wie alle **Resonanzteilchen** in 10^{-23} s, der für die starke Wechselwirkung typischen Zeit, zerfallen sollte. Man deutet das Ψ/J -Teilchen heute als Meson, das schwerer ist als Pion und Kaon, weil es aus einem Paar schwerer Quarks $c\bar{c}$ besteht.

18.4.3 Myonen und Pionen

Yukawa schloss 1935 aus der geringen Reichweite der Kernkräfte (etwa $1,4 \cdot 10^{-15}$ m), dass diese Kräfte durch Austausch eines mittelschweren Teilchens mit etwa 200 Elektronenmassen vermittelt werden (Abschn. 18.1.1). Im gleichen Jahr fanden *Anderson* und *Neddermeyer*, dass die „harte Komponente“ der auf Meereshöhe ankommenden kosmischen Strahlung deswegen so durchdringend ist, weil sie aus Teilchen von geringerer Masse, also geringerem Ionisationsvermögen und damit größerer Reichweite als der der Nukleonen besteht (Abschn. 18.3.1). Kinematische Analyse der Spuren dieser **Myonen** führte etwa auf die von *Yukawa* geforderte Masse. Bei den hohen Energien kosmischer Teilchen (viele GeV) sind allerdings Direktstöße mit Kernen maßgeblicher für den Energieverlust als die Ionisation, und das Yukawa-Teilchen, das definitionsgemäß stark mit Kernteilchen wechselwirkt, könnte deswegen nicht so durchdringend sein. In seinen Reaktionen ähnelt das Myon vielmehr, bis auf seine größere Masse, vollkommen dem Elektron, d. h. es reagiert nur elektromagnetisch mit Kernen. Wie das Elektron kommt es als Teilchen und als Antiteilchen entgegengesetzten Ladungsvorzeichens vor. Was man hier als „Teilchen“ bezeichnen will, ist willkürlich; in Analogie zum Elektron ernennt man μ^- zum Myon, μ^+ zum Antimyon.

Wie die meisten schwereren Ausgaben eines anderen Teilchens (hier: des Elektrons) zerfällt das Myon in seinen „leichten Bruder“, und zwar in $2,2 \cdot 10^{-6}$ s. Das Zerfallselektron nimmt dabei nicht die volle Ruhenergie-differenz $(m_\mu - m_e)c^2 = 105$ MeV als kinetische Energie auf und kann sie wegen des Impulssatzes auch gar nicht aufnehmen, sondern nur maximal die Hälfte, sofern man mindestens noch die Emission eines weiteren Teilchens annimmt (man stelle sich den Vorgang im Ruhssystem des Myons vor). Zieht man hierzu das Neutrino heran, das beim β -Zerfall entsprechende Dienste leistet, aber eben danach den Spin $\frac{1}{2}$ haben muss, dann verlangt die Spinbilanz sogar zwei Neutrinos:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu .$$

Das μ^- kann, bevor es zerfällt, durch einen Kern in eine bohrsche Bahn eingefangen werden, die allerdings nach (14.1) über 200-mal enger ist als die entsprechende Elektronenbahn. Im Spektrum eines **Myonium-Atoms** (z. B. des **Myo-Wasserstoffs**) sind daher schon die Lyman-Linien so hart wie Röntgen-Linien. Ihre Lage ist nicht mehr nach (14.2) allein durch das Coulomb-Feld bestimmt, sondern die Kernkraft macht sich spürbar, besonders bei Unsymmetrie des Kerns. Wie die Bahn eines erdnahen

Satelliten über Unsymmetrien und innere Strukturen der Erde, gibt ein Myoniumspektrum Aufschlüsse über entsprechende Eigenschaften des Kerns.

Das Yukawa-Teilchen konnte eben wegen seiner starken Wechselwirkung und daher geringen Spurlänge erst nach Entwicklung der Kernspurplatten als „primäres Meson“, π -Meson oder **Pion** nachgewiesen werden. Auch seine freie Lebensdauer ist kürzer als die des Myons ($2,6 \cdot 10^{-8}$ s). Aus diesem „primären“ Teilchen entstehen nach

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

die Myonen der harten Komponente. Die kosmischen Pionen selbst werden in größerer Höhe durch Stoß von Primärprotonen mit Nukleonen, z. B.

$$p + n \rightarrow n + n + \pi^+$$

oder durch Photoeffekt harter γ -Quanten erzeugt:

$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+.$$

18.4.4 Neutron und Neutrinos

Neutrale Teilchen, deren direkte Beobachtung naturgemäß schwierig ist, werden häufig theoretisch durch Überlegungen „entdeckt“, in denen die Erhaltungssätze die Hauptrolle spielen. Die Ladungsbilanz eines Kerns verlangt $A - Z$ neutrale oder ebenso viele negative Teilchen, die die entsprechende Anzahl von Protonen neutralisieren. Aus Energie-, Impuls- und Drehimpulsgründen (Beispiel, S. 971) kommen Elektronen nicht in Frage. Das Neutron wurde dann auch direkt nachgewiesen, zunächst dank seiner Stöße mit Protonen, auf die dabei Energien übertragen werden, die sie selbst ionisierungsfähig werden lassen (*Chadwick*, 1931). Heute weist man Neutronen meist durch Kernreaktionen nach, die sie auslösen, besonders die $B(n, \alpha)Li$ -Reaktion. Das Zählrohr oder die Ionisationskammer wird dazu mit gasförmigem Bortrifluorid gefüllt, oder die Wand wird mit einer dünnen Borschicht verkleidet. Die α -Teilchen können als ionisierende Teilchen direkt nachgewiesen werden.

Zur **Neutronenerzeugung** verwendet man Reaktionen wie $Be(\alpha, n)C$ und $d(d, n)He$ (Einschuss schneller Deuteronen in schweres Wasser oder Eis). Unvergleichlich viel mehr Neutronen kommen aber aus Kernreaktoren. Die Untersuchung ihres Verhaltens innerhalb und außerhalb des Reaktors hat einen ganzen Zweig der Physik, die Neutronenphysik, entstehen lassen.

Die Masse des Neutrons lässt sich indirekt sehr genau bestimmen (*Chadwick*, *Goldhaber*, 1934). Das Deuteron lässt sich in Proton und Neutron photodissoziieren: $d + \gamma \rightarrow n + p$, aber erst mit γ -Quanten von mindestens 2,21 MeV. Also gilt

$$m_d + m_\gamma = m_d + h\nu/c^2 = m_p + m_n.$$

Die Massen von p und d sind massenspektroskopisch bekannt. Man erhält

$$m_n = 1,6748 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,001\,35\, m_p.$$

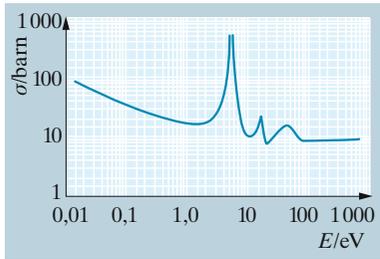
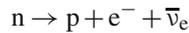


Abb. 18.42. Der Absorptionsquerschnitt von Neutronen (hier in Silber) hat annähernd eine $E^{-1/2}$ -Abhängigkeit, über die sich Resonanzpeaks lagern. (Nach Goldsmith, Ibsen und Feld, aus W. Finkelburg: *Einführung in die Atomphysik*, 11./12. Aufl. (Springer, Berlin Heidelberg 1976))

Das ist um 0,77 MeV mehr als die Summe $m_p + m_e$. Das freie Neutron zerfällt daher nach einer Halbwertszeit von 932 s:



mit einer Maximalenergie des Elektrons von eben 0,77 MeV. Ob das im Kern gebundene Neutron entsprechend zerfällt (β^- -Zerfall), hängt davon ab, ob die Masse des ganzen Kerns größer ist als die des potentiellen Produktkerns plus eines Elektrons. Diese Betrachtung gilt natürlich sinngemäß auch für das gebundene Proton (β^+ -Zerfall). Proton und Neutron können im Kern ihre Rollen tauschen, vermutlich über eine „virtuelle“ Elektronenpaarerzeugung.

Wegen der fehlenden Coulomb-Abstoßung sind Neutronen ausgezeichnete Kerngeschosse. Sie werden von den meisten Kernen eingefangen, und zwar mit erheblich größeren Wirkungsquerschnitten als α -Teilchen oder Protonen. Das gilt besonders für langsame Neutronen (Abschn. 18.3.1), was entscheidend für Kernreaktor und U-Bombe ist. Über einen Abfall $\sigma \sim E^{-1/2}$ des **Einfangquerschnitts** σ mit der Neutronenenergie E (Aufgabe 18.3.13) lagern sich steile **Resonanzpeaks**, in denen σ Werte um 10^5 barn ($1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$) erreichen kann, d. h. 10^5 -mal mehr als der geometrische Kernquerschnitt. Diese Peaks entsprechen dem Übergang in den Grund- oder einen Anregungszustand des Kerns, der bei diesem Neutroneneinfang entsteht. Nuklide, bei denen im betrachteten Energiebereich kein solcher Peak liegt, sind als **Moderatoren** geeignet. Sie absorbieren kaum Neutronen, sondern bremsen sie durch elastischen Stoß. Ein Moderator bremst umso besser, je leichter seine Kerne sind, denn desto mehr Energie kann nach den Stoßgesetzen übertragen werden. Beim zentralen Stoß mit einem ruhenden Proton würde das Neutron seine Energie ganz abgeben, in Wirklichkeit verliert es nur den Bruchteil $1/e$. Um ein Neutron von 1 MeV auf die „thermische“ Energie $\frac{3}{2}kT = 0,06 \text{ eV}$ abzubremsen, braucht man nur 17 Stöße ($e^{-17} = 4 \cdot 10^{-8}$). „Kältere“ Neutronen kann man so natürlich nur in gekühlten Moderatoren machen.²

Das **Neutrino** wurde postuliert, um die Energiebilanz (und auch die Impuls- und Drehimpulsbilanz) des β -Zerfalls in Ordnung zu bringen (Abschn. 18.2.2):



Das „e“ kennzeichnet das zunächst hypothetische Teilchen als Elektron-Neutrino (im Gegensatz zum gleich zu besprechenden Myon-Neutrino). Das Prinzip, dass Teilchen dieser Art nur immer paarweise erzeugt werden können (Erhaltung der Leptonzahl L , Abschn. 18.4.8) zwingt uns, das beim β^- -Zerfall entstehende Neutrino als **Antineutrino** anzusehen.

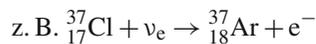
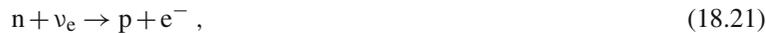
Im Unterschied zum Neutron tritt das **Neutrino** nicht einmal mit anderen Teilchen in Wechselwirkung, wenn es ihnen bis auf 10^{-15} m nahe kommt. Eine äußerst schwache Wechselwirkung muss aber vorhanden sein, sonst nähme es gar nicht an den β -Zerfallsreaktionen teil. Schätzungen aus der **Theorie des β -Zerfalls** (Fermi, erweitert besonders von Lee und Yang) führten auf νp -Wechselwirkungsquerschnitte von etwa 10^{-48} m^2 . Ein Neutrinostrahl verliert auf dem Weg durch den gesamten Erdkörper nur ein Teilchen unter 10^{10} . Der direkte Nachweis des Neutrinos (*Reines*

² Kalte Neutronen sind ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung von Festkörpern (1994 Nobelpreis für Brockhouse und Shull)

(Nobelpreis 1995), Cowan, 1956) erforderte daher äußerst lange Messzeiten im intensiven Antineutrinofluss eines Hochleistungsreaktors. Wegen der Krümmung des Energietals (Abschn. 18.1.3) überwiegt ja bei der Kernspaltung der β^- -Zerfall, also die $\bar{\nu}_e$ -Emission, im Gegensatz zur Fusion. Man suchte eine Art Umkehrung des β^+ -Zerfalls



und fand nach Ausschluss aller Fehlerquellen – besonders der Reaktorstrahlung selbst durch eine Abschirmung, die für Neutrinos natürlich völlig transparent ist – auch einige solche Prozesse. Wären Neutrino und Antineutrino identisch (so etwas kommt bei anderen neutralen Teilchen, z. B. π^0 vor), hätte man auch die Umkehrung des β^- -Zerfalls



auslösen müssen. Das war nicht der Fall.

Beim Zerfall des geladenen Pions in ein Myon findet sich die Überschussenergie (Ruhmassendifferenz von Pion und Myon) nur teilweise als kinetische Energie des Myons wieder, ähnlich wie beim β -Zerfall nur teilweise als kinetische Energie des Elektrons. In völliger Analogie postuliert man also ein ebenfalls ungeladenes und nur schwach wechselwirkendes Teilchen, zunächst Neutretto, dann meist **Myon-Neutrino** genannt, um den evtl. Unterschied zum Neutrino zu betonen:



Wenn ν_μ mit ν_e identisch wäre, müsste es ebenfalls die Reaktionen (18.20) und (18.21) auslösen können. Pionen oder Myon-Neutrinos kommen nicht aus Reaktoren; um sie in hinreichender Anzahl (etwa 10^{14}) zu erzeugen, musste man das Synchrotron von Brookhaven fast ein Jahr lang ununterbrochen schnelle Protonen auf Be-Kerne schießen lassen. Einige Dutzend davon lösten Reaktionen wie $\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$ (umgekehrte μ^- -Zerfälle) aus, aber keines einen umgekehrten β -Zerfall (Schwartz, Lederman, Steinberger u. A., 1962, Nobelpreis 1988). Myon- und Elektron-Neutrino sind also verschieden.

1975 entdeckte man einen noch schwereren Bruder des Elektrons und des Myons, das **τ -Lepton** oder **Tauon** mit 3 490 Elektronenmassen. Es wird von seinem eigenen τ -Neutrino begleitet.

Da Neutrinos allem Anschein nach so gut wie unsterblich sind, muss das ganze Weltall von ihnen dicht erfüllt sein, denn jeder β^+ -Zerfall in einem Stern, der die Kernfusion begleitet, erzeugt auch ein Neutrino. Noch mehr Neutrinos müssten die 2,7 K-**Urknallstrahlung** begleiten (Abschn. 12.10.7). Falls die Neutrinos auch nur eine geringe **Ruhmasse** haben, könnten sie einen wesentlichen Beitrag zur Gesamtdichte des Weltalls stellen und über dessen Schicksal entscheiden, nämlich darüber, ob unsere Welt „offen“ ist und für immer expandieren wird, oder „geschlossen“ mit periodischer Rückkehr zum Urknall (Abschn. 12.10.7). Eine **Ruhmasse des Neutrinos** würde nach der elektroschwachen Theorie dazu führen, dass die drei Neutrinoarten (ν_e , ν_μ , ν_τ) sich in **Neutrino-Oszillationen**

Ein Teilchen kann in andere zerfallen; zwei Teilchen können einen Stoß ausführen, bei dem sie Energie und Impuls austauschen oder bei dem neue Teilchen erzeugt werden. Wir wollen versuchen, alle diese Vorgänge in einheitlicher Weise zu beschreiben, speziell auch ihre Wahrscheinlichkeiten herzuleiten. Dabei müssen wir uns auf einen grob annähernden Überblick beschränken.

Beim α -Zerfall ist das emittierte Teilchen im Kern schon vorhanden gewesen, bevor es dessen Potentialwall durch Tunneleffekt überwindet, was umso leichter geschieht, je niedriger und je dünner dieser Wall ist (Abschn. 13.7.2). Hier interessieren uns Zerfallsakte, bei denen die emittierten Teilchen nicht schon existieren, sondern erst erzeugt werden müssen. Das gilt auch für die Emission eines Photons. Nach *Hertz* strahlt ein schwingender Dipol die Leistung

$$P = \frac{1}{6} \frac{e^2 d^2 \omega^4}{\pi \epsilon_0 c^3}$$

ab (vgl. (7.71)). Für ein atomares System, das diese Leistung in Form von Photonen der Energie $\hbar\omega$ abgibt, ist das anders zu lesen: Es dauert im Mittel eine Zeit $\tau = \hbar\omega/P$, bis ein Photon abgestrahlt wird. Damit folgt

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{6} \frac{e^2 d^2 \omega^3}{\pi \epsilon_0 c^3 \hbar} . \quad (18.22)$$

Wir schreiben das auf zwei andere sehr nützliche Arten, indem wir die Wellenlänge λ oder $\tilde{\lambda} = \lambda/(2\pi)$ oder den Impuls $p = h/\lambda$ des Photons einführen:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \alpha \frac{d^2}{\tilde{\lambda}^2} \omega \quad (18.23)$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3} \alpha \frac{d^3 p^3}{\hbar^3} A^{-1/3} \frac{1}{\tau_0} . \quad (18.24)$$

Hier hat sich die **Feinstrukturkonstante** $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ herausgeschält, die bei allen atomaren Strahlungsproblemen auftaucht. Bei der γ -Strahlung schwingen Ladungen im Kern, die Amplitude d ist maximal etwa so groß wie der Kernradius $A^{1/3}r_0$ mit $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-15}$ m. Dies und die **Elementarzeit** $\tau_0 = r_0/c = 0,4 \cdot 10^{-23}$ s sind in (18.24) schon benutzt. Nach (18.23) strahlt selbst eine atomare „Antenne“ der optimalen Länge $d \approx \lambda$ nicht in jeder Schwingungsperiode ein Photon ab, sondern nur etwa alle $1/\alpha \approx 137$ Perioden. Die Feinstrukturkonstante gibt die Stärke der Kopplung zwischen Ladung und Wellenfeld.

Mit $E = \hbar\omega = \hbar c/\lambda$ und $d = A^{1/3}r_0$ folgt aus (18.24)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} \frac{2}{3} \alpha A^{2/3} \frac{r_0^3}{\hbar^3 c^3} E^3 . \quad (18.25)$$

Energiereiche γ -Übergänge erfolgen viel schneller. Viele γ -Übergänge gehorchen recht gut dieser Abhängigkeit $\tau \sim E^{-3}$, aber es gibt auch welche mit viel längerer Zeitkonstante und steilerer Energieabhängigkeit. Man versteht sie als **Quadrupol-** und höhere **Multipol-schwingungen** des Kerns. Dabei werden gleichzeitig mehrere Photonen emittiert, wie man auch direkt nachweisen kann. Der Drehimpuls des Kerns ändert sich dabei um $l\hbar$, d. h. um mehrere Einheiten \hbar . Ein Photon hat ja den Drehimpuls \hbar . Ähnliche Multipolübergänge gibt es auch beim Atom, nur seltener (Kap. 15). Die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Übergang ist das Produkt von l Einzelwahrscheinlichkeiten für die Emission je eines Photons:

$$\frac{1}{\tau} \approx \omega \left(\alpha \frac{R^2}{\tilde{\lambda}^2} \right)^l \sim E^{2l+1} . \quad (18.26)$$

Die Langlebigkeit von energiearmen Zerfällen, besonders bei höherer Multipolordnung, erklärt die extreme Schärfe dieser γ -Linien, die man im **Mößbauer-Effekt** ausnutzen kann.

× Beispiel . . .

Welche Eigenschaften muss ein γ -Übergang haben, mit dem man die relativistische Rotverschiebung im Labor messen kann?

Verlangt wird die relative Linienbreite $\Delta\omega/\omega \approx gh/c^2$, denn das Photon verliert beim Aufstieg um h den Anteil mgh seiner Energie mc^2 . Eine Linie mit der Lebensdauer τ ist nach der Unschärferelation um $\Delta\omega = 1/\tau$ verbreitert. Nach (18.26) ist $\Delta\omega/\omega \approx \alpha^l (R/\lambda)^{2l}$. Dipolübergänge kämen erst unterhalb 10 eV in Frage, Quadrupolübergänge ($l = 2$) unterhalb 50 keV, Oktupolübergänge ($l = 3$) schon unterhalb 1 MeV.

Jetzt deuten wir (18.24): Die **Übergangswahrscheinlichkeit** $1/\tau$ für die Emission eines Photons hängt außer vom Kopplungsfaktor α nur von der Größe $p^3 d^3/h^3$ ab. d^3 ist etwa das Kernvolumen, p^3 ist das Volumen des Impulsraums, aufgespannt durch den Photonenimpuls p , das Produkt $d^3 p^3$ ist das Volumen im sechsdimensionalen Phasenraum, das für die Entstehung des Photons maßgebend ist. Dieser **Phasenraum** zerfällt, wie *Fermi* zeigte, in Zellen der Einheitsgröße h^3 , die von höchstens zwei Teilchen mit halbzahligen, entgegengesetzten Spins besetzt werden können. Das folgt aus der Unschärferelation (Genauerer im Abschn. 19.3.3). Die darauf beruhende **Fermi-Statistik** gilt für **Fermionen** (Teilchen mit halbzahligem Spin) und erklärt das Verhalten von Elektronen im Festkörper, die Eigenschaften der Materie unter hohem Druck wie in Riesenplaneten oder Pulsaren ebenso wie hier die Erzeugung neuer Teilchen. Auch für **Bosonen** mit ganzzahligem Spin wie das Photon haben die h^3 -Zellen eine Bedeutung. Die Erzeugungswahrscheinlichkeit von Photonen ist proportional zur Anzahl verfügbarer Phasenraumzellen. Dieses Prinzip lässt sich auf andere Wechselwirkungen übertragen.

Beim **β -Zerfall** entstehen z. B. ein Elektron und ein Antineutrino, wobei ein Neutron in ein Proton übergeht. Wir erwarten, dass die Zerfallswahrscheinlichkeit durch das Produkt der Zellenzahlen in den Phasenräumen von Elektronen und Neutrino gegeben ist, noch multipliziert mit einem Kopplungsfaktor, der wohl nicht gerade gleich α sein wird, denn es handelt sich ja um eine andere, die schwache Wechselwirkung:

$$\frac{1}{\tau} = \beta N_e N_\nu \frac{1}{\tau_0} = \beta \frac{1}{\tau_0} \frac{V^2 p_e^3 p_\nu^3}{h^6}. \quad (18.27)$$

Das Neutrino hat (wenn überhaupt) nur eine winzige Ruhmasse und bewegt sich daher immer relativistisch: $E_\nu = p_\nu c$. Wenn das Elektron auch relativistisch ist ($E_e \gg 0,5 \text{ MeV}$, $E_e = p_e c$), wird

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{1}{\tau_0} \beta \frac{V^2}{h^6 c^6} E_e^3 E_\nu^6. \quad (18.28)$$

Ein ähnlicher Gedankengang ergibt die Aufteilung der gesamten Zerfallsenergie $E_0 = E_e + E_\nu$ auf e und $\bar{\nu}$ (Aufgabe 19.3.6). Die Abhängigkeit $\tau \sim E^{-6}$ ist noch steiler als beim γ -Dipolübergang und wird durch ähnliche Effekte kompliziert. Statt von Übergängen höherer Multipolordnung spricht man hier von **mehrfach verbotenen Übergängen**.

Unser (18.28) beschreibt näherungsweise auch andere „schwache“ Zerfälle, bei denen nicht Elektronen und Neutrinos, sondern Pionen, Myonen oder auch Pho-

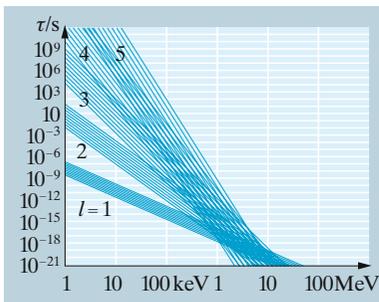


Abb. 18.43. Lebensdauer von β -Strahlern in Abhängigkeit von der Zerfallsenergie für verschiedene Multipolordnungen l

tonen entstehen. Es kommt ja im Wesentlichen auf die Phasenraumvolumina an, und bei so energiereichen Zerfällen sind praktisch alle Produktteilchen relativistisch. Das freie Neutron zerfällt in 938 s, weil es nur $E_0 = 0,8$ MeV einzusetzen hat (vgl. Tabelle 18.6). Die Hyperonen leben nur etwa 10^{-10} s, denn ihre Zerfallsenergie ist etwa 100-mal größer. Myon- und Pion-Zerfall fügen sich dazwischen ein. Für nichtrelativistische Teilchen wird die $\tau(E)$ -Abhängigkeit flacher (Aufgabe 19.3.6), und für $E_0 \ll m_e c^2$ mündet $1/\tau$ in den Wert $\beta V^2 (mc/h)^6$ ein. Wir müssen noch den Faktor βV^2 interpretieren. Dahin kommen wir auf einem Umweg.

Man fasst heute das Schema des β -Zerfalls etwas anders auf und bringt es damit in Analogie zu den übrigen Wechselwirkungsarten: Nicht das Neutron sendet drei Teilchen aus, sondern es kommen zwei Teilchen, n und $\bar{\nu}$, einander entgegen (das $\bar{\nu}$ allerdings „aus der Zukunft“) und tauschen beim Stoß eine Ladung aus, wodurch das n in ein p , das $\bar{\nu}$ in ein e^- übergeht. Diese merkwürdige Umkehrung des Zeitpfeils gilt formal für alle Antiteilchen (Aufgabe 18.4.22). Dadurch kommen alle Wechselwirkungen unter einen Hut. Immer treffen sich zwei Teilchen und tauschen irgendetwas aus: Energie und Impuls (dann knicken beide Bahnen ab, und man sagt, es habe eine anziehende oder abstoßende Kraft gewirkt), oder Ladung oder andere Eigenschaften, wie beim β -Zerfall bzw., wie wir sehen werden, bei der starken Wechselwirkung. Dieser Austausch erfolgt nicht direkt, sondern durch ein Vermittlerteilchen. Wo man früher ein Kraftfeld sah, sieht man jetzt solche **Feldquanten** hin- und herlaufen. Die Quanten des elektromagnetischen Feldes sind die Photonen; die Quanten des starken Feldes, das zwischen den Quarks wirkt, sind die **Gluonen**. Direkte Hinweise auf die Existenz der Gluonen ergaben sich etwa gleichzeitig (um 1982) mit dem Nachweis der „schwachen“ Quanten, der **Weakonen**; beide Teilchensorten waren bis dahin nur theoretische Postulate.

Wenn die wechselwirkenden Teilchen plötzlich ein Feldquant mit der Energie E aus dem Nichts stampfen sollen, verletzen sie damit den Energiesatz um diesen Betrag E . Eine solche Überziehung des Energiekontos muss nach einer Zeit t ausgeglichen werden, die so klein ist, dass prinzipiell niemand das Fehlen der Summe E nachweisen könnte. Nach der Unschärferelation ist diese Zeit $t \lesssim h/E$. In dieser Zeit kommt das Feldquant bestenfalls eine Strecke $r \approx ct \approx ch/E$ weit; falls es die Ruhmasse m hat, kommt es bis $r \approx h/(mc)$. So verknüpfte Yukawa die Reichweite der Kernkraft mit der Masse des damals noch hypothetischen Pions. Felder mit ruhmasselosen Quanten wie das elektrische unterliegen dieser Beschränkung nicht, sie reichen unter rein geometrischer r^{-2} -Verdünnung bis ins Unendliche.

Wieso kann der Austausch von Teilchen überhaupt zu einer Kraft führen? Die anschauliche Vorstellung vom Impulsaustausch, der mit einem Ballwechsel verbunden ist, würde immer nur Abstoßung liefern (außer bei Bumerang-Artisten). Weiter führt die Analogie mit der chemischen Bindung: Wenn das Feldquant – wie dort das bindende Elektron – zwei Zustände zur Verfügung hat, nämlich beim einen oder beim andern der nahe benachbarten Teilchen zu sein, ist die Gesamtenergie dieses Systems niedriger als für weiter entfernte Teilchen, die dem Feldquant nur je einen engeren Platz anbieten können.

Neutron und Antineutrino tauschen also eine Ladung in Gestalt eines W^- -**Weakons** aus, das im CERN-Speicherring bei einer Stoßenergie um 90 GeV erzeugt wurde. Teilchen dieser riesigen Energie können nur über Abstände $r_W \approx \hbar c/E \approx 10^{-18}$ m ausgetauscht werden. Wir setzen daher in (18.28) für V nicht das Volumen des Nukleons, sondern nur $V \approx r_W^3$. Damit wird die Konstante $\beta/\tau_0 \cdot (m_e/m_W)^6 \approx 10^{-7} \text{ s}^{-1}$. Man misst 10^{-4} s^{-1} (schon das Neutron hat $1/\tau \approx 10^{-3} \text{ s}^{-1}$), also $\beta \approx 10^{-3}$. Bis auf eine kleine Abweichung, die angesichts der riesigen Größenordnungen nicht verwunderlich ist, stimmen also die Kopplungskonstanten der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung überein.

Diese Verschmelzung der beiden Kräfte zur **elektroschwachen** wirkt sich allerdings erst bei so riesigen Energien um 100 GeV aus; um 1 MeV oder sogar 1 GeV ist die elektromagnetische Kraft noch viel stärker.

Wir versuchen auch den winzigen Stoßquerschnitt zwischen Neutrinos und Nukleonen oder Elektronen zu verstehen. Nach *Cowan* und *Reines* liegt er um 10^{-47} m^2 (Abschn. 18.4.4), ist also 10^{27} -mal kleiner als der geometrische Querschnitt des Nukleons. Nur eines unter 10^{27} Neutrinos, das ein Nukleon durchquert, löst einen inversen β -Zerfall aus, z. B. $n + \nu \rightarrow p + e^-$. Das ist jetzt klar: 10^{-23} s dauert eine solche Durchquerung, 10^4 s dauert ein schwacher Prozess bei den geringen Energien, um die es sich im Reaktor und auch in der Sonne handelt, also ist die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Prozess in der Tat 10^{-27} . Neutrinos mit 100 GeV dagegen sollten ähnlich reaktionsfreudig sein wie Photonen.

Neutrinos reagieren auch miteinander, merklich allerdings nur bei so hohen Energien. Mangels Ladung können sie das nur „schwach“ tun, und zwar mittels eines neutralen Feldquants. Dieses Teilchen, genannt Z^0 , wurde kurz nach W^+ und W^- ebenfalls bei CERN um 90 GeV entdeckt. Die elektroschwache Kraft hat also vier Feldquanten: Z , W^+ , W^- , γ . Durch die Entdeckung dieser **neutralen Wechselwirkung** wurde die Verschmelzung noch inniger.

Nach dem gleichen Schema versucht man in der **Großen Vereinheitlichung (grand unification)** auch die starke Kraft mit einzubeziehen. Dabei interpretiert man den Graphen des Elementaraktes nochmals neu: Emission oder Absorption eines geladenen Weakons verwandelt ein Quark in ein anderes, oder ein Lepton in ein anderes, z. B. d in u und $\bar{\nu}$ in e^- beim β -Zerfall, ändert also den **flavor** des Quarks oder Leptons. Emission oder Absorption eines **Gluons** ändert die Farbe des Quarks, wozu es beim Lepton kein Analogon gibt (deswegen unterliegen die Leptonen auch nicht der starken Kraft). Sollte es auch Teilchen geben, deren Emission oder Absorption Quarks in Leptonen verwandelt oder umgekehrt? Diese hypothetischen **X-Teilchen** müssten extrem schwer sein, also die entsprechende Wechselwirkung ultraschwach, sonst wäre nicht einmal das Proton so stabil, wie es offenbar ist. Bisherige Abschätzungen liefern eine **Lebensdauer des Protons** von mehr als 10^{30} Jahren, also 10^{60} Elementarzeiten. Ein zu (18.28) analoger Ansatz

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{1}{\tau_0} \alpha V^2 \frac{E^6}{h^6 c^6} \approx \frac{\alpha}{\tau_0} \left(\frac{m_e}{m_X} \right)^6$$

ergibt dann eine Masse des X um 10^{17} GeV , und seine Reichweite wäre nicht mehr so viel größer als die Planck-Länge, bei der auch die Gravitation wesentlich mitspielt. Die Entdeckung des **Protonenzerfalls**, die an vielen Orten mit enormem Aufwand versucht wird, würde diese Hypothesen bestätigen und präzisieren.

18.4.6 Elektromagnetische Wechselwirkung

Wir stellen die Elementarprozesse anschaulich in „graphischen Fahrplänen“ dar, so genannten Feynman-Graphen, indem wir etwa vertikal die Zeit, horizontal eine Ortskoordinate auftragen. Ein gleichförmig bewegtes Teilchen wird durch eine gerade „Weltlinie“ dargestellt. Der Tangens der Neigung gegen die Vertikale gibt die Geschwindigkeit. Photonen, dargestellt als Wellenlinien, laufen bei entsprechender Wahl der Einheiten auf 45° -Linien (Abb. 18.44). Gewöhnlich kennzeichnet man die Linien geladener Teilchen noch durch einen Pfeil, der die Stromrichtung (streng genommen die umgekehrte Stromrichtung) angibt. Ein Elektronenpfeil zeigt in die Zukunft, ein Positronenpfeil in die Vergangenheit (das wird i. Allg. nicht so verstanden, als liefe für Antimaterie die Zeit anders herum, obwohl man auch diese Auffassung vertreten kann).

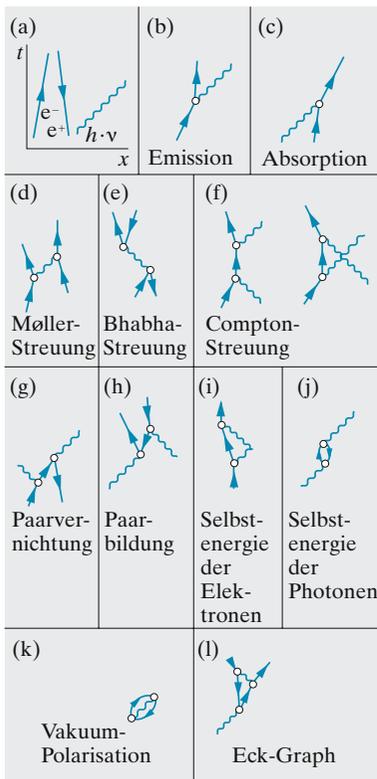


Abb. 18.44a–l. Die elementaren **Feynman-Graphen**

Alle Ereignisse werden durch Punkte (Knoten, Vertices) dargestellt, in denen sich Linien kreuzen, berühren, verzweigen oder vereinigen. In der **Quantenelektrodynamik** betrachtet man die Wechselwirkung zwischen „echten“ Teilchen nie als direkt, sondern immer als durch Photonen vermittelt. Ferner soll ein Photon nie mit einem Teilchen zusammenstoßen und *sofort* wieder abprallen. Daher gibt es zunächst nur eine Art von Ereignis: Ein Photon wird von einem Teilchen emittiert oder absorbiert, d. h. eine Photonenlinie zweigt von einer Teilchenlinie ab oder mündet in sie (Abb. 18.44b,c).

Diese Grundereignisse, obwohl sie der klassischen Vorstellung zu entsprechen scheinen, dass jede beschleunigte Ladung strahlt, sind aber eigentlich unmöglich, denn sie verstoßen gegen Energie- und Impulssatz. Man sieht das sofort z. B. für die Einphotonen-Emission im Bezugssystem, wo das Elektron hinterher ruht (Abb. 18.44b). Das Photon trägt die Energie $E = h\nu$ und den Impuls $p = h/\lambda = E/c$ weg. Diese Werte müssten denen des Elektrons *vor* der Emission entsprechen. Als ruhmassebehaftetes Teilchen kann das Elektron aber nie, nicht einmal bei höchster Geschwindigkeit, exakt $E = pc$ haben.

Energie und Impuls eines Zustandes, speziell die Energie sind nur dann präzise festgelegt, wenn der Zustand sehr lange dauert. Für einen Zustand der Lebensdauer t erlaubt oder verlangt die Unschärferelation eine Energieunschärfe $\Delta E = h/t$. Wenn z. B. bei strenger Impulserhaltung die Energie um nicht mehr als ΔE „falsch“ ist, muss der entsprechende Zustand doch berücksichtigt werden, allerdings nicht als realer, beobachtbarer Zustand, sondern nur als **virtueller**, mit Begrenzung der Lebensdauer auf $t = h/\Delta E$.

Im Diagramm unterscheidet man also äußere Linien, die bis zum Rand führen, und reale, beobachtbare Teilchen bedeuten, und innere Linien zwischen zwei Ereignispunkten für virtuelle, notgedrungen kurzlebige, „illegale“ Teilchen.

Man kann die Prozesse (b) und (c) zu einem realen kombinieren, indem ein Elektron ein Photon emittiert, das virtuell bleibt und genügend schnell von einem anderen Elektron absorbiert wird. Die innere Photonlinie muss umso kürzer sein, je härter das Photon ist (gemäß $t \Delta E = th\nu \lesssim h$ dürfte, wenn die Welligkeit der physikalischen Welle entsprechen soll, jede solche Linie nur höchstens eine Wellenperiode enthalten). Bei geringerem Abstand können zwei Elektronen also härtere Photonen austauschen, die zu größeren Impulsänderungen, also Kräften führen. Im Fall zweier Elektronen machen die Impulsänderungen deutlich, dass es sich um eine Abstoßung handelt. Den Übergang zur Anziehung für ungleichnamige Ladungen liefert dieses einfache Bild jedoch nicht.

Einen anderen wichtigen Graphen erhält man, indem man den Graphen (d) (auch **Møller-Streuung** genannt) um 90° dreht. Diese Drehung, d. h. Vertauschung von Ort und Zeit, verknüpft zwei „duale“ Graphen mit formal identischen Eigenschaften; relativistisch sind ja x und t äquivalent. In (e) laufen ein Elektron und ein Positron (Pfeilrichtung!) zusammen und vernichten einander zu einem Photon, das aus den gleichen Gründen wie bei der Møller-Streuung virtuell bleiben muss, nämlich sich in ein anderes Elektron-Positron-Paar „materialisiert“ (**Bhabha-Streuung**). Experimentell sind (d) und (e) nicht unterscheidbar, da die Teilchen nicht markierbar sind und das Photon grundsätzlich unbeobachtbar bleibt.

Die **Compton-Streuung** muss mit zeitlicher Trennung zwischen Auftreffen und Reemission des Photons gezeichnet werden (f). Auch ein anderer Prozess kommt in Betracht, bei dem scheinbar akausal ein Photon emittiert wird, bevor das andere eintrifft. Der dazu duale Prozess (g) ist die reale Vernichtung (ohne Wiedererzeugung) eines Elektronenpaares: Entweder das Elektron oder das Positron sendet ein Photon aus, kurz bevor es mit seinem Antiteilchen zusammentrifft. Dieser „Entsetzenschrei“ bringt Energie und Impuls in Ordnung. Man kann (f) auch andersherum drehen und erhält die (Zweiphoton)-**Paarbildung** (h).

In Ermangelung eines Partners kann ein Elektron sein virtuell emittiertes Photon auch selbst wieder einfangen (i); man frage nicht, wer das Photon rechtzeitig „zurückspiegelt“. Kinematisch bedeutet das einen Doppelstoß auf das Elektron. Nach dem ersten Stoß (Emission) hat es einen Rückstoßimpuls $h\nu/c$, also für weiche Photonen ($\ll 500$ keV) eine Geschwindigkeit $v = h\nu/(mc)$. Spätestens nach $t = h/(h\nu) = 1/\nu$ muss das Photon wieder eingefangen werden, wobei das Elektron seinen alten Bewegungszustand wieder annimmt. Inzwischen hat sich seine Bahn aber um $vt = h/(mc)$ seitlich versetzt. Anschaulich zittert es also bei dem Ballspiel mit sich selbst unaufhörlich innerhalb eines Bereiches $h/(mc)$, d. h. seiner **Compton-Wellenlänge** hin und her. Dies gibt eine Idee, warum die Compton-Wellenlänge auch für die innere Struktur eines Teilchens, die ja z. T. durch diese Selbstprozesse bestimmt wird, so wichtig ist. Die wirkliche Verschmierung des Elektrons oder seiner Ladung, die man klassisch annehmen muss, um rein elektromagnetisch die Elektronenmasse herauszubekommen, ist allerdings wesentlich kleiner (**klassischer Elektronenradius** oder Compton-Wellenlänge des Protons). Auch die Quantenelektrodynamik macht den Graphen (i) für die **Selbstmasse** (Selbstenergie) verantwortlich. Das Photon hat ebenfalls einen Selbstenergie-Graphen: Es kann sich in ein Elektronenpaar verwandeln, das natürlich virtuell bleiben muss und sofort wieder zerstrahlt.

Wichtig ist ferner ein Graph, bei dem überhaupt nichts Reelles auftritt (k): Ein Photon macht ein Elektronenpaar, das gleich wieder in das *gleiche* Photon zerstrahlt. Manche Effekte, z. B. der **Lamb-Shift** und die **anormalen magnetischen Momente** von Elektron und Myon, werden so gedeutet, dass sich dieser gänzlich virtuelle Prozess überall, auch im Vakuum, abspielt (**Vakuum-Polarisation**).

18.4.7 Die innere Struktur der Nukleonen

Seit *Hertz, Lenard* und *Rutherford* sondiert man das Innere von Teilchen, indem man andere Teilchen darauf schießt. In den heutigen Beschleunigern kann man Teilchen mit Energien um 100 GeV aufeinander schießen. Gleichnamige Punktladungen können sich dabei auf Abstände um 10^{-20} m nahe kommen. Eine etwas höhere Grenze für diesen Minimalabstand setzt die Unschärferelation: Der Impulsänderung $\Delta p \approx E/c$, die die Teilchen beim zentralen Stoß erfahren können, entspricht eine Ortsunschärfe

$$\Delta x \approx \hbar/p \approx \hbar c/E \approx 10^{-17} \text{ m}.$$

Kleinere Strukturdetails können selbst so schnelle Teilchen nicht sondieren. Zum gleichen Ergebnis führt die Überlegung, dass eine Teilchensonde keine Einzelheiten enthüllen kann, die kleiner sind als seine de Broglie-Wellenlänge h/p .

Bei den Leptonen liefern solche Experimente keinerlei Hinweise auf eine Struktur: Leptonen sind entweder wirklich punktförmig oder jedenfalls kleiner als die angegebene Grenze. Beim Nukleon dagegen ist der Radius von $1,3 \cdot 10^{-15}$ m in allen diesen Messungen gut erkennbar. Auffälligerweise ist dies ziemlich genau die **Compton-Wellenlänge** $h/(mc)$ des Nukleons selbst oder allgemeiner die de Broglie-Wellenlänge eines fast mit c bewegten Teilchens mit einer Masse um 1 GeV. Man kann Masse und Radius des Nukleons somit aufeinander zurückführen, wenn man annimmt, dass in seinem Volumen vom Radius r Teilchen eingesperrt sind, die sich relativistisch bewegen und deren kinetische Energie $E \approx pc$ aus der Impulsunschärfe $p \approx \hbar/r$ stammt.

Auch das **magnetische Moment der Nukleonen** spricht für ihre komplexe Struktur. Die Leptonen haben ja, bis auf eine winzige, durch die Vakuumpolarisation erklärbare Abweichung, genau das magnetische Moment $e\hbar/(2m)$, das einer rotierenden Ladung mit dem Drehimpuls $\hbar/2$ entspricht, also 1 Bohr-Magneton. Das Proton dagegen hat 2,793, das Neutron $-1,913$ Kernmagnetonen vom Betrag

$e\hbar/(2m_p)$. Diese Verhältnisse nahe 3 bzw. $\frac{2}{3}$ suggerieren, dass die Zahl 3 in der Struktur der Nukleonen irgendeine Rolle spielt.

Direkteren Einblick liefern die hochenergetischen Streuversuche. Dabei nutzt es wenig, Nukleonen auf Nukleonen zu schießen. Aus einem Autounfall allein erfährt man ja auch wenig über die Struktur von Autos: Es fliegt alles mögliche durch die Gegend, aber wie es zusammengehört hat, ist kaum ersichtlich. Da ist es schon besser, mit dem Gewehr auf das Auto zu schießen: Wo die Kugel abprallt, war sicher etwas Hartes. Elektronen werden nur durch geladene Bestandteile abgelenkt und haben seit *Hofstadter* (1956) (Nobelpreis 1961) wichtige Informationen geliefert. Neutrinos, wie sie in großen Beschleunigern immer reichlicher verfügbar werden, müssen diesen Bestandteilen noch viel näher kommen, damit die schwache Kraft mit ihrem winzigen Wirkungsquerschnitt sie ablenkt. Sie zeigen ganz klar, dass die Streuzentren im Nukleon, früher **Partons** genannt, viel kleiner sind als das Nukleon. Am besten lassen sich die Ergebnisse deuten, wenn man drei solche Streuzentren im Nukleon annimmt. Man identifiziert sie heute natürlich mit den anfangs nur theoretisch postulierten **Quarks**.

Ursprünglich sollte ja das Quark-Modell die immer mehr anschwellende Zahl entdeckter Elementarteilchen auf einige Grundbausteine zurückführen. Der menschliche Geist lässt sich so viele unabhängige Grundeinheiten einfach nicht gefallen. In der Biologie heißt das Prinzip der Vereinheitlichung: Entwicklung, in der Physik und Chemie: Aufbau aus einfacheren Bausteinen. *Darwin* hat gegen *Linné* recht behalten, *Mendelejew* gegen *Dalton*: Die Vielfalt und die Ähnlichkeit zwischen Arten bzw. Atomen lassen sich nur verstehen, wenn es Entwicklung bzw. eine innere Struktur gibt.

Von jedem Atom gibt es ja außerdem noch sehr viele verschiedene Ausgaben, nämlich alle seine angeregten Zustände. Eine solche Vielfalt von Zuständen eines Systems ist auch nur denk- und erklärbar, wenn das System aus einfacheren Bausteinen besteht, deren gegenseitige Energie (der Lage oder Bewegung) eben das Unterscheidungsmerkmal dieser angeregten Zustände darstellt. Was sollte man unter der Anregung eines nichtstrukturierten Teilchens „aus einem Guss“ verstehen? Die Elementarteilchen sind in ihrer Masse, also energetisch sehr viel unterschiedlicher als die angeregten Zustände eines Atoms, weil die starke Bindung eben so viel stärker ist als die elektromagnetische. Trotzdem sind Beziehungen zwischen den Hadronen ähnlich den Termspektren der Atome unverkennbar. Sie lassen sich aber nur mit Sinn erfüllen, wenn die Hadronen eine innere Struktur haben.

18.4.8 Das Quarkmodell

Um 1964 zeigten *Ne'eman*, *Gell-Mann* und *Zweig*, wie man die bekannten Elementarteilchen – schon damals waren es etwa 100 – auf drei Grundbausteine zurückführen kann, die *Gell-Mann* (Nobelpreis 1969) als Quarks bezeichnete. Ein solches Modell sollte

- erklären, warum es die beobachteten Teilchen gibt und keine anderen;
- die Lebensdauern und Zerfallsmechanismen dieser Teilchen erklären;
- erklären, ob und mit welcher Wahrscheinlichkeit man diese Teilchen in energiereichen Stößen erzeugen kann.

Wir beschränken uns zunächst auf die drei „klassischen“ Quarksorten u, d, s.

Der Bauplan der **Mesonen** lässt neun Kombinationen von Quark und Anti-quark zu. Wie man sie mit den bekannten Mesonen identifiziert, ergibt sich aus den Massen (u, d leicht, s schwer) und den Ladungen der Quarks (d, s haben $-\frac{1}{3}$, u hat $\frac{2}{3}$). Allerdings gibt es fünf neutrale $q\bar{q}$ -Kombinationen, denen nur vier neutrale Mesonen gegenüberstehen. Man stellt sich vor, dass z. B. das $u\bar{u}$ -Paar im π^0

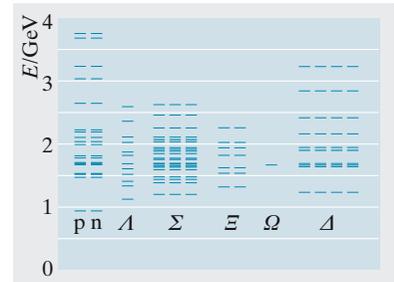


Abb. 18.45. Die Massen (Ruhenergien) der Baryonen (Stand April 1976; seit dem wurden besonders in den höheren Energiebereichen noch mehrere hundert Anregungszustände entdeckt)

Tabelle 18.8. System der Elementarteilchen nach dem Quark-Modell (Eintriplett-Modell $SU(3)$ -Schema)

(a) Die Triplets der Quarks und Antiquarks. Wegen der 8 Quantenzahlen spricht man vom „achtfachen Weg (eightfold way)“

Teilchen	Baryon- zahl A		Spin J	Ladung Q		Hyper- ladung Y	Strange- ness S	Isospin I_3		Isospin- betrag I	Multipliz. ν
u, \bar{u}	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
d, \bar{d}	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
s, \bar{s}	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\pm\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	∓ 1	0	0	0	1

(b) Die Quark-Antiquark-Paare (Mesonen)

Quarks	A	J	Q	Y	S	I_3	I	ν		Oktett	Singulett
u \bar{u}	0	0	0	0	0	0	1	3	}	π^0	}
d \bar{d}	0	0	0	0	0	0	1	3			
u \bar{d}	0	0	1	0	0	1	1	3	π^+		
d \bar{u}	0	0	-1	0	0	-1	1	3	π^-		
u \bar{s}	0	0	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	K^+		
d \bar{s}	0	0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	K^0		
s \bar{u}	0	0	-1	-1	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	\bar{K}^+		
s \bar{d}	0	0	0	-1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	\bar{K}^0		
s \bar{s}	0	0	0	0	0	0	0	1	η_8^0		

(c) Die Dreiquark-Zustände (Baryonen)

Quarks	A	J	Q	Y	S	I_3	I	ν		Dekuplett	Oktett	Singulett
u u u	1	$\frac{1}{2}$	2	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-	4	Δ^{++}	-	}
u u d	1	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	4	Δ^+	p	
u d d	1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	4	Δ^0	n	
d d d	1	$\frac{1}{2}$	-1	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-	4	Δ^-	-	
u u s	1	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	1	1	3	$\Sigma^{+'}$	Σ^+	}	
u d s	1	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	0	1	3	$\Sigma^{0'}$	Σ^0		
d d s	1	$\frac{1}{2}$	-1	0	-1	-1	1	3	$\Sigma^{-'}$	Σ^-		
u s s	1	$\frac{1}{2}$	0	-1	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\Xi^{0'}$	Ξ^0		
d s s	1	$\frac{1}{2}$	-1	-1	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\Xi^{-'}$	Ξ^-		
s s s	1	$\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	0	0	1	Ω^-	-		

sich nach kurzer Zeit vernichtet und aus seiner Energie ein $d\bar{d}$ -Paar erzeugt, sodass das π^0 eigentlich eine Überlagerung aus den beiden Grenzzuständen $d\bar{d}$ und $u\bar{u}$ ist. Ähnlich stellt man ja z. B. die Ψ -Funktion des H_2 -Ions quantenmechanisch als Überlagerung der beiden Zustände „ Ψ_1 : Elektron beim Proton 1“ und „ Ψ_2 : Elektron beim Proton 2“ dar. Hierbei gibt es zwei wesentlich verschiedene Überlagerungen: Die symmetrische $\Psi_1 + \Psi_2$, und die antimetrische $\Psi_1 - \Psi_2$, analog zu den beiden „Normalschwingungen“ des Koppelpendels (Abschn. 4.4.1). Für das π^0 sind diese beiden Normalschwingungen identisch, weil zwischen u und d kein wesentlicher Unterschied besteht (außer der Ladung, die durch das Antiquark ohnehin kompensiert wird). Beim K^0 dagegen verhalten sich beide Normalzustände sehr

verschieden, wie wir gleich sehen werden. Bei den geladenen Mesonen verbieten Ladungs- oder Energieerhaltung solche internen Übergänge; wenn sie zerfallen, zerfallen sie gleich „richtig“. Alle bisher genannten Mesonen sind so leicht, also energiearm, wie das ihre Quarkkomposition erlaubt. Das ist der Fall, wenn die beiden Quarks entgegengesetzte Spins haben, das ganze Meson also den Spin 0 hat. Gleichgerichtete Quarkspins ergeben ein energetisch erheblich höherliegendes Stockwerk des entsprechenden Satzes von Spin-1-Mesonen.

Auch bei den **Baryonen** muss das tiefste Stockwerk den kleinstmöglichen Spin haben, nämlich $\frac{1}{2}$: Bei zwei der drei Quarks zeigt er z. B. nach oben, beim dritten nach unten. Das ist nicht möglich, wenn alle drei Quarks von der gleichen Sorte sind, denn in diesem Fall müsste eines von ihnen in einem höheren Energiezustand sitzen, genau wie im Kern höchstens zwei Protonen oder zwei Neutronen im gleichen Zustand Platz haben. Dieser höhere Zustand ist mit einem Drehimpuls $\frac{3}{2}$ des Gesamtsystems verbunden. Es sollte daher acht Baryonen vom Spin $\frac{1}{2}$ und minimaler Energie geben, die Ecken uuu, ddd und sss des Zehnerschemas fehlen hier. Die leichtesten, uud und udd, stellen Proton und Neutron dar. Schwerer sind die drei Σ -Hyperonen Σ^+ , Σ^0 , Σ^- mit je einem s, noch schwerer die beiden Ξ -Hyperonen Ξ^- , Ξ^0 mit je zwei s. Baryonen haben nicht die Möglichkeit, sich durch interne Quarkpaar-Vernichtung ineinander umzuwandeln (es gäbe ja auch keine energie- und ladungsgleiche Alternative). Daher reduziert sich nicht wie bei den Mesonen die kombinatorisch mögliche Anzahl um 1, sondern im Gegenteil verdoppelt sich die Kombination uds: Außer Σ^0 , dem Mitglied des Σ -Triplets, gibt es eine energetisch günstigere Anordnung, ein Singulett Λ^0 mit etwas geringerer Masse.

Beim Spinwert $\frac{3}{2}$, also im energetisch nächsthöheren Stockwerk, gibt es zehn Baryonen, denn hier sind die Ecken mit drei gleichen Quarks nicht mehr ausgeschlossen. Das leichteste Quadruplett, nur aus u und d bestehend, heißt Δ und umfasst also auch $\Delta^{++} = uuu$ und $\Delta^- = ddd$. Das $\Omega^- = sss$ in der dritten Ecke wurde zum Prüfstein des Modells: Seine Existenz und ungefähre Masse wurde vorhergesagt, lange bevor man es im Beschleuniger fand. Natürlich gibt es noch viele höhere Anregungszustände der zehn Dreiquark-Kombinationen. Über 100 von ihnen hat man schon gefunden (Abb. 18.45) und kann sie ins Quarkschema einordnen.

Die Teilchen in einer Zeile dieses Schemas, also mit gleicher Anzahl von s-Quarks, fasst man wegen ihrer (abgesehen von der elektrischen Ladung) ähnlichen Eigenschaften zu einem **Multiplett** zusammen. Formal verhält sich dieses ähnlich wie ein Linienmultiplett in der Atomspektroskopie. Dort unterscheiden sich die Terme, von denen die entsprechenden Übergänge ausgehen, durch die Einstellung des Drehimpuls- oder Spinvektors des Elektrons. Analog hat man für die Teilchenspektroskopie einen **Isospinvektor I** eingeführt, der für das ganze Multiplett den gleichen Betrag I , aber für jedes Teilchen darin eine andere Einstellung haben soll. Ein Triplet z. B. hat $I = 1$ mit den Einstellungen $-1, 0, 1$; seine Multiplizität ist $\nu = 2I + 1 = 3$. Im Quarkmodell haben alle Mitglieder eines Multipletts die gleiche Anzahl s- oder \bar{s} -Quarks. I ist die halbe Anzahl der Plätze, auf die man ein u oder d (bzw. \bar{u} oder \bar{d}) setzen kann. So bilden Proton und Neutron ein Dublett ($I = \frac{1}{2}$), weil nur ein Platz für u oder d frei verfügbar ist; mindestens ein u und ein d müssen ja nach dem Pauli-Prinzip vorhanden sein. Das schwere s-Quark spielt eine Sonderrolle: Je mehr davon ein **Hadron** enthält, desto „seltsamer“ verhält es sich bei Zerfall und Stoß. Die Anzahl der s- oder \bar{s} -Quarks in einem Hadron nennt man seine **Strangeness S**. Die **Baryonenzahl A** ist nichts weiter als $N/3$, wo N die Anzahl der Quarks ist. Da Antiquarks mit -1 gezählt werden, erhalten die Mesonen $A = 0$. Schließlich hat man noch eine **Hyperladung Y** eingeführt. Sie ergibt sich als $Y = A - S$. So deutet das Quarkmodell die vor seiner Aufstellung eingeführten Quantenzahlen sehr einfach.

Das Quarkmodell leistet also etwa dasselbe für die Hadronen wie das Periodensystem für die Atome, nämlich 100 oder mehr Teilchen in ein Schema einzuordnen,

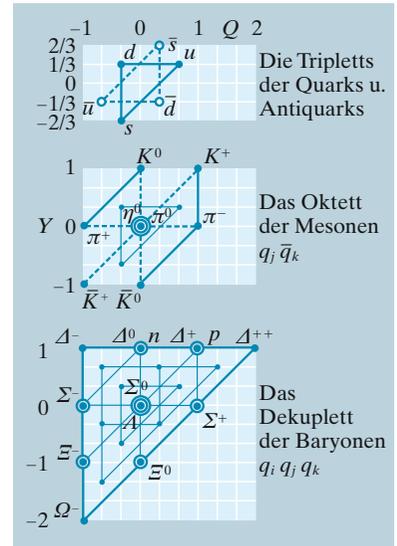


Abb. 18.46. Das Quarkmodell. Die einzelnen Teilchen-Supermultipletts entsprechen verschiedenen Schichten der kombinierten Diagramme

das Ähnlichkeit hervortreten lässt und Voraussagen über noch unentdeckte Teilchen gestattet. Will man wissen, welche Teilchen stabil sind, welche nicht, wie sich diese umwandeln, und was bei Stößen zweier Teilchen passieren kann, dann muss man einige dynamische Regeln hinzunehmen, die sich meist durch Erhaltungssätze gewisser Größen formulieren lassen. Die Rutherford-Soddy-Regeln für die radioaktive Verschiebung handeln von der Ladung; Stabilitätsfragen lassen sich durch Energiebetrachtungen auf Grund des Kernmodells entscheiden. Welche Größen außer Ladung und Energie erhalten bleiben, hängt von der Art der Wechselwirkung ab.

Die starke Kraft bewirkt drei Elementarakte: Austausch zweier Quarks zwischen zwei Hadronen, und Vernichtung oder Erzeugung eines Quark-Antiquark-Paares gleicher Sorte. Bei starken Prozessen bleiben also alle oben genannten Quantenzahlen erhalten, speziell ν , I , S ; man bleibt dabei innerhalb des gleichen Multipletts. Solche Prozesse dauern nur etwa eine **Elementarzeit** von 10^{-23} s, nämlich solange die intime Begegnung (innerhalb eines Abstandes $\approx 10^{-15}$ m) der fast mit c bewegten Quarks dauert.

Die elektromagnetische und besonders die schwache Kraft können auch die Sorte (den **flavor**) der Quarks ändern. Beim β^- -Zerfall $udd \rightarrow uud + e^- + \bar{\nu}_e$ wandelt sich ja ein d in $u + e^- + \bar{\nu}_e$ um. Auch s kann in d oder in u plus einem negativen Lepton übergehen. Nur so kann sich ein Hyperon in ein Teilchen nächstniederer Strangeness verwandeln. Das dauert viel länger als ein starker Prozess, nämlich etwa 10^{-10} s. Es überrascht zuerst, dass eine Kraft umso mehr Unheil anrichten kann, je „schwächer“ sie ist. Schwache Kräfte sind aber eigentlich stärker: Ihr Wirkungsquerschnitt ist kleiner, weil die Masse der vermittelnden Feldbosonen größer ist.

Einige Eigenschaften bleiben von allen diesen Kräften unberührt: Energie W , elektrische Ladung Q , Baryonenzahl A . Quarks gehen einzeln nie ganz kaputt. In jüngster Zeit kommen allerdings Zweifel an der absoluten A -Erhaltung auf: Die **große Vereinheitlichung** von starker und elektroschwacher Kraft postuliert eine noch „schwächere“ Kraft, die auch Quarks in Leptonen verwandeln, also Nukleonen zerstören soll.

Was können nun die Hadronen nach diesen Regeln tun, was nicht? Wir behandeln zunächst die freien Zerfälle. Jedes Meson kann zerfallen. Nur bei π^0 und η^0 ist dies eine Paarvernichtung ($u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$), also ein starker, schneller Prozess, allerdings auf $8 \cdot 10^{-17}$ bzw. $2 \cdot 10^{-19}$ s verlangsamt durch die Möglichkeit, z. B. aus der $u\bar{u}$ -Vernichtungsenergie gleich wieder ein $d\bar{d}$ zu erzeugen. Beim geladenen Pion und allen Kaonen muss erst eine Flavor-Änderung stattfinden, damit ein Quarkpaar gleichen Flavors entsteht. Daher leben diese Teilchen viel länger (etwa 10^{-8} s), π^+ und π^- zerfallen dann in $\mu^\pm + \nu_\mu$ (Ladungserhaltung), beim **Kaon** reicht die Energie des Übergangs $s \rightarrow d$ außerdem zum Zerfall in zwei oder (seltener) in drei Pionen (Erzeugung von einem oder zwei Quarkpaaren, z. B. $u\bar{s} \rightarrow u\bar{d} + u\bar{u}$). Das neutrale Kaon verhält sich besonders kompliziert. Es zerfällt entweder langsam (in $5,4 \cdot 10^{-8}$ s) in drei Teilchen, meist Pionen, oder schnell (in $8,6 \cdot 10^{-11}$ s) in zwei Pionen, weshalb man anfangs meinte, hier gebe es zwei verschiedene Teilchen, τ und θ . Wie wir sahen, pendelt aber das K^0 ständig zwischen den Konfigurationen $d\bar{s}$ und $\bar{d}s$ hin und her. Die Schwingung zweier gekoppelter Pendel, zwischen denen die Energie hin und her wandert, lässt sich ebenso gut beschreiben als Überlagerung aus einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Normalschwingung (Abschn. 4.4.1). Analog spricht man statt von K^0 und \bar{K}^0 besser von deren symmetrischer bzw. antisymmetrischer Überlagerung, genannt K_S und K_L . Hier stehen s und l für „short“ und „long“, bezogen auf die Lebensdauer. Ebenso wie beim H_2 -Molekül, beim Positronium oder beim Protonium ist der Zustand mit symmetrischer Ψ -Funktion ein Singulett oder ein „Para-Zustand“ mit entgegengesetzten Spins der beiden Teilchen. Beim H_2 ist er bindend, weil die Elektronen einen erweiterten Potentialtopf zur Verfügung haben. Der Triplett- oder Ortho-Zustand mit

gleichgerichteten Spins muss antimetrisch sein, denn in der Mitte muss die Ψ -Funktion 0 sein, damit sich die Teilchen dort nicht begegnen. Das bedingt beim H_2 eine höhere, lockernde Energie (die Ψ -Funktion hat einen Knoten, oder: Teilchen mit gleichen Spins dürfen nicht beide in den gleichen, tiefsten Zustand). Das **Para-Positronium** mit entgegengerichteten Spins von e^- und e^+ kann in zwei Photonen zerfallen, deren Spins (Betrag 1) einander ebenfalls kompensieren. Beim **Ortho-Positronium** geht das nicht: Sein Spin 1 lässt nur den Zerfall in mindestens drei Photonen zu (der Einphoton-Zerfall ist aus Energie-Impuls-Gründen unmöglich). Jedes Photon, das zusätzlich entstehen muss, setzt aber die Zerfallszeit etwa um den Faktor $1/\alpha = 137$ herauf. Ähnlich ist es beim Protonium und bei unserem $K_1 - K_8$ -Zustandspaar.

Ein Hyperon geht durch einen Zerfall $s \rightarrow d$ oder $s \rightarrow u + e^-$ oder μ^- in die nächstniedere Strangeness-Stufe über. Das ist ein schwacher Prozess mit einer Zeitkonstante um 10^{-10} s. Die Energiedifferenz kann in ein neues leichtes Quarkpaar (Pion) oder einfach in ein Photon umgesetzt werden. Beim Ω^- erlaubt der s-Zerfall noch zusätzlichen Energiegewinn durch Spinumordnung. Das reicht sogar zur Erzeugung eines Kaons neben dem Λ^0 . Allein das Σ^0 zerfällt schneller (in 10^{-14} s) in Λ^0 , denn dazu ist kein Quarkzerfall nötig. Letzten Endes gehen natürlich alle Hyperonen in die leichtesten Baryonen, das Proton oder das Neutron, über, sei es direkt wie Λ^0 und Σ^\pm , sei es in einer Kaskade, wie Σ^0 , Ξ und Ω^- .

In Umkehrung dieser Zerfälle können alle Hyperonen und Mesonen in Stößen schneller Nukleonen erzeugt werden, falls deren Energie ausreicht. Als sekundäre Geschosse kommen auch Pionen und Kaonen in Frage. Dabei können Kaonen und Hyperonen immer nur „assoziiert“ erzeugt werden: Ein Λ und ein K, wie in Abb. 18.39, oder sogar zwei K zusammen mit einem Ξ , manchmal auch ein Hyperon und ein Antihyperon. Ein solcher Stoß ist ja ein äußerst kurzzeitiger (10^{-23} s dauernder), also ein starker Vorgang, bei dem ein $s\bar{s}$ -Paar entstehen kann und sich dann auf ein Kaon und ein Hyperon verteilen muss, wie in Abb. 18.39 auf K^0 und Λ^0 , falls es nicht im η^0 vereinigt bleibt. K^+ und K^- verhalten sich in ihren Stößen mit Nukleonen sehr verschieden: Beim K^+ kommen nur Umladungen vom Typ $K^+ + n \rightarrow K^0 + p$ vor, beim K^- gibt es außerdem eine Hyperonen-Erzeugung wie $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$. Das Quarkmodell erklärt auch dies zwanglos: Nur $K^- = \bar{u}s$ kann ein s anbieten, das ins Λ^0 eingebaut wird. Das K^0 ähnelt in dieser Hinsicht eher dem K^- , denn es enthält ja immer einen $\bar{d}s$ -Anteil.

Das erste Teilchen, das nicht ins Dreiquark-Schema passt, ist das 1974 von *Ting* und *Richter* (Nobelpreis 1976) entdeckte Ψ/J . Abbildung 18.41 zeigt den entsprechenden Resonanzpeak der Häufigkeit von Hadronen-Erzeugung in Elektron-Positron-Stößen. Seine Lage bei 3,095 GeV deutet an, dass hier ein neues Teilchen entsteht. Aus ΔW , der Breite des Peaks, liest man eine Lebensdauer des Ψ/J zu etwa 10^{-20} s ab (Abschn. 18.4.2). Man deutet dieses „langlebige“ Teilchen als Meson aus dem neuen Quark c (**charm**), dem $Q = \frac{2}{3}$ -Bruder des s-Quarks, und seinem Antiquark, also als $c\bar{c}$. In Analogie zum Positronium spricht man auch vom **Charmonium** und allgemein von **Quarkonia**, wenn ein Quark mit seinem Antiquark ein Meson bildet. Auch Mesonen aus c und einem leichteren Quark hat man inzwischen gefunden. Damit war nicht Schluss: 1977 entdeckte *Lederman* einen ähnlichen Peak bei 9,5 GeV, gedeutet als $b\bar{b}$, **Bottomium**, mit dem fünften Quark, bottom oder beauty, mit der Ladung $-\frac{1}{3}$. Sein $\frac{2}{3}$ -Bruder, das t (**top** oder **truth**) wurde 1994 entdeckt.

18.4.9 Quantenchromodynamik

Ebenso wie die Theorie des Atoms auf dem Verständnis der elektromagnetischen Wechselwirkung beruhte, aber erst perfekt wurde, als man die Quantennatur der Mechanik durchschaut hatte, ist das Quarkmodell erst durch ein Verständnis der starken Wechselwirkung, durch die **Quantenchromodynamik** tragfähig geworden.

Quarks sind Quellen für das starke Feld, dessen Feldquanten die Gluonen sind; sie sind Quellen für dieses Feld, weil sie eine „starke Ladung“, genannt **Farbe**, tragen. Es gibt drei Arten starker Ladung, nicht nur zwei wie für das elektromagnetische Feld; daher der Name „Farbe“, denn die drei Grundfarben verhalten sich formal genauso: Sie ergänzen sich zum neutralen Weiß, wenn sie alle drei in gleicher Stärke vorhanden sind; bei anderem Mischungsverhältnis lassen sich alle Farben daraus kombinieren. Ebenso wie ein Atom elektrisch neutral ist, sind alle Hadronen farblich neutral, d. h. weiß. Das ist auf zwei Arten zu erreichen: Farbe und Komplementärfarbe eines Quarks und eines Antiquarks kompensieren sich in einem Meson, die drei Farben von drei Quarks kompensieren sich in einem Baryon, ebenso wie die drei Gegenfarben von drei Antiquarks in einem Antibaryon.

Die **starke Kraft** oder Farbkraft hält die Quarks im Teilchen zusammen, allerdings nach einem wesentlich anderen Kraftgesetz als dem der Coulomb-Kraft, die die Teilchen im Atom zusammenhält („Quark confinement“). Atome üben trotz ihrer Neutralität eine schwächere, chemische Bindungskraft aufeinander aus, weil, wenn sie einander sehr nahe kommen, Elektronen zwischen ihnen ausgetauscht werden können, indem sie den schmal gewordenen Potentialwall zwischen den Atomen häufig durchtunneln. Analog ziehen zwei Baryonen bei sehr kleinem Abstand einander an, weil Quark-Antiquark-Paare, also Mesonen, den Potentialwall, der ihrer spontanen Entstehung im Wege steht, durchtunneln und somit ausgetauscht werden können. So werden Elektronen bzw. Mesonen zu sekundären Überträgern einer abgeschwächten elektrischen bzw. starken Kraft, die ja primär durch Photonen bzw. Gluonen vermittelt wird.

Dass die Quarks eine neue Eigenschaft „Farbe“ haben, musste man zunächst nur postulieren, um eine Schwierigkeit zu beheben: Das Pauli-Prinzip schien z. B. für das Δ^+ verletzt, das ja aus drei d mit gleichem Spin besteht. Also mussten diese Quarks ein bis dahin unbekanntes Unterscheidungsmerkmal haben. Noch eine andere Schwierigkeit des Modells hat sich als Schlüssel zum Verständnis erwiesen, die Tatsache nämlich, dass noch niemand ein isoliertes Quark hat nachweisen können. Man hat es auf Grund der drittelzahligen Ladung in Schwebeversuchen ähnlich dem Millikan-Experiment gesucht – ohne überzeugenden Erfolg.

Das Quark könnte so große Masse haben, dass die verfügbaren Energien nicht zu einer Isolierung ausreichen (ein Teilchen kann Bestandteile haben, die massereicher sind als es selbst: Aufgabe 18.4.19). Dann würde allerdings der Zusammenhang zwischen Masse und Radius des Nukleons wieder hinfällig oder zufällig werden. Daher nehmen die meisten Modelle Quarks mit ziemlich geringer Ruhmasse an, die durch ein Kraftgesetz verbunden sind, das eine Trennung dynamisch praktisch unmöglich macht. Die Kraft zwischen zwei Quarks darf mit dem Abstand r also nicht abfallen wie die Coulomb-Kraft, sondern muss z. B. unabhängig vom Abstand einen konstanten Wert F_0 haben. Dieser Wert F_0 lässt sich sofort aus dem Nukleonradius ermitteln (Aufgabe 18.4.24). Man erhält $F_0 \approx 10^5$ N. Um zwei Quarks auf einen knapp mikroskopisch erkennbaren Abstand d von $1 \mu\text{m}$ auseinander zu ziehen, brauchte man dann eine Energie $E = F_0 d \approx 10^{-1} \text{ J} \approx 10^{18} \text{ eV}$, also die Ruhenergie von etwa 10^9 Nukleonen.

Die Annahme $F = F_0$ liefert vielleicht den Schlüssel zur **dritten Spektroskopie**, d. h. zum Massenspektrum der Elementarteilchen, ebenso wie das Kraftgesetz $F \sim r^{-2}$ zusammen mit der Drehimpulsquantelung im Bohr-Modell die „erste Spektroskopie“ der Elektronenenergie im Atom erschlossen hat (dazwischen liegt die „zweite Spektroskopie“ der Nukleonenenergien im Kern). Man muss dazu wahrscheinlich der starken Punktwechselwirkung, die der Coulomb-Kraft entspricht, eine Dipol-Wechselwirkung der Quarks auf Grund ihrer Spins zur Seite stellen, die der magnetischen Wechselwirkung entspricht (Aufgaben 18.4.25, 18.4.26). Dabei ergeben sich die schweren Mesonen und Baryonen als angeregte Zustände der

leichteren. Diese „Resonanzzustände“ zerfallen sehr schnell (in ungefähr 10^{-23} s) in den Grundzustand der entsprechenden Quark-Kombination. Dies gilt auch für die Teilchen des Dekupletts (Tabelle 18.8), bis auf Ω^- und Δ^{++} , die auf Grund der „Auswahlregel“ etwas länger leben (metastabil sind), weil sie selbst die leichtesten Teilchen mit der entsprechenden Quantenzahlkombination sind.

Die **Hadronenerzeugung** in energiereichen Elektron-Positron-Vernichtungsstößen (besonders in den Speicherringen von CERN in Genf, SLAC in Stanford und PETRA in Hamburg) liefern eine weitere Bestätigung für das Quarkmodell. Die erzeugten Hadronen fliegen meist in zwei Strahlen entgegengesetzter Richtung davon, die umso enger werden, je höher der Energieumsatz ist. Das starke Feld zwischen dem sehr engen e^+e^- -Paar polarisiert das Vakuum und erzeugt zunächst ein Quark-Antiquark-Paar. Wegen ihrer geringen Ruhmasse fliegen die Teilchen mit der gleichen Energie und dem gleichen Impuls wie die Elektronen im Schwerpunktsystem auseinander, aber in anderer Richtung als diese, wenn auch entgegengesetzt zueinander, ähnlich wie beim elastischen Stoß. Beim Auseinander fliegen entstehen ständig neue Quark-Antiquark-Paare, die starken Feldlinien lösen sich vom bisherigen Partner und suchen sich einen näheren. So entstehen zahlreiche Paare oder Tripel, also Mesonen oder Baryonen. Jedenfalls stammt der Querimpuls in jedem Strahl nur aus dem ursprünglichen Unschärfeimpuls $p_{\perp} \approx h/r$, der Längsimpuls aus der Stoßenergie $p_{\parallel} \approx E/c$. Der Öffnungswinkel des Strahles ist demnach etwa $p_{\perp}/p_{\parallel} \approx hc/(Er) \approx m_H c^2/E$, was den Beobachtungen recht gut entspricht.

Es ist nicht ganz einfach, die Quarks innerhalb eines Nukleons zu zählen, aber überraschenderweise kann man aus einem Experiment direkt ablesen, wie viele verschiedene Quarks es überhaupt gibt. Es handelt sich um einen Frontalstoß energiereicher Elektronen und Positronen im Speicherring. Dabei entstehen viele Arten von Teilchen, natürlich immer in Teilchen-Antiteilchen-Paaren. Falls die Stoßenergie überhaupt zur Erzeugung ausreicht, hängen die relativen Erzeugungswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Teilchenarten nur noch von deren Ladung ab. Es handelt sich ja um einen elektromagnetischen Prozess. Für dessen Wirkungsquerschnitt σ kann man den Coulomb-Querschnitt $\sigma = \pi r^2$ mit $r = e^2/(4\pi\epsilon_0 E)$ verwenden (Abschn. 13.5.1), nur modifiziert durch den Faktor $\frac{4}{3}$. Von den vier e , die in σ stehen, deutet man zwei als Ladung der erzeugenden, zwei als Ladung der entstehenden Teilchen (der Prozess ist ja umkehrbar, die Eigenschaften der Teilchen müssen also ganz symmetrisch eingehen). Bei $E = 1$ GeV folgt $\sigma = 8,6 \cdot 10^{-36} \text{ m}^2$, bei höherer Energie noch weniger. Damit wird klar, dass man im Speicherring sehr viele Teilchen auf winzige Strahlquerschnitte konzentriert umlaufen lassen und trotzdem oft recht lange auf die gesuchten Ereignisse warten muss.

Beim Elektron-Positron-Stoß entstehen nun $\mu^+ \mu^-$ -Paare oder je zwei Strahlen oder **Jets von Hadronen**, meist Pionen, die man auf die „Fragmentation“ des primär erzeugten Quark-Antiquark-Paars zurückführt: Wenn diese Primärteilchen auseinander laufen und ihr Gluonband stark genug spannen, reißt dieses und lagert an den freien Enden ein aus der Spannenergie erzeugtes neues Quarkpaar an. Man misst das Verhältnis der Häufigkeit solcher Hadronenakte zur Häufigkeit von Myonpaarerzeugungen und stellt fest: Immer, wenn gewisse „Resonanzenergien“ deutlich überschritten sind, stabilisiert sich dieses Verhältnis, z. B. auf den Wert 2 zwischen 1 und 3 GeV, den Wert 4 oberhalb von 10 GeV. Um 1 GeV bzw. 3,1 GeV bzw. 9,1 GeV liegen ja die Peaks, die der von dort ab möglichen Erzeugung der η - und K-Resonanzen bzw. des Ψ/J bzw. des Y entsprechen. Die Zahlen 2 und 4 sind genau die Summen aller Ladungsquadrate aller bis dahin erzeugbaren Quarks, und zwar muss jedes dreimal gerechnet werden: Quarks der drei Farben sind tatsächlich statistisch als verschiedene Teilchen zu zählen. Sie können das in Aufgabe 18.4.28 selbst nachrechnen. Diese Messungen bestätigen also auf einen Schlag das ursprüngliche Dreiquarkmodell mit den zunächst rein hypothetischen drittelzahligen

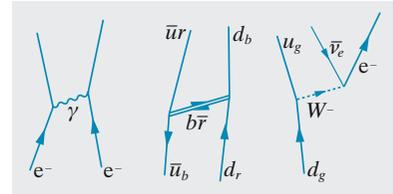


Abb. 18.47. *Elektromagnetische Wechselwirkung:* Zwei Elektronen stoßen sich ab, indem sie ein Photon austauschen, wobei sie Energie und Impuls, aber nicht ihre Identität ändern. *Starke Wechselwirkung:* Zwei Quarks ziehen sich an, indem sie ein Gluon austauschen, wobei sie außer Energie und Impuls auch ihre Farbe ändern. *Schwache Wechselwirkung:* Ein Quark ändert seinen Flavor, d. h. auch seine Ladung und sendet ein W -Boson aus, das sich bald in ein Lepton und ein Neutrino verwandelt

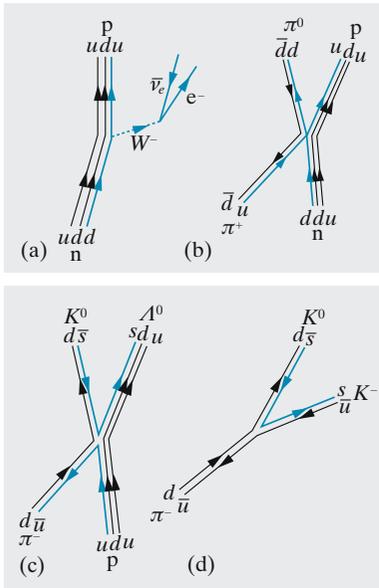


Abb. 18.48a–d. Vier Elementarprozesse im Quark-Bild. (a) β^- -Zerfall (schwache Wechselwirkung). (b) Die $\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$ -Umladung aus Abb. 18.38; ein u - und ein d -Quark werden ausgetauscht. (c) Der $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$ -Prozess von Abb. 18.39; ein $u\bar{u}$ -Paar vernichtet sich, und dafür entsteht unter Mitwirkung der Stoßenergie ein $s\bar{s}$ -Paar. (d) Ein sehr energiereiches Pion kann in seine Quarks zerfallen. Ein Teil der Energie verwandelt sich aber sofort in ein Quark-Antiquark-Paar, das die beiden Mesonen wieder komplettiert

elektrischen Ladungen, die Existenz dreier Farbladungen, die zusätzlichen Quarks c und b und damit die Deutung der Ψ/J - und der Y -Resonanzen. Bis fast 40 GeV findet sich aber keine Stufe, die noch schwereren Quarks, speziell dem t entspräche.

Wir haben schon angedeutet, wie die „Grand Unification“ versucht, starke und elektroschwache Kraft unter einen Hut zu bringen. Noch ehrgeiziger ist die **Quantengeometrodynamik** (QGD), die auch die Gravitation mit einbeziehen, ja sogar die übrigen Wechselwirkungen und die ganze Struktur der Mikrowelt aus der Gravitation hervorzulassen will. Dies könnte durch eine Verschmelzung von Quantentheorie, spezieller und allgemeiner Relativität gelingen, während Feldtheorien wie die QED und QCD nur die spezielle Relativität berücksichtigen. Zentralbegriff dieser zunächst rein spekulativen Ansätze ist die **Planck-Länge** $l_P = \sqrt{Gh/c^3} \approx 10^{-35}$ m, die einzige Länge, die sich aus den Grundkonstanten der Quantentheorie (h), der speziellen (c) und der allgemeinen Relativität (G) aufbauen lässt, ohne Zuhilfenahme der Eigenschaften von Teilchen (m oder e), die man ja gerade erst erklären will. Man nimmt an, in Abständen von der Größenordnung l_P sei die Geometrie der Raumzeit nicht mehr klar definiert und „glatt“, sondern durch **Quantenfluktuationen** wild zerzaust. So sieht ja auch die Meeresoberfläche nur aus großer Höhe glatt aus; wenn man sehr nahe kommt, löst sie sich in ein Gewirr von Spritzern, Schaumblasen usw. auf, die sich nur statistisch, nicht in den Einzelheiten vorhersagen lassen. Die QGD versucht nun die Elementarteilchen als typische Strukturen dieses „Schaums“ zu deuten. Einer experimentellen Prüfung dieser noch recht unklaren Voraussagen wird man sich vielleicht nähern, wenn man den Zerfall des Protons entdecken sollte. Die ebenfalls noch spekulative Wechselwirkung über die X -Teilchen der „Grand Unification“, die diesen Zerfall bewirken soll, würde sich ja in Bereichen abspielen, die nicht mehr viel größer sind als die Planck-Länge.

Man kennt inzwischen sechs Arten Quarks, jedes in drei möglichen Farben und jedes davon als Teilchen oder Antiteilchen. Außerdem gibt es sechs Arten Leptonen: Zum Elektron und zum Myon mit ihren jeweiligen Neutrinos sind noch ein überschweres Elektron, das τ -Lepton und sein Neutrino ν_τ gekommen. Antiteilchen dazu gibt es natürlich auch, darunter das wichtige Positron. Zusammen sind das 48 Teilchen, abgesehen von den Trägern der Wechselwirkung: Photon, Gluonen, W^+ , W^- , Z . Es scheint, als habe sich das Quarkmodell mit der gleichen Krankheit infiziert, die es heilen sollte, einer Wucherung der Anzahl verschiedener Teilchen. Dabei gibt es unter den Quarks und Leptonen ebenfalls eine Systematik. Wenn man den Leptonen eine besondere Farbe zuordnet, ergeben sich sechs Gruppen (flavors), die in drei „Generationen“ zu je zwei Teilchen jeder der vier Farben zerfallen. Jedes Mal kann noch ein Teilchen oder Antiteilchen vorliegen (Tabelle 18.9).

18.4.10 Symmetrien, Invarianzen, Erhaltungssätze

1912 bewies *Emmy Noether*, dass man jeden **Erhaltungssatz** auch als eine prinzipielle **Symmetrie** der Welt, d. h. eine **Invarianz** der Naturgesetze gegenüber gewissen Transformationen auffassen kann. Niemand bezweifelt z. B., dass ein an sich möglicher Prozess, etwa eine Wechselwirkung zweier Teilchen, im Prinzip überall im Raum vorkommen könnte, falls sich die Teilchen zufällig, d. h. entsprechend den Anfangsbedingungen dort befinden. Der Raum ist homogen. Das heißt aber, dass eine Translation des Bezugssystems auf das Verhalten der Teilchen, die bei r_1 und r_2 sein mögen, keinen Einfluss haben darf, dass folglich die Kraft zwischen ihnen nur von ihrem Abstand $r_1 - r_2$ abhängen darf (nicht von r_1 und r_2 einzeln). Falls diese Kraft durch ein Feld vermittelt wird, das sich

Tabelle 18.9.

Generation	1		2		3	
Flavor	1	2	3	4	5	6
Color	r					
	g	u	d	s	c	b
	t					
	b					
Lepton	e	ν_e	μ	ν_μ	τ	ν_τ

durch eine **Lagrange-Dichte** beschreiben lässt, ergibt sich daraus, dass alle Kräfte in diesem Feld dem Reaktionsprinzip, also dem Impulssatz genügen (man beachte: Das newtonsche Reaktionsaxiom wird hier nicht vorausgesetzt, sondern „abgeleitet“). Der Impulssatz ist also äquivalent mit der prinzipiellen Homogenität der Welt, d. h. der Invarianz der Naturgesetze gegen Raumtranslationen. Im einzelnen ist die Welt zum Glück von Ort zu Ort verschieden, aber das betrifft nicht die Naturgesetze, sondern die Anfangsbedingungen. Jeder Symmetrie oder Invarianz entspricht ein Erhaltungssatz. Manche gelten allerdings nicht universell, sondern nur gegenüber gewissen Wechselwirkungen (Tabelle 18.7).

Eine wichtige Symmetrieeigenschaft eines Systems ist das Vorhandensein oder Fehlen eines Symmetriezentrums. Ein System mit Symmetriezentrum ändert sich nicht, wenn man eine **Inversion** oder **Raumspiegelung** ausführt, d. h. die Vorzeichen aller Koordinaten umkehrt (das Symmetriezentrum soll dabei im Koordinatenursprung liegen). Im Fall atomarer Systeme gibt es nur eine Alternative zu dieser Invarianz gegen Inversion: Die das System kennzeichnenden Größen kehren bei der Inversion ihr Vorzeichen um. Im ersten Fall schreibt man dem System positive, im zweiten negative **Parität** zu. Man beachte, dass bei der Inversion alle Koordinaten umgekehrt werden, nicht nur eine, wie bei der üblichen Spiegelung an einer Spiegelebene. Eine Rechtsschraube wird durch Inversion zu einer Linksschraube: Hinsichtlich des Windungssinns (der **Helizität**) hat sie negative Parität. Die Hand hat ebenfalls negative Parität, wenn man rechte und linke Hand durch die „Händigkeit“ (**Chiralität**) $+1$ bzw. -1 kennzeichnet. Eine skalare Größe hat positive Parität; ein (polarer) Vektor wie Ortsvektor oder Impuls ändert seinen Richtungssinn (negative Parität); ein axialer Vektor wie der Drehimpuls $m \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ändert sich nicht (\mathbf{r} und \mathbf{v} ändern beide ihr Vorzeichen): Axiale Vektoren haben positive Parität.

Manche Vorgänge haben eine innere Helizität oder Chiralität, speziell, wenn sie durch eine Kombination eines axialen und eines polaren Vektors (z. B. Spinrichtung und Flugrichtung) gekennzeichnet sind. Man sollte meinen, dass diese Vorgänge in den beiden quantenmechanisch möglichen Ausgaben (Spin parallel oder antiparallel zur Flugrichtung) mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen können. Das ist nicht immer der Fall, z. B. nicht beim β^- -Zerfall des ^{60}Co -Kerns. Man bringt diese Kerne in ein so starkes Magnetfeld \mathbf{H} , dass fast alle Kernspins in dessen Richtung weisen. Dann beobachtet man, dass die Elektronen stets in der zu \mathbf{H} entgegengesetzten Richtung emittiert werden. Der „gespiegelte“ Prozess, bei dem der Elektronenimpuls, nicht aber der Kernspin entgegengesetzte Richtung hätte wie im beschriebenen Prozess, kommt nicht vor. Die Gesetze des β^- -Zerfalls (schwache Wechselwirkung) sind also gegen eine Inversion nicht invariant.

Man erklärt diese **Paritätsverletzungen** dadurch, dass das Antineutrino eine Helizität hat (*Lee und Yang* (Nobelpreis 1957)): Sein Spin ist immer parallel zu seiner Flugrichtung. Das Neutrino hat die entgegengesetzte Helizität (Spin und Impuls antiparallel). Ganz allgemein scheinen Materie und Antimaterie Inversions-Spiegelbilder voneinander zu sein. Das würde heißen, dass zu einem möglichen Vorgang sein „Spiegelbild“ zwar nicht immer möglich ist, wohl aber der Vorgang, den man

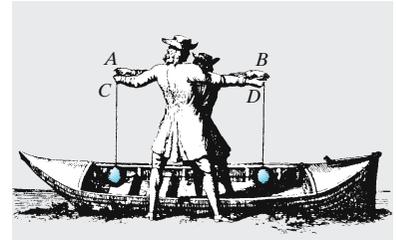


Abb. 18.49. Christiaan Huygens erkannte schon 1703, dass der Impulssatz aus der Invarianz der Naturgesetze gegen den Übergang in ein geradlinig-gleichförmig bewegten Bezugssystem folgt. Der Mann am Ufer lässt zwei gleich schwere elastische Kugeln mit verschiedenen Geschwindigkeiten aufeinander prallen. Der Mann im Boot fährt so schnell, dass für ihn beide Kugeln entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten haben. Dann folgt das Ergebnis des Stoßes für ihn aus der einfachsten Symmetriebetrachtung und braucht nur noch ins (beliebige) Bezugssystem des Ufers zurücktransformiert zu werden. (Aus Huygens' „Tractatus de motu corporum ex percussione“, Leiden 1703; bei Huygens sind die Rollen der Beobachter vertauscht)

Tabelle 18.10. Korrespondenz zwischen Erhaltungssätzen, Symmetrien, Invarianzen

Erhaltung von ...	Symmetrie	Invarianz gegenüber ...	Gültigkeitsbereich
Energie (einschl. $m_0 c^2$)	Homogenität der Zeit	Zeittranslation	Universell
Impuls	Homogenität des Raumes	Raumtranslation	
Drehimpuls (Spin)	Isotropie des Raumes	Raumdrehung	
Ladung	–	Eichtransformation des Potentials	
Baryonzahl	–	–	
Leptonzahl	–	–	
–	Isotropie der Zeit	Zeitumkehr	
–	CPT-Invarianz	CPT-Transformation (Ladungskonjugation + Inversion + Zeitumkehr)	
Parität	Zentralsymmetrie	Inversion	
–	CP-Invarianz	CP-Transformation (Ladungskonjugation + Inversion)	
Isospin I_3	Isotropie des Isospinraumes	Drehung im Isospinraum	
Hyperladung, Strangeness	–	Drehung um z-Achse im Isospinraum	Starke Prozesse
Isospinbetrag I , Multiplizität	–	–	–

erhält, wenn man gleich zeitig Teilchen durch Antiteilchen ersetzt (**CP-Invarianz**; C: **charge conjugation**, Ladungsumkehr; P: Inversion). Ein Anti- ^{60}Co -Kern, der Positronen emittieren würde, täte dies parallel zu seiner Spinrichtung. Beobachtungen am Kaon-Zerfall deuten allerdings an, dass die schwache Wechselwirkung auch diese kombinierte Symmetrie verletzt (der Zerfall $K_L^0 \rightarrow e^+ + \nu_e + \pi^-$ soll knapp 1% häufiger sein als sein Gegenstück), und dass man sie durch gleichzeitige Zeitumkehr zur **CTP-Invarianz** ergänzen muss, damit sie immer respektiert wird. Dass die Welt so viel mehr Materie als Antimaterie enthält, führen manche auch auf eine **CP-Verletzung** zurück: X-Teilchen, die es bis 10^{-32} s nach dem Urknall gab, sollen etwas häufiger in Quarks q als in Antiquarks \bar{q} zerfallen sein, und die Überlebenden der späteren $q\bar{q}$ -Vernichtungsschlacht sollen unsere Welt bilden.

Phänomene und Felder mögen eine innere Symmetrie haben, aber manchmal ist diese gebrochen. Eine solche **Symmetriebrechung**, vorgeschlagen von *P. Higgs*, war für *A. Salam* (Nobelpreis 1979) und *St. Weinberg* (Nobelpreis 1979) der Schlüssel zur elektroschwachen Theorie: Elektromagnetische und schwache Wechselwirkung sollen bei Teilchenenergien oberhalb von etwa 100 GeV gleich stark werden, die Überträger (Photon, W und Z) werden dann symmetrisch. Das erfordert allerdings die Existenz von einem oder mehreren bisher trotz intensiver Suche noch nicht nachgewiesenen **Higgs-Teilchen**.

Die nächste Stufe, die die **grand unified theories (GUT)** zu überbrücken suchen, ist ungeheuer groß: Um 10^{15} GeV sollen auch das elektroschwache und das starke Feld verschmelzen. Das ist die Energie

der X-Bosonen, die Übergänge zwischen Quarks und Leptonen vermitteln sollen, wie den auch eifrig gesuchten Zerfall des Protons in mindestens 10^{30} Jahren.

Nachdem *Einstein* 1916 die Gravitation „geometrisiert“, d. h. auf die Krümmung der Raumzeit zurückgeführt hatte, versuchte er auf ähnliche Weise auch das elektromagnetische Feld zu behandeln. Bis an sein Lebensende 1954 gelang ihm das nicht. Aber um dieselbe Zeit meinten *Th. Kaluza* und *O. Klein* eine Lösung gefunden zu haben. Sie brauchten eine Extra-Dimension zu den vier der Raumzeit, von der man nichts merkt, weil sie sich in sehr kleinen Bereichen „aufrollt“, und gerade dieses Aufrollen soll, von der normalen Raumzeit aus betrachtet, den Elektromagnetismus darstellen. Das war die eine Wurzel der Superstring-Idee.

1970 versuchte *Y. Nambu* eine Theorie der starken Wechselwirkung aufzustellen. Er betrachtete die Teilchen nicht als punkt- sondern als fadenförmig, als **strings**. Seine Idee wurde bald durch die Erfolge der QCD überholt, lebte aber wieder auf, als man nach einer **TOE**, einer **theory of everything** suchte, die alle vier Kräfte einheitlich umfasst. *J. Scherk* führte dazu 1976 den Begriff **Supersymmetrie** ein, die zwischen den Fermionen (Quarks und Leptonen) und den Bosonen (den Feldquanten Photon, W, Z, Gluonen, Graviton und Higgs-Teilchen) herrschen soll. Der Preis für diese Vereinheitlichung ist eine Verdopplung der Teilchensorten: Es müsste zu allen Fermionen bosonische Gegenstücke geben, z. B. **Squarks**, und umgekehrt, z. B. **Photinos**.

Dass **Superstrings**, die beide Ideen vereinen, interessant werden könnten, stellten *M. Green* und *J. Schwarz* 1984 fest: In einem zehndimensionalen Raum, wo sich die sechs Extra-Dimensionen zusammenrollen, sodass die Strings als Punktteilchen von der Größe der **Planck-Länge** erscheinen, treten die für Theorien der Mikrowelt üblichen Probleme des Unendlichwerdens usw. nicht mehr auf, und das Verhalten aller Teilchen wird automatisch quantentheoretisch beschrieben. Die große Symmetriegruppe der Superstrings enthält alle für QCD und elektroschwache Theorie maßgebenden Untergruppen. Konkrete Voraussagen der Massen, Kopplungskonstanten usw. sind allerdings z. Z. noch nicht möglich.

18.4.11 Magnetische Monopole

Theoretische Physiker lieben die Symmetrie. Warum hat das elektrische Feld Quellen, nämlich Ladungen, das magnetische nicht? Warum gibt es elektrische Monopolfelder (die Felder von Punktladungen), dagegen im magnetischen Fall nur die Dipolfelder elektrischer Kreisströme oder die Ringfelder um elektrische Ströme oder „Verschiebungsströme“? 1931 zeigte *Dirac*, dass sich an unserem gesicherten Beobachtungswissen nichts ändert, wenn man die Existenz magnetischer Ladungen oder **magnetischer Monopole** annimmt, sofern sie mit so großen Massen verbunden sind, dass sie in den bisher bekannten Prozessen nicht entstehen. Die Maxwell-Gleichungen wären dann in völlig symmetrischer Weise durch magnetische Quaddichten und Stromdichten ϱ_m bzw. j_m zu ergänzen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{j} ; & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{j}_m \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \varrho ; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= \varrho_m . \end{aligned}$$

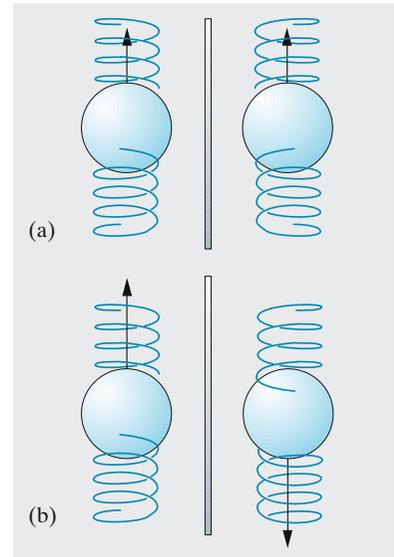


Abb. 18.50a,b. Normale Spiegelung (a) führt eine Links- in eine Rechtsschraube über, bei räumlicher Spiegelung ((b), Vorzeichenänderung aller Koordinaten) bleibt der Windungssinn erhalten, allgemein der Richtungssinn axialer Vektoren wie Drehimpulse, Kernspins usw.; polare Vektoren wie der Impuls eines emittierten Elektrons werden umgedreht. Beim β -Zerfall z. B. von ^{60}Co kommt nur eine der beiden Situationen in (b) vor

Die Bedingung sehr großer Massen für die Monopole wird durch die Quantenfeldtheorie von selbst erfüllt. Die Polstärke ist gequantelt wie die elektrische Ladung; elektrische und magnetische Elementarladung e und p hängen zusammen wie:

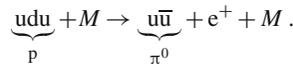
$$pe = 4\pi \frac{\hbar}{\mu_0} .$$

Das können Sie sich in Aufgabe 18.4.29 klar machen. Zwei magnetische Monopole ziehen einander daher viel stärker an als zwei elektrische Ladungen im gleichen Abstand:

$$\frac{p^2 \mu_0 \epsilon_0}{e^2} = \frac{16\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2}{\epsilon_0 \mu_0 e^4} = \frac{1}{\alpha^2} \approx 20\,000 . \tag{18.29}$$

Zwei Monopole im Abstand $l_0 \approx 10^{-15}$ m hätten also nicht 1 MeV potentielle Energie wie zwei Elementarladungen, sondern etwa 20 GeV. Beschleuniger beginnen in dieses Gebiet vorzustößen, die kosmische Strahlung wäre schon lange energetisch imstande, Monopole zu machen. Bisher hat man trotz jahrzehntelanger Suche noch keinen sicher nachgewiesen.

Sind Monopole „zu etwas gut“, falls es sie gibt? Nach einigen theoretischen Ansätzen würden sie den hypothetischen Zerfall des Protons katalytisch beschleunigen und so vielleicht der Schlüssel zu einer neuen Energiequelle werden:



18.5 Kosmische Strahlung

Wäre die **kosmische Strahlung** nicht noch durchdringender als Kern- γ -Strahlung, so fände man sie am Erdboden gar nicht. Ihren Namen erhielt sie, als man feststellte, dass ihre Intensität mit der Höhe zunimmt (*Hess*, 1910). Selbst in 4 000 m Meerestiefe ist sie noch nachweisbar. Die kosmischen Teilchen haben zum Teil Energien, wie man sie im Laboratorium noch nicht herstellen kann. Ihre Untersuchung hat Aufschluss über hochenergetische Wechselwirkungen geliefert; viele neue Elementarteilchen wurden in der kosmischen Strahlung zuerst nachgewiesen.

18.5.1 Ursprung und Nachweis

Die Gesamtintensität der kosmischen Strahlung ist gering. Auf Meeresniveau tritt im Mittel durch den Quadratzentimeter nur etwa ein Teilchen pro Minute. Zum Nachweis sind daher besonders Elektronenzählrohr, Nebelkammer und Kernspurplatte geeignet. Die kosmische Strahlung auf Meeresniveau ist eine **Sekundärstrahlung**. Die aus dem Weltraum einfallende **Primärstrahlung** (85% Protonen, 14% α -Teilchen, einige schwerere Kerne zwischen Li und Fe) setzt sich in der Atmosphäre schon oberhalb von 20 km vollständig in andere Teilchen um. Die schweren Primärkerne haben eine ähnliche Häufigkeitsverteilung wie die Elemente in der Sternmaterie. Nur Li, Be, B sind häufiger; sie werden als Bruchstücke schwerer Kerne aufgefasst, die mit interstellarer Materie zusammengestoßen sind.

Geladene Teilchen, die die Erdatmosphäre von außen erreichen, müssen das viel weiter ausgedehnte Magnetfeld der Erde durchquert haben, ohne in den Raum zurückgelenkt zu werden. Sie müssen eine Mindestener-

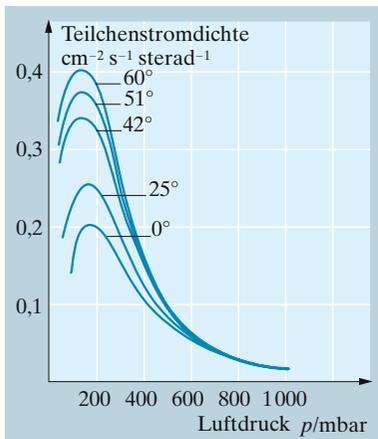


Abb. 18.51. Stromdichte der kosmischen Teilchen in Abhängigkeit vom Luftdruck, also der Höhe über dem Meeresspiegel, für verschiedene geographische Breiten. Der Anstieg von 0 bis etwa 150 mbar beruht auf dem Aufbau der Sekundärstrahlung, der Abfall bis Meereshöhe auf der Absorption in der Atmosphäre. In höheren Breiten kann das Magnetfeld der Erde die niederenergetischen Teilchen weniger stark zurückhalten

gie haben, die von ihrer Masse und von der Neigung ihrer Bahn gegen die magnetische Achse abhängt. Nur an den erdmagnetischen Polen können in Achsenrichtung Teilchen beliebiger Energie eintreten. Protonen, die in der magnetischen Äquatorebene einfallen, müssen mindestens einige GeV besitzen, um das Feld zu durchstoßen. Dementsprechend ist die Intensität der kosmischen Strahlung in niederen geomagnetischen Breiten geringer (Abb. 18.51). Der **Breiteneffekt** beweist die elektrische Ladung und damit den überwiegend korpuskularen Charakter der Primärstrahlung.

Von der unterschiedlichen magnetischen Ablenkung positiver und negativer geladener Teilchen hängt es ab, ob aus westlichem oder östlichem Himmel mehr Strahlung einfällt. Der **Ost-West-Effekt** besteht in einem geringen Überschuss der Einstrahlung aus westlicher Richtung und beweist die positive Ladung der Primärstrahlung.

Das **Energiespektrum der Primärstrahlung** ist durch

$$n(E) = \frac{\text{const}}{E^\gamma}$$

darstellbar, wo $n(E)$ die Anzahl der Teilchen ist, deren Energie größer als E ist; γ wächst mit zunehmender Energie, im Bereich um 10^{10} eV ist $\gamma \approx 1$, um 10^{15} eV $\gamma \approx 2$. Für E kommen Werte bis zu 10^{21} eV vor, der Mittelwert liegt zwischen 10^9 und 10^{10} eV. Dieser Bereich wird heute durch die großen Teilchenbeschleunigungsmaschinen (Abschn. 18.3.3) gerade erreicht.

Über den **Ursprung der kosmischen Strahlung** gibt es fast so viele Theorien wie Autoren. Von den Sonnenflecken über Novae und Supernovae bis zu den Pulsars und schwarzen Löchern kommen alle mit einem zeitlich variablen Magnetfeld versehenen Objekte als **kosmische Beta-trons** in Frage. Wir erwähnen nur die elegante Theorie von *Enrico Fermi*: Man weiß ja, dass kosmische Gas- und Staubwolken meist Magnetfelder sehr geringer Stärke ($B \approx 10^{-10}$ T), aber dafür riesiger Ausdehnung enthalten. Die Ablenkung eines geladenen Teilchens durch eine solche Wolke ist als Stoß aufzufassen. Stöße zwischen ungeordnet fliegenden Objekten führen schließlich zur Gleichverteilung der Energie, wie die Statistik lehrt. Selbst in den langen verfügbaren Zeiten hat zwar wohl noch kein Teilchen die riesige mittlere Energie erreicht, die eine solche Wolke trotz winziger Dichte hat. Thermisches Gleichgewicht herrscht längst noch nicht, aber eben die allmähliche Annäherung an dieses Gleichgewicht liefert ein vernünftiges Energiespektrum für die kosmischen Teilchen.

18.5.2 Wechselwirkung mit Materie

Wenn man einen Geiger-Zähler bewusst keiner Strahlungsquelle aussetzt, tickt er trotzdem etwa zwanzigmal in der Minute. Diese **Hintergrundstrahlung** hat drei Quellen: Die **kosmische Strahlung**, die Radioaktivität der Luft, beruhend auf dem **Radon** aus natürlich radioaktiven Zerfallsreihen, und die Strahlung radioaktiver Elemente in Erdboden, Gestein, Baumaterialien. Die beiden letzten Anteile nehmen ab, wenn man im Flugzeug aufsteigt, der erste nimmt zu. Selbst in unmittelbarer Nähe eines Kernreaktors ist die Zusatzstrahlung viel kleiner als in einer Küche mit

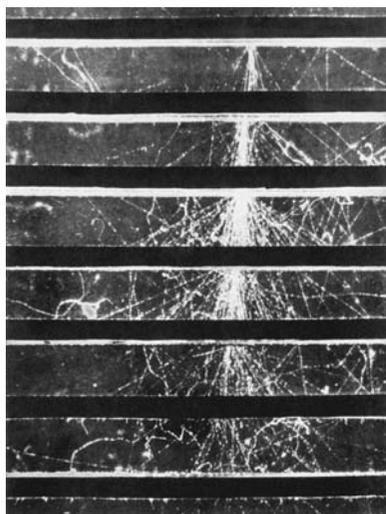


Abb. 18.52. In Bleiplatten innerhalb einer Nebelkammer ausgelöster Schauer. Dicke der Bleiplatten je 1,3 cm. Der Schauer wird durch ein energiereiches Photon von etwa $4 \cdot 10^9$ eV ausgelöst. (Aufnahme von C. Y. Chao, *Cloud Chamber Photographs of the Cosmic Radiation*, Pergamon Press Ltd., London 1952)

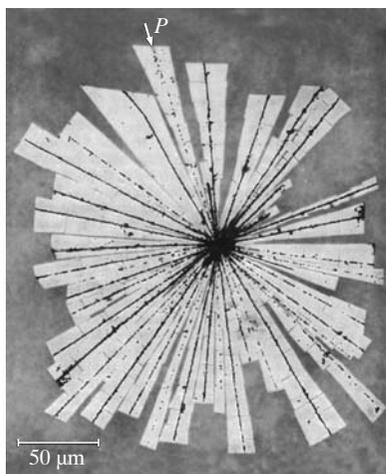


Abb. 18.53. **Kernverdampfung**, „Stern“ in einer Kernphotoplatte. (Aus W. Heisenberg: *Kosmische Strahlung* (Springer, Berlin 1943))

schlecht gewählten Kacheln, deren Braun- und Rottöne oft auf Uransalzen beruhen.

Ein paarmal in der Minute tickt der Zähler mehrmals in dichter Folge. Die **Poisson-Verteilung** zeigt: Dies kann kein Zufall sein, diese Impulse müssen eine gemeinsame Ursache haben. Sie stammen aus einem **kosmischen Schauer**.

Ein sehr hartes Photon aus einem Wechselwirkungsakt eines Primärteilchens erzeugt durch Paarbildung und Compton-Effekt schnelle Elektronen, die ihre Energie zumeist wieder in Photonen umsetzen usw. Bis die Photonenenergie unter die Paarbildungsgrenze abgeklungen ist, bildet sich so ein ganzer *Schauer (Kaskade, Garbe)* von Elektronenpaaren. Abbildung 16.61 zeigt einen Schauer in einer Nebelkammer; die eingebauten Bleiplatten drängen den Prozess, der sich in der Atmosphäre über hunderte von Metern ausdehnt, auf den Raum der Kammer zusammen. Die freie Weglänge eines harten Photons (Strahlungslänge des γ -Quants) entspricht etwa 40 g/cm^2 Luft, die ganze Atmosphärendicke hat etwa 25 Strahlungslängen. Daher entstehen Schauer meist in großer Höhe, und nur die verlangsamteten Elektronen und Positronen kommen an der Erdoberfläche über mehrere hundert m^2 verstreut, aber gleichzeitig (koinzidierend) an. Der gesamte Energieumsatz eines Schauers liegt zwischen 10^8 und 10^{20} eV. Wegen seiner hohen Energie hat das Positron meist keine Zeit, vernichtet zu werden (Abnahme des Wechselwirkungsquerschnittes mit W). Daher zeigen Nebelkammeraufnahmen im Magnetfeld fast ebenso viele Positronen wie Elektronen. Das **Positron** wurde 1932 von *Anderson* in der kosmischen Strahlung entdeckt.

Die Sekundärstrahlung enthält eine **harte Komponente** aus **Myonen**. Wegen ihrer großen Masse verlieren sie kaum Energie durch Bremsstrahlung wie die Elektronen (die Intensität der Bremsstrahlung ist proportional zu m^{-2}), sondern nur durch Ionisierung und Anregung von Atomen, die bei so hohen Energien ebenfalls schwach sind. Daher sind Myonen viel durchdringender als Elektronen gleicher Energie.

Stöße von Primärteilchen mit den Kernen von N und O in großer Höhe spalten Bruchstücke (Protonen, Neutronen, α -Teilchen) hoher Energie unter Impulserhaltung ab. Diese Bruchstücke bilden die Nukleonkomponente der Sekundärstrahlung. Man findet solche Prozesse auf Kernspurplatten, die man mit Ballons oder Raketen in Höhen von mehr als 30 km sendet. Bei kleineren Energien hat die Stoßenergie Zeit, sich auf alle Nukleonen des Kerns zu übertragen, dieser wird „aufgeheizt“ und „verdampft“ (Abb. 18.53). Solche **Sterne** findet man auf Kernspurplatten auch in geringerer Höhe, allerdings mit stark abnehmender Häufigkeit.

18.5.3 Strahlungsgürtel

Der Aufstieg von Explorer I am 1.2.1958 änderte mit einem Schlag alle Projekte bemannten Raumfluges durch die Entdeckung einer hohen Intensität ionisierender Strahlung oberhalb von etwa 1 000 km Höhe. Später fand man noch ein bis zwei weiter außen liegende **Strahlungsgürtel**. Sie reichen insgesamt bis in etwa 25 000 km Höhe und umgeben die Erde ringförmig symmetrisch zu der *magnetischen* Achse mit dem Maximum am

magnetischen Äquator und Löchern im Polbereich, die den Durchflug gestatten. Die Dosisleistung in den Strahlungsgürteln kann bis zu 50 R/h gehen. Wegen ihrer hohen Energie ist die Strahlung besonders im inneren Gürtel äußerst durchdringend.

Die Existenz und die Stabilität der Strahlungsgürtel versteht man am besten nach dem Prinzip der **magnetischen Flasche**. So nennt man ein Magnetfeld, das in der Mitte relativ schwach ist, aber nach beiden Seiten in Richtung der Feldlinien stärker wird. Die Feldlinien konvergieren gegen die beiden Enden der Flasche. Ein Dipolfeld wie das der Erde hat diese Eigenschaften: Am Äquator ist es relativ schwach; folgt man aber in Meridianrichtung den Feldlinien, so kommt man in Gebiete immer höheren Feldes, je mehr man sich den Polen nähert. Dies ist auch noch in 1 000 km Höhe der Fall, wo die freie Weglänge, zumindest für neutrale Teilchen, auf Werte angestiegen ist, die größer sind als der Erdradius. Das Magnetfeld ist hier kaum viel kleiner als am Erdboden: immer noch ca. $3 \cdot 10^{-5}$ T am Äquator und bis zu $6 \cdot 10^{-5}$ T gegen die Pole zu.

In diesen Höhen, wo sich geladene Teilchen also praktisch frei bewegen, werden sie durch die Lorentz-Kraft senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung und zum Magnetfeld abgelenkt. Ein solches Teilchen der Masse m und der Ladung e möge so einfliegen, dass seine Geschwindigkeit eine Komponente v_{\parallel} parallel und eine Komponente v_{\perp} senkrecht zum Feld hat. Nur die senkrechte Komponente trägt zur Lorentz-Kraft bei und wird durch diese verändert; die parallele Bewegung wird ruhig fortgesetzt, jedenfalls solange das Feld homogen ist (also die Feldlinien parallel sind). Die senkrechte Bewegung gestaltet sich zur Kreisbewegung mit dem Radius

$$r = \frac{mv^2}{eBv_{\perp}}.$$

Im ganzen beschreibt also das Teilchen eine je nach seiner Einschussrichtung mehr oder weniger steile Spirale um eine Feldlinie und folgt dieser auch, wenn sie sich etwas krümmt. Gegen die Pole zu wird aber die Inhomogenität merklich, das Teilchen muss in einen Trichter aus Feldlinien hineinlaufen, und es entsteht eine Lorentz-Kraftkomponente

$$F_{\text{rück}} = eBv_{\perp} \sin \vartheta \approx eBv\vartheta,$$

die das Teilchen in das Gebiet geringerer Feldstärke treibt. Wie Abb. 18.54 zeigt, ist in Polnähe der Winkel ϑ schätzungsweise gleich dem Verhältnis von Bahnradius r zum Abstand a vom Konvergenzpunkt, also dem Abstand vom Erdmittelpunkt. Selbst ein Teilchen mit einer kräftigen anfänglich polwärts gerichteten v -Komponente v_{\parallel} wird gegen diese rücktreibende Kraft nur eine Zeit

$$\tau = \frac{mv_{\parallel}}{F_{\text{rück}}} \approx \frac{v_{\parallel} a}{v^2}$$

lang ankämpfen können, bis diese Komponente aufgezehrt ist. Das Teilchen wird dann, bis zum Äquator hin beschleunigt, gegen den anderen Pol anlaufen, wo es aber auch nicht weiter vordringt, usw. Das Teilchen ist in der magnetischen Flasche gefangen und pendelt darin mit der Periode

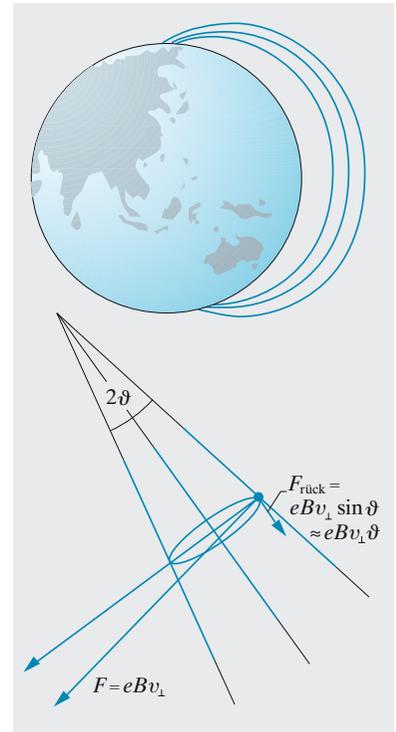


Abb. 18.54. *Oben:* Geladene Teilchen in der „magnetischen Flasche“ des Erdmagnetfeldes. *Unten:* Zustandekommen der rücktreibenden Kraft in Gebieten, wo die Feldlinien konvergieren

$$T \approx 4\tau \approx 4 \frac{v_{\parallel} R_{\text{Erde}} \pi / 2}{v^2} \approx 2\pi \frac{R_{\text{Erde}}}{v},$$

die zwischen 0,1 und 1 s liegt und bei gegebener Geschwindigkeit nicht von Masse und Ladung des Teilchens, wohl aber von seiner Einschussrichtung abhängt. Je parallel ein Teilchen zum Feld einfliegt, desto größer ist v_{\parallel} ; außerdem kommt in gegebener Zeit ein Teilchen mit großem v_{\parallel} natürlich weiter voran, also näher an den Pol und damit näher an die Erdoberfläche heran. Dort tritt es aber in die Atmosphäre, zunächst die **Exosphäre** ein, in der die Dichte bereits ausreicht, um das geladene Teilchen zu bremsen und zu absorbieren. Gegen solche Teilchen, die fast in ihrer Achsrichtung fliegen, ist die Flasche also undicht. Die wenn auch schwache Wechselwirkung unter den eingefangenen Teilchen wirkt gelegentlich einige davon in diese fatale achsennahe Flugrichtung; allerdings ist die Relaxationszeit für die Geschwindigkeitsverteilung und damit die Lebensdauer des Flascheninhaltes sehr groß. Ein gewisser Teilchenschub ist aber offenbar notwendig. Er kommt aus dem Weltall (kosmische und solare Primärteilchen), z. T. aber auch von der Erde, die kosmische Teilchen zurückstret.

Besonders interessant ist die Deutungsgeschichte des inneren Gürtels, des eigentlichen **van Allen-Gürtels**. Nur er enthält neben Elektronen, die überall vorhanden sind, auch wesentliche Mengen Protonen. Das Energiespektrum der Elektronen bricht ziemlich scharf um 0,78 MeV ab, die Protonenenergie geht bis 150 MeV und höher. So scharf abbrechende Elektronenenergien erwecken immer den Verdacht, dass man Produkte eines β -Zerfalls vor sich hat. Die Grenzenergie gestattet die möglichen Paarungen von Mutter- und Tochterkern einzuengen (deren Massendifferenz muss gleich der Grenzenergie sein, bis auf die Ruhenergie des Elektrons selbst). Von allen in Frage kommenden β -Strahlern passt nur das Neutron: $n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}$. Kosmische Primärneutronen kommen aber nicht auf der Erde an, sie sind viel zu kurzlebig (15 min). Also muss es sich um Sekundärprodukte aus der Exosphäre handeln, die als so genannte **Albedo-Neutronen** ins Weltall zurückgestreut worden sind. Diejenigen unter ihnen, die noch nahe der Erde zerfallen, bilden Protonen, die – unabhängig von der Neutronenenergie, so lange diese noch nicht hochrelativistisch ist – immer die Zerfallsenergie minus der Neutrinoenergie haben. Tatsächlich stimmt die Energieverteilung der Protonen im van Allen-Gürtel sehr gut mit der der Albedo-Neutronen überein. Der hohe Gehalt an sehr schnellen Protonen macht den inneren Gürtel auch so gefährlich; sie dringen ohne weiteres durch mehrere mm Blei.



Marie Skłodowska Curie (1876–1934) und Pierre Curie (1859–1906) in ihrem Labor an der Sorbonne. Marie Curie entdeckte zusammen mit ihrem Ehemann 1898 die Elemente Polonium und Radium und erhielt 1911 ihren zweiten Nobelpreis

▲ Ausblick

Was wissen wir heute (1999), was noch nicht? Aus dem Zerfallsmechanismus des Z-Teilchens schließt man, dass es nur drei „Generationen“ von Quarks und Leptonen gibt, jedes in zwei Ausführungen, von denen das Tau-Neutrino noch nicht sicher nachgewiesen ist. Ebenso intensiv ist die Suche nach dem Higgs-Teilchen, dem ▶

Überträger eines hypothetischen Feldes, das bei niedrigen Energien die Symmetrie zwischen elektromagnetischem und schwachem Feld brechen und damit den W- und Z-Bosonen ihre Massen zuweisen soll. Magnetische Monopole, freie Quarks, Teilchen aus mehr als drei Quarks, darunter strange oder charmed Quarks, schließt das Standard-Modell auch nicht ganz aus. Noch weiter gehen die Versuche, in der großen Vereinheitlichung (GUT) die bisher unabhängigen Parameter der elektroschwachen Theorie und der QCD (Massen, Ladungen, Kraftkonstanten) einheitlich zu erklären. Wenn auch die 10^{17} GeV, wo alle drei Kräfte verschmelzen sollen, weit außerhalb unserer heutigen Reichweite liegen, gibt es experimentelle Tests für die Verschmelzung der Quark- und Leptonfamilien, z. B. den noch nicht nachgewiesenen Zerfall des Protons in mindestens 10^{31} Jahren.

✓ Aufgaben ...

www. CD

●● 18.1.1 Austauschkraft

Da nach der Unschärferelation die Energie eines Zustandes, der nur sehr kurze Zeit dauert, nicht ganz genau bestimmt ist, kann z. B. auch der Energiesatz durch Schaffung eines Teilchens „aus dem Nichts“ verletzt werden, wenn das Teilchen nur so schnell wieder verschwindet, „dass es niemand merkt“. So lässt sich die **Austauschwechselwirkung** unter Vermittlung virtueller Teilchen (Photonen, Mesonen, Gravitonen) anschaulich verstehen. Warum haben die Kernkräfte eine kurze Reichweite, und wie groß ist sie? Warum gibt es keine solche Reichweitebegrenzung für die elektrostatische Wechselwirkung?

●● 18.1.2 Oberflächenenergie

Wenn A Kügelchen zu einer großen Kugel zusammengesetzt sind, wie viele Kügelchen sitzen dann an der Oberfläche? Wie viele nächste Nachbarn hat jedes Kügelchen, wenn es innen bzw. an der Oberfläche sitzt?

●● 18.1.3 Coulomb-Energie

Welche **elektrostatische Energie** hat eine gleichmäßig mit Ladung erfüllte Kugel? Wenden Sie das Ergebnis auf die Kerne an und verifizieren Sie den Faktor des 5. Gliedes in (18.4).

●● 18.1.4 Warum hat der Kern nicht mehr Neutronen?

Für Protonen und Neutronen gebe es zwei unabhängige Termleitern, die von unten her aufgefüllt werden. Die Terme seien energetisch ungefähr äquidistant (für welches Potential trifft das zu?). Welche Energie hat ein Kern mit N Neutronen und Z Protonen? Welches N und Z wären bei gegebener Masse $A = N + Z$ energetisch optimal? Drücken Sie die Abweichung von dieser optimalen Energie durch $N - Z$ aus.

●● 18.1.5 Im Tal der Stabilität

Welcher Kern gegebener Massenzahl A ist nach (18.4) am stabilsten? Wie groß sind seine Bildungsenergie und die **Bindungsenergie pro Nukleon**? Vergleichen Sie mit Abb. 18.3. Verifizieren Sie die Konstante vor dem 6. Glied in (18.4) aus der Tatsache, dass z. B. ^{238}U stabil ist.

●● 18.1.6 β -Zerfall

Wie steigt das **Stabilitätstal** von seiner Sohle aus seitlich an (Querschnitt bei konstantem A)? Beachten Sie das letzte Glied in (18.4) und zeichnen Sie Querschnitte für gerades und ungerades A bei kleinem und großem A . Wie viele stabile Isobare gibt es? Wie zer-

fallen die übrigen und mit welchen Energien?

●● 18.1.7 α -Zerfall

Wie verläuft die Sohle des Tals der stabilen Kerne bei Änderung der Massenzahl? Für welche Kerne ist ein α -Zerfall möglich und mit welcher Zerfallsenergie?

●● 18.1.8 Weizsäckers Chance

Als *C. F. von Weizsäcker* 1935 das **Tröpfchenmodell** ausbaute, hätte er die **Kernspaltung** voraussagen können? Welche Elemente wären besonders günstig erschienen, welche Zerfallsenergien hätte er erwartet? Gab es auch Hinweise auf Spaltungsneutronen und Kettenreaktion?

●● 18.1.9 Spaltungsmodell

Wie ändert sich die Energie eines Kerns nach (18.4), wenn er von der Kugelgestalt abweicht? Welchen Einfluss hat die Massenzahl auf die Bilanz der Glieder, die sich dabei ändern? Wie verläuft demnach eine **Kernspaltung**?

●● 18.1.10 Moderation

Warum werden Neutronen in Wasser mehr gebremst als in Blei, warum ist es bei den meisten anderen Strahlungen umgekehrt?

● 18.1.11 Schweres Wasser

Warum moderiert man Neutronen in vielen Reaktoren mit schwerem und nicht mit normalem Wasser?

●● 18.1.12 Günstigste Fusion

Gibt es Fusionsreaktionen mit noch höherer Energieausbeute pro Gramm als die Lithium-Deuterid-Reaktion?

●● 18.1.13 Magnetische Flasche

Damit ein Plasma durch ein Magnetfeld zusammengehalten wird, muss (1) das äußere Magnetfeld mindestens so groß sein wie die Felder, die ein Teilchen infolge seiner Bewegung auf Nachbarpartikel ausübt, (2) die Lorentz-Kraft mindestens so groß sein wie der mittlere Kraftanteil, der infolge des Gasdrucks auf ein Teilchen entfällt. Hieraus ergibt sich eine enge Beziehung zwischen **magnetischem Druck** und Energiedichte des Feldes. Welche Dichten und Temperaturen kann man einem Plasma in einem magnetischen Kessel zumuten, ohne dass es explodiert? Schätzen Sie Wirkungsquerschnitt, Stoßzeit, Energieausbeute von Fusionsreaktionen ab. Wie müsste ein Fusionskraftwerk konstruiert sein, dessen Leistung in großtechnischen Bereichen läge?

● 18.1.14 Nukleonen-Mikroskop

Wie schnell müssen Elektronen sein, mit denen man die innere Struktur des Nukleons abtasten will? Man bedenke: Wie beim Mikroskop ist das Auflösungsvermögen durch die Wellenlänge bestimmt; für ultrarelativistische Teilchen ($E \gg m_0 c^2$) hängen Energie E und Impuls p zusammen wie $E = pc$. Hängt das Auflösungsvermögen von der Teilchenart ab? Warum benutzt man gern Elektronen?

●● 18.1.15 Die größte Kraft

Nukleonen ziehen einander an, halten sich aber doch auf Abstand. Wie groß ist diese Abstoßung? Gibt es noch größere Kräfte?

● 18.1.16 Nochmal Sherlock Holmes

Wintertag. *Sherlock Holmes* (H) und *Dr. Watson* (W) stapfen bibbernd über die Heide von Salisbury.

W.: Wenn die Technik doch schon so weit wäre, uns von den Positionsschwankungen dieses lächerlichen Gestirns da freizumachen! Wenn man die Sonne imitieren könnte...

H.: Sie wollen sagen, dann hätte die Menschheit genug Energie, um ewigen Sommer machen zu können? Don't jump to conclusions, my dear Watson. (Er deckt die bleiche Sonne in einer uns bereits bekannten Bewegung mit dem Daumen zu.) Die Sonne ist doch viel größer als die Erde, oder irre ich mich?

W.: In der Tat. Sie hat den hundertfachen Durchmesser.

H.: Und man kann annehmen, dass ein wesentlicher Teil ihres Gesamtvolumens an der Energieproduktion mitwirkt?

W.: Das glaube ich schon, obwohl noch niemand weiß, wie die Sonne ihre Energie erzeugt.

H.: Dann muss ich Ihnen sagen, dass das ganze Volumen der Erdatmosphäre – sagen wir, bis in einige Meilen Höhe – für eine Vorrichtung nicht ausreichen würde, die genügend Energie produzierte und *genau* die Vorgänge in der Sonne imitierte.

Wie kommt Holmes darauf? Welchen Ausweg gibt es?

●● 18.1.17 Neutronendiffusion

Entscheidend für die Leistung, die in einem **Kernreaktor** freigesetzt wird, sind die Neutronenzahldichte n und die **Neutronenflussdichte** j . Neutronen lösen Spaltungsakte aus und werden dabei durch Fremdatome sowie auch durch nichtspaltende Kerne eingefangen, gleichzeitig entstehen bei der Spaltung aber wieder andere Neutronen. Wie hängen n und j zusammen? Welche Grundgleichung regelt die zeitlich stationäre räumliche Verteilung von n und j ? Denken Sie daran, dass ein Neutron keine Vorzugsrichtung hat, in die es fliegt, sondern dass seine Flugrichtungen ganz zufällig verteilt sind. Wie kann trotzdem ein Neutronenfluss zustandekommen? Wo haben Sie die gefundene Gleichung schon mal gesehen? Sie spielt fast in jedem Kapitel dieses Bu-

ches eine Rolle, auch wenn dies nicht immer gesagt wurde. Lösen Sie diese Gleichung für einen kugelförmigen Reaktor. Wie groß sollte das stationäre n im Mittelpunkt sein? Diskutieren Sie die Fälle des unterkritischen und des überkritischen Reaktors. Denken Sie immer auch an die vielen anderen Anwendungen dieser Gleichung und ihrer Lösung.

●● 18.1.18 Katalysierte Fusion

Wieso wäre es günstig, bei der Kernfusion das Coulomb-Feld der beteiligten Kerne abzuschirmen, und durch was für Teilchen kann man das machen? Bis auf welchen Abstand kann sich z. B. ein Proton einem Deuteron nähern, das ein Elektron bzw. ein Myon gebunden hat? Vergleichen Sie mit dem Abstand, von dem ab die Tunnelwahrscheinlichkeit durch den restlichen Coulomb-Wall erträgliche Werte annimmt (für „kaltes“ Reaktionsgemisch). Bei welchen Temperaturen werden Myo-Wasserstoff oder Myo-Deuterium thermisch dissoziieren? *Luis Alvarez* fand in einer H_2 -Blasenkammer, die mit Myonen beschossen wurde, mehrere Ereignisse folgender Art: Die Spur eines bei A eintretenden Myons endet bei B . Bei B' , 1 mm von B , taucht wieder ein Myon auf, das 1,7 cm läuft und dann bei C in ein Elektron und zwei Neutrinos zerfällt. *Alvarez'* Deutung: Bei B wird μ von einem Proton eingefangen, geht aber sehr schnell unter Gewinn von 135 eV auf ein Deuteron über. Warum soll d das μ umso viel fester binden als p? Wie schnell läuft das d mit dieser Energie? Wann erreicht es B' ? Dort soll die Molekülbildung $d\mu + p \rightarrow d\mu p$ mit anschließender Fusion $d\mu p \rightarrow {}^3\text{He} + \mu + 5,4 \text{ MeV}$ und Ausstoß des μ erfolgen. Woher kommen die 5,4 MeV? Wie weit käme das Myon mit einem wesentlichen Teil dieser Energie innerhalb seiner Lebensdauer ($\tau = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$)? Oder wird es vorher abgebremst und zerfällt aus der Ruhe? (Denken Sie an die 1,7 cm Spurlänge). Schätzen Sie, wie lange die Bildung eines Myon-Moleküls

in der Blaskammer dauert, und vergleichen Sie dies mit dem Alvarez-Experiment und mit der Lebensdauer des Myons. Kann ein Myon als Katalysator für die Fusion betrachtet werden? Wie viel Fusionsenergie kann man bestenfalls mittels eines Myons erzeugen? Vergleichen Sie dies mit dem Energieaufwand zur Erzeugung eines Myons, z. B. aus den Pionen, die beim Aufprall schneller Protonen entstehen. De facto-Werte heute: Ein 4,5 MW-Beschleuniger bringt $2 \cdot 10^7$ Myonen/s ins Target.

● 18.2.1 Wieso wird's mehr?

0,1 g frisch hergestelltes Radium strahlt in den ersten Stunden wie 0,1 Ci, nach einigen Wochen wie 0,8 Ci, nach einigen Jahren wie 0,9 Ci. Wie kommt das? Gliedern Sie auch nach α - und β -Strahlung auf.

● 18.2.2 Pierres Nachlicht

0,1 g Radium, das Marie und Pierre Curie hergestellt hatten, erzeugte einige Wochen später im Kalorimeter etwa 40 J. Mit einem Szintillationsmikroskop zählte man auf einem Bildfeld von $0,1 \text{ mm}^2$, das unter einer Vakuumlacke 30 cm entfernt von einer Probe mit 10^{-6} g Ra aufgestellt war, in der Minute im Mittel 2 Lichtblitze. Welche Schlüsse konnte er ziehen? Konnte er die Energie pro Zerfallsakt, die Halbwertszeit usw. schätzen? Welche Korrekturen hätte er nach späterer Kenntnis anbringen müssen? Würde man die Experimente heute noch so machen?

● 18.2.3 Maries Waschküche

Welche Konzentrationen von ^{226}Ra und den übrigen Nukliden der U-Reihe erwarten Sie im Uranerz? Wie viel Pechblende mussten die Curies mindestens verarbeiten, um 0,1 g Radium herzustellen?

● 18.2.4 Stabilität

Ist das **radioaktive Gleichgewicht** stabil? Wie entwickelt sich eine kleine Störung, z. B. Zufügung einer bestimmten Menge eines Zwischennuklids?

● 18.2.5 α - β - γ -Analyse

Projektieren Sie eine Versuchsanordnung zur Messung von Masse, Ladung, Impuls, Energie von α - und β -Teilchen. Können Sie damit beweisen, dass γ -Strahlung nicht aus üblichen Teilchen besteht?

●● 18.2.6 Zufallsereignisse

Ein Ereignis (Flugzeugunfall, Kernzerfall o. Ä.) möge im langzeitigen Durchschnitt ν -mal im Jahr eintreten. Die Wahrscheinlichkeit, dass es eintritt, sei konstant. Sie hänge z. B. auch nicht davon ab, ob gerade vorher ein entsprechendes Ereignis stattgefunden hat. Können Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit entwickeln, dass in einem Zeitraum von t Jahren kein solches Ereignis, genau eines, genau zwei usw. eintreten? Gehen Sie von sehr kurzen Zeiträumen aus, in denen bestimmt höchstens ein solches Ereignis stattfindet.

●● 18.2.7 Strenge Sitten

In einem fernen Land wird jedem Fahrer nach zehn Unfällen der Führerschein auf Lebenszeit entzogen. Von einem Jahrgang von Fahrschulabsolventen, die alle gleich viel und gleich gut fahren, sind nach t Jahren noch wie viele fahrberechtigt? Wie ändert sich die t -Abhängigkeit, wenn das Gesetz noch strenger bzw. milder wird?

● 18.2.8 Positronenzerfall

Warum beobachtet man keinen natürlichen, sondern nur einen **künstlichen β^+ -Zerfall**?

●● 18.2.9 ^{14}C -Uhr

Kosmische Strahlung erzeugt in der Erdatmosphäre $2,4$ Neutronen/ $\text{cm}^2 \text{ s}$, die zumeist in der $^{14}\text{N}(n, p)^{14}\text{C}$ -Reaktion verbraucht werden. ^{14}C zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5600 a. Die Atmosphäre und die Biosphäre enthalten 8 bis $10 \text{ g/cm}^2 \text{ C}$ als CO_2 oder lebende Substanz. Welche ^{14}C -Aktivität erwartet man in einer Probe lebender Substanz? Vergleichen Sie mit dem Messwert von $0,1(16,1)$ Zerfallsakten/min im Gramm Kohlenstoff. Was geschieht, wenn das Lebewesen stirbt? Holz aus

dem Grab des Pharaos *Sneferu* zeigte $8,5 \pm 0,2$ Zerfälle pro s und g C. Wann wurde das Holz geschlagen?

● 18.2.10 ^{40}K -Uhr

^{40}K zerfällt durch β -Emission mit der Zerfallskonstante $\lambda_1 = 4,75 \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1}$ in ^{40}Ca , durch K-Einfang mit $\lambda_2 = 0,585 \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1}$ in ^{40}Ar . Eine Glimmerprobe enthält $4,21\%$ Kalium; vom Gesamtkalium macht das Isotop ^{40}K nur $0,0119\%$ aus. Außerdem findet man $0,000088\%$ ^{40}Ar in der Probe. Wie macht man solche Bestimmungen? Wie alt ist das Mineral? Welche Fehlerquellen für die Altersbestimmung gibt es?

●● 18.2.11 Ist die Erde heiß oder kalt entstanden?

Die Erdkruste enthält etwa $3 \cdot 10^{-4}\%$ Uran, $9 \cdot 10^{-4}\%$ Thorium, wenig Aktinium. Schätzen Sie die radioaktive Wärmeproduktion der Gesteine. Reicht sie aus, um die Wärmeleitungsverluste zu decken (Temperaturgradient 3 K/(100 m) , Wärmeleitfähigkeit $1,5 \text{ W/(mK)}$)? Falls die Wärmeproduktion zu klein ist: Woher stammt die Wärme des Erdinneren? Im gegenteiligen Fall: Folgerungen über die Uranverteilung in größerer Tiefe bzw. über die Zukunft des Erdkörpers? Wie lange würde alles Uran der Erde den Energiebedarf der Menschen decken?

●●● 18.2.12 Kann man Radioaktivität beeinflussen?

Man liest oft, ein Kernzerfall sei durch äußere Umstände nicht zu beeinflussen. Dass dies nicht richtig ist, folgt schon aus der Möglichkeit, im Beschleuniger oder im Fusionsreaktor neue Kerne aufzubauen, also den Zerfall umzukehren. Gewöhnliche Temperaturen und Drucke, besonders aber der chemische Zustand des Atoms beeinflussen die Zerfallskonstante ebenfalls, wenn auch nur so schwach, dass dieser Einfluss noch nicht sicher nachgewiesen werden konnte. Schätzen Sie, um wie viel z. B. eine Ionisierung das Potential in Kernnähe verschiebt. Um wie viel könnte sich dadurch die Zerfallskonstante

im **Gamow-Modell** des α -Zerfalls ändern?

● 18.2.13 Totzeitfehler I

Der Fehler infolge der **Zähler-totzeit** ist leicht anzugeben, wenn die Lebensdauer des Präparats sehr groß gegen die Messzeit ist (s. Aufgabe 18.2.14). Wenn die Aktivität während der Messung merklich abklingt, wird auch der Teil der Impulsrate, der in Totzeiten fällt und unterschlagen wird, zeitabhängig. Berücksichtigen Sie dies in dem Ausdruck für den relativen Fehler der Gesamtimpulszahl.

● 18.2.14 Totzeitfehler II

Sie wollen die Halbwertszeit bzw. die Zerfallskonstante λ eines Nuklids möglichst genau messen. Nehmen wir zunächst an, Sie verfügen über ein völlig reines Präparat dieses Nuklids, das eine sehr lange Lebensdauer habe, und über einen Zähler, der alle Zerfallsakte registriert. Wie gehen Sie vor? Jetzt berücksichtigen Sie den statistischen Fehler, der aus der endlichen Dauer Δt der Messung resultiert, und den Koinzidenzfehler, der auf der Totzeit t_0 des Zählers beruht. Welcher relative Fehler der λ -Messung ergibt sich daraus? Wie kann man den relativen Fehler bei gegebenem Δt und t_0 möglichst klein machen? Wie klein wird er dann?

● 18.3.1 Nebelkammerspuren

Die Bahn eines α -Teilchens ist dick und gerade, die des β -Teilchens dünn und zitterig, eine γ -Spur ist bei genauerem Hinsehen nur durch einzelne davon ausgehende zitterige Spuren markiert. Wieso?

● 18.3.2 Lange Spur

In Abb. 18.23 geht eine α -Spur über alle anderen hinaus. Woran liegt das? Vergleichen Sie die Energie dieses Teilchens mit der der übrigen. Kann es aus einem anderen Nuklid der Zerfallsreihe stammen, oder aus einem angeregten RaC' -Kern? Wie groß dürfte die Anregungsenergie sein? Kann man schätzen, wie häufig solche Anregungen vorkommen? Wie wird es zu dieser Anregung gekommen sein?

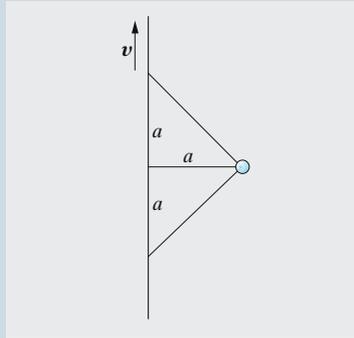


Abb. 18.55. Entscheidender Wechselwirkungsbereich zwischen einem Atomelektron und einem schnellen geladenen Teilchen

● 18.3.3 Impulsübertragung

Ein geladenes Teilchen fliegt im Abstand a (Stoßparameter) an einem Atom vorbei. Welche Kraft wirkt auf die Elektronen des Atoms in den einzelnen Phasen des Vorbeifluges? Welcher Impuls wird insgesamt auf das Atomelektron übertragen? Annahme: Das einfliegende Teilchen ist so schnell oder so schwer, dass es nicht wesentlich aus der geraden Bahn gebracht wird. Wieweit stimmt das? Rechnen Sie die Impulsübertragung in eine Energieübertragung um. Unter welchen Umständen wird das Atom ionisiert oder angeregt? Was passiert, wenn die Energie dazu nicht ausreicht?

● 18.3.4 Energieübertragung

Ein geladenes Teilchen fliegt auf seiner Bahn durch Materie an sehr vielen Atomen in verschiedenen Abständen a vorbei und gibt an jedes entsprechend Energie ab. Wie viele Atome passiert das Teilchen auf dem Bahnstück dx im Abstand zwischen a und $a+da$? Welches ist der größte Stoßparameter, bei dem noch Energie ausgetauscht wird? Welches ist die größte austauschbare Energie mit dem zugehörigen Stoßparameter? Alle Abstände zwischen a_{\min} und a_{\max} tragen zur Bremsung bei. Wie groß ist der Energieverlust auf der Strecke dx (Vergleich mit (18.16))?

● 18.3.5 Ionisierungsdichte

Wie viele Ionen erzeugt ein geladenes Teilchen auf 1 cm seiner Bahn in Abhängigkeit von den wesentlichen Größen, die es selbst und die durchflogene Substanz kennzeichnen (welche sind das?). Vergleichen Sie mit Abb. 18.25.

● 18.3.6 Röntgen

Ein radioaktives Präparat gegebener Aktivität (in Bq) und Teilchenenergie ist umgeben von Luft, Wasser, organischer Substanz, Eisen oder Blei. Wie kann man die Ionisierungsdichten berechnen und in gebräuchlichen Einheiten (Röntgen, Gray usw.) ausdrücken?

● 18.3.7 Reichweite I

Betrachten Sie Abb. 18.15 und schätzen Sie aus den Reichweiten der Teilchen ihre Energie. Beachten Sie den Ionisierungszustand des schweren Atoms. Benutzen Sie Energie- und Impulssatz. Können Sie die Deutung, die

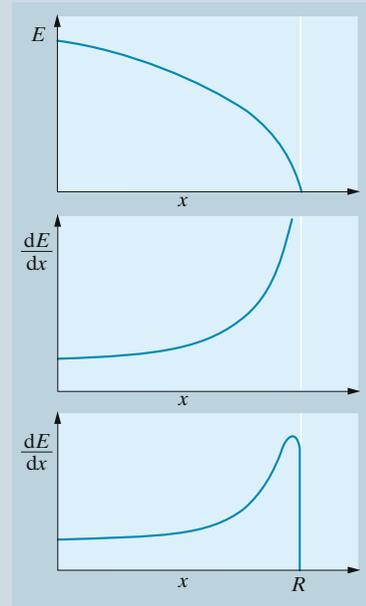


Abb. 18.56. Energieverlust eines geladenen Teilchens in Materie. *Oben:* $E(x)$; *Mitte:* dE/dx ohne Berücksichtigung des Logarithmus in der Bethe-Formel; *unten:* dE/dx mit Berücksichtigung des Logarithmus (Bragg-Kurve)

Rutherford diesem Experiment gab, bestätigen?

●● 18.3.8 Reichweite II

Leiten Sie aus (18.16) oder Ihrer eigenen Formel für dE/dx ab, wie viel Energie das schnelle Teilchen nach einer gegebenen Laufstrecke noch hat. Welche Laufstrecke kann man als seine Reichweite betrachten? Wie verteilt sich die Ionisierung über die Weglänge?

●● 18.3.9 Maximale Energieübertragung

Wieso kann ein schweres Teilchen der Masse M und der Energie E an ein Elektron der Masse m maximal nur die Energie $4mW/M$ abgeben? Unter welchen Umständen tritt diese maximale Energieübertragung ein?

●● 18.3.10 Geiger-Nuttall

Bestimmen Sie die Energien und Reichweiten einiger α -Strahler aus ihren Halbwertszeiten (z. B. nach der Geiger-Nuttall-Regel bzw. der Geiger-Formel) und vergleichen Sie mit Abb. 18.19.

●● 18.3.11 Reichweite III

Erklären Sie die Einzelheiten der Abhängigkeiten Abb. 18.26 und benutzen Sie diese Daten neben den Formeln des Textes für die folgenden Aufgaben.

●● 18.3.12 Relativistische Bremsung

Gilt die Bremsformel (18.16) auch für relativistische Teilchenenergien $E \gg m_0c^2$, oder was ist daran abzuändern? Denken Sie besonders an die Lorentz-Kontraktion. Kommen diese Modifikationen in Abb. 18.25 zum Ausdruck?

●● 18.3.13 Bremsformeln

Für verschiedene Teilchen und Energiebereiche benutzt man sehr verschiedene Formeln, die die Energieabhängigkeit des Wechselwirkungsquerschnitts oder der Stoßwahrscheinlichkeit dieses Teilchens mit anderen ausdrücken. Beispiele: Der **Stoßquerschnitt** zwischen Gasatomen wird als unabhängig von E betrachtet, die

freie Flugdauer für Stoß- und Einfangwechselwirkung zwischen geladenen Teilchen als proportional $E^{3/2}$, der Einfangquerschnitt für Neutronen durch Kerne als proportional $E^{-1/2}$. Haben diese Abhängigkeiten nichts miteinander zu tun, oder können Sie einen Gedankengang finden, der sie und die Folgerungen daraus unter einen Hut bringt?

●● 18.3.14 Bremsen Kerne auch?

Wieso können *Bethe* und *Bohr* die Kerne der Bremssubstanz in ihrer Theorie der Bremsung geladener Teilchen (Aufgaben 18.3.3–18.3.5) aus dem Spiel lassen? Welche Tatsache ist dafür entscheidend? Führen Sie die Betrachtung auch für Kerne durch und vergleichen Sie die Ergebnisse.

●● 18.3.15 Materialabhängigkeit

Vergleichen Sie Ionisierungsdichten und Reichweiten in verschiedenen Materialien (Luft, Wasser, biologisches Gewebe, Gestein, Aluminium, Eisen, Blei) ausgedrückt in durchlaufener Schichtdicke oder Flächendichte.

●● 18.3.16 Abschirmung

Charakterisieren Sie Ionisierungsvormögen und Reichweite der α - und β -Strahlung verschiedener radioaktiver Präparate (Abb. 18.13, 18.19). Was folgt daraus an praktischen Regeln für die Gefährlichkeit der Radionuklide und die Abschirmung ihrer Strahlung? Dimensionieren Sie solche Abschirmungen für einige Präparate. Wie hängt die Stärke der Abschirmung von der Aktivität der Quelle (in Bq) ab? Beachten Sie die gesetzlichen Vorschriften über den Strahlenschutz.

●● 18.3.17 Dosisleistung

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Aktivität eines radioaktiven Präparats (in Bq) und der **Dosisleistung** (in Gray) in gegebenem Abstand von der Quelle? Diskutieren Sie einige praktische Beispiele.

●● 18.3.18 Theorie der Nebelkammer

Wieso wirken Ionen als Kondensationskeime? Wie kann sich über-

sättigter Dampf überhaupt halten, ohne in Tröpfchen zu kondensieren? Möglicher Weg zur quantitativen Behandlung: Setzen Sie die Energie eines geladenen Tröpfchens an (Volumen-, Oberflächen-, Coulombenergie); diskutieren Sie Existenz, Lage, Tiefe des Minimums. Was bedeutet das für die effektive Kondensationstemperatur? Benutzen Sie z. B. die Formel $T_{\text{kond}} = (H_{\text{fl}} - H_{\text{d}})/(S_{\text{fl}} - S_{\text{d}})$, aber nicht ohne Begründung! Wie stark muss man expandieren? Wie weit lassen sich die Ergebnisse auf Blaskammern übertragen?

●● 18.3.19 ΔW , W-Detektor-Teleskop

Es besteht aus einer sehr dünnen Halbleiter-Schicht, die den geladenen schnellen Teilchen nur einen kleinen Bruchteil ΔE ihrer Energie entzieht, und einer dicken Halbleiter-Schicht, in der die Teilchen stecken bleiben und ihre ganze Restenergie abgeben. Wie dick müssen die beiden Kristalle für verschiedene Teilchensorten und Energien sein? Versuchen Sie eine möglichst universelle Lösung zu finden. Trägt man die Einzelakte in ein ΔE , E -Diagramm ein, ordnen sie sich auf verschiedenen hyperbelähnlichen Kurven an. Warum? Was bedeuten die einzelnen Hyperbeln? Kann man verschiedene Teilchensorten so unterscheiden (Reichweiten s. Abb. 18.26)?

●● 18.3.20 Zyklotron-Modell

Eine im Wesentlichen horizontale Scheibe besteht aus zwei Halbkreisen (Durchmesser d), die durch ein Brettchen (Länge d , Breite $b \ll d$) über Scharniere verbunden sind. Ein Motor stellt die eine Halbkreisscheibe abwechselnd etwas höher bzw. etwas tiefer als die andere, wobei das Mittelbrett als schiefe Ebene variablen Neigungssinnes den Übergang vermittelt. In einer spiralförmigen Rille können Kugeln laufen, die aus einem zentral gelegenen Loch austreten. Wieso ist das ein Zyklotron-Modell? Wo sind das E - und das B -Feld? Wie muss die Rille gestaltet sein, damit die Beschleunigung immer im richtigen Zeitpunkt kommt? Diskutieren

Sie auch ein Modell ohne Rille, in dem eine Kugel durch eine weiche Spiralfeder, die das reibungsfreie Rollen nicht beeinträchtigt, am Zentrum befestigt ist. Vergleichen Sie die Bahnen der Teilchen in den drei Fällen: Rille, Feder, Zyklotron.

●● 18.3.21 Linearbeschleuniger

Wie müssen die Rohrlängen eines Linearbeschleunigers abgestuft sein, wenn die Beschleunigung an allen Rohrzwischenräumen durch die gleiche Wechsellspannung erfolgt? Diskutieren Sie den Stanford-Beschleuniger (3,2 km lang, 40–45 GeV).

● 18.3.22 Teures Synchrotron

Warum müssen **Synchrotrons** so groß (und so teuer) sein? Wie hängt der Bahnradius von der Maximalenergie ab? Testen Sie die Theorie an einigen existierenden Anlagen. Wie groß müsste eine TeV-Anlage sein? Was könnte das Super-Synchrotron leisten, dessen Ringkammer rings um den Äquator geht?

● 18.3.23 Synchrozyklotron

In welchem Bereich muss man die Frequenz des Beschleunigungsfeldes bei einem 750 MeV-Protonen-Synchrozyklotron variieren, wenn es einen 1,7 T-Magneten hat? In welcher Zeit muss das geschehen, wenn die Beschleunigungsspannung 5 kV ist? Welchen Durchmesser hat der Magnet? Welche Strecke legen die Teilchen etwa im Beschleuniger zurück?

● 18.4.1 Vorspiel auf dem Theater

Im Elysium. Asphodeloswiese. Bach mit Nymphen im Hintergrund.

Domokrit: Es gibt nichts als Atome – unteilbar, daher unzerstörbar – und Leere. Alles andere ist Meinung.

Aristoteles: Wenn ein Ding ausgedehnt ist, muss es auch Teile haben. Dinge *ohne* Ausdehnung haben aber nichts, womit sie aneinander haften können. Man kann daraus nichts bauen, schon gar nicht eine Welt. Also gibt es keine Atome.

Achilleus: Vielleicht sind sie ausgedehnt, aber unendlich hart?

Alexander d. Gr.: Arrhhmmmm!

Polyhistor: Ganz recht, Majestät! Da hat neulich ein gewisser *Monopetros* bewiesen . . . (Er zieht einen Spickzettel aus der Chlamys und trägt Längeres vor.)

Aristophanes: Sagt man nicht, die Atome bestünden aus noch kleineren Dingen, die umeinander kreisen wie – nach dem berüchtigten *Aristarchos* – die Erde um die Sonne? Vielleicht leben auf diesen „Erden“ wieder winzige Leute, die natürlich auch aus Atomen bestehen usw. Das fände ich lustig. Und vielleicht ist unser Sonnensystem auch nur ein Atom, sagen wir im Gehirn eines Riesen . . .

Orothermos: Vielleicht kann man die Atome so retten: Wenn man wissen will, ob sie ausgedehnt sind oder nicht, muss man sie ausmessen. Dazu braucht man Maßstäbe. Da es aber nichts Kleineres gibt als Atome, erledigt sich die Streitfrage, und die Atome dürfen doch existieren.

Alexander: Glänzend! Sie sind unteilbar, weil sie das Kleinste sind, und sie sind das Kleinste, weil sie unteilbar sind!

Polyhistor: Ja, aber die Oxygalakta des *Oukoun-Andros*? Und rechnet nicht *Trochites* schon mit Längen, die . . . (er malt sehr viele Buchstaben in den Sand) . . .-mal kleiner sind als deine „kleinste Länge“, verehrter *Orothermos*?

Diskutieren Sie mit!

● 18.4.2 Vorspiel im Himmel

Meph.: Da du, o Herr, dich wieder einmal nahst . . .

Der Herr: Schon gut. Du willst nur wieder lamentieren, und alles, was du in der Schöpfung sahst, das taug' zu nichts, es sei denn, zum Krepieren. Versuch's: Ein Rädchen nimm aus dem Getriebe! Wenn du's vermagst, steig ich von diesem Thronchen.

Meph.: So macht der Herr den Teufel selbst zum Diebe? Die Wette gilt: Klau ich ein Elektronchen . . .

Der Herr: . . . und es bleibt *nichts* zurück, dann dank ich ab, und frei erklär ich meinen ganzen Stab.

Wie mag die Sache ausgehen? Man denke sich den Himmel und die

„Schöpfung“ als zwei völlig getrennte Welten, abgesehen davon, dass *Mephistopheles* dank diabolischer Transzendenz gelegentlich in unsere Welt hineinlangen kann. Die Erzengel *Michael* (gesprochen „Meikel“), *Maxwell* und *Hertzelel* sind Schiedsrichter.

●● 18.4.3 Eddingtons Spekulation

Die Unschärferelation ordnet jeder *maximalen* Ortsunbestimmtheit eine *nichtunterschreitbare* Impulsunschärfe zu. Nun kann man im Einstein-Weltall mit dem Radius R beim besten Willen keinen größeren Fehler in einer Ortsangabe machen als R . Das Weltall enthält etwa $N = 10^{80}$ Teilchen (vgl. Aufgabe 18.4.4). Wenn sie im Großen gesehen regellos verteilt sind, ist der mittlere Fehler, den man bei der Angabe ihres Schwerpunkts *ohne* jede weitere Kenntnis macht, R/\sqrt{N} . (Wieso?). Dem entspricht ein gewisser kleinster Impulsbetrag, oder – mit c als typischer Geschwindigkeit – eine bestimmte Masse, die im Weltbau eine grundlegende Rolle spielen sollte. Welche Masse ist das?

●● 18.4.4 Eddington-Diracs Wunderzahl

Ein Argument (nicht das einzige) für die grundlegende Rolle der **Elementarlänge** $l_0 \approx 10^{-15}$ m ist folgendes: Die damals kleinste Länge l_0 passt in die größte, den Einstein-Radius R , etwa 10^{40} -mal. Ebenso oft passt auch die Elementarzeit $\tau_0 = l_0/c$ in das Alter der Welt, das experimentell als reziproke Hubble-Konstante gegeben ist (Abschn. 12.10.5). Eine ganz ähnliche Zahl findet man, wenn man die Coulomb-Kraft zwischen zwei Elementarteilchen mit der Gravitation zwischen ihnen vergleicht. Die mittlere Dichte im Weltall, soweit wir es übersehen, ist etwa 10^{-27} kg/m³ (nachprüfen!). Damit ergibt sich einmal der Wert von R , zum anderen die Anzahl der Teilchen in der Welt zu etwa 10^{80} , dem Quadrat der obigen Wunderzahl! Prüfen Sie alle diese Übereinstimmungen nach. Wie viel daran ist relativ trivial, was bleibt evtl. als Einblick in die Grundstruktur der Welt?

●● 18.4.5 Hat das Elektron eine richtige Masse?

Fassen Sie ein Elektron als Kugel vom Radius r mit der Ladung an der Oberfläche auf und nähern Sie diese Kugel als eine Spule mit einer einzigen Windung. Welche Induktivität ergibt sich? Welchen Strom repräsentiert das Elektron, wenn es mit v fliegt, in der Ebene, die es gerade durchtritt? Welche Spannung an den Enden der Spule wäre nötig, um eine Beschleunigung a herbeizuführen? Wie groß ist dann die Feldstärke innerhalb der Spule? Welche Kraft auf das Elektron bedeutet das? Welche „elektromagnetische Masse“ hat also das Elektron? Wie groß muss r sein, damit die richtige Elektronenmasse herauskommt?

●● 18.4.6 Planck-Länge

Um irgendeine Messung in einem Raumbereich der Abmessung d auszuführen, braucht man ein materielles Objekt, am besten ein Teilchen, von dem man sagen kann, dass es in dem fraglichen Bereich ist. Damit man dies sagen kann, muss das Teilchen nach der Unschärferelation einen gewissen Minimalimpuls und eine Minimalenergie haben. Wie groß sind diese, speziell im Fall sehr kleiner Längen d , wo bestimmt der relativistische Energiesatz gilt? Welche Masse hat das Messteilchen infolgedessen? Andererseits besitzt ein Teilchen gegebener Masse einen gewissen Gravitationsradius r_G mit folgender Bedeutung: Wenn das Teilchen so klein wäre wie r_G , würde es sich als Schwarzes Loch aus dem Universum abkapseln. r_G muss offenbar kleiner sein als die auszumessende Länge d . Wie klein sind demnach die kleinsten Bereiche, über deren Struktur man prinzipiell etwas aussagen könnte?

●● 18.4.7 Pion-Umwandlung

Analysieren Sie das Ereignis in Abb. 18.38 genauer. Zeigt die Winkelhalbierende der e^+e^- -Gabel oben rechts wirklich genau auf den Knick (vgl. Abschn. 18.4.2)? In welche Richtung muss das andere Photon aus dem Zerfall $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ fliegen? Schätzen Sie die Energie des π^0 .

●● 18.4.8 Myonzerfall

Warum kann das Elektron aus dem Zerfall $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ nur maximal 53 MeV haben? Warum kann es beim üblichen β -Zerfall die volle Zerfallsenergie mitnehmen? Umgekehrt: Wenn man nur die Myon-Masse kennt (woher?) und diese Maximalenergie des Zerfallelektrons von 53 MeV misst, was kann man über den Zerfallsmechanismus aussagen? Würde ein zusätzliches „unsichtbares“ Teilchen energie- und impulsmäßig ausreichen? Wenn ja, warum nimmt man zwei an?

● 18.4.9 Myon-Atom

Schätzen Sie Bahnradien, Umlaufgeschwindigkeiten, Termenergien und Emissionsfrequenzen für Myon- und Kaon-Atome. Welches wäre z. B. die K_α -Röntgenenergie für Kaon-Uran? Würden Sie sich wundern, wenn die bohrschen Werte nicht genau stimmten? Was könnte man aus evtl. Abweichungen schließen?

●● 18.4.10 Cowan-Reines-Versuch

Wieso erzeugt ein Kernreaktor so viele Antineutrinos, aber kaum Neutrinos? Wie viele Antineutrinos kommen z. B. aus einem 100 MW-Reaktor? Diskutieren Sie danach das Experiment von *Cowan* und *Reines* zum Nachweis des Antineutrinos aus der Reaktion $p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+$. Welche Kontrollen waren nötig, um andere Erklärungen auszuschließen?

●● 18.4.11 Graphit-Moderator

Durch eine dichte Graphitschicht kommen nur „eiskalte“ Neutronen mit Energien unterhalb $1,8 \cdot 10^{-3}$ eV hindurch. Was hat das mit der Gitterkonstanten (in c -Richtung) von $3,4 \text{ \AA}$ und der mikrokristallinen Struktur des Graphits zu tun?

●● 18.4.12 Einfangquerschnitt

Der **Einfangquerschnitt** von Neutronen durch Kerne nimmt mit der Neutronenenergie i . Allg. wie $E^{-1/2}$ ab. Warum? Über diesen Abfall lagern

sich steile Resonanzpeaks. Was bedeuten sie? H, Be, Cd haben große, D, C, O kleine Einfangquerschnitte für langsame Neutronen. Begründen Sie das und geben Sie Anwendungen an.

● 18.4.13 Sonnen-Neutrinos

Gibt es auf der Erde mehr Neutrinos oder Antineutrinos? Welche Teilchenart strahlt uns die Sonne zu und wie viele? Vergleichen Sie die Energie, die die Neutrinos und Antineutrinos aus einem Stern abführen, mit der normalen Strahlungsenergie. Diskutieren Sie das vermutliche Schicksal dieser Neutrinos.

● 18.4.14 Protonenzerfall

Kann sich z. B. das H-Atom zerstrahlen? Reichen die klassischen Erhaltungssätze für Energie, Impuls, Drehimpuls, Ladung aus, um die Paarbildung oder -vernichtung von $p + e^-$ auszuschließen?

● 18.4.15 Hyperonzerfall

Vergleichen Sie die folgenden Aussagen hinsichtlich ihrer empirisch oder theoretisch begründeten Sicherheit: „Es könnte sich im Prinzip jeden Morgen erweisen, dass die Sonne nicht mehr da ist. Das wird aber nie eintreten“, und „Es könnte sich im Prinzip alle 10^{-23} s erweisen, dass dieses Hyperon nicht mehr da ist. Das wird aber nie eintreten“.

● 18.4.16 Speicherring

Diskutieren Sie den Stoß (a) eines 6 GeV-Elektrons mit einem ruhenden Positron, (b) eines 3 GeV-Elektrons mit einem Positron, das ihm mit gleicher Energie entgegenkommt. Wie weit stimmt der Vergleich mit dem Stoß eines Autos gegen eine Mauer bzw. gegen ein entgegenkommendes Auto qualitativ und quantitativ? Wie groß ist die Bremsenergie (zur Teilchenerzeugung verfügbare Energie) in den Fällen (a) und (b)? Wie viel schneller müsste das Elektron im Fall (a) sein, damit die gleiche Bremsenergie herauskommt wie im Fall (b)?

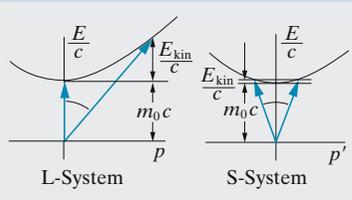


Abb. 18.57. Stoß eines schnellen Teilchens mit einem gleichartigen, im Laborsystem ruhenden Teilchen. Im Schwerpunktsystem ist die verfügbare Energie E'_{kin} viel geringer. Das liegt an der relativistischen Transformation des (zeitartigen) Impuls-Vierervektors $(p_1, p_2, p_3, iE/c)$. Das i hat dramatische geometrische Wirkung: In den Koordinaten $iE/c, p$ rotiert der Endpunkt des Vektors auf einem Kreis, in den Koordinaten $E/c, p$ auf einer Hyperbel

● 18.4.17 Ψ/J -Zerfall

Diskutieren Sie das Ereignis in Abb. 18.41 genauer. Lesen Sie speziell die Lebensdauer des erzeugten Teilchens ab (Maßstab beachten!). Wie mögen die eingezeichneten Fehlergrenzen der Messpunkte zustandekommen? Warum sind sie auf dem Peakgipfel so viel kleiner? Warum laden die entsprechenden Balken z. T. nach unten stärker aus?

● 18.4.18 Ein Zerfall oder zwei?

Bei einer Granate (A) sitzt die Sprengladung in einem Mantel, der aus drei Teilstücken (a, b, c) lose zusammengeschweißt ist, sodass sie bei der Detonation auseinander fliegen, jedes aber intakt bleibt und seine Energie gemessen werden kann. Bei einem anderen Typ (B) bleiben zwei Teilstücke (b, c) zunächst zusammen, bis sie etwas später durch eine weitere Explosivladung ebenfalls getrennt werden. Man misst die Energien der Stücke bei sehr vielen Explosionen. Kann man daraus feststellen, ob es sich um Typ A oder B handelt? Stört es dabei, wenn man nur das Stück a verfolgen kann?

● 18.4.19 Negative Ruhmasse

Wie kann man behaupten, das Quark sei schwerer als das Nukleon, wenn doch das Nukleon (und sogar das noch viel leichtere Pion aus mehreren Quarks bestehen soll? Vergleichen Sie mit der Situation im Kern. Was ist eigentlich Fusionsenergie? Wäre es energetisch aufwändiger, ein Quark-Antiquark aus dem Nichts zu machen, als ein Pion in seine Bestandteile (Quark-Antiquark) aufzubrechen?

● 18.4.20 Asinon

Gibt es einen physikalisch einigermaßen sinnvollen Weg, wie ein Teilchen mit negativer Masse entstehen könnte? Verhielte sich ein solches Teilchen, wenn eine Kraft darauf wirkt? Welche Gravitationskraft würde zwischen einem solchen Teilchen und einem normalen, bzw. zwischen zwei solchen Teilchen wirken? Wie würden die Teilchen auf diese Kräfte reagieren?

● 18.4.21 Tachyon

Wie würde sich ein Teilchen mit imaginärer Ruhmasse, ein **Tachyon**, verhalten, wenn man verlangt, dass es eine normale (reelle) Energie haben soll? Stichwort: Tscherenkow-Strahlung. Aus der Relativitätstheorie brauchen Sie, außer $E = mc^2$, nur die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

● 18.4.22 Back in time

Richard Feynman erzählt in seinem Nobelvortrag, wie er auf seine Graphenmethode kam: Eines Tages rief mich mein Physikprofessor *John Archibald Wheeler* an: „He, Feynman, ich weiß jetzt, warum alle Elektronen so exakt identisch sind!“ – „Nämlich ...?“ – „Es ist immer dasselbe Elektron! Es gibt überhaupt nur eins!“ – „Und warum denken wir, es gibt 10^{80} oder so?“ – „Ganz einfach: Es rennt furchtbar oft zeitlich im Zickzack. Jedes Mal wenn es von der Vergangenheit her wieder durch die Gegenwart kommt, denken wir, es ist ein neues Elektron ...“ – „... und wenn es aus der Zukunft kommt, denken wir, es

ist ein Positron?“ – „Bravo, machen Sie 'ne Theorie draus!“ – Zeichnen Sie den graphischen Fahrplan. Kann man Paarbildung und -vernichtung darstellen? Warum ist dabei mindestens ein Photon beteiligt? Wo liegen die Schwierigkeiten? Ist es vernünftig anzunehmen, dass ein Elektron, für das die Zeit rückwärts läuft, sich wie ein Positron verhält?

● 18.4.23 Quark confinement

Wenn Teilchen, z. B. Quarks, in einem Bereich vom Radius r (z. B. Nukleonenradius) eingesperrt sind, müssen sie einen bestimmten Mindestimpuls und eine Mindestenergie haben. Damit sie mit dieser kinetischen Energie nicht auseinander fliegen, muss eine Kraft da sein, die sie auf eben diesen Abstand r abbremst und zur Umkehr zwingt. Schätzen Sie diese Kraft unter der Annahme, dass sie unabhängig vom Abstand vom Zentrum oder von einem anderen Teilchen ist. Drücken Sie diese Kraft durch die Naturkonstanten h, c, m_H aus. Hätte man das Ergebnis auch aus einer einfachen Dimensionsbetrachtung voraussehen können? Schätzen Sie auch den Druck und die Schallgeschwindigkeit in einem solchen System.

● 18.4.24 Bohr-Modell für Quarks

Behandeln Sie die möglichen Drehimpulszustände eines Zweiquark-Systems (Mesons) in Anlehnung an das Bohr-Modell mit einer abstands-unabhängigen Kraft F_0 zwischen den Quarks. Prüfen Sie dabei, ob die Quarks relativistische Geschwindigkeiten haben oder nicht. Wenn ja,

Tabelle 18.11. Einige Mesonen und Mesonen-Resonanzen mit ihrer Ruheenergie (in GeV)

π^+	0,14	ρ^+	0,77
B^+	1,23	A_2^+	1,31
A_3	1,64	g^+	1,69
K^-	0,44	\bar{K}^{*-}	0,89
Q^-	1,3	K^{*-}	1,42
L^-	1,77	K^{*-}	1,78

beachten Sie den Zusammenhang zwischen Masse und Energie. Stellen Sie so ein **Massenspektrum** der Teilchen auf und vergleichen Sie mit den gemessenen Werten für Mesonen und Meson-Resonanzen (Tabelle 18.11).

●● **18.4.25 Dipolkräfte I**

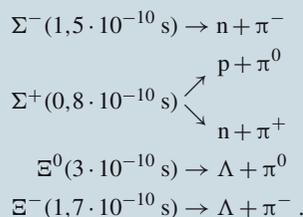
Vergleichen Sie nochmals die Massenwerte der Tabelle in der vorigen Aufgabe, diesmal in waagerechter Richtung. Ist das Verhalten der Massendifferenzen zwischen nebeneinander stehenden Teilchen verträglich mit der Annahme, die linken Zustände seien solche mit antiparallelen Spins der beiden Quarks, die rechten mit parallelen Spins? Vergleichen Sie mit entsprechenden Elektronenzuständen im Atom und schätzen Sie die magnetischen Wechselwirkungsenergien zwischen den rotierenden Ladungen. Wie müsste die Abstandsabhängigkeit der „starken magnetischen Dipolenergie“ sein? Ist diese Abhängigkeit vergleichbar mit dem elektrischen Fall? Beachten Sie dabei auch die Vorzeichen der Ladung, die hier wesentlich ist, nämlich der „Farbe“.

●● **18.4.26 Dipolkräfte II**

Elektronen, Nukleonen oder Quarks müssen je nach der Einstellung ihrer Spins, d.h. ihrer magnetischen Momente zueinander dem Gesamtsystem verschiedene Energien verleihen. Schätzen Sie die Größenordnungen dieser Energieunterschiede und ihre Auswirkungen. Sie verstehen dann manches, von der 21 cm-Linie des H-Atoms bis (annähernd) zum Massenunterschied zwischen den Mitgliedern eines Elementarteilchen-Multipletts, z. B. zwischen Proton und Neutron.

●● **18.4.27 Hyperonzerfall**

Hier sind die Zerfallsmöglichkeiten einiger Hyperonen mit deren Lebensdauern:



Erklären Sie diese Unterschiede zwischen den sonst so ähnlichen Mitgliedern eines Multipletts und zwischen den verschiedenen Multipletts.

●● **18.4.28 Wie viele Quarks gibt es?**

Bei energiereichen Elektron-Positron-Stößen entstehen Myonen und Hadronen. Welches Verhältnis zwischen den Erzeugungsraten dieser beiden Teilchensorten erwartet man in den verschiedenen Energiebereichen?

●● **18.4.29 Monopol-Kräfte**

Eine elektrische (e) und eine magnetische Elementarladung (p) liegen im Abstand d voneinander. Wie sieht das Gesamtfeld aus? Bestimmen Sie besonders seine Energiestromdichte (Poynting-Vektor S) und seine Impulsdichte $g = c^{-2}S$ (Begründung?). Wie sieht das g -Feld aus? Kann man ihm einen Gesamtdrehimpuls L zuordnen und welchen? Wie hängt L von r ab? Alle Drehimpulse müssen gequantelt sein. Was folgt daraus über die zulässigen Größen von e und p ? Wenn das System wirklich einen Drehimpuls hat, müsste es doch z.B. auf eine Kraft senkrecht zur Verbindungslinie wie ein Kreisel reagieren, nämlich präzedieren, d. h. nicht kippen, sondern seitlich ausweichen. Tut das System das, und mit welcher Präzessionsfrequenz? Entspricht das den Kreiselgesetzen?

●● **18.4.30 War es ein Monopol?**

In einem Stratosphärenballon in 40 km Höhe über Sioux City (Iowa) wurde ein Sandwich-Zähler aus mehreren durchsichtigen Plastikschichten (Lexan, insgesamt 8 mm) und Kernemulsionen der kosmischen Strahlung ausgesetzt. Eine einzige Spur zeichnete sich aus durch (1) sehr große Dicke (hohe Ionisierungsdichte), (2) sehr schwache Bremsung, (3) Fehlen von Tscherenkow-Strahlung. Die Brechzahl von Lexan ist $n \approx 1,5$.

●● **18.4.31 Neutrino-Oszillation**

Ob und wie ein Neutrino sich in ein anderes verwandeln kann, versteht man annähernd aus der Unschärferelation.

Wie genau ist der Impuls eines Teilchens festgelegt, von dem man weiß, dass es aus einer um x entfernten Quelle stammt? Wie kann sich das für ein Elektron auswirken, dessen Identität durch strenge Erhaltungssätze, u. A. für die Ladung, gesichert ist, und wie bei einem Teilchen, das seiner Identität nicht so sicher ist? Beachten Sie den relativistischen Energiesatz und die Größenordnung der evtl. Ruhmasse der Neutrinos.

● **18.5.1 K. o. durch ein Proton?**

Suga u. A. fanden für einen kosmischen Schauer, der aus einem einzigen Primärteilchen stammte, eine Energie von $4 \cdot 10^{21}$ eV. Drücken Sie diese Energie in anderen Einheiten aus; vergleichen Sie z. B. mit einem Vorschlaghammerschlag.

●● **18.5.2 Solarer Beschleuniger**

Besonders große **Sonnenflecken** erreichen Durchmesser von 50 000 km. In ihnen herrschen Magnetfelder bis 0,3 T. Große Flecken entstehen und vergehen in ca. 100 Tagen. Welche Energien kann ein solches Betatron geladenen Teilchen vermitteln?

●● **18.5.3 Tiefsee-Myonen**

Schätzen Sie die Energie kosmischer Teilchen oder Photonen aus ihrer Reichweite. Welche Komponente wird man in 4 000 m Wassertiefe noch finden?

● **18.5.4 Maximalenergie**

Drücken Sie die Maximalenergien kosmischer Teilchen in makroskopischen Einheiten aus. Wie groß ist ihre Masse, auf wie viel sind sie Lorentz-abgeflacht, um wie viel weicht ihre Geschwindigkeit noch von c ab (im Erdsystem gemessen); wie lange brauchen sie, um die Galaxis zu durchqueren (in ihrem eigenen System gemessen)?

● **18.5.5 Raumanzug**

Vergleichen Sie die Reichweiten der wichtigsten Teilchen im Strahlungsgürtel der Erde, nämlich 0,78 MeV-Elektronen und 150 MeV-Protonen. Wenn der äußere Strahlungsgürtel nur

Elektronen von höchstens 1 MeV enthält, welche Abschirmung müsste man für einen Raumfahrer vorsehen, der die Erde in der Äquatorebene verlassen soll? Benutzen Sie die Daten von Abb. 18.26 und vernünftige Werte für Raketengeschwindigkeiten.

●● 18.5.6 Strahlungsgürtel

Man zählt im **van Allen-Gürtel** einen Fluss schneller Protonen (> 100 MeV) von etwa $10^8 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Wie macht man das? Prüfen Sie die Angaben über Durchdringungsvermögen und Dosis in Abschn. 18.5.3 nach. Wie groß ist die Teilchenzahldichte der schnellen Protonen? Versuchen Sie die Lebensdauer der Gürtel-Protonen zu schätzen. Wie groß muss die Nachlieferung sein? Diskutieren Sie die astronautischen Konsequenzen der Existenz der Strahlungsgürtel.

● 18.5.7 Kosmische Schauer

Warum bilden kosmische Primärteilchen ganze **Schauer** von Sekundärteilchen, warum kommt z. B. bei radioaktiven α -Teilchen nichts Entsprechendes vor?

● 18.5.8 Unser Strahlungsschirm

Bis zu welchen Energien unterliegen die kosmischen Teilchen dem **Breiteneffekt**, d. h. kommen nur in den Polarzonen an? Diskutieren Sie die Bahn eines Teilchens, das weit draußen vom Erdmagnetfeld eingefangen wird. Welcher Larmor-Radius ist als Grenze zwischen „Einfang“ und „Freiheit“ anzusetzen? Das galaktische Magnetfeld hat etwa $5 \cdot 10^{-10}$ T. Kann die Galaxis alle kosmischen Teilchen magnetisch speichern? Es handelt sich in allen Fällen um relativistische Teilchen. An den Formeln für die Larmor-Präzession ändert sich nur, dass die Masse geschwindigkeitsabhängig wird.

● 18.5.9 Energien im Weltall

Vergleichen Sie die Gesamtenergiedichte der kosmischen Strahlung mit anderen Energiedichten, z. B. der thermischen Strahlungsenergie (abgesehen vom lokalen Effekt der Sonne), der kinetischen Energie der Materie, der Energiedichte des galaktischen Magnetfeldes, der inter- und intrastellaren Gravitationsenergie.

● 18.5.10 Aufladung

Nach Abschn. 18.5.1 fällt auf 1 cm^2 Erdoberfläche pro Sekunde im Mittel annähernd ein kosmisches Primärproton auf. Wie schnell lädt sich dadurch die Erde auf, wie steigt ihr Potential an? Kann es so hoch steigen, dass keine kosmischen Teilchen mehr durchkommen? Wenn nein, warum nicht?

●● 18.5.11 Space tennis

Ein Magnet mit seinem homogenen Feld bewegt sich nach rechts. Von dort kommt ihm ein geladenes Teilchen entgegen, dringt ein Stück in das Magnetfeld ein und verlässt es wieder. Mit welcher Geschwindigkeit und Energie tut es das? Überlegen Sie im Bezugssystem des Magneten und im „Laborsystem“. Wie ist die Lage, wenn der Magnet auch nach links fliegt?

●● 18.5.12 Fermi-Beschleuniger

Nach *Fermi* könnten kosmische Teilchen durch bewegte interstellare Gaswolken, die Magnetfelder enthalten, auf sehr hohe Energien beschleunigt worden sein. Ist diese Hypothese sinnvoll?

Statistische Physik

■ Inhalt

19.1	Statistik der Ensembles	1045
19.2	Physikalische Ensembles	1058
19.3	Quantenstatistik	1067

▼ Einleitung

Kein Mensch, kein Computer kann verfolgen, was jedes einzelne Molekül in Ihrem Zimmer oder auch nur jeder Tropfen in Ihrer Dusche tut. Was sollte man auch mit solchen Informationsmassen? Statistische Aussagen über Mittelwerte und Abweichungen davon sind alles, was man erwarten und verarbeiten kann. Man erhält sie indirekt makroskopisch, z. B. aus Druck und Temperatur, oder direkt mikroskopisch, aus dem mechanischen Verhalten der vielen Teilchen. *Maxwell, Boltzmann, Gibbs* haben beide Ansätze unter einen Hut gebracht und Methoden entwickelt, die u. A. auch in der Quantenphysik fruchtbar sind.



„... auf die weite Perspektive einer Anwendung... auf die Statistik der belebten Wesen, der Gesellschaft... mag hier nur mit einem Wort hingewiesen werden.“

Ludwig Boltzmann

19.1 Statistik der Ensembles

Das Gleichnis, mit dem wir uns zunächst beschäftigen wollen, scheint mit Physik, Molekülen, Wärme usw. überhaupt nichts zu tun zu haben. Wer es gründlich durchdenkt, hat trotzdem die gesamte Thermodynamik und Statistische Physik in der Hand – dazu aber auch die Anwendungen der Statistik in Informationstheorie, Molekulargenetik und anderen Gebieten. Das ist der Nutzen möglichst allgemein gefasster Begriffsbildungen, allerdings erkauft mit einer gewissen Strapazierung des Abstraktionsvermögens.

19.1.1 Zufallstexte

Eine Herde Affen hat einen riesigen Sack mit Buchstabennudeln entdeckt, und jeder Affe vergnügt sich damit, die Buchstaben, die er einen nach dem anderen blind herausgreift, so wie sie kommen zu „Texten“ aneinander zu reihen. Auch Worttrenner (Spatien) sind in dem Sack. Kann dabei der Hamlet-Monolog herauskommen oder wenigstens TO BE OR NOT TO BE? Wir fragen also nach der Wahrscheinlichkeit für das zufällige Entstehen einer bestimmten Folge von Symbolen, in unserem Beispiel 18 (Spatien einbegriffen).

Wenn der Sack im Ganzen M Symbole enthält und das i -te Symbol M_i -mal vorkommt, ist die Wahrscheinlichkeit, dieses i -te Symbol zu ziehen, $p_i = M_i/M$ (ideale Umstände: gut geschüttelt, kein Klumpen oder Verhaken, so viele Nudeln, dass sich kein Symbol erschöpft). Die Wahr-

scheinlichkeit für „TO BE OR NOT TO BE“ ist dann $p_B^2 p_E^2 p_N p_O^4 p_R^3 p_T^5 p_{\square}^5$ (Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ereignisse multiplizieren sich).

Hat der Nudelfabrikant eine vernünftige Häufigkeitsverteilung eingehalten, wie sie für die meisten Sprachen ungefähr zutrifft, etwa

$$p_{\square} = 0,20; \quad p_E = 0,15; \quad p_N = p_O = p_R = p_T = 0,05; \quad (19.1)$$

$$p_B = 0,02,$$

so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für die Sequenz TO BE OR NOT TO BE als

$$P_{\text{seq}}(\text{TO BE OR NOT TO BE}) = p_B^2 p_E^2 p_N p_O^4 p_R^3 p_T^5 p_{\square}^5 = 5,6 \cdot 10^{-21}.$$

Genauso häufig werden allerdings auch Sequenzen auftreten wie O EBBT EROTONOT und viele andere noch weniger sinnvolle Permutationen der gleichen 13 Buchstaben BBEENOOOORTTT, durchsetzt mit 5 Spatien.

Andere Zeilen, die aus 18 anderen Symbolen bestehen, haben andere Wahrscheinlichkeiten. Die häufigste überhaupt ist ganz leer, weil das Spatium, wie angenommen, das häufigste Symbol ist. Die Wahrscheinlichkeit der Leerzeile ist

$$P_{\text{seq}}(\square_{18}) = p_{\square}^{18} = 2,6 \cdot 10^{-13}.$$

Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Sequenz, wie TO BE OR NOT TO BE, die aus n_1 Symbolen der ersten Art (A), n_2 der zweiten Art (B) usw. besteht – wobei einige der n_i offenbar auch Null sein können –

$$P_{\text{seq}}(n_1, n_2, \dots) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots = \prod_{i=1}^{27} p_i^{n_i}. \quad (19.2)$$

19.1.2 Wahrscheinlichkeit einer Komposition

Werden die Affen also überwiegend Leerzeilen legen oder allenfalls noch EEEEEEEEEEEEEEEEEEE (Wahrscheinlichkeit $1,5 \cdot 10^{-15}$), statt etwas bunter gemischter Sachen? Wir verlangen jetzt also nicht mehr eine bestimmte Sequenz wie TO BE OR NOT TO BE, sondern sind schon mit der **Komposition** oder *Bruttoformel* $B_2 E_2 N O_4 R T_3 \square_5$ zufrieden. Einige Sequenzen, die diese Komposition realisieren, haben wir schon aufgezählt. Wie viele gibt es überhaupt?

An sich kann man 18 Symbole auf

$$18! \approx 6,4 \cdot 10^{15}$$

verschiedene Arten anordnen (es gibt $N!$ Permutationen von N Elementen). Aber nicht alle diese Permutationen sind wirklich verschieden. Sie wären es, wenn man die beiden B's individualisierte, z. B. als B' und B'', also TO B'E OR NOT TO B''E als verschieden von TO B''E OR NOT TO B''E ansähe. Wenn wir die drei T's individualisierten, ergäben sich $3! = 6$ Fälle, die eigentlich identisch sind. Bei Individualisierung aller Symbole

(zwei B, zwei E, vier O, drei T, fünf □) zerfiele TO BE OR NOT TO BE in

$$2! 2! 4! 3! 5! = 69\,120 \text{ Fälle.}$$

Alle diese Fälle sind unter den 18! Permutationen enthalten, zählen aber eigentlich nur einmal. Genau so viele Fälle stecken in O EBBT EROTO-NOT. Wir können damit die Anzahl der *wirklich verschiedenen* Sequenzen angeben, die die *Komposition* $B_2E_2NO_4RT_3\Box_5$ realisieren. Es sind

$$\frac{18!}{2! 2! 4! 3! 5!} \approx \frac{6,4 \cdot 10^{15}}{69\,120} \approx 0,93 \cdot 10^{11}.$$

Dies lässt sich leicht verallgemeinern: Eine *Komposition* aus insgesamt N Symbolen, nämlich n_1 Symbolen der ersten, n_2 der zweiten Art usw., ist durch eine Anzahl

$$\frac{N!}{n_1! n_2! \dots} \quad \left(\text{wobei } \sum n_i = N \right) \quad (19.3)$$

von *verschiedenen* Sequenzen realisiert.

Dieses Ergebnis ist so fundamental wichtig, dass Sie sich prüfen sollten, ob Ihnen sein Zustandekommen vollkommen glasklar ist.

Wenn es nur zwei Symbole gibt, die n_1 - bzw. n_2 -mal vertreten sein sollen, wobei $n_1 + n_2 = N$ sein muss, wird aus (19.3)

$$\frac{N!}{n_1! n_2!} = \frac{N!}{n_1! (N - n_1)!}.$$

Wenn man das ausführlich schreibt $\frac{N(N-1)(N-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots (n_1-1) \cdot n_1 \cdot 1 \cdot 2 \dots (N-n_1-1) \cdot (N-n_1)}$ und kürzt, was sich kürzen lässt, so erkennt man, dass es sich einfach um den Binomialkoeffizienten handelt:

$$\frac{N!}{n_1! (N - n_1)!} = \frac{N(N-1)\dots (N - n_1 + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n_1} = \binom{N}{n_1}.$$

Man nennt daher den allgemeinen Ausdruck (19.3) auch einen **Multinomialkoeffizienten**.

Die *Komposition* $B_2E_2NO_4RT_3\Box_5$ lässt sich durch $18!/(2! 2! 4! 3! 5!) = 0,93 \cdot 10^{11}$ verschiedene Sequenzen realisieren, von denen jede einzelne die gleiche Wahrscheinlichkeit $p_2^2 p_5^2 p_{14}^4 p_{15}^4 p_{18}^3 p_{20}^3 p_{27}^5 = 5,6 \cdot 10^{-21}$ hat. Die Wahrscheinlichkeit dieser *Komposition* $B_2E_2NO_4RT_3\Box_5$ ist also

$$P_{\text{komp}}(B_2E_2NO_4RT_3\Box_5) = 0,93 \cdot 10^{11} \cdot 5,6 \cdot 10^{-21} = 5,2 \cdot 10^{-10}.$$

Obwohl die *Sequenz* EEEEEEEEEEEEEEEEEEE fast 10^6 -mal häufiger ist als die *Sequenz* TO BE OR NOT TO BE, ist die *Komposition* E_{18} , da sie nur durch eine einzige Sequenz repräsentiert wird, viel (fast Millionen Mal) seltener als die *Komposition* $B_2E_2NO_4RT_3\Box_5$:

$$P_{\text{komp}}(E_{18}) = P_{\text{seq}}(E_{18}) = p_5^{18} = 1,5 \cdot 10^{-15}.$$

Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit für eine *Komposition*, bestehend aus n_i Symbolen der i -ten Art ($i = 1, 2, \dots, 27$)

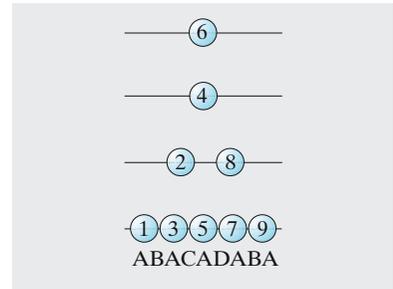


Abb. 19.1. Diese Verteilung wird codiert durch die Sequenz ABACADABA. Man nenne die Zustände, von unten angefangen, A, B, C, D und schreibe für die (hier noch unterscheidbaren) Teilchen der Reihe nach ihren Zustand auf

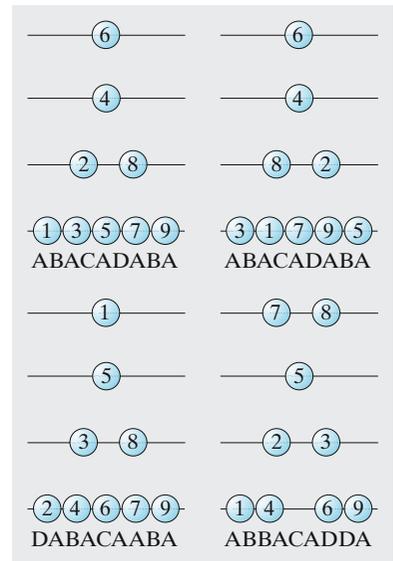


Abb. 19.2. Vertauschung von Teilchen innerhalb eines Zustandes ändert weder den Mikrozustand noch die codierende Sequenz. Vertauschung von Teilchen aus zwei verschiedenen Zuständen ändert Mikrozustand und Sequenz, aber Makrozustand und Komposition bleiben erhalten. Sie ändern sich erst durch unkompenzierten Sprung eines Teilchens in einen anderen Zustand

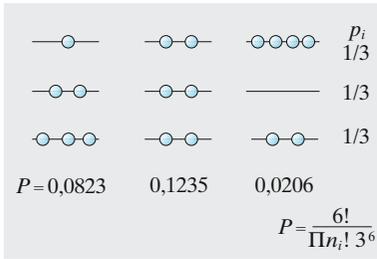


Abb. 19.3. Bei gleichen Zustandswahrscheinlichkeiten p_i ist die gleichmäßige Verteilung am wahrscheinlichsten. Man sieht das z. B. daran, dass ein Sprung eines Teilchens in einen anderen Zustand die Wahrscheinlichkeit nur ganz wenig ändert, wenn man von der wahrscheinlichsten Verteilung ausgeht (*links*). Die rechte Verteilung, von der mittleren durch zwei Sprünge erreichbar, weicht fast viermal mehr von deren Wahrscheinlichkeit ab als die linke

$$P_{\text{komp}}(n_1, n_2, \dots) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots} p_1^{n_1} p_2^{n_2} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{27} n_i!} \prod_{i=1}^{27} p_i^{n_i}. \quad (19.4)$$

Die Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion von 27 Variablen n_i , deren Freiheit zum Variieren allerdings durch die *Nebenbedingung*

$$n_1 + n_2 + \dots = \sum_{i=1}^{27} n_i = N \quad (19.5)$$

etwas eingeschränkt ist.

19.1.3 Die wahrscheinlichste Komposition

Die häufigste *Sequenz* ist die ganz aus dem häufigsten Symbol bestehende. Als *Komposition* ist sie aber keineswegs am häufigsten. Welches ist denn die häufigste Komposition? Mathematisch: Bei welchen Werten von n_1, n_2, \dots , die der Nebenbedingung (19.5) genügen, hat die Funktion P_{komp} ihr Maximum?

Bevor wir dieses Problem angehen, legen wir uns die Formeln etwas bequemer zurecht. Fakultäten sind unhandliche Angelegenheiten, wie man feststellt, sowie man praktisch mit ihnen zu tun bekommt. Es gibt zwei Haupttricks, um den Umgang mit ihnen zu erleichtern:

- Reduktion der Größenordnung durch Logarithmieren:

$$\log N! = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots N) = \sum_{\nu=2}^N \log \nu.$$

Zum Beispiel ist ${}^{10}\log 18! = 15,82$ schon viel handlicher als $18! = 6,4 \cdot 10^{15}$. Man könnte zur Reduktion statt der \log -Funktion auch jede andere sehr flach verlaufende Funktion nehmen. Der Logarithmus hat aber, auf Wahrscheinlichkeiten angewandt, einen besonderen Vorteil: Da sich die Wahrscheinlichkeiten zweier unabhängiger Ereignisse, die ein Gesamtergebnis ausmachen, *multiplizieren*, so *addieren* sich ihre Logarithmen:

$$\log(P_1 \cdot P_2) = \log P_1 + \log P_2.$$

Welche Basis für den Logarithmus gewählt wird, ist dabei noch nicht festgelegt. Änderung der Basis bedeutet Auftreten eines Faktors vor dem Logarithmus. Wir können also auch den bequemsten Logarithmus, den natürlichen, benutzen und den willkürlichen Faktor mit hinschreiben. In dieser Form heißt der Wahrscheinlichkeitslogarithmus **Entropie** S :

$$S = C \ln P.$$

Speziell in der Physik gibt man dem Faktor C sogar eine physikalische Dimension (Energie/Grad) und identifiziert ihn mit der Boltzmann-Konstante k . Die physikalische Nutzenanwendung von S ist aber nur eine von vielen möglichen.

- Analytischmachen von $N!$ mittels der **Stirling-Formel**

$$N! \approx \frac{N^N}{e^N} \sqrt{2\pi N}, \tag{19.6}$$

die für einigermaßen große N sehr genau gilt.
Beide Verfahren kann man kombinieren:

$$\ln N! \approx N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln(2\pi N). \tag{19.7}$$

Unter dem Logarithmus spielen die kleinen Ungenauigkeiten der Stirling-Formel eine so geringe Rolle, dass man sich für größere N schon mit den beiden ersten Gliedern begnügen kann:

$$\ln N! \approx N \ln N - N. \tag{19.8}$$

Angewandt auf die Wahrscheinlichkeit von Kompositionen (19.4) ergibt die Näherungsformel (19.8)

$$\begin{aligned} \ln P_{\text{komp}}(n_1, n_2, \dots) &= \ln N! - \ln n_1! - \ln n_2! - \dots + \ln p_1^{n_1} + \ln p_2^{n_2} + \dots \\ &= N \ln N - N - \sum n_i \ln n_i + \sum n_i + \sum n_i \ln p_i. \end{aligned}$$

Da $\sum n_i = N$ ist, heben sich das 2. und das 4. Glied weg:

$$\ln P_{\text{komp}}(n_1, n_2, \dots) = N \ln N - \sum n_i \ln n_i + \sum n_i \ln p_i. \tag{19.9}$$

Bei welchen Werten n_1, n_2, \dots wird P_{komp} maximal? Wir können das feststellen, indem wir von irgendeiner Verteilung ausgehen und sie etwas abändern, z. B. ein A durch ein B ersetzen. Dann geht n_1 über in $n_1 - 1$ und n_2 in $n_2 + 1$. Die Wahrscheinlichkeiten P vor und P' nach der Änderung sind, bis auf Faktoren, die ungeändert bleiben

$$P \sim \frac{p_1^{n_1} p_2^{n_2}}{n_1! n_2!}, \quad P' \sim \frac{p_1^{n_1-1} p_2^{n_2+1}}{(n_1 - 1)! (n_2 + 1)!}. \tag{19.10}$$

Ihr Verhältnis ist

$$\frac{P'}{P} = \frac{p_2 n_1}{p_1 (n_2 + 1)}. \tag{19.11}$$

Wenn wir uns der wahrscheinlichsten Verteilung nähern, darf sich P bei jeder denkbaren Änderung der Verteilung nur noch wenig ändern, d. h. der Faktor P'/P muss sich der 1 nähern. Für die wahrscheinlichste Verteilung selbst muss dieser Faktor 1 sein für jedes Buchstabenpaar i, k . Bei den riesigen Zahlen n_i , die in der Physik interessieren, spielt die 1 im Nenner keine Rolle, und es muss sein

$$\frac{n_i}{p_i} = \frac{n_k}{p_k} \quad \text{oder} \quad n_i \sim p_i. \tag{19.12}$$

Der Proportionalitätsfaktor ergibt sich einfach daraus, dass $\sum n_i = N$ sein muss und immer $\sum p_i = 1$ ist:

$$n_{i0} = N p_i. \tag{19.12'}$$

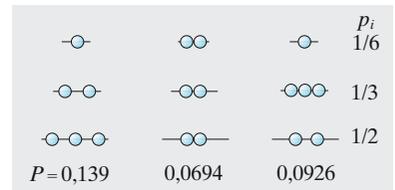


Abb. 19.4. Wenn die Zustandswahrscheinlichkeiten p_i verschieden sind, ist die Verteilung mit $n_i \sim p_i$ am wahrscheinlichsten. Die Wahrscheinlichkeit anderer Verteilungen ist umso kleiner, je mehr und je drastischere Sprünge zu ihnen führen

Am wahrscheinlichsten ist die Komposition, in der die Buchstaben die gleichen relativen Häufigkeiten haben wie im Sack.

Wie wahrscheinlich ist nun die wahrscheinlichste Komposition? Durch Einsetzen der Symbolhäufigkeiten n_{i0} nach (19.12) in die Entropieformel (19.9) findet man

$$\begin{aligned} S_{\text{Max}} &= \ln P_{\text{komp Max}} \\ &= N \ln N - \sum n_{i0} \ln(N p_i) + \sum n_{i0} \ln p_i \\ &= N \ln N - \ln N \sum n_{i0} = 0. \end{aligned} \quad (19.13)$$

Die wahrscheinlichste Komposition tritt danach mit der Wahrscheinlichkeit 1, also mit Sicherheit auf. Dies ist natürlich nicht ganz wörtlich zu nehmen: Andere, sehr ähnliche Kompositionen haben auch eine gewisse Wahrscheinlichkeit des Auftretens. Die Diskrepanz stammt aus der Vernachlässigung des dritten Gliedes der Stirling-Formel. Für *Vergleiche* von Entropien ist sie praktisch ohne Belang. Die (mit dem gleichen additiven Fehler behaftete) Entropie der Komposition $\text{B}_2\text{E}_2\text{NO}_4\text{RT}_3\Box_5$ ergibt sich aus (19.9) zu

$$S(\text{B}_2\text{E}_2\text{NO}_4\text{RT}_3\Box_5) = -14,2.$$

Die wahrscheinlichste Komposition, $\text{BE}_4\text{N}_2\text{O}_2\text{R}_2\text{T}_2\Box_5$, repräsentiert durch Sequenzen wie O ET BONNE TERRE oder RETTER OBEN ONE, ist also nach (19.13) $e^{14,2} = 1,6 \cdot 10^6$ -mal wahrscheinlicher als $\text{B}_2\text{E}_2\text{NO}_4\text{RT}_3\Box_5$.

19.1.4 Schwankungserscheinungen

Der Abfall der Wahrscheinlichkeit bei einer Abweichung von der wahrscheinlichsten Komposition ist in erster Linie durch N bestimmt, das z. B. in (19.9) als Faktor auftritt. Betrachtet man nicht 18 Symbole, sondern 1 800, so wird die Schärfe des Maximums enorm. Multipliziert man alle Zahlen (die n_i und N) mit einem Faktor f , so ist leicht zu zeigen, dass sich dabei die Entropie jeder Komposition ebenfalls mit f multipliziert:

$$\begin{aligned} S(fn_i) &= fN \ln fN - \sum fn_i \ln fn_i + \sum fn_i \ln p_i \\ &= fN \ln N - f \sum n_i \ln n_i + f \sum n_i \ln p_i = fS(n_i). \end{aligned}$$

Das heißt, dass sich alle Entropieabstände auch mit f vervielfältigen. Für $N = 1\,800$ ist die Entropiedifferenz zwischen der wahrscheinlichsten Komposition und $\text{B}_{200}\text{E}_{200}\text{N}_{100}\text{O}_{400}\text{R}_{100}\text{T}_{300}\Box_{500}$ schon 425, also ist diese Komposition $e^{425} \approx 10^{185}$ -mal seltener als die wahrscheinlichste, d. h. völlig ausgeschlossen. Der Physiker aber hat es nicht mit 1 800, sondern mit 10^{18} und viel mehr Symbolen, nämlich Teilchen zu tun.

Abweichungen welcher Größenordnung von der wahrscheinlichsten Verteilung kann man vernünftigerweise bei hohen N noch erwarten? Eine Verteilung weiche von der wahrscheinlichsten ab, d. h. ihre Besetzungszahlen seien nicht n_{i0} , sondern $n_i = n_{i0} + v_i$. Bei sehr kleinen Abweichungen v_i ändert sich S praktisch nicht; das ist das Kennzeichen

∞	∞	∞	p_i
○○○○○○○	○○○○○○○	○○○○○○○	1/6
○○○○○○○○○	○○○○○○○○○	○○○○○○○○○	1/3
○○○○○○○○○○○	○○○○○○○○○○○	○○○○○○○○○○○	1/2
$P = 0,0434$	0,0507	0,0289	

Abb. 19.5. Je mehr Teilchen vorhanden sind, desto ausgeprägter wird die Überlegenheit der wahrscheinlichsten Verteilung, wenn man gleiche *prozentuale* Abweichungen von ihr vergleicht. Ein Sprung eines einzelnen Teilchens dagegen macht immer weniger aus und in der Grenze $N \rightarrow \infty$ gar nichts mehr, wenn man von der wahrscheinlichsten Verteilung ausgeht

der wahrscheinlichsten Verteilung. S muss also keine lineare, sondern eine quadratische Funktion der v_i sein:

$$S = S_{\text{Max}} - \sum a_i v_i^2$$

(nach unten offenes Paraboloid). Wenn wir alle Besetzungen, also auch die Abweichungen v_i mit f multiplizieren, muss sich auch $S_{\text{Max}} - S$ mit f multiplizieren. Die Koeffizienten müssen also bis auf einen konstanten Faktor gleich n_{i0}^{-1} sein. Dieser Faktor ist $\frac{1}{2}$:

$$S = S_{\text{Max}} - \frac{1}{2} \sum \frac{v_i^2}{n_{i0}}$$

oder

$$P = P_{\text{Max}} e^{-\frac{1}{2} \sum v_i^2 / n_{i0}} = P_{\text{Max}} \prod e^{-\frac{1}{2} v_i^2 / n_{i0}}. \quad (19.14)$$

Der Wahrscheinlichkeitsberg wird gebildet durch ein Produkt von **Gauß-Funktionen** $e^{-\frac{1}{2} v_i^2 / n_{i0}}$, für jede „Richtung“ n_i eine. Die Breite des Gauß-Berges in der n_i -Richtung, gegeben durch die Standardabweichung der Gauß-Funktion (Abschn. 1.1.7), ist

$$\Delta n_i = \sqrt{n_{i0}}. \quad (19.15)$$

Abweichungen vom wahrscheinlichsten Wert n_{i0} haben noch eine annehmbare Chance vorzukommen, wenn sie von der Größenordnung Δn_i oder kleiner sind. Wesentlich größere Abweichungen sind praktisch ausgeschlossen. Ist $n_{i0} = 100$, so wird die wahrscheinlich vorkommende Anzahl n_i etwa im Bereich 90 bis 110 liegen. Ist dagegen $n_{i0} = 10^{18}$, so kommen nur Schwankungen um 10^9 , d. h. etwa um ein Milliardstel des wahrscheinlichsten Wertes vor. Abgesehen von solchen i. Allg. nicht einmal messbaren Schwankungen ist also die wahrscheinlichste Komposition die einzige, die überhaupt realisiert werden kann.

Obwohl oder gerade weil alles völlig zufällig zugeht, gibt es für große N (bis auf Schwankungen) nur *eine* ganz bestimmte Textkomposition. Das klingt fast unglaublich, sagt aber im Grunde nichts anderes, als dass unter 6 000 Würfeln mit einem Würfel ziemlich genau vorauszusagen ist, dass jede Zahl tausendmal fallen wird (oder besser $1\,000 \pm 30$ -mal). Die Quadratwurzel-Abhängigkeit der Schwankungsgröße von der Teilchenzahl folgt übrigens auch aus der *Poisson*-Verteilung (Abschn. 18.2.3).

19.1.5 Die kanonische Verteilung

Bis auf diese Bemerkungen über die Wahrscheinlichkeit von Schwankungen haben bisher scheinbar die handgreiflichen Ergebnisse den Aufwand kaum gelohnt. Dass *der* Text am wahrscheinlichsten ist, dessen Buchstabenverteilung der im Sack entspricht, konnte man sich sowieso denken. Jetzt wird es interessanter. Wir führen eine neue Bedingung ein, nämlich dass die Textzeilen wie gute Druckzeilen alle genau die gleiche geometrische Länge haben sollen. Wir sprechen in Zukunft von der Zeilen-„Breite“ B . Die Buchstaben haben individuell verschiedene Breiten, z. B.

ist I sicher schmaler als J, dies schmaler als M. Sei b_i die Breite des i -ten Symbols, dann dürfen also nur solche Anzahlen n_i der verschiedenen Symbole in einer Zeile verwendet werden, dass die Gesamtbreite der Zeile den vorgegebenen Wert B hat:

$$\sum_i n_i b_i = B. \quad (19.16)$$

Die Affen werden natürlich nicht sorgfältig ausrechnen oder ausprobieren, ob die Breite stimmt; auch haben sie keinen „Durchschuss“ zum nachträglichen Korrigieren. Wir erkennen einfach nur Zeilen an, die den Breitenbedingungen genügen und verwerfen alle anderen, die die Affen außerdem geschrieben haben.

Wie diese zusätzliche Forderung die Art der entsprechenden Texte und besonders die wahrscheinlichste Komposition beeinflusst, ist nicht so leicht intuitiv vorauszusagen. Wenn das Verhältnis zwischen Breite B und Buchstabenanzahl N klein ist, werden die schmalen Buchstaben bevorzugt sein, also im Text relativ häufiger auftreten als im Sack. Außerdem ist zu bedenken, dass schmale Buchstaben günstig sind, weil sie mehr Möglichkeiten zum Ausgleich der Gesamtlänge bieten; jeder Modelleisenbahner weiß das. Wie sich das quantitativ auswirkt, kann nur die Rechnung zeigen.

Wir variieren also wieder die Besetzungen n_i ein wenig (um v_i) und stellen die Bedingung fest, unter der sich P oder $\ln P$ dabei nicht ändert. Das ist die Gleichgewichtsbedingung. Eine Funktion $f(n_i)$ ändert sich dabei um $v_i \partial f / \partial n_i$, z. B. das Glied $n_i \ln n_i$ in (19.9) um $(\ln n_i + n_i/n_i)v_i$. Beachtet man, dass $\sum v_i = 0$, dann wird die Änderung

$$\delta \ln P = \sum v_i (\ln p_i - \ln n_i). \quad (19.17)$$

Diese Änderung soll Null sein, wie auch immer man die v_i wählt. Das ist eigentlich nur möglich, wenn die Faktoren aller v_i verschwinden. Allerdings sind die v_i nicht ganz frei wählbar. Wegen der Konstanz von N und der Breite B muss sein

$$\delta N = \sum v_i = 0, \quad \delta B = \sum b_i v_i = 0. \quad (19.18)$$

Man könnte also die v_i bis auf zwei als frei ansehen und diese letzten dann so bestimmen, dass die Nebenbedingungen (19.18) erfüllt sind. Bequemer ist folgender von *Lagrange* erfundene Trick: Da $\delta N = 0$ und $\delta B = 0$, kann man die Ausdrücke (19.18) getrost mit beliebigen Faktoren α und β multiplizieren und zu $\delta \ln P$ addieren, und das Ergebnis muss Null bleiben:

$$\begin{aligned} \sum v_i (\ln p_i - \ln n_i) + \alpha \sum v_i + \beta \sum b_i v_i \\ = \sum v_i (\ln p_i - \ln n_i + \alpha + \beta b_i) = 0. \end{aligned} \quad (19.19)$$

Jetzt ist die Unfreiheit der letzten beiden v_i auf α und β abgewälzt, und jetzt müssen wirklich alle Faktoren der v_i verschwinden:

$$-\ln n_i + \ln p_i + \alpha + \beta b_i = 0, \quad \text{d. h.} \quad n_i = p_i e^{\alpha} e^{\beta b_i}. \quad (19.20)$$

α wird dadurch identifiziert, dass $\sum n_i = N$ sein muss:

$$\sum n_i = e^{\alpha} \sum p_i e^{\beta b_i} = N \rightarrow e^{\alpha} = \frac{N}{\sum p_i e^{\beta b_i}}.$$

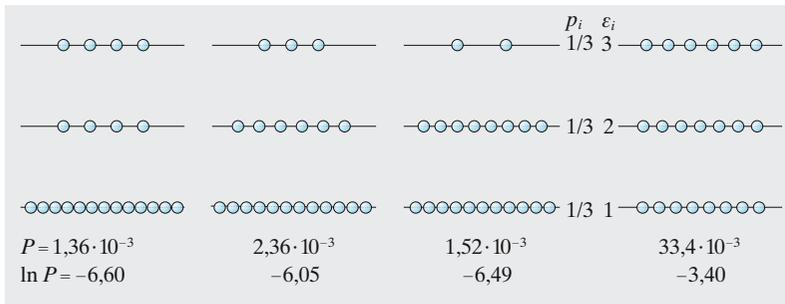


Abb. 19.6. Hier kommt die Bedingung konstanter Gesamtenergie $W = \sum n_i \varepsilon_i$ hinzu. Um sie zu respektieren, darf man bei der Suche nach der wahrscheinlichsten Verteilung nicht mehr ein Teilchen z. B. höher springen lassen, sondern gleichzeitig muss (im dargestellten Fall äquidistanter Zustände) ein anderes Teilchen tiefer springen (natürlich nicht zwischen den gleichen Zuständen). Dann erweist sich die exponentielle Verteilung als die wahrscheinlichste (zweites Teilbild von links). Die Verteilung ganz rechts ist zwar noch wahrscheinlicher, hat aber eine andere Gesamtenergie

Der Nenner $\sum p_i e^{\beta b_i}$ charakterisiert die ganze Situation (Buchstabenhäufigkeit und Breiten) so vollständig, dass er eine eigene Bezeichnung verdient: Man nennt ihn **Zustandssumme** oder **Verteilungsfunktion** (engl.: **partition function**):

$$Z = \sum p_i e^{\beta b_i} \tag{19.21}$$

Also kann (19.20) umgeschrieben werden

$$n_i = \frac{N}{Z} p_i e^{\beta b_i} \tag{19.22}$$

Im Grunde ist β ganz analog durch die gegebene Gesamtbreite B definiert:

$$B = \sum b_i n_i = \frac{N}{Z} \sum b_i p_i e^{\beta b_i} \tag{19.23}$$

aber die Summation ist praktisch meist schwierig. Deshalb lässt man den **Verteilungsmodul** β meist stehen, eingedenk dessen, dass er auf eine komplexe Weise mit der Breite B zusammenhängt. Es existiert ein allerdings etwas unübersichtlicher Zusammenhang:

$$B = N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \tag{19.24}$$

Man erhält dies, wenn man beachtet, dass jedes Glied der Zustandssumme (19.21), nach β differenziert, ein Glied von (19.23) ergibt.

Die Verteilung (19.22) der Symbolzahlen heißt **Boltzmann-Verteilung** oder *kanonische Verteilung*. Wie man sieht, bevorzugt sie die schmalen bzw. die breiten Buchstaben über ihre *a priori*-Häufigkeit p_i hinaus, je nachdem ob β negativ oder positiv ist. Welches Vorzeichen β hat, kann man von vornherein nicht sagen; es hängt von der Struktur des „Spektrums“ der vorhandenen Buchstabenbreiten b_i ab. Wären z. B. Spatien von verschiedener Breite vorhanden, etwa Bandnudelstücke, die auch sehr lang sein können, *ohne dass eine obere Grenze für die b_i -Werte existiert*, ist leicht einzusehen, dass mit einem positiven β nichts Vernünftiges herauskommen würde, da z. B. die Summe Z dann unendlich groß würde. Für ein nach oben unbeschränktes Breitenspektrum (dies ist das Übliche in der

Wir werden genau dieses Beispiel als **harmonischen Oszillator** wiedererkennen, und zwar als quantenmechanischen Oszillator, der bei $B \gg Nb$ in den klassischen Grenzfall übergeht. (19.26) ist im Wesentlichen das **Planck-Strahlungsgesetz**. Nb ist die Nullpunktsenergie.

19.1.7 Mischungsentropie

Eine kleine Komplikation sei noch betrachtet: Es seien ursprünglich zwei Säcke dagewesen, einer mit weißen, einer mit gelben Nudeln, aber beide mit der gleichen Häufigkeitsverteilung der Symbole darin. Die Affen haben beide Säcke auf einen großen Haufen geschüttet und gut umgerührt. Die Texte bestehen also aus einem Gemisch von weißen und gelben Buchstaben, die als verschieden gewertet werden sollen. Was ändert sich dadurch an der Entropie?

Betrachtet sei ein Text aus L weißen und M gelben Symbolen, wobei $L + M = N$. Er enthalte n_i Symbole der Sorte i , und zwar l_i weiße und m_i gelbe. Da die gelben und weißen Symbole wohlunterschieden sind, erscheinen sie getrennt im Nenner von (19.4). Die Wahrscheinlichkeit dieses Textes ist demnach

$$P_{\text{gem}} = \frac{N!}{l_1! l_2! \dots m_1! m_2!} \prod p_i^{l_i + m_i}. \quad (19.27)$$

Zum Vergleich sei die gleiche Menge von Buchstaben betrachtet, wobei aber die weißen alle nach links, die gelben alle nach rechts herausgezogen seien, sodass sie auch als zwei getrennte Texte, der eine weiß, der andere gelb, gelesen werden können. Die Wahrscheinlichkeiten dieser Teiltexthe sind

$$P_w = \frac{L!}{l_1! l_2! \dots} \prod p_i^{l_i}, \quad P_g = \frac{M!}{m_1! m_2! \dots} \prod p_i^{m_i}.$$

Die Wahrscheinlichkeit des Gesamttextes aus den beiden getrennten Teiltexthen ist das Produkt

$$P_{\text{getr}} = P_w P_g = \frac{L!}{l_1! l_2! \dots} \frac{M!}{m_1! m_2! \dots} \prod p_i^{l_i + m_i}. \quad (19.28)$$

(19.28) unterscheidet sich von (19.27) um den Faktor

$$\frac{N!}{L! M!}.$$

Die Entropien unterscheiden sich entsprechend um die Differenz

$$\boxed{S_{\text{misch}} = N \ln N - L \ln L - M \ln M}. \quad (19.29)$$

Um so viel nimmt also die Entropie infolge der Mischung von L Buchstaben der einen und M der anderen Art zu. Wenn speziell $L = M = N/2$, ist diese Entropiedifferenz

$$S_{\text{misch}} = N \ln 2. \quad (19.30)$$

19.1.8 Das kanonische Ensemble (Ensemble von Gibbs)

Jemand hat alle Zeilen, die die Affen produziert haben und die irgendwie fest montiert seien, in einen zweiten großen Sack geschaufelt und diesen Zeilensack einer zweiten Affenherde zum Spielen gegeben. Deren Spiel ist genau analog: Sie reihen die Zeilen blindlings aneinander und bilden daraus Superzeilen oder Bücher. Die *Zeilen* selbst sollen dabei keiner Breitenbedingung unterliegen, aber folgende Bedingungen sollen an die *Bücher* gestellt werden:

- Jedes Buch besteht aus einer festen Anzahl N von Zeilen.
- In jedem Buch ist die *Summe* der Breiten aller Zeilen zusammen als B fest gegeben.

Wenn ein Buch n_1 Zeilen der Breite B_1 , n_2 Zeilen der Breite B_2 usw. enthält, soll also gelten

$$\text{wegen 1: } \sum n_i = N, \quad \text{wegen 2: } \sum n_i B_i = B.$$

Alle produzierten Bücher, die diesen Forderungen nicht entsprechen, werfen wir weg. Wir nennen ein legales Buch ein **kanonisches Ensemble** von Zeilen.

Im Zeilensack mögen die einzelnen Zeilenbreiten mit der Häufigkeitsverteilung P_i vorkommen, d. h. Zeilen der Breite B_1 sind mit der relativen Häufigkeit P_1 vertreten usw. Man macht sich leicht klar, dass das logische Verhältnis zwischen Buch und Zeile genau das gleiche ist wie zwischen Zeile und Buchstabe. Die zweite Affenherde braucht ja gar nicht zu wissen, dass ihre Grundeinheiten (die Zeilen) komplexe Gebilde sind, die ihrerseits wieder aus Untereinheiten bestehen. Das Ergebnis, speziell die Verteilung der Zeilen in den legalen Büchern über die verschiedenen Zeilenbreiten, muss daher genau analog sein zur Verteilung der Buchstaben über die verschiedenen Buchstabenbreiten in dem Fall, wo *Zeilenlänge* und *Zeilenbreite* festgelegt waren. Mit anderen Worten: Es kommt ebenfalls eine Boltzmann-Verteilung heraus:

$$n_i = \frac{N}{Z} P_i e^{-\beta'' B_i} \quad (19.31)$$

mit der Zustandssumme

$$Z = \sum P_i e^{-\beta'' B_i}. \quad (19.32)$$

Der exponentielle Charakter dieser Verteilung ist völlig unabhängig von der Feinstruktur der Zeile und von der Art ihres Zustandekommens; offenbar ist selbst die *Existenz* einer solchen Feinstruktur unwesentlich dafür. Nur zur konkreten Berechnung der Zustandssumme muss man über diese Feinheiten informiert sein.

Wenn wir lediglich wissen, dass die Zeilen ihre Entstehung ebenfalls einem Zufallsprozess verdanken, ist damit schon gesagt, dass die Häufigkeiten P_i in Wirklichkeit Entstehungswahrscheinlichkeiten sind. Sie lassen sich daher, zunächst rein formal, auch durch Entropien ausdrücken:

$$P_i = e^{S_i/k}. \quad (19.33)$$

Die Breitenverteilung (19.31) lautet dann

$$n_i = \frac{N}{Z} e^{S_i/k} e^{-\beta'' B_i} . \quad (19.34)$$

Man sieht daraus, dass nicht etwa die Zeilen mit der kleinsten Breite B_i am meisten beitragen (wie man aus (19.31) annehmen könnte), denn sie können zu selten sein (ein kleines P_i haben). Am häufigsten sind vielmehr Zeilen mit dem kleinsten Wert der *freien Breite*

$$F_i = B_i - \frac{S_i}{k\beta''} . \quad (19.35)$$

Wenn das Buch sehr viele Zeilen hat, werden die Schwankungen klein, und es kommen praktisch nur noch Zeilen mit der minimalen freien Breite vor. Ohne die Bedingung für die feste Gesamtbreite B des Buches würden sich die Zeilen einfach entsprechend ihrer Häufigkeit P_i im Sack verteilen.

19.1.9 Arbeit und Wärme

Es soll jetzt möglich sein, die Breiten einzelner Buchstaben oder ganzer Zeilen zu ändern, z. B. durch seitliche Dehnung oder Stauchung. Für eine Zeile, die n_i Buchstaben der Breite b_i enthält ($i = 1, 2, 3, \dots$), also die Gesamtbreite $B = \sum n_i b_i$ hat, gibt es dann zwei Möglichkeiten, diese Breite zu ändern:

Man lässt die Buchstabenverteilung n_i bestehen, ändert aber einige oder alle Breiten b_i . Diese Art von Breitenänderung sei als **Arbeit** bezeichnet.

Man lässt das Breitenspektrum b_i bestehen, ändert aber die Anzahlen von Buchstaben n_i . Diese Art von Breitenänderung sei als Zu- oder Abfuhr von **Wärme** bezeichnet.

Jede Gesamtänderung der Breite B lässt sich in Arbeit und Wärme aufteilen:

$$dB = d \sum n_i b_i = \underbrace{\sum n_i db_i}_{\text{Arbeit}} + \underbrace{\sum b_i dn_i}_{\text{Wärme}} . \quad (19.36)$$

Es kann sein, dass sich die Breite der Buchstaben durch verschiedene Mittel beeinflussen lässt (mechanisches Zerren, Aufquellenlassen u. Ä.). In allen physikalischen Anwendungen kann man den jeweiligen Breitenzustand hinsichtlich einer bestimmten Methode k durch einen Parameter ξ_k kennzeichnen. Wenn sich dieser Parameter ändert, reagiert die Breite durch eine Änderung

$$dB = X_k d\xi_k , \quad X_k = \sum_i \frac{\partial b_i}{\partial \xi_k} n_i . \quad (19.37)$$

X_k heißt die **verallgemeinerte Kraft**. Ändern sich mehrere Parameter gleichzeitig, so ist die Breitenänderung

$$dB = \sum_k X_k d\xi_k . \quad (19.38)$$

19.2 Physikalische Ensembles

So wie das Affenbeispiel formuliert war, scheint es besser auf Informationstheorie oder Genetik als auf Physik zu passen. Wir könnten auch weiterhin völlig allgemeine Beziehungen ohne jeden speziellen Bezug auf die Physik ableiten.

19.2.1 Physikalische Deutung

Es ist aber nun doch an der Zeit zu verraten, was die Begriffe, die aufgetaucht sind, in der physikalischen Nutzenanwendung besagen. Es gibt mehrere solcher Nutzenanwendungen; die häufigste ist durch das nebenstehende Wörterbuch (Tabelle 19.1) gekennzeichnet.

Von den formalen Eigenschaften der „Breite“ haben wir nur benutzt, dass sie additiv ist, d. h. dass die Breiten der einzelnen Teile sich zu einer Gesamtbreite addieren und dass sie unter bestimmten Umständen, wo weder Arbeit geleistet wird noch Wärmeaustausch stattfindet, wo also das System abgeschlossen ist, konstant bleibt, d. h. einem Erhaltungssatz genügt. Jede andere additive Größe, die einem Erhaltungssatz genügt, könnte ebenso gut wie die Energie die Rolle von B spielen.

Der Verteilungsmodul β' oder besser sein Reziprokes hängt engstens mit der **Temperatur** des Systems zusammen, wie gleich nachgewiesen werden soll:

$$\beta' = \frac{1}{kT}. \quad (19.39)$$

Alle übrigen Begriffe wie Entropie, Zustandssumme, Gleichgewicht, kanonische Verteilung, Wärme, Arbeit, heißen in der Physik genauso.

Der harmonische Oszillator ist dadurch gekennzeichnet, dass er, wie die Quantenmechanik zeigt (Abschn. 13.7.1), äquidistante Energiestufen in E_i hat, die sich um ein Quant $h\nu$ unterscheiden. $h\nu$ spielt also die Rolle von b . Gleichung (19.26) lässt sich so deuten, dass die Energie von N identischen harmonischen Oszillatoren insgesamt

$$E = \frac{N h \nu}{1 - e^{-h\nu/(kT)}}$$

ist. Um zu *Plancks* Strahlungsgesetz und anderen wichtigen Formeln zu gelangen, braucht man dann nur noch die Anzahl N der Oszillatoren zu bestimmen.

19.2.2 Zustandsänderungen

Abgesehen von Schwankungserscheinungen bleibt der Gleichgewichtszustand, wenn er einmal eingestellt ist, immer erhalten, falls sich nicht die Bedingungen ändern, die ihn herbeigeführt haben. Solche Änderungen können vierfacher Art sein:

- Änderung der Gesamtteilchenzahl N ;
- Änderung der Gesamtenergie E ;
- Änderung des Energiespektrums, d. h. der Werte E_i ;
- Änderung des Verteilungsmoduls β' .

Tabelle 19.1.

Buchstabe	Teilchen
Zeile	System
Buch	viele Systeme im Wärmeaustausch (im Thermostaten)
Breite des Buchstaben	Energie des Teilchens
Breite der Zeile	Gesamtenergie des Systems
Breite des Buches	Gesamtenergie des Ensembles
Freie Breite	Freie Energie

Wie die Verteilung der Teilchen darauf reagiert, hängt vor allem von der Geschwindigkeit dieser Änderung ab. Eine hinreichend langsame Änderung durchläuft lauter Gleichgewichtszustände und ist reversibel.

Die Energieänderung bei einer Zustandsänderung ist (vgl. (19.36))

$$dE = d \sum N_i E_i = \sum_{\text{Arbeit}} N_i dE_i + \sum_{\text{Wärme}} E_i dN_i . \quad (19.40)$$

Wir betrachten eine reversible Wärmezufuhr ohne Arbeitsleistung, also ohne Änderung der E_i . Dass sie reversibel ist, heißt, dass sie durch lauter kanonische Verteilungen führt. Die verschiedenen kanonischen Verteilungen haben zwar *bei ihrer jeweiligen Energie* die größtmögliche Wahrscheinlichkeit, aber da sich diese Energie ändert, verschiebt sich auch die jeweils maximale Wahrscheinlichkeit. Eine solche kleine Änderung von $\ln P$ ergibt sich nach (19.9) zu

$$d \ln P = -d \sum N_i \ln \frac{N_i}{p_i} = - \sum \ln \frac{N_i}{p_i} dN_i - \sum \frac{dN_i}{N_i} N_i ;$$

das letzte Glied ist Null wegen $\sum dN_i = 0$. Benutzen wir N_i nach (19.22), so wird

$$d \ln P = - \sum \ln \frac{N}{Z} dN_i - \beta \sum E_i dN_i = -\beta \sum E_i dN_i$$

oder wegen (19.40)

$$d \ln P = -\beta dE = \beta' dE . \quad (19.41)$$

19.2.3 Verteilungsmodul und Temperatur

Wir können nun unseren Verdacht bestätigen, dass β' oder noch mehr $1/\beta'$ etwas mit der Temperatur zu tun hat. Dazu betrachten wir *zwei* Systeme, die zunächst getrennt und beide abgeschlossen sind, und zwar lange genug sich selbst überlassen waren, dass sich in jedem eine kanonische Verteilung eingestellt hat. Die Verteilungsmoduln dieser Verteilungen, β'_1 und β'_2 , werden i. Allg. verschieden sein.

Jetzt bringen wir die beiden Systeme in thermischen Kontakt miteinander, erlauben ihnen also, Wärme auszutauschen, wenn sie das wollen. Sie werden es tun, wenn sie die Wahrscheinlichkeit des *Gesamtsystems* dadurch erhöhen können. Die Wahrscheinlichkeit des Gesamtsystems ist

$$P = P_1 \cdot P_2 , \quad \text{d. h.} \quad \ln P = \ln P_1 + \ln P_2 ,$$

wenn P_1 und P_2 die Wahrscheinlichkeiten der (unabhängig eingenommenen) Zustände der Einzelsysteme sind. Wir fragen, wie sich P ändert, wenn etwa eine kleine Wärmemenge δE von System 1 auf System 2 übergeht, also sich die Energie E_1 des Systems 1 auf $E_1 - \delta E$ vermindert:

$$\delta \ln P = \delta \ln P_1 + \delta \ln P_2 = - \frac{d \ln P_1}{dE_1} \delta E + \frac{d \ln P_2}{dE_2} \delta E .$$

Benutzen wir den Ausdruck (19.41), der für solchen reversiblen Wärmeaustausch gilt, so wird

$$\delta \ln P = -\beta'_1 \delta E + \beta'_2 \delta E = (\beta'_2 - \beta'_1) \delta E . \quad (19.42)$$

Das gekoppelte System kann und wird also seine Wahrscheinlichkeit steigern, falls nicht die Verteilungsmodule gleich sind. Nach (19.42) ist $\delta \ln P$ positiv, d. h. wächst $\ln P$, wenn und indem bei $\beta'_2 \geq \beta'_1$ ein Betrag $\delta E \geq 0$ ausgetauscht wird, d. h. Wärme von 1 nach 2 bzw. von 2 nach 1 fließt. Dieser Austausch hört erst auf, wenn sich die Verteilungsmodule auf einen gemeinsamen Wert angeglichen haben. Im üblichen Sprachgebrauch nennt man die Größe, die auf genau diese Weise bestimmt, ob zwei Körper Wärme austauschen, die Temperatur. Höheres β' muss niedrigere Temperatur bedeuten, denn die Wärme fließt vom niederen zum höheren β' . Alles ist in Ordnung, wenn wir

$$\beta' = \frac{1}{kT} \quad (19.39')$$

setzen. Eigentlich könnten wir allerdings nur sagen, dass β' eine monoton steigende Funktion der reziproken Temperatur ist. Auch was k ist, wissen wir noch nicht. Wir werden es erst aus der Anwendung auf konkrete Systeme, speziell das ideale Gas, erfahren.

19.2.4 Wahrscheinlichkeit und Entropie

Vorher betrachten wir noch, was mit dieser Deutung von β' aus (19.41) geworden ist:

$$d \ln P = \frac{1}{kT} dE . \quad (19.43)$$

Das ist genau die Beziehung, die die technischen Thermodynamiker (allen voran *Clausius*) zwischen dem Zuwachs einer Größe, die sie **Entropie** S nannten, und der reversibel zugeführten Wärmemenge dQ fanden:

$$dS = \frac{dQ}{T} . \quad (19.44)$$

Damit rechtfertigt sich unsere Deutung des Logarithmus der Wahrscheinlichkeit eines Zustandes als seiner *Entropie*:

$$S = k \ln P . \quad (19.45)$$

Kein Wunder, dass die Thermodynamiker auf unabhängigen Wegen gefunden haben, dass die Entropie eines abgeschlossenen Systems nie abnimmt. Dies ist jetzt auf wesentlich allgemeinere Weise erklärt.

19.2.5 Die freie Energie; Gleichgewichtsbedingungen

Das betrachtete System sei nicht abgeschlossen, seine Energie sei also nicht fest gegeben; Austausch speziell von Wärme mit der Umgebung sei möglich. Diese Umgebung habe konstante Temperatur, der sich das System früher oder später anpassen wird. Die Zustände, unter denen das System wählen kann, und speziell der wahrscheinlichste darunter, den es schließlich aufsuchen wird, sind jetzt durch eine feste Temperatur, nicht mehr durch eine feste Energie bestimmt.

Die verschiedenen möglichen Zustände haben infolge ihrer inneren Struktur (ohne Rücksicht auf ihre energetische Lage) verschiedene Wahrscheinlichkeiten $P_{\text{str}} = e^{S/k}$, ausgedrückt durch ihre Entropie. Andererseits haben, rein energetisch betrachtet und selbst bei gleicher innerer Struktur, Zustände mit verschiedener Energie E verschiedene Wahrscheinlichkeiten $P_{\text{en}} = Ce^{-E/(kT)}$. Nimmt man beide Gesichtspunkte zusammen (was für nichtabgeschlossene Systeme der physikalischen Realität entspricht), so ergibt sich eine Gesamtwahrscheinlichkeit des durch eine Entropie S und eine Energie E gekennzeichneten Zustandes

$$P = P_{\text{str}} P_{\text{en}} = Ce^{S/k} e^{-E/(kT)} \quad (19.46)$$

oder

$$\ln P = \ln C + \frac{S}{k} - \frac{E}{kT} = \ln C - \frac{E - TS}{kT}. \quad (19.47)$$

Die größte Wahrscheinlichkeit hat der Zustand mit dem *kleinsten* Wert der Funktion

$$\boxed{F = E - TS}. \quad (19.48)$$

Diese Funktion, die wir in dieser Rolle schon in (19.35) kennen gelernt haben, heißt **freie Energie**.

Bei der Definition der freien Energie kommt es noch darauf an, ob das Energiespektrum des Systems sich bei den zugelassenen Änderungen mitändern kann oder nicht, d. h. ob die zugelassenen Zustandsänderungen mit oder ohne Arbeitsleistung vor sich gehen (Abschn. 19.1.9). Im ersten Fall ist die Energie E noch durch einen Ausdruck zu ergänzen, der dieser Arbeit entspricht. Die so ergänzte Energie heißt **Enthalpie H** :

$$\boxed{H = E + A = E + \sum X_i \delta \xi_i}. \quad (19.49)$$

Der Ausdruck A hängt nicht nur von der Natur des Zustandes ab, sondern auch von der Art seiner Änderung (die Arbeit ist keine Zustandsfunktion). Das Gleichgewicht liegt dann im Minimum der Funktion

$$\boxed{G = H - TS = E + A - TS = E + \sum X_i \xi_i - TS}, \quad (19.50)$$

der freien Enthalpie oder des **Gibbs-Potentials**.

Für arbeitsfreie Zustandsänderungen (wo „Energie“ nur die innere Energie des Systems meint) ist die freie Energie im engeren Sinne

$$\boxed{F = E - TS \quad \text{(Helmholtz-Potential)}} \quad (19.51)$$

für das Gleichgewicht zuständig.

Bei einem Gas aus elektrisch und magnetisch neutralen Teilchen ist die einzige Möglichkeit zur Arbeit rein mechanisch: $dA = p dV$. Wenn V konstant gehalten wird, ist Arbeitsfreiheit der dann noch möglichen Zustandsänderungen garantiert. Die freie Energie F beherrscht also das Gleichgewicht bei gegebenen T und V (isotherm-isochores Gleichgewicht). Bei gegebenen T und p dagegen (einem in der Realität noch

häufigeren Fall) wird das Arbeitsglied pV ; die für isotherm-isobare Prozesse zuständige Funktion ist also bei Gasen (und Lösungen)

$$G_{\text{gas}} = E + pV - TS. \quad (19.52)$$

Physikalisch interessant sind noch Prozesse, bei denen keine Wärme ausgetauscht werden kann (**adiabatische** Prozesse). Wegen $dS = dQ/T$ ändert sich hierbei die Entropie nicht (**isentrop**e Prozesse). Dann ist klar, dass die Zustandswahrscheinlichkeit allein durch die Energie (wenn keine Arbeitsleistung erfolgt) bzw. durch die Enthalpie bestimmt wird: $P = P_{\text{en}} \sim e^{-E/(kT)}$ bzw. $P \sim e^{-H/(kT)}$. Der Zustand mit dem kleinsten W oder H ist der Gleichgewichtszustand.

Gleichgewicht ist *der* Zustand, in dem die zuständige Funktion ein Extremum annimmt (größtmögliches S , kleinstmögliches F , G , E , H). Außerhalb des Gleichgewichts können und werden Zustandsänderungen ablaufen, aber nur solche, bei denen die Wahrscheinlichkeit zunimmt, also die zuständige Funktion sich in einer ganz bestimmten Richtung ändert: Zunahme von S , Abnahme von F , G , E bzw. H .

Auch die Geschwindigkeit, mit der sich der Zustand ändert, wird durch die zuständige Funktion Φ bestimmt. Diese Betrachtungen gehen allerdings über die übliche Thermodynamik, die man besser Thermostatik nennen sollte, hinaus und führen in die Kinetik und die Thermodynamik irreversibler Prozesse.

Tabelle 19.2.

Art der zugelassenen Zustände	Konstanz von	Zuständige Funktion Φ
Energetisch abgeschl. System	E	Entropie S
Isotherm-isochor	T, V	Freie Energie $F = E - TS$
Isotherm-isobar	T, p	Freie Enthalpie $G = E + \sum X_i \xi_i - TS$
Adiabatisch-isochor	S, V	Energie E
Adiabatisch-isobar	S, p	Enthalpie $H = E + \sum X_i \xi_i$

19.2.6 Statistische Gewichte

Um ein physikalisches System statistisch behandeln zu können, muss man wissen, welche Zustände es annehmen kann, und welche Energien W_i und statistischen Gewichte g_i die einzelnen Zustände haben. Die Boltzmann-Beziehung liefert dann sofort die Verteilung sehr vieler solcher Systeme über die möglichen Zustände oder die Wahrscheinlichkeiten, mit der *ein* solches System die verschiedenen Zustände annimmt; so findet man die Zustandssumme, die Entropie, die freie Energie usw., all dies für das Gleichgewicht.

Das **statistische Gewicht** eines Zustandes (auch als seine *a priori*-Wahrscheinlichkeit bezeichnet) ist die Wahrscheinlichkeit, die man dem Zustand ohne spezielle, besonders energetische Kenntnisse über das System zuzuschreiben hat. Im Affengleichnis sind die statistischen Gewichte

der einzelnen Buchstaben ihre Häufigkeiten im Sack, die statistischen Gewichte der einzelnen Zustände (= Texte) ergeben sich daraus rein kombinatorisch, ohne dass bisher von „Breiten“ (= Energien) die Rede ist. In der Physik ist die Lage einfach, wenn der Zustand des Systems lediglich durch Ortsangaben gekennzeichnet ist, z. B. durch die Lagen der N Teilchen, aus denen es besteht. *A priori*, nämlich unabhängig von eventuellen Ungleichheiten der potentiellen Energie, ist jedes Teilchen überall gleich gern, und daher ist das statistische Gewicht eines bestimmten Raumbereichs proportional seinem Volumen. Zur vollen Kennzeichnung des Zustandes gehören aber noch die Geschwindigkeiten oder Impulse der Einzelteile des Systems. Ein Massenpunkt hat drei Orts- und drei Impulskomponenten. Bei zusammengesetzten Systemen kommen noch mehr Koordinaten und ihre Änderungsgeschwindigkeiten bzw. die entsprechenden Impulse hinzu, die die gegenseitige Lage der Bestandteile angeben. Wir betrachten also Systeme mit k Lage- und k Impulskomponenten (Winkelkoordinaten und die entsprechenden Drehimpulse einbegriffen).

19.2.7 Der Phasenraum

Die Vorstellung wird zwar etwas strapaziert, aber die ganze Darstellung sehr vereinfacht, wenn man die k Lage- und die k Impulskomponenten als Koordinaten in einem $2k$ -dimensionalen abstrakten Raum, dem **Phasenraum**, auffasst. Jeder Zustand des Systems wird dann durch *einen* Punkt in diesem Phasenraum vollständig dargestellt. Dieser Punkt wird sich i. Allg. mit der Zeit verschieben, sei es, weil die Lagen, sei es, weil die Impulse der Bestandteile sich ändern. Die Erhaltungssätze legen den möglichen Wanderungen des Phasenpunktes gewisse Beschränkungen auf. Wenn das System z. B. einfach ein Massenpunkt ist, der sich in einem elastischen Kraftfeld auf einer Geraden bewegen kann, so fordert der Energiesatz, dass die Phasenbahn eine Ellipse ist, deren Gleichung in den Koordinaten x und p lautet

$$\frac{D}{2}x^2 + \frac{1}{2m}p^2 = E .$$

Von vielen gleichartigen Systemen wird jedes durch einen Punkt im Phasenraum beschrieben. Alle diese Punkte sind in Bewegung, wie die Teilchen einer Flüssigkeit. Diese Analogie mit einer strömenden Flüssigkeit geht sehr tief, und zwar verhalten sich die Phasenpunkte wie eine inkompressible Flüssigkeit. Man kann nämlich zeigen, dass eine solche Punktwolke zwar ihre absolute Lage im Phasenraum ändert, auch die relative Lage der Punkte zueinander, aber nicht die einmal gegebene Dichte dieser Punkte (**Satz von Liouville**). Wäre das nicht der Fall, so müssten in das betrachtete Volumenelement mehr Phasenpunkte ein- als ausströmen oder umgekehrt. Ein solcher Überschuss des Ausströmens über das Einströmen wird, unabhängig von der Dimensionenzahl des Raumes, genau wie im üblichen Raum durch die Divergenz der Geschwindigkeit gegeben, in diesem Fall natürlich der Geschwindigkeit hinsichtlich aller $2k$ Koordinaten:

$$\mathbf{V} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \dots) .$$

Die Divergenz ist, wie üblich, die Summe aller Ableitungen jeder Komponente des Vektors nach der entsprechenden Koordinate:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \dot{p}_2}{\partial p_2} + \dots$$

Wir betrachten den Anteil $\partial \dot{x}_i / \partial x_i + \partial \dot{p}_i / \partial p_i$ dieses Ausdrucks. Ausgehend von der Gesamtenergie des Systems, die man im einfachsten Fall schreiben kann

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m}{2} \sum \dot{x}_i^2 + U(x_1, x_2, \dots),$$

ergibt sich rein formal

$$\dot{x}_i = \frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial p_i} = \frac{\partial E}{\partial p_i}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial x_i}$$

$$\dot{p}_i = F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\partial E}{\partial x_i}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial p_i}.$$

In welcher Reihenfolge man aber eine Funktion wie $E(p_i, x_i)$ nach x_i und p_i ableitet, spielt keine Rolle. Damit ergibt sich

$$\boxed{\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = 0}.$$

Dies gilt für jede Komponente, also ist die Divergenz der Geschwindigkeit der Phasenpunkte Null; sie strömen wie eine inkompressible Flüssigkeit mit zeitlich konstanter Dichte. Der allgemeine Beweis dieser wichtigen Tatsache ergibt sich direkt aus *Hamiltons* Formulierung der Mechanik.

Wenn aber die Wolke der Phasenpunkte jeden Bereich des Phasenraumes, der durch die Erhaltungssätze zugelassen ist, früher oder später erreicht und dabei ihre Dichte nicht ändert, muss auf lange Sicht, abgesehen von den energetischen Beschränkungen, jeder dieser Bereiche eine „Besucherzahl“ erhalten, die seinem Volumen proportional ist. Das statistische Gewicht eines Zustandes ist also proportional dem Phasenvolumen, das er einnimmt.

19.2.8 Das ideale Gas

Mit all diesem Handwerkszeug können wir nun Probleme, deren Lösung wir für Spezialfälle schon kennen, und auch andere in wesentlich größerer Allgemeinheit angehen. Die kinetische Gastheorie (vgl. Abschn. 5.2) z. B. musste noch ziemlich viele Annahmen über die Eigenschaften der Moleküle machen, z. B. dass sie elastisch miteinander und der Gefäßwand wechselwirken, dass diese Wechselwirkung auf sehr kurzzeitige Stöße beschränkt ist, usw. All dies erweist sich jetzt als überflüssig. Wir können beliebige Teilchensorten zusammensperren, „richtige“ Punktteilchen und weit größere suspendierte Teilchen, die natürlich zusammengesetzt sind und von denen alle diese Annahmen keineswegs evident sind. Die Einzelheiten der Wechselwirkung werden auch völlig nebensächlich. Einzige Bedingung ist, dass wir zur Beschreibung des Zustandes jedes Teilchens

mit den drei Lage- und den drei Impulskoordinaten zufrieden sind. Ein äußeres Kraftfeld soll zunächst nicht wirken (man kann es aber leicht einbauen). Der Ort eines Teilchens spielt also keine Rolle. Wenn zur Kennzeichnung eines Zustandes die Angabe des Intervalls $(v, v + dv)$ des Geschwindigkeitsbetrages genügt, ergibt sich das statistische Gewicht dieses Zustandes aus dem entsprechenden Phasenvolumen (Kugelschale): $g \sim v^2 dv V$, und man erhält sofort die **Maxwell-Verteilung**

$$f(v) = g e^{-mv^2/(2kT)} \sim V v^2 e^{-mv^2/(2kT)} dv .$$

Erst damit ist völlig erklärt, dass z. B. ein im Mikroskop sichtbares Teilchen die gleiche mittlere Energie der Translation von $\frac{3}{2}kT$ hat wie jedes normale Molekül.

Um die Entropie und die übrigen thermodynamischen Funktionen zu bestimmen, geht man am elegantesten von der Zustandssumme aus:

$$Z = \sum g_i e^{-E_i/(kT)} \sim V \int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/(2kT)} dv .$$

Der konstante Faktor wird im Folgenden keine wesentliche Rolle spielen. Auch von dem Integral braucht man nur zu wissen, dass es durch die Substitution $x = v\sqrt{m/(2kT)}$ übergeführt wird in $(2kT/m)^{3/2} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$, wobei das bestimmte Integral eine reine Zahl ist, deren Wert ebenfalls nur in die Konstante eingeht:

$$\boxed{Z \sim V \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2}} . \quad (19.53)$$

Nach (19.24) ergeben sich Energie und freie Energie zu

$$E = N \frac{\partial \ln Z}{\partial(-1/(kT))} = \frac{3}{2} N \frac{\partial \ln kT}{\partial(-1/(kT))} = \frac{3}{2} NkT \quad (19.54)$$

$$F = -NkT \ln Z = -NkT(\ln V + \frac{3}{2} \ln T + \text{const}) .$$

Gäbe es nicht drei Impulskomponenten, sondern f , so lautete der Exponent von T in dem Ausdruck für Z nicht $3/2$, sondern $f/2$, und dieses f würde statt 3 auch in E einziehen. Das ist die formale Wurzel des **Gleichverteilungssatzes**. Ebenso haben wir stillschweigend die formal selbstverständliche Tatsache benutzt, dass sich für ein System, das aus zwei Teilsystemen besteht, deren Energien addieren und die Wahrscheinlichkeiten oder statistischen Gewichte multiplizieren, womit sich, ihrer Herkunft nach, auch die Zustandssummen zur Gesamt-Zustandssumme multiplizieren, während sich die thermodynamischen Funktionen, die alle von $\ln Z$ abstammen, additiv verhalten. Die freie Energie eines Systems aus N gleichen Teilchen ist also N mal der freien Energie des Einzelteilchens, usw.

Von hier führt ein direkter Weg zu den weitergehenden Anwendungen der statistischen Physik der Gleichgewichte.

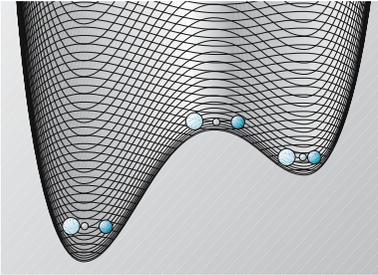


Abb. 19.7. Verlauf der freien Enthalpie für eine Reaktion $AB + C \rightleftharpoons A + BC$. Die Reaktionsrate hängt von der Höhe der Schwelle auf dem günstigsten Reaktionsweg mit dem aktivierten Komplex ABC im Sattelpunkt ab

19.2.9 Absolute Reaktionsraten

Die klassische Thermodynamik macht nur Aussagen über die Lage von Gleichgewichtszuständen, nicht aber über die praktisch mindestens ebenso wichtige Frage, wie schnell sich solche Gleichgewichte einstellen. In der Festkörperphysik haben wir an einigen Beispielen gesehen, wie kinetische und statistische Betrachtungen diese Lücke ausfüllen können. Hier studieren wir ein für die Chemie grundlegendes Beispiel (Eyring-Glasstone-Laidler-Theorie). Die allgemeine Behandlung **irreversibler Prozesse** ist zu einem riesigen Gebiet angewachsen, das noch in voller Entwicklung ist.

Gegeben sei ein Gemisch zweier Stoffe AB und C . Die Teilchen B können sich auch mit C verbinden, also in der Form BC vorliegen. Wie sie sich im Gleichgewicht über die Zustände AB und BC verteilen, hängt von den freien Enthalpien G der Zustände AB , C und A , BC ab. Wie schnell setzt sich aber das anfangs ausschließlich aus AB , C bestehende Gemisch um?

Damit B von A zu C übergeht, müssen sich je ein Teilchen AB und C treffen und, zumindest kurzzeitig, einen Übergangskomplex ABC bilden, der dann entweder in $AB + C$ oder in $A + BC$ zerfällt:



Der Komplex ABC hat offenbar ein wesentlich höheres G als die beiden Endzustände, sonst würde er auch in der Gleichgewichtskonzentration eine erhebliche Rolle spielen. Der Übergang lässt sich also durch ein Schema darstellen (Abb. 19.7), das in kinetischen Betrachtungen aus den verschiedensten Gebieten immer wiederkehrt. Die Abszissenachse hat eine geometrische Bedeutung als „Reaktionskoordinate“, wenn auch nicht immer eine ganz unmittelbare. Die Breite der Schwelle sei d . Zum Glück kommt es auf den genauen Wert von d nicht an; er hebt sich aus dem Endergebnis weg.

Ein Komplex ABC braucht etwa die Zeit d/v , um einen der beiden Hänge hinunterzurutschen. v ist die thermische Geschwindigkeit des Teilchens, das sich dabei effektiv bewegt: $v \approx \sqrt{kT/m}$. Man braucht also nur zu wissen, wie viele Teilchen ABC jeweils vorhanden sind – ihre Anzahldichte sei n_{ABC} – und hat die Reaktionsrate, d. h. die Anzahl umgesetzter Teilchen/(m³ s) als $n_{ABC}v/d$.

n_{ABC} ergibt sich nach Boltzmann (oder dem Massenwirkungsgesetz) als proportional zu $n_{AB}n_C e^{-\Delta G/(kT)}$, wobei ΔG die Höhe der Schwelle über dem linken Tal ist. Dazu tritt noch das statistische Gewicht des Komplexes ABC . (Das statistische Gewicht eines Zustandes im G -Tal ist 1.) Man kann Abb. 19.7 als Darstellung eines zweidimensionalen Phasenraums auffassen. In einem $2n$ -dimensionalen Phasenraum ist das statistische Gewicht gleich der Anzahl der Zellen h^n in dem Phasenvolumen, das dem fraglichen Zustand entspricht (Begründung für diese Zellengröße in Abschn. 19.3). Phasenvolumen ist Impulsraumvolumen \cdot räumliches Volumen, also hier $\sqrt{mkT} d$. Demnach wird $n_{ABC} \approx n_{AB}n_C e^{-\Delta G/(kT)} \sqrt{mkT} d/h$ und die Reaktionsrate $n_{ABC}v/d \approx n_{AB}n_C e^{-\Delta G/(kT)} kT/h$. Der Gesamtumsatz ergibt sich als Differenz von Hin- und Rückreaktion

$$\dot{n}_{AB} = -\frac{kT}{h} \left(e^{-\Delta G/(kT)} n_{AB}n_C - e^{-\Delta G'/(kT)} n_{BC}n_A \right) . \quad (19.55)$$

Gleichgewicht, d. h. $\dot{n}_{AB} = 0$, wird also richtig beschrieben durch das Massenwirkungsgesetz

$$\frac{n_{AB}n_C}{n_{BC}n_A} = e^{(G' - G)/(kT)}.$$

Gleichung (19.55) ist aber viel allgemeiner. Sie gibt z. B. den Konstanten in der Arrhenius-Gleichung einen physikalischen Sinn und Zahlenwerte, obwohl ΔG im konkreten Fall ziemlich schwer theoretisch anzugeben ist.

Ein **Katalysator** und noch mehr und noch spezifischer ein **Enzym** kann die G -Werte der beiden Grenzzustände der Reaktion und damit die Gleichgewichtskonzentrationen nicht verschieben, senkt aber die Schwelle zwischen ihnen und beschleunigt dadurch die Reaktion oft um viele Zehnerpotenzen.

19.3 Quantenstatistik

In schneller Folge fand man, dass sich Licht- und Gitterschwingungen (A. Einstein, S. W. Bose 1924), Elektronen in Festkörpern (E. Fermi, P. A. M. Dirac 1926), Materie extremer Dichte im Weltall (R. H. Fowler 1928) statistisch nur behandeln lassen, wenn man quantenmechanisch begründete Abzählverfahren anwendet.

19.3.1 Abzählung von Quantenteilchen

Quantenmechanische Teilchen haben einige Eigenschaften, die sie von den klassischen radikal unterscheiden. Der für die Statistik wichtigste dieser Unterschiede drückt sich im **Pauli-Prinzip** aus:

Jeder quantenmechanische Zustand kann höchstens von *einem* Teilchen mit halbzahligem Spin eingenommen werden.

In eigentlich quantenmechanischer Sprache heißt das: Zwei derartige Teilchen können niemals die gleiche ψ -Funktion haben (Abschn. 16.1.2). Für klassische Teilchen bestünde kein solches Hindernis: Beliebige viele von ihnen könnten prinzipiell in einem und demselben Zustand sitzen.

Wie merkwürdig diese Forderung ist, sieht man besonders klar, wenn man sie auf Impulszustände anwendet: In einem Elektronengas, selbst wenn es viele km^3 einnimmt, können nie zwei Elektronen exakt den gleichen Impuls haben, selbst wenn sie kilometerweit voneinander entfernt sind. Kräfte zwischen Punktteilchen, die sich so auswirken sollten, sind nicht vorstellbar; das Pauli-Prinzip ist einer der Hinweise auf das grundsätzliche Versagen des klassischen Korpuskelbildes.

Allerdings liegen die verschiedenen Impulszustände einander äußerst nahe, wenn das Elektronengas ein großes Volumen V zur Verfügung hat. Man kann die quantitativen Folgen aus dem Pauli-Prinzip mittels der Unbestimmtheitsrelation verstehen (exakte Herleitung s. Abschn. 13.6.6). Wenn das Elektronengas in ein rechteckiges Gefäß mit den Abmessungen a, b, c eingeschlossen ist, hat jedes Elektron eine maximale Unschärfe

der x -Koordinate $\Delta x = a$. Dem entspricht nach $\Delta x \Delta p_x = h$ eine minimale Impulsunschärfe $\Delta p_x = h/a$. Ein frei fliegendes Elektron nutzt diese Ortsunschärfe auch voll aus; h/a ist daher die *wirkliche* Unschärfe der x -Komponente seines Impulses. Dieser Impulsbereich $\Delta p_x = h/a$ ist nach dem Pauli-Prinzip für alle anderen Elektronen verboten. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Impulskomponenten: $\Delta p_y = h/b$, $\Delta p_z = h/c$. Das Elektron beansprucht somit im Impulsraum ein Volumen

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \frac{h^3}{abc} = \frac{h^3}{V}$$

ausschließlich für sich ($V = abc$ Volumen des Gases). Im sechsdimensionalen Phasenraum ist die Lage formal noch einfacher: er zerfällt in Zellen der stets gleichen Einheitsgröße

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z V = h^3, \quad (19.56)$$

deren jede nur von einem Elektron eingenommen werden darf. Hierbei ist vorausgesetzt, dass der Elektronenzustand in einem Gas keine weiteren Unterscheidungsmerkmale hat als den Impuls. Dies ist nicht ganz richtig: Jedes Elektron kann zwei verschiedene Spinzustände haben. Damit kann jede Phasenzelle *zwei* Elektronen beherbergen, die entgegengesetzten Spin haben müssen.

Diese natürliche Körnung des Impulsraumes ist umso feiner, je größer das Volumen V ist. Diese Körnung ist für alle Teilchen vorhanden, gleichgültig ob sie dem Pauli-Prinzip unterliegen oder nicht. Alle existierenden Teilchen lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

- **Fermionen** haben halbzahliges Spin ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$): Elektronen, Protonen, Neutronen, Hyperonen, manche Kerne (solche mit ungerader Nukleonenzahl, z. B. He^3), einige Atome, wenige Moleküle. Für sie gilt das Pauli-Prinzip.
- **Bosonen** haben ganzzahliges Spin ($0, 1, \dots$): Photonen, Mesonen, die Kerne mit gerader Nukleonenzahl, die meisten Atome und Moleküle. Für sie gilt das Pauli-Prinzip nicht.

19.3.2 Fermi-Dirac- und Bose-Einstein-Statistik

Fermionen müssen ein anderes statistisches Verhalten zeigen als klassische Teilchen, weil die Grundannahme für die Abzählung der „Fälle“ in der klassischen Statistik, nämlich dass jeder Zustand beliebig viele Teilchen enthalten kann, hinfällig ist. Man müsste eigentlich die ganze Herleitung mit der veränderten Abzählvorschrift wiederaufnehmen. Wir ersparen uns dies durch folgende Überlegung:

Sehr viele identische Systeme aus Teilchen beliebiger Art (Fermionen, Bosonen, vielleicht auch Teilchen, die sich ganz klassisch verhalten) mögen zu einem kanonischen Ensemble zusammengefügt sein. Beispielsweise mag es sich um viele identische Kästen, gefüllt mit einem Elektronengas, handeln. Die *Kästen* sind als makroskopische Gebilde nicht mehr an das Pauli-Prinzip gebunden, also gelten für sie klassische Abzählvorschriften, aus denen speziell die Boltzmann-Verteilung für die Energie

der Kästen folgt:

$$N_{\text{Kasten}}(E) \sim e^{-E/(kT)}. \quad (19.57)$$

Wir fassen nun zwei Teilgruppen von Kästen ins Auge:

- Kästen, in denen alle Elektronen in ganz bestimmten Zuständen sind. Die Anzahl dieser Kästen sei N_1 .
- Kästen, in denen alles ganz genauso ist wie in den Kästen der Gruppe 1, bis auf *ein* Elektron, das sich in einem energetisch um E_{12} höheren Zustand befindet als sein Gegenstück in den Kästen der Gruppe 1. Die Anzahl dieser Kästen der Gruppe 2 sei N_2 .

Die Gesamtenergie eines Kastens der Gruppe 2 ist demnach gerade um E_{12} höher als die eines Kastens der Gruppe 1. Also verhalten sich die Anzahlen der Kästen wie

$$\frac{N_{1 \text{ Kasten}}}{N_{2 \text{ Kasten}}} = e^{E_{12}/(kT)}. \quad (19.58)$$

Kinetisch bedeutet dies, dass die **Übergangswahrscheinlichkeiten** zwischen den beiden Gesamtzuständen des Elektronengases, die die beiden Kastensorten repräsentieren, sich verhalten wie

$$\frac{U_{12 \text{ Kasten}}}{U_{21 \text{ Kasten}}} = e^{-E_{12}/(kT)}. \quad (19.59)$$

Der Übergang zwischen den Gesamtzuständen wird aber einfach bewerkstelligt durch den Übergang des *einen* Elektrons, das den Unterschied ausmacht. Die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Kästen sind also in Wirklichkeit die Übergangswahrscheinlichkeiten des Elektrons.

Ganz allgemein für alle Teilchen, gleichgültig welcher Art (Fermionen, Bosonen, klassische Teilchen), ist somit das Verhältnis der Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Zuständen mit den Energien E_1 und E_2 :

$$\frac{U_{12 \text{ Teilchen}}}{U_{21 \text{ Teilchen}}} = e^{(E_1 - E_2)/(kT)}. \quad (19.60)$$

Es genügt dies zu wissen, um die Energieverteilungen abzuleiten, die bei Fermionen bzw. Bosonen an die Stelle der Boltzmann-Verteilung treten.

Jeder Elektronenzustand ist in einem makroskopischen System i. Allg. in sehr vielen Exemplaren vertreten. In einem Molekülgas z. B. ist mit jedem Molekül praktisch der gleiche Satz von Elektronenzuständen verbunden. Man kann auch bei freien Elektronen an Zustände gleichen Impulsbetrages, also gleicher Energie, aber verschiedener Impulsrichtung denken. Die Anzahl der Zustände mit einer Energie E_i sei N_i . Von diesen N_i Zuständen seien n_i mit Elektronen besetzt. Wir zählen dabei die beiden Spinzustände jedes bestimmten Zustandes doppelt, was schon deshalb oft nötig ist, weil die Energie E_i vom Spin abhängt, und können damit allgemein sagen, dass jeder Zustand höchstens von einem Elektron besetzt sein kann. Für Elektronen, die in den Zustand i wollen, stehen aber nur $N_i - n_i$ Plätze zur Verfügung. Die n_k Elektronen, die in einem Zustand k sitzen, werden also insgesamt pro Sekunde eine Anzahl von

$$\begin{array}{ccc}
 U_{ki} & \cdot & n_k & \cdot & (N_i - n_i) \\
 \text{Übergangs-} & & \text{Anzahl der Elektronen,} & & \text{Anzahl der freien Plätze,} \\
 \text{wahrscheinlichkeit} & & \text{die springen können} & & \text{in die Elektronen springen können}
 \end{array} \quad (19.61)$$

Übergängen in den Zustand i ausführen. Die umgekehrte Übergangsrate ist

$$U_{ik}n_i(N_k - n_k) = U_{ki}e^{(E_i - E_k)/(kT)}n_i(N_k - n_k).$$

Im Gleichgewicht müssen die beiden Raten gleich sein:

$$U_{ki}n_k(N_i - n_i) = U_{ik}n_i(N_k - n_k) = U_{ki}e^{(E_i - E_k)/(kT)}n_i(N_k - n_k),$$

oder, indem man Größen mit gleichem Index auf einer Seite sammelt,

$$\frac{n_i}{N_i - n_i}e^{E_i/(kT)} = \frac{n_k}{N_k - n_k}e^{E_k/(kT)}. \quad (19.62)$$

Wenn dies ganz allgemein für jede denkbare Wahl des Partners k gelten soll, muss der Ausdruck links überhaupt unabhängig von der Wahl des Zustandes, also eine Konstante sein:

$$\frac{n_i}{N_i - n_i}e^{E_i/(kT)} = C$$

oder

$$n_i = \frac{N_i}{C^{-1}e^{E_i/(kT)} + 1}. \quad (19.63)$$

Dies ist die **Fermi-Verteilung** der Elektronen über die Energiewerte E_i . Sie gilt überhaupt für alle Fermionen, d. h. Teilchen mit halbzahligen Spin.

Die Funktion $n_i(E_i)$ hat folgenden Verlauf: Bei sehr kleinen E_i , wo $C^{-1}e^{E_i/(kT)} \ll 1$, sind die Zustände praktisch voll besetzt:

$$E_i \ll kT \ln C \Rightarrow n_i \approx N_i.$$

Bei großen E_i , wo $C^{-1}e^{E_i/(kT)} \gg 1$, ist $n_i \ll N_i$, d. h. die Zustände sind sehr schwach besetzt. Hier und nur hier gleicht die Verteilung auch der Boltzmann-Verteilung:

$$E_i \gg kT \ln C \Rightarrow n_i \approx N_i C e^{-E_i/(kT)} \ll N_i.$$

Die Grenze zwischen Besetztheit und Unbesetztheit liegt bei $E_i = kT \ln C$; dort ist $n_i = N_i/2$. Wenn wir diese Energie die **Fermi-Grenze** nennen,

$$E_F = kT \ln C, \quad (19.64)$$

schreibt sich die Verteilung

$$n_i = \frac{N_i}{e^{(E_i - E_F)/(kT)} + 1}. \quad (19.65)$$

In der Umgebung der Fermi-Grenze ist die Funktion n_i/N_i (die relative Besetzung) am steilsten. Wenn die Energie von E_F auf $E_F + kT$ zunimmt, wächst der Nenner von 2 auf $e + 1 = 3,72$, also sinkt n_i/N_i fast auf die Hälfte ab. In größerer Entfernung von der Fermi-Grenze ist der Einfluss

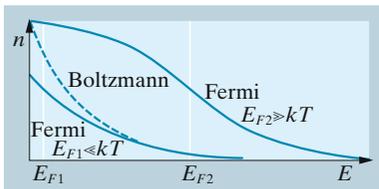


Abb. 19.8. Je nach der Lage der Fermi-Grenze E_F , die durch die Anzahl vorhandener Teilchen bestimmt wird, ähnelt die Fermi-Verteilung mehr oder weniger der Boltzmann-Verteilung. Bei $E_{F1} \ll kT$ (geringe Teilchendichte) merkt man wenig von den Quanteneffekten; bei $E_{F2} \gg kT$ beherrschen sie die Verteilung

einer Änderung um kT längst nicht mehr so groß. Übrigens ist die Funktion $n_i/N_i = 1/(e^{(E_i - E_F)/(kT)} + 1)$ symmetrisch um den Halbbesetzungspunkt auf der Fermi-Grenze:

$$\frac{n_i}{N_i}(E_F + \varepsilon) = \frac{1}{e^{\varepsilon/(kT)} + 1} = \frac{N_i - n_i}{N_i}(E_F - \varepsilon).$$

Bei tiefen Temperaturen ist also die relative Besetzung sehr steil, besonders an der Fermi-Grenze E_F . Bei $T = 0$ ist F eine messerscharfe Grenze zwischen besetzten und unbesetzten Zuständen. Die Elektronen bilden den „Fermi-Eisblock“. Bei höheren Temperaturen schmilzt dieser Eisblock ab und streckt eine dünne Zunge ins Gebiet oberhalb der Fermi-Grenze.

Die Lage der Fermi-Grenze ist bestimmt durch die Anzahl verfügbarer Zustände für jede Energie und die Gesamtzahl der Elektronen, die hinein müssen. Die Zustände werden bei $T = 0$ von unten her aufgefüllt, bis alle Elektronen untergebracht sind. Die dann erreichte Energie ist die Fermi-Grenze.

Teilchen mit ganzzahligem Spin (Bosonen) folgen einer anderen Abzählregel und einer anderen daraus resultierenden Statistik, der **Bose-Einstein-Statistik**. Für Bosonen gilt kein Pauli-Prinzip. Im Gegenteil zeigen Bosonen eine Klumpungstendenz: Wo Teilchen sind, da fliegen i. Allg. Teilchen zu. Wenn N_k leere Zustände die Teilchen nach Maßgabe von N_k anziehen, dann wird diese Lockung durch das Vorhandensein von n_k Teilchen in diesen Zuständen nicht gesenkt, wie bei der Fermi-Dirac-Statistik, sondern gesteigert, und zwar auf $N_k + n_k$. Die Übergangsrate von i nach k wird dann

$$U_{ik}n_i(N_k + n_k).$$

Die Ausrechnung der Energieverteilung für das Gleichgewicht verläuft genau wie bei der Fermi-Dirac-Statistik; das $+$ -Zeichen (statt des $-$ bei *Fermi*) schleppt sich mit und bewirkt eine Zeichenänderung im Nenner von (19.63):

$$n_i = \frac{N_i}{C^{-1}e^{E_i/(kT)} - 1}. \quad (19.66)$$

19.3.3 Das Fermi-Gas

Die Fermi-Dirac-Statistik findet ihre wichtigsten Anwendungen in der Festkörperphysik, der Plasmaphysik und der Astrophysik. Die Elektronen der äußeren Schalen in einem Metall, die sich so gut wie frei durch das relativ schwache Feld der Ionenrümpfe bewegen, und die Ionen und Elektronen in einem sehr dichten Plasma folgen der Fermi-Statistik.

Es gibt aber auch Fälle, wo sich das Verhalten von Fermionen praktisch mit der Boltzmann-Statistik beschreiben lässt. Man sieht das sofort aus Abb. 19.8. Wenn die Fermi-Grenzenergie $E_F \ll kT$ ist, macht sich der fermische Einfluss nur in einer fast unmerklichen Abflachung der Energieverteilung um und unterhalb von E_F geltend. Bei $E_F \gg kT$ ist dagegen das Verhalten wesentlich fermisch. Man nennt deshalb die Temperatur

$$T_{\text{ent}} = \frac{E_F}{k} \quad (19.67)$$

die **Entartungstemperatur** des Systems und formuliert die obigen Bedingungen so:

Bei Temperaturen $T \gg T_{\text{ent}}$ ist die Statistik boltzmannsch/fermisch (aus Gründen, die in der Quantenmechanik klarer werden, nennt man ein Fermi-Gas auch ein **entartetes Gas**).

Die Entartungstemperatur, d. h. die Lage der Fermi-Grenze, hängt vor allem von der Dichte und der Masse der Teilchen ab. Wir betrachten ein Gas aus N Teilchen mit der Masse m im Volumen V , also der Teilchendichte $n = N/V$. Wir wissen, dass je zwei Teilchen entgegengesetzten Spins im Impulsraum das Volumen h^3/V brauchen (V Volumen des Gases). Die N Teilchen nehmen also ein Impulsvolumen $\frac{1}{2}Nh^3/V$ ein. Da immer vorzugsweise die energetisch tiefsten Zustände besetzt werden, füllen die Teilchen eine Kugel vom Radius p_F im Impulsraum, wobei dieser Radius gegeben ist durch

$$\frac{4\pi}{3}p_F^3 = \frac{1}{2} \frac{Nh^3}{V} = \frac{1}{2}nh^3.$$

Der Grenzimpuls ist also

$$p_F = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} n^{1/3}h \quad (19.68)$$

und die entsprechende Grenzenergie

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{n^{2/3}h^2}{2m}. \quad (19.69)$$

Damit wird die Entartungstemperatur

$$T_{\text{ent}} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{n^{2/3}h^2}{2km} = 4,0 \cdot 10^{-45} \text{ K kg m}^2 \frac{n^{2/3}}{m}. \quad (19.70)$$

Elektronen sind demnach bei Zimmertemperatur entartet oder nichtentartet, je nachdem, ob ihre Konzentration größer oder kleiner als 10^{24} m^{-3} ist. Für Protonen liegt diese Grenze um den Faktor $1840^{3/2} \approx 10^5$ höher.

Von den $N = nV$ Teilchen des Fermi-Gases hat jedes eine mittlere Energie von $\frac{3}{5}E_F$ (das $\frac{1}{5}$ stammt aus der Integration über $4\pi p^2 E = 4\pi p^2 p^2/(2m)$, die 3 aus $\int 4\pi p^2 dp$). Die Gesamtenergie ist

$$E = \frac{3}{5}NF = 0,073 \frac{Vh^2 n^{5/3}}{m} = 0,073 \frac{h^2 N^{5/3} V^{-2/3}}{m}. \quad (19.71)$$

Von der Temperatur hängt diese Energie nicht ab. Das Fermi-Gas hat die spezifische Wärme Null. Dies erklärt, warum die Leitungselektronen zur spezifischen Wärme eines Metalls nicht beitragen (erst in höherer Näherung tritt eine sehr kleine Temperaturabhängigkeit auf).

Die Energie nimmt bei gegebener Teilchenzahl N mit abnehmendem Volumen zu wie $V^{-2/3}$. Wenn der räumliche Anteil des Phasenvolumens abnimmt, muss der Impulsanteil entsprechend wachsen, die Fermi-Kugel bläht sich auf; aus $p_F \sim V^{-1/3}$ folgt $E \sim E_F \sim V^{-2/3}$. Dieser Energiezuwachs bei Kompression muss, da ein Wärmeaustausch wegen der

fehlenden Temperaturabhängigkeit nicht stattfindet, dem Gas ganz als mechanische Arbeit zugeführt worden sein. Wegen $dE = -P dV$ muss das Fermi-Gas einen Druck

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = 0,048 \frac{N^{5/3} h^2}{m} V^{-5/3} \quad (19.72)$$

ausüben. Dies ist überhaupt der größte Druck, den etwa Elektronen ausüben können. Einem geringeren Druck halten sie noch als strukturierte Atomhüllen stand; vom Fermi-Druck an werden die Atomhüllen zu einem Fermi-Gas-Brei zerquetscht, der auf weitere Drucksteigerungen nur noch durch Kontraktion mit $V \sim P^{-3/5}$ reagieren kann. Dies gilt für „kalte“ Materie; steckt die Energie überwiegend in thermischer Energie der Atome, d. h. ist $T \gg T_{\text{ent}}$, dann fangen die thermischen Stöße den Druck nach den üblichen Gasgesetzen auf.

Materie mit der Zustandsgleichung $P \sim V^{-5/3}$ verhält sich eigenartig. Im Innern größerer Planeten erreicht der Gravitationsdruck diese Werte; dort beginnen die Atome, zerquetscht zu werden. Wir suchen einen solchen Planeten zu vergrößern, indem wir von außen Masse aufladen. Sie steigert den Gravitationsdruck im Innern, der Kern des Planeten schrumpft, und zwar so schnell, dass der Planet nicht größer wird, sondern kleiner. Eine einfache Dimensionsbetrachtung zeigt, dass unter diesen Bedingungen Radius und Masse eines Himmelskörpers zusammenhängen wie $R \sim M^{-1/3}$. Der Gravitationsdruck ist $P_g \approx GM\rho/R \sim Gn^2 R^2$, seine Gleichheit mit dem Fermi-Druck $P \sim n^{5/3}$ bedingt $R \sim n^{-1/6}$, also $M \sim nR^3 \sim R^{-3}$. Die Zahlenrechnung zeigt, dass Jupiter ungefähr der größte kalte Körper ist, den es gibt. Sterne, die ihre thermonuklearen Energiequellen praktisch erschöpft haben, fallen so weit in sich zusammen, bis der Fermi-Druck ihren Gravitationsdruck auffängt. Solche **Weißer Zwerge** von Sonnenmasse sind entsprechend $R \sim M^{-1/3}$ nur noch etwa so groß wie die Erde, haben also Dichten von 10^8 kg m^{-3} und mehr. Wegen ihrer winzigen Oberfläche kommen sie trotz ihrer relativ hohen Oberflächentemperatur mit ihrer gravitativen Kontraktionsenergie sehr lange aus. Die Gravitationsenergie GM^2/R ist wegen des kleineren R etwa 100-mal größer, die Abstrahlung entsprechend R^2 etwa 10 000-mal kleiner, also reicht die Kontraktionswärme nicht 10^7 Jahre, wie sie bei der Sonne reichen würde, sondern fast 10^{13} Jahre – falls die Kontraktion allmählich und kontrolliert erfolgt.

Das ist bei etwas größerer Masse nicht mehr der Fall. Wenn nämlich die Fermi-Energie höher wird als die Ruhenergie $m_e c^2 \approx 0,5 \text{ MeV}$ des Elektrons, wird das Gas **relativistisch entartet**. Dann bleibt bis (19.68) alles richtig, aber anstelle von $E_F = p_F^2 / (2m_e)$ tritt der relativistische Zusammenhang $E_F = p_{Fc} \sim n^{1/3} h$. Der Druck wird dann $P \sim n^{4/3}$. Für den Gravitationsdruck sind die Nukleonen maßgebend, und die sind noch nicht relativistisch. Also gilt $P_g \sim n^2 R^2$. Gleichgewicht zwischen P und P_g herrscht bei $R \sim n^{-1/3}$. Das ist der normale Zusammenhang zwischen R und n bei gegebenem M , d. h. bei *jedem* Wert von R sind Fermi-Druck und Gravitations-Druck gleich groß. Beim *nichtrelativistischen* Fermi-

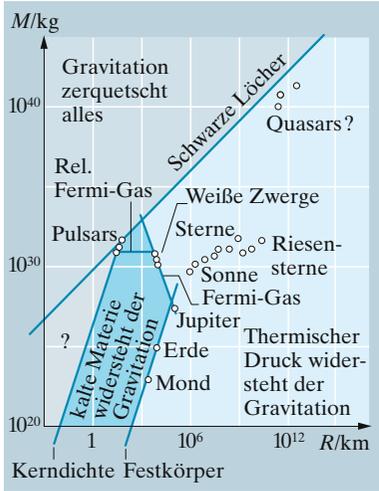


Abb. 19.9. Die verschiedenen Zustände der Materie im $\ln M(\ln R)$ -Diagramm

Gas nahm der Auswärtsdruck $P \sim R^{-5}$ bei Schrumpfung schneller zu als $P_g \sim R^{-4}$, d. h. es stellte sich stabil ein bestimmtes R ein. Beim relativistisch entarteten Gas ist das Gleichgewicht indifferent: Eine leichte zufällige Expansion führt rein trägheitsmäßig zur Explosion, eine Kontraktion zum Kollaps. Dieser endet erst, wenn andere Auswärtskräfte stabilisierend eingreifen, nämlich die Abstoßung zwischen den Nukleonen: Die Materie komprimiert sich bis auf Kerndichte ($10^{14} \text{ g cm}^{-3}$). Solch ein **Neutronenstern** hat nur noch etwa 10 km Durchmesser. Beispiele scheinen in den **Pulsaren** vorzuliegen (Aufgaben 19.3.2–19.3.4). Die Grenze zwischen nichtrelativistischem und relativistischem Fermi-Gas liegt bei $p_F \approx m_e c$, d. h. bei etwa $n \approx (m_e c/h)^3 \approx 10^{35} \text{ m}^{-3}$, entsprechend $M \approx 1,4$ Sonnenmassen (**Chandrasekhar-Grenze**).

Die Einsturzbedingung für einen Weißen Zwerg heißt: mittlere Gravitationsenergie eines Teilchens \approx Ruhenergie des Elektrons. Bis auf den Massenunterschied zwischen Elektron und Proton (dieser Faktor wird bei genauerer Rechnung noch erheblich abgeschwächt) ist das auch die Bedingung für die Bildung eines **Schwarzen Loches**: mittlere Gravitationsenergie \approx Ruhenergie eines Protons. Etwas oberhalb der Chandrasekhar-Grenze macht also die Kontraktion nicht einmal bei Nukleonendichte halt: Selbst die Nukleonen werden zerquetscht, und der alte Stern verschwindet als Schwarzes Loch ganz aus unserer Welt.

19.3.4 Stoßvorgänge bei höchsten Energien

Ein Zentralproblem der Hochenergiephysik, die die Vorgänge in der kosmischen Strahlung und in großen Beschleunigern behandelt, ist das folgende: Wenn ein Teilchen mit sehr hoher Energie (viel größer als seine Ruhenergie, also i. Allg. viel größer als 1 GeV) auf ein geladenes Teilchen prallt, ist hinterher von den stoßenden Teilchen nichts mehr zu erkennen, sondern eine ganze Anzahl neuer Teilchen, meist Pionen, spritzt auseinander. Abbildung 18.53 zeigt einen solchen Hochenergiestoß eines kosmischen Protons mit einem ruhenden Kern. Ganz ähnlich sehen auch Bilder von Stoßprozessen in sehr großen Beschleunigern aus. Die auseinander fliegenden Teilchen haben mit den ursprünglichen nicht mehr viel zu tun; ihre Anzahl N hängt lediglich von der Energie E ab, mit der das ursprüngliche Teilchen eingeschossen wurde (gemessen im Laborsystem unter der Annahme, dass das getroffene Teilchen ruht, was es im Speicherring natürlich nicht tut). Eine Abhängigkeit $N \sim E^{1/4}$ beschreibt ausgezeichnet über viele Größenordnungen von E die **Multiplizität** N des **Sterns** (Abb. 19.10).

Die Deutung dieser Beziehung ist eine schöne Anwendung der Quantenstatistik und der Relativitätstheorie. Die Grundidee stammt von *Fermi* (1950) und wurde von *Landau* unter Hinzuziehung hydrodynamischer Vorstellungen erweitert.

Es spricht alles dafür, als würden die beiden Teilchen, die da mit so ungeheurer Energie zusammenprallen, zunächst zu einem Tröpfchen strukturloser Urmaterie oder Urenergie eingeschmolzen, das dann nach rein statistischen Gesetzen in völlig andere Teilchen zerfällt. Ob diese Teilchen der Fermi-Dirac- oder der Bose-Einstein-Statistik gehorchen (oder sogar einfach der Maxwell-Boltzmann-Statistik), spielt für die nachfolgende Betrachtung nur insofern eine Rolle, als die Proportionalitätskonstanten davon berührt werden. Auf alle Fälle ist ja die Energieverteilung der Teilchen eine Funktion von $e^{E/(kT)}$, nämlich $f(e^{E/(kT)})$. Im Energieintervall $(E, E + dE)$, das im Phasenraum das Volumen $4\pi p^2 dp V$ einnimmt, gibt es $8\pi p^2 dp V h^{-3}$ Plätze. V ist das Volumen des Urmaterietröpfchens.

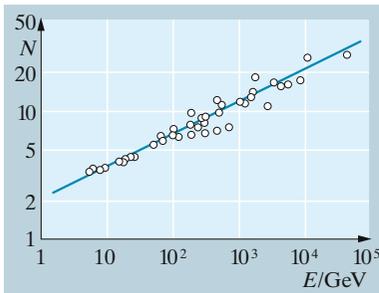


Abb. 19.10. Anzahl N geladener Sekundärteilchen, die bei Proton-Proton-Stößen entstehen, als Funktion der Energie W des stoßenden Protons im Laborsystem (das andere Proton wird als ruhend betrachtet; Speicherring-Experimente sind entsprechend umgerechnet). Messungen an verschiedenen Beschleunigern und an kosmischen Protonen, zusammengestellt nach *Carruthers*. Die log-log-Gerade entspricht der $W^{1/4}$ -Abhängigkeit nach der Theorie von *Fermi* und *Landau*

Im Mittel sitzen in diesem Energieintervall $8\pi p^2 dp Vh^{-3} f(e^{E/(kT)})$ Teilchen. Nun ist bei so hohen Energien $E = pc$. Also ergibt sich die gesamte Teilchenzahl im Tröpfchen zu

$$N = \int_0^\infty 8\pi p^2 dp Vh^{-3} f\left(e^{pc/(kT)}\right), \quad (19.73)$$

die Gesamtenergie, gemessen im Schwerpunktsystem des Tröpfchens, zu

$$\begin{aligned} E' &= \int_0^\infty 8\pi p^2 dp Vh^{-3} E f\left(e^{E/(kT)}\right) \\ &= \int_0^\infty 8\pi p^3 dp Vh^{-3} c f\left(e^{pc/(kT)}\right). \end{aligned} \quad (19.74)$$

Um die Integrationen auszuführen, substituiert man die Variable $x = pc/(kT)$. Damit wird

$$N = 8\pi V k^3 T^3 c^{-3} h^{-3} \int_0^\infty x^2 f(e^x) dx, \quad (19.75)$$

$$E' = 8\pi V k^4 T^4 c^{-3} h^{-3} \int_0^\infty x^3 f(e^x) dx. \quad (19.76)$$

Die bestimmten Integrale sind reine Zahlen, die nicht sehr viel größer als 1 sind. Die einzigen Variablen sind V und T . In (19.76) erkennt man übrigens das Stefan-Boltzmann-Gesetz wieder (auch die schwarze Strahlung ist ein solcher Klumpen Urmaterie, und die Anzahl der Teilchen, d. h. Photonen, die diesen Klumpen zusammensetzen, ist nicht konstant, sondern wird nach Maßgabe von T und V durch rein statistische Gesetze geregelt).

Das Volumen V des Urmaterietröpfchens ergibt sich so: An sich ist einem Elementarteilchen ein Volumen V_0 zuzuschreiben, dessen Radius von der Größenordnung der Compton-Wellenlänge des Protons $r = h/(mc)$ (oder des klassischen Elektronenradius $r' = e^2/(4\pi\epsilon_0 m_e c^2)$) ist, also $r \approx 10^{-15}$ m. Im Augenblick des Stoßes, vom Schwerpunktsystem aus betrachtet, sind aber die beiden einander entgegenrasenden Teilchen stark Lorentz-abgeflacht, d. h. ihre Längserstreckung und damit ihr Volumen ist nur noch

$$V = V_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Der gleiche Wurzelfaktor tritt auch in der Energie E' auf:

$$E' = 2mc^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Man kann also schreiben

$$V = \frac{V_0 2m_0c^2}{E'}. \quad (19.77)$$

Damit wird aus (19.75) und (19.76) $N \sim T^3/E'$ und $E' \sim T^4/E'$, also $T \sim E'^{1/2}$ und $N \sim T \sim E'^{1/2}$, oder mit eingesetzten Zahlenwerten, und zwar $r = h/(mc)$:

$$N = \left(\frac{16\pi^2}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{E'}{m_0c^2}\right)^{1/2}. \quad (19.78)$$

Nur im Speicherring wird E' direkt durch die Nominalenergie des Beschleunigers gemessen: Schwerpunktsystem und Laborsystem sind identisch, also ist E' die doppelte Nominalenergie. Für kosmische Teilchen und andere Beschleuniger ist die Energie E' im Schwerpunktsystem i. Allg. viel kleiner als die Laborenergie E ,

und zwar $E' = \sqrt{2m_0c^2E + 2m_0^2c^4}$ oder bei sehr hoher Energie $E' = \sqrt{2m_0c^2E}$.
Damit ergibt sich sofort die $E^{1/4}$ -Abhängigkeit der Sternmultiplizität:

$$N = \left(\frac{32\pi^2}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^{1/4} \tag{19.79}$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert $N \approx 3E^{1/4}$ (W in GeV), die Experimente werden am besten durch $N = 2,05E^{1/4}$ beschrieben.

Die mittlere Energie, die jedes dieser N Teilchen davonträgt, steigt dementsprechend im Schwerpunktsystem ebenfalls wie $N/E^{1/2} \sim E^{1/2}$ an.

19.3.5 Extreme Zustände der Materie

In normaler Materie hat ein Elektron etwa ein Volumen vom Bohr-Radius $r_B = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$ zur Verfügung. Seine Energie ist $E_B \approx e^2/(4\pi\epsilon_0r_B)$, die Energiedichte $E_B/r_B^3 \approx m^4e^{10}/(\hbar^8(4\pi\epsilon_0)^5)$ lässt sich als Druck auffassen, für den sich aus den Riesenpotenzen ein Wert um 10^7 bar herauschält, wie wir ihn auch aus (19.72) finden. Ein höherer Druck als dieser zerquetscht die Atomhüllen zu einem einheitlichen Brei, dem **Fermi-Gas** der Elektronen. Alle Elemente nehmen dadurch metallische Eigenschaften an. Unterhalb der Fermi-Temperatur, die sich aus $kT \approx E \approx p^2/(2m)$ ergibt, ist dieses Gas entartet, d. h. die tiefsten Energiezustände sind vollbesetzt, die höheren leer. Die für den Druck P verantwortliche mittlere Energie ist nicht mehr kT , sondern $p^2/(2m) \approx n^{2/3}\hbar^2/m$, also wird die Energiedichte oder der Druck $P \approx n^{5/3}\hbar^2/m$. Steigender Druck presst die Elektronen in immer höhere Energiezustände, daher die hohe Potenz von n in diesem Gesetz. Im Labor lässt sich dieser Zustand statisch nicht realisieren, weil kein Material, dessen Festigkeit ja auf den strukturierten Elektronenhüllen beruht, diesem Druck gewachsen sein kann. Nur der Einschluss durch Gravitationsdruck reicht dazu aus. Jupiter und Saturn bestehen fast ganz aus **metallischem Wasserstoff**, man braucht keinen Eisenkern, um ihre starken Magnetfelder zu erklären. Ein großer Teil der Materie des Weltalls liegt in den **Weißen Zwergen**, ausgebrannten leichteren Sternen, als Fermi-Gas vor. Die Gesamtenergie eines solchen Sterns, der N Elektronen enthält (Fermi-Energie + Gravitationsenergie) ist

$$E_* \approx \frac{Np^2}{2m} - \frac{GM^2}{R} \approx \frac{Nh^2}{2mR^2} - \frac{GM^2}{R}$$

Ihr Minimum bei $R \approx Nh^2/(mGM^2) \sim 1/M$ zeigt, dass schwere Weiße Zwerge noch kleiner sind als leichte.

Wir steigern den Druck immer mehr. Das Fermi-Gas komprimiert sich gemäß $P \sim n^{5/3}$, die Elektronen werden in immer höhere Energiezustände gequetscht. Etwas Neues passiert, wenn sie dabei relativistische Energien erreichen, also ihr Impuls $p \approx mc$ wird. Das geschieht bei der Teilchenzahl-dichte $n \approx \hbar^3/p^3 \approx m^3c^3/\hbar^3$ und der Dichte (die natürlich von den Nukleonen gestellt wird) $\rho \approx m_p m^3c^3/\hbar^3 \approx 10^8 \text{ kg/m}^3$, d. h. dem Druck $P \approx m^4c^5/\hbar^3 \approx 10^{17} \text{ bar}$. Oberhalb dieser Grenze wird das Elektronengas relativistisch, der Zusammenhang zwischen Energie und Impuls heißt nicht mehr $E = p^2/(2m)$, sondern $E = pc$. Diese Energie und ihre Dichte, der Druck, steigen bei der weiteren Kompression etwas langsamer

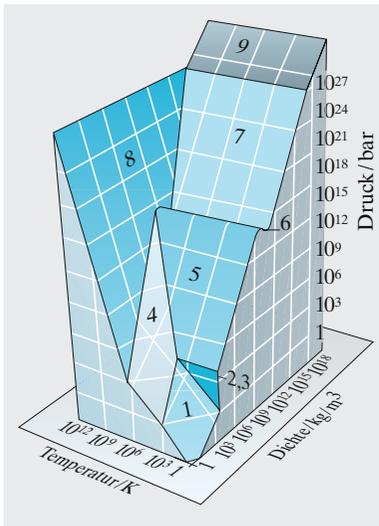


Abb. 19.11. Die bisher bekannten Zustände der Materie und ihre Zustandsflächen $p(\rho, T)$

an als im nichtrelativistischen Fermi-Gas: $E = pc \approx hcn^{1/3}$, $P \approx hcn^{4/3}$. Die Gesamtenergie eines Sterns $E_* \approx Nhc n^{1/3} - GM^2/R \approx N^{4/3}hc/R - GM^2/R$ hat offenbar kein Minimum mehr: Der Stern bricht noch weiter in sich zusammen, wenn seine Masse die **Chandrasekhar-Grenze** $M \approx (hc/(Gm_p^2))^{3/2}m_p \approx 10^{33}$ kg übersteigt, die aus der Bedingung $dE/dR \approx 0$ folgt. Während dieses Zusammenbruchs geschieht wieder etwas Neues: Die Fermi-Energie überschreitet die 0,73 MeV, um die das Neutron schwerer ist als Proton + Elektron. Ein inverser β -Prozess $p + e \rightarrow n + \nu$ wird möglich, die Elektronen werden in die Protonen hineingequetscht, denn wenn sie ihre Zelle im Phasenraum freigeben, kommt mehr Energie heraus, als zum Übergang ins Neutron aufgewandt werden muss. Schließlich gibt es nur noch Neutronen.

Mit den Neutronen wiederholt sich nun dasselbe Spiel wie mit den Elektronen. Zunächst gibt es noch strukturierte Gebilde, Kerne mit sehr hohem Neutronenanteil. Um die Dichte 10^{15} kg/m³ wird aber die Fermi-Energie der Neutronen größer als ihre Bindungsenergie an den Kern (etwa 10 MeV). Die Kerne werden zum Fermi-Gas der Neutronen zerquetscht. Von da ab steigt der Druck wieder wie $\rho^{5/3}$, die Energie wie $\rho^{2/3}$. Sie erreicht um $\rho \approx 10^{18}$ kg/m³ die relativistische Grenze $m_n c^2$. Das ist die Dichte der Kernmaterie selbst: Die Neutronen liegen jetzt dicht gepackt, der ganze **Neutronenstern** hat nur noch wenige km Radius, der Druck liegt um 10^{30} bar. Bei der Schrumpfung bleiben Drehimpuls und Magnetfluss des Sterns im Wesentlichen erhalten, er rotiert rasend schnell, und die in seinem ungeheuren Magnetfeld umlaufenden Teilchen senden eine im Rhythmus des Umlaufs gepulste Strahlung in den Raum. Auch relativistische Neutronenmaterie kann keinen stabilen Stern bilden, sondern bricht endgültig zum Schwarzen Loch zusammen.

19.3.6 Biografie eines Schwarzen Loches

Vom **Schwarzen Loch** sehen wir definitionsgemäß nichts, da es nicht einmal Photonen aus seinem Gravitationsfeld entweichen lässt. Dennoch gehören einige Schwarze Löcher zu den hellsten Objekten im Weltall. Kommt ein anderer Stern einem Schwarzen Loch zu nahe, nämlich bis innerhalb von dessen Roche-Grenze, dann zerreißt ihn die Gezeitenkraft des Schwarzen Loches, sein Material verteilt sich in einer **Akkretions-scheibe** ähnlich dem Saturnring und wird allmählich eingeschlürft. Beim Einsturz gibt das heiße, also ionisierte beschleunigte Gas eine Strahlung ab, deren Frequenz immer mehr steigt bis ins γ -Gebiet, und die fast die ganze Ruhenergie mc^2 der einstürzenden Materie enthält. Unbegrenzt ist der Appetit eines Schwarzen Loches aber doch nicht, diese Strahlung selbst zügelt ihn. Wenn sie zu stark wird, verhindert ihr Strahlungsdruck den weiteren Einsturz. Ein Massenstrom \dot{M} erzeugt die Strahlungsintensität $I = \dot{M}c^2/(4\pi R^2)$ und den Strahlungsdruck $p = I/c = \dot{M}c/(4\pi R^2)$. Freie geladene Teilchen absorbieren mit dem **Thomson-Querschnitt** $\sigma \approx 10^{-29}$ m². Die Strahlung übt auf ein solches Teilchen die Kraft $F = p\sigma$ aus. Die Grenze des Massenflusses (**Eddington-Grenze**) liegt dort, wo dies gleich der Gravitation auf das Teilchen ist: $\dot{M}c\sigma/(4\pi R^2) = GMm/R^2$, also

$$\dot{M} = \frac{4\pi Gm}{\sigma c} M \approx 3 \cdot 10^{-16} \text{ s}^{-1} M. \quad (19.80)$$

Wenn ein Schwarzes Loch auf dem üblichen Weg als Überrest der **Supernova-Explosion** eines ziemlich schweren Sterns entsteht, muss es den Partner, den es frisst, auf 10^8 Jahre verteilen. Dies geschieht dem Partner eines engen Doppelsternsystems, wenn er nach Verlassen der Hauptreihe zum Roten Riesen wird und über den gemeinsamen **Roche-Lobe** hinausschwillt. Ein solches wohlgenährtes Schwarzes Loch hat eine Strahlungsleistung $P = \dot{M}c^2 \approx 32 \text{ W}$, fast eine Million mal mehr als die Sonne.

Ein Schwarzes Loch, das immer so viel zu fressen bekommt, wie es vertilgen kann, wächst also nach dem Gesetz (19.80), d. h. $M = M_0 e^{t/\tau}$ mit $\tau = \sigma c / (4\pi Gm) \approx 10^8$ Jahre. Nach etwas mehr als 2 Milliarden Jahren könnte es anfangend von normaler Sternmasse auf etwa 10^8 Sternmassen angeschwollen sein. Dies ist die Masse, die Laplace für ein Schwarzes Loch berechnete, ausgehend von der Dichte des Wassers oder der Sonne. Ein so riesiges Schwarzes Loch mit dieser Dichte ist selbst so groß wie seine eigene Roche-Grenze. Es braucht daher seine Beute nicht mehr zu zerkleinern, sondern kann einen Stern, der seinen jupiterbahngroßen Querschnitt trifft, als ganzen schlucken. So ein Schwarzes Loch wird dann ruhiger, nachdem es vorher bei optimaler Fütterung stärker gestrahlt hat als 10^{13} Sonnen, d. h. über hundertmal mehr als eine ganze große Galaxie.

Damit ergibt sich die plausibelste Deutung der **Quasare**, die ähnliche Strahlungsleistungen auf engstem Raum von höchstens einigen Lichtmonaten abgeben. In großer Entfernung sehen wir junge Galaxien mit jungen Schwarzen Löchern noch im unruhigen Alter vor Erreichen der Laplace-Grenze. Später werden sie scheinbar friedlicher. Auch unsere Galaxie hat im Kern vielleicht ein solches Riesenloch. Jedenfalls gibt es dort ein sehr unperiodisch strahlendes Objekt, dessen Ausdehnung sich mit Steigerung der instrumentellen Auflösung immer enger einschnüren lässt (zurzeit auf weniger als ein Lichtjahr).

Dass ein Schwarzes Loch seine ganze Galaxie vertilgen kann, ist unwahrscheinlich, denn die Sterne in den Spiralarmen beschreiben fast Kreisbahnen. Wenn es das doch schaffen sollte, dauerte dies nach dem e-Gesetz auch nur 3–4 Milliarden Jahre. Von da an passiert sehr lange überhaupt nichts, bis nach den leichteren sogar dieses Riesenloch zerstrahlt, was etwa 10^{95} Jahre dauert. Das wäre dann wohl wirklich das letzte Ereignis im Fall eines unbegrenzt expandierenden Weltalls, d. h. wenn die **verborgenen Massen** nicht groß genug sind, um den Raum und den Zeitablauf in sich zurückzukurven.

▲ Ausblick

Man kann die Welt auf zwei Arten beschreiben: Mikroskopisch, ausgehend von ihrem atomaren Aufbau, und makroskopisch, auf Grund der Beobachtungen unserer Sinne, verfeinert durch die Instrumente, die etwa um 1900 verfügbar waren. Damals waren viele so beeindruckt durch die Erfolge der Thermodynamik, die von Atomen nichts zu wissen braucht, dass sie die Atomvorstellung überhaupt als unbewiesene und überflüssige Hypothese ansahen. *Boltzmanns* Ideen, die beide Bilder zusammenbringen wollten, wurden wenig beachtet, was bestimmt zu seinem Entschluss zum Freitod beigetragen hat. Er hätte sich mit *Maxwells* Anerkennung begnügen sollen.

Heute weiß man, dass der thermodynamische und der statistische Zugang zu den gleichen Ergebnissen führen. Aber der statistische geht weiter: Er kann auch Nichtgleichgewichte, Schwankungen, kinetische Abläufe zwangloser beschreiben als die klassische Thermodynamik. *Onsager*, *Prigogine* und besonders *Eigen* benutzen beide Zugänge, um zu erklären, wie entgegen dem blinden Zufall und trotz des Entropiesatzes geordnete, sogar lebendige Systeme entstehen konnten.



1054 entdeckten chinesische Astronomen im Sternbild Stier einen neuen Stern, vorübergehend heller als Venus. Die Europäer waren mit anderem beschäftigt, z. B. ob Priester einen Bart tragen dürften oder ob „filioque“ zum Credo gehört. Inzwischen hat sich die Supernova-Hülle mit doppler-gemessenen 1300 km/s auf 7 Bogenminuten ausgedehnt und ist demnach 3000 Lichtjahre entfernt (Aufnahme von *Walter Baade* am Mt. Palomar-Reflektor). In der Mitte sitzt die Radioquelle Taurus A, später als Pulsar NP 0532 erkannt, der von den Meterwellen bis zum Röntgengebiet mit einer Periode von 33,1 ms tickt. Zu diesem Neutronenstern ist der innere Teil der Supernova 1054 kollabiert. Seine Gasumgebung sendet Synchrotronstrahlung aus: Relativistische Elektronen kreisen in einem relativ schwachen Magnetfeld

✓ Aufgaben...

www | CD

Diese Reihe von Aufgaben soll Sie mit einigen Grundbegriffen der Informationstheorie vertraut machen. Wir werden feststellen, dass diese Begriffe formal völlig identisch mit den Begriffen der statistischen Physik sind. Vor allem spielt die Entropie in beiden Gebieten eine zentrale Rolle. Es ist erstaunlich und den Physikern hoch anzurechnen, dass sie diesen Begriff zuerst entdeckt haben, da er doch in der Informationstheorie sehr viel einfacher ist.

● 19.1.1 Abstrakt–Konkret

Ein Objekt soll durch eine Reihe von Entscheidungsfragen (Antwort ja oder nein) identifiziert werden. Es handele sich zunächst darum, eine Zahl festzulegen, sagen wir eine höchstens dreistellige. Welche Methode schlagen Sie vor? Wie viele Fragen brauchen Sie? Wie ändern Sie das Verfahren ab, wenn es sich um eine historische Jahreszahl handelt? Jemand soll eine Person raten. Statt mit Begriffen zu operieren, erfragt er den

Namen buchstabenweise. Wie verfährt er am besten? Welche Buchstaben übertragen am meisten Information? Geschickte Frager finden selbst komplizierte Objekte z. B. „das Spundloch im Fass des Diogenes“ in 50–70 Fragen. Was schließen Sie daraus?

● 19.1.2 Autonummern

Deutsche Autonummernschilder enthalten bis zu drei Buchstaben, die den Stadt- oder Landkreis kennzeichnen. Ist Ihnen aufgefallen, dass z. B. das E

sehr selten vorkommt? Warum? Kann man das System verbessern, mit der Randbedingung, dass auch Polizisten nur Menschen sind?

●● 19.1.3 Information

Zeigen Sie, dass alle bisherigen Ergebnisse spezielle Anwendungen der folgenden Definition sind: Wenn eine Zeichenkette die sequentielle Wahrscheinlichkeit P hat, zufällig aus dem vorhandenen Zeichenvorrat zu entstehen, enthält sie eine **Information** $I = -\text{ld}P$. Dabei ist ld der Logarithmus zur Basis 2. Die Einheit der Information 1 bit, wird vermittelt durch die Antwort auf eine optimal formulierte Entscheidungsfrage. Hängt die Information einer Nachricht, so definiert, von ihrer Sequenz oder ihrer Komposition ab? Welche Buchstabenhäufigkeiten p_i müsste eine Quelle haben, damit sie möglichst viel Information pro Zeichen emittiert? Wie viel nämlich? Um wie viel weicht eine Quelle mit gegebener Verteilung p_i von diesem Optimalwert ab?

●● 19.1.4 Gold bug

Bestimmen Sie die Buchstabenhäufigkeit im Deutschen und anderen Sprachen an einem langen Text. Beobachten Sie, wie die Verteilung gegen die „wirkliche“ konvergiert, wenn der Text länger wird. Das Ergebnis ist eine wichtige Hilfe beim Geheimcodeknacken. Einfache Substitutionscodes strecken sofort die Waffen (vgl. *E. A. Poe*, „The Gold Bug“). Wie groß sind, ausgehend von den wirklichen p_i , Wahrscheinlichkeit und Information von „To be or not to be“ oder des ganzen Hamlet? Wie sieht der wahrscheinlichste Text gleicher Länge aus? Wie viel Information enthält er?

●● 19.1.5 Morse-Alphabet

Warum haben die Morse-Symbole für E und T nur je ein Zeichen, warum hat X vier? Wie viel Information enthält im Mittel ein morsecodierter Buchstabe? Hat *Morse* die p_i des Englischen genau respektiert? Wie viel Information hat er verschenkt? Welches sind die auffälligsten Fehlzuordnungen?

●● 19.1.6 Redundanz

Ein deutsches Wörterbuch enthalte 100 000 Wörter einer mittleren Länge von 10 Buchstaben. Wenn Ihnen diese Werte nicht gefallen, beschaffen Sie sich bessere. Wie viel Information verschenkt das Deutsche, indem es nicht alle denkbaren Buchstabenkombinationen ausnutzt? Wie sähe das Wörterbuch einer informationstechnisch idealen, aber phonetisch und mnemonisch bestimmt scheußlichen (weder aussprech- noch merkbaren) Sprache aus? Welches wäre seine mittlere Wortlänge? **Redundanz** ist verschenkte Informationskapazität, d. h. Differenz zwischen optimal übertragbarer und tatsächlich übertragener Information, gewöhnlich in % ausgedrückt. Schätzen Sie die Redundanz der deutschen Sprache (auf Wortbasis). Ist Redundanz immer von Nachteil?

●● 19.1.7 Markow-Kette I

Ein Teil der Redundanz einer Sprache stammt von ihrer ungleichen Zeichenhäufigkeit. Wie viel macht das im Deutschen aus? Woher stammt der Rest? Wenn auf ein S sehr oft ein T folgt oder ein C, nie ein X, bedeutet das Redundanz? Wir nennen q_{ik} die Wahrscheinlichkeit, dass hinter einem Buchstaben vom Typ i einer vom Typ k steht. Eine Nachricht, die nur durch die p_i und die q_{ik} gekennzeichnet ist, heißt **Markow-Kette** vom Gedächtnis 1. Ohne Kopplung zwischen Nachbarzeichen, wie im Abschn. 19.1 angenommen, erhält man Markow-Ketten vom Gedächtnis 0. Geben Sie andere Beispiele für Markow-Ketten. Spielen auch größere Gedächtnislängen eine Rolle, in der Sprache und anderswo?

●● 19.1.8 Markow-Kette II

Zeigen Sie, dass in einer **Markow-Kette** vom Gedächtnis 1 die Zeichenhäufigkeit p_i gegen eine Grenzverteilung strebt, die durch die Übergangswahrscheinlichkeiten q_{ik} gegeben ist, wenn die Kettenlänge gegen unendlich geht. Diese asymptotische Verteilung p_i ist ein **Eigenvektor** der Matrix q_{ik} . Zu welchem Eigenwert

gehört dieser Eigenvektor? Welche durch die Natur des Problems gegebene Eigenschaft von q_{ik} garantiert, dass ein solcher Eigenwert und ein solcher Eigenvektor immer existieren? Überzeugen Sie sich, wie viel einfacher diese Betrachtungen bei einiger Matrizenerfahrung werden als die direkte Rechnung, selbst für nur zwei mögliche Zeichen.

●● 19.1.9 Markow-Kette III

Drücken Sie die sequentielle Wahrscheinlichkeit einer gegebenen Nachricht, aufgefasst als Markow-Kette vom Gedächtnis 1, durch die p_i und q_{ik} der Quelle aus. Hinweis: Wenn die p_i überhaupt auftreten, dann nach Aufgabe 19.1.8 nur als Abkürzung für gewisse Kombinationen der q_{ik} . Schätzen Sie aus einigen markanten Beispielen für q_{ik} -Werte (oder durch Auszählen von Paarhäufigkeiten, was allerdings wohl nur mit dem Computer für hinreichend lange Texte möglich ist) die „Redundanz erster Ordnung“ des Deutschen.

●● 19.1.10 Übertragungskapazität

In den meisten technischen Informationskanälen wird die Nachricht einer Welle aufmoduliert. Warum ist dazu eine bestimmte **Bandbreite** (durchgelassener Frequenzbereich) nötig, auch wenn es sich nicht um Musik handelt? Die Nachricht sei in nur zwei Zeichen codiert: 0 und 1, d. h. Strom bzw. Nicht-Strom während einer gewissen vereinbarten Einheitszeit. Wenn diese Einheitszeit τ ist, welche Bandbreite muss der Kanal mindestens durchlassen (vgl. Theorie der Linienbreite)? Wie groß ist die **Übertragungskapazität** (gemessen in bit/s) eines Kanals der Bandbreite $\Delta\nu$? Wie ändert sich die Lage, wenn mehrere Binärzeichen zu einem Buchstaben zusammengefasst sind, oder wenn mehrere Amplitudenniveaus unterschieden werden sollen?

●● 19.1.11 Gehirnkapazität

Schätzen Sie die Übertragungskapazität der menschlichen Nerven bzw. die

Verarbeitungskapazität des Gehirns durch Lesen, Anhören, Nachsprechen, Memorieren von sinnlosen Ketten von Buchstaben oder anderen Zeichen (warum sinnlose Ketten?). Welche bit-Übertragungszeit folgt daraus? Wie viel Information enthält ein Fernsehbild (schwarz-weiß oder farbig)? Wie viel optische Information nehmen die Augen während des ganzen Lebens auf? Können sie sie auch weitergeben? Vergleichen Sie mit früher gefundenen Werten. Schlussfolgerungen?

●● 19.1.12 Das letzte Bit

Ein amerikanischer „Zauberer“ bat einen Zuschauer, aus einem Bridge-Spiel (52 Karten) fünf Karten auszuwählen. Eine davon, die „Zielkarte“, wurde beiseitegelegt, die vier anderen steckte der Zauberer in einen Umschlag. Ein anderer Zuschauer, der keine der Karten kannte, brachte den Umschlag der Frau des Zauberers, die im Hotelzimmer geblieben war, ohne jede Kommunikationsmöglichkeit mit dem Vortragssaal. Die Frau öffnete den Umschlag und nannte die Zielkarte. Kein Schummel!

●● 19.1.13 Protein-Information

Man glaubt, Bau und Funktion eines **Proteins** seien durch seine Aminosäuresequenz völlig festgelegt. Es gibt im Wesentlichen 20 Aminosäuren. Ein mittelgroßes Protein hat etwa 200 Aminosäuren. Wie viele verschiedene Proteine dieser Länge sind möglich? Wie viel macht es aus, wenn man auch kürzere in Betracht zieht? Schätzen Sie die Gesamtmenge belebter Substanz auf der Erde und die Gesamtzahl existierender Proteinmoleküle. Wenn jedes davon nur 1 s lang lebt und dann einer anderen Kette Platz macht, wie viele Ketten könnte der Zufall seit Entstehung des Lebens durchgespielt haben? Schlussfolgerungen?

●● 19.2.1 Mikro- und Makrozustände

In einem Kasten, der durch eine Zwischenwand in zwei Hälften geteilt ist, sind N nichtwechselwirkende Moleküle zunächst alle in einer Hälfte. Jetzt

öffnet man ein Loch in der Zwischenwand. Warum gleicht sich der Druck aus? Welches ist der Entropiegewinn dabei? Entspricht das der Betrachtung von Abschn. 19.2.8? Verfolgen Sie den Vorgang, z. B. bei $N = 4$, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände auf. Wenn ein Zustand A in einen Zustand B übergehen kann, muss doch umgekehrt auch B in A übergehen können. Warum kommt das u. U. so selten vor oder gar nicht mehr, wenn man alle Molekülzahlen mit 10^{26} multipliziert?

● 19.2.2 Arbeit und Wärme

Weisen Sie nach, dass die Aufteilung (19.36) der Energieänderung genau dem entspricht, was man physikalisch Arbeit bzw. Wärme nennt, dass also (19.36) der erste Hauptsatz ist. Betrachten Sie z. B. ein System geladener Teilchen, die verschiedene Zustände zur Verfügung haben und in ein elektrisches Feld gebracht werden. Wie lässt sich die Betrachtung auf mechanische Druckkräfte ausdehnen, die auf ein Gas wirken?

●● 19.2.3 Boltzmann-Verteilung*

Gegeben ist ein System mit äquidistanten diskreten Energiezuständen. Verteilen Sie eine gegebene Anzahl N von Teilchen mit gegebener Gesamtenergie E über diese Zustände. Welches ist die einfachste Kombination von Teilchensprüngen, bei der sich der Makrozustand ändert, E aber konstant bleibt? Wie ändert sich die Zustandswahrscheinlichkeit P dabei? Wie muss ein Zustand aussehen, bei dem dabei keine P -Änderung eintritt (großes N vorausgesetzt)? Haben Sie damit die Boltzmann-Verteilung abgeleitet?

●● 19.2.4 Entropiekraft

Einführung in die **Thermodynamik irreversibler Prozesse**: Wir betrachten ein abgeschlossenes System, dessen Zustand durch die Variablen a_1, a_2, \dots, a_n beschrieben wird.

* Die Anregung zu dieser Aufgabe verdanke ich Herrn Stud.-Rat i. H. W. Schmidt

Seine Entropie ist eine Funktion dieser Variablen. Denken Sie an eine Fläche im $n + 1$ -dimensionalen Raum. Wo liegt das Gleichgewicht? Wie sieht die S -Fläche in der Umgebung aus? Vergleichen Sie mit dem mechanischen Gleichgewicht: Minimum von U , Form der U -Fläche in der Umgebung. Irreversible Vorgänge vermehren die Entropie. Reversible Vorgänge sind unendlich langsam. Ein Vorgang läuft um so schneller ab, je mehr Entropie dabei erzeugt wird. Stimmen diese Aussagen? Beispiele! Kann man auch sagen: Die Möglichkeit zum Entropiezuwachs ist die treibende Kraft eines Prozesses? Tragen Sie solche Prozesse in die S -Fläche ein. Wie verschiebt sich der Zustandspunkt? Wenn Sie die Analogie mit der U -Fläche vervollkommen wollen, wie müssen Sie das mechanische Modell einrichten? Welche Größen können Sie als verallgemeinerte Kräfte bezeichnen? Kann man eine allgemeine Bewegungsgleichung für den Systempunkt a_i aufstellen?

●● 19.2.5 Kräfte und Ströme

Wie vertragen sich folgende Bezeichnungen und Aussagen mit dem Modell von Aufgabe 19.2.4: Wir nennen $J_i = \dot{a}_i$ verallgemeinerte Ströme, $X_i = \partial S / \partial a_i$ verallgemeinerte Kräfte. Die Kräfte „ziehen“ Ströme gemäß $J_i = \sum_k L_{ik} X_k$ (L_{ik} sind die **Onsager-Koeffizienten**). Ein System außerhalb des Gleichgewichts erzeugt Entropie mit der Rate $\dot{S} = \sum_i J_i X_i$. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Variablen a_i vernünftig gewählt sind. Was wird eine solche vernünftige Wahl bedeuten?

●● 19.2.6 Onsager-Relation

Ein System im Gleichgewicht liegt nicht still auf dem Gipfel des S -Berges, sondern führt kleine Schwankungen aus. Wie weit wagt es sich dabei im Durchschnitt vom Gipfel weg? Ist das eine Frage der S -oder der a_i -Differenz? Denken Sie an die statistische Definition von S . Auch für solche Schwankungen gelten die Bewegungsgleichungen $\dot{a}_i =$

$\sum_k L_{ik} \partial S / \partial a_k$. Vergleichen Sie $a_k \dot{a}_i$ und $a_i \dot{a}_k$. Stimmt es, dass vernünftige gewählte Zustandsvariable a_i und a_k unabhängig voneinander schwanken und was folgt daraus? Kann man allgemeine Aussagen über das Zeitmittel von $a_i \partial S / \partial a_i$ machen? Kann man a_i und $\partial S / \partial a_k$ als im Zeitmittel orthonormal bezeichnen? Wieso folgt daraus $L_{ik} = L_{ki}$ (**Onsager-Relation**)? Ist die Übertragung auf das Nichtgleichgewicht möglich?

●● 19.2.7 Thermoelektrizität

Zwei Drähte aus verschiedenen Metallen sind an beiden Enden zusammengelötet. Die Lötstellen 1 und 2 stecken in Thermostaten mit den Temperaturen T_1 und T_2 ($T_1 < T_2$). Ein Draht ist aufgeschnitten, ein Kondensator ist hineingelegt. Welche Variablen beschreiben das System (auf die Details der T - und Potentialverteilung kommt es nicht an, nur auf die Spannung am Kondensator)? Welche Entropieerzeugung findet statt, wenn ein Wärmestrom \dot{Q} von 2 nach 1 bzw. ein elektrischer Strom fließt? Entspricht das den Ansätzen von *Onsager* (Aufgabe 19.2.5)? Grenzfälle: (a) kein elektrischer Strom, ΔT festgehalten; (b) konstante Spannung am Kondensator, $\Delta T = 0$. Können Sie die **Thomson-Beziehung** zwischen **Thermokraft** und **Peltier-Koeffizient** ableiten?

●● 19.2.8 Thermo-mechanische Effekte

Zwei Gefäße 1 und 2, jedes mit konstantem Volumen, sind durch Kapillaren, enge Öffnungen oder Membranen miteinander verbunden. In beiden Gefäßen ist der gleiche Stoff (ein Gas, eine Flüssigkeit, flüssiges Helium), aber Temperaturen oder Drücke können verschieden sein. Bestimmen Sie vernünftige Variable und stellen Sie die Onsager-Gleichungen auf. Grenzfälle: (a) Man hält eine T -Differenz zwischen den Gefäßen aufrecht, (b) man hält eine Druckdifferenz aufrecht. Diskutieren Sie die Zusammenhänge zwischen **thermomolekularer Druckdifferenz**, **Thermoosmose** und **mechano-kalorischem Effekt**. Wie

klein müssen die verbindenden Öffnungen sein, damit die Diskussion einen Sinn hat? Im Gas spricht man auch von **Knudsen-Effekten**, im flüssigen Helium vom **Springbrunneneffekt**.

●● 19.2.9 Stationarität

Zwei große Wärmereservoirs mit den Temperaturen T_1 und T_2 werden plötzlich durch einen Metallstab verbunden. Was geschieht unmittelbar nach dem Einschieben des Stabes, was geschieht längere Zeit danach? Definieren Sie den Begriff Stationarität. Wie schnell stellt sich ein solcher Zustand ein? Untersuchen Sie die Entropieverhältnisse, besonders im stationären Zustand. Ändert sich dann die Entropie des Stabes noch? Wird ihm Entropie zugeführt? Wie sind beide Aussagen vereinbar? Führen Sie den Begriff der inneren Entropieerzeugung σ ein. Wie groß ist σ im Beispiel? Wie entwickelt sich σ im Lauf der Zeit?

●● 19.2.10 Satz von Prigogine

Beweisen Sie: Ein System sei durch die verallgemeinerten Kräfte X_1, \dots, X_n gekennzeichnet. k davon, nämlich X_1, \dots, X_k seien zwangsweise festgehalten. Wenn unter diesen Umständen die Entropieerzeugung minimal sein soll, müssen die den übrigen Kräften zugeordneten Flüsse J_{k+1}, \dots, J_n verschwinden. Beispiele! Ist die Forderung nach minimaler Entropieerzeugung sinnvoll? Was versteht man unter einer Stationarität k -ter Ordnung (speziell $k = 1$ oder $k = 0$)?

●● 19.2.11 Minimale Entropieerzeugung

Wenn ein System nicht im Gleichgewicht ist, d. h. Entropie erzeugen muss, richtet es sich so ein, dass diese Entropieerzeugung den Umständen entsprechend so klein wie möglich wird. Wieso ist dieser Zustand stabil? Wieso ergibt dieses Prinzip eine erhebliche Erweiterung der Gleichgewichts-Thermodynamik (eigentlich Thermostatik)? Stellen Sie

an Beispielen eine ungefähre Zeitskala für die Folge von Zuständen auf: Beliebige Anfangsverteilung von T – stationärer Zustand – Gleichgewicht. *Prigogine* hat gezeigt, dass sich das Prinzip minimaler Entropieerzeugung unter gewissen, z. B. auch biologischen Umständen als „innerer Ordnungstrieb“ auswirken kann. Es führt nicht immer zur Verschmierung der Gegensätze, sondern manchmal auch zur Entstehung **dissipativer Strukturen**.

●● 19.2.12 Isotopieeffekt

In Abb. 19.7 sind die Größen ΔG nicht vom Talboden, sondern von den eingezeichneten etwas höheren Niveaus aus gerechnet. Warum? Um wie viel ungefähr liegt dieses Niveau höher als der Talboden, wenn das in der Reaktion umgesetzte Teilchen ein Proton, ein Deuteron, ein ^{16}O -Atom ein ^{18}O -Atom ist? Spielt die Masse des anderen Partners keine Rolle, oder wie kann man sie berücksichtigen? Eigentlich ist eine ähnliche Korrektur auch für den aktivierten Übergangskomplex anzubringen. Wenn sie dort keine Rolle spielt, welcher Unterschied in den Reaktionsgeschwindigkeiten zwischen H und D bzw. zwischen ^{16}O und ^{18}O ergibt sich dann (**kinetischer Isotopieeffekt**)? Sind die Gleichgewichtskonzentrationsverhältnisse zwischen den H- und den D-Verbindungen auch verschieden, unter welchen Bedingungen, und um wie viel (**Gleichgewichts-Isotopieeffekt**)? Wie erklären Sie sich, dass die beiden H-Isotope im Meerwasser im Verhältnis 1/6 000, im Antarktischeis im Verhältnis 1/11 000 vorkommen?

●● 19.3.1 Glühemission

Die Maxwell-Verteilung liefert für die Emissionsstromdichte aus einer Glühkathode einen um fast drei Größenordnungen falschen Wert (Aufgabe 8.1.2). Korrigieren Sie jetzt diesen Fehler.

●● 19.3.2 Supernova

Mitten im **Crab-Nebel**, dem Überrest der von den Chinesen aufgezeichneten

Supernova-Explosion von 1054 n. Chr., sitzt ein winziger Stern, der völlig periodisch alle 0,033 s einen ungeheuer intensiven Radiopuls von etwa 0,003 s Dauer aussendet. Wenn diese Periodizität von der Rotation des Sterns herrührt (Leuchtturm!), wieso fliegt er dann nicht zentrifugal auseinander? Annahme: Der Stern hat, wie fast alle, etwa Sonnenmasse. Welche Dichte ergibt sich? Vergleichen Sie mit der Dichte der Kernmaterie. Welchen Drehimpuls hat der Stern? Vergleichen Sie mit dem der Sonne.

●● 19.3.3 Pulsar

Die Schärfe der Radiopulse eines **Pulsars** erlaubt ungewöhnliche Beobachtungen. Zum Beispiel kommt seine Emission mit $\lambda = 1$ m etwa 0,1 s später bei uns an als die mit $\lambda = 1$ cm. Kann man das auf die **Dispersion im interstellaren Plasma** zurückführen? Welche Elektronendichte (warum kommt es nur auf die Elektronen an?) muss man dazu annehmen? Abstand des Crab-Pulsars: etwa 4 000 Lichtjahre.

● 19.3.4 Pulsarfeld

Die Sonne hat ein mittleres Magnetfeld von einigen 10^{-4} T. Bei der Kontraktion bleiben die **B**-Linien i. Allg. an die Materie gefesselt. Schätzen Sie das Magnetfeld eines Pulsars. Wie groß sind Larmor-Radius und Larmor-Frequenz für verschiedene Teilchen, speziell nichtrelativistische Elektronen? Teilchen welcher Maximalenergie kann ein Pulsar magnetisch speichern?

●● 19.3.5 Kernverdampfung

Analysieren Sie den Effekt in Abb. 18.53. Warum ordnet man gerade die dünnste Spur dem Primärproton zu? Wie hoch dürfte die Energie dieses Primärprotons gewesen sein? Welche Durchschnittsenergien haben die Sekundärteilchen? (Alle Energien im Schwerpunkt- und im Laborsystem!) Wie groß werden die Reichweiten von Primär- und Sekundärteilchen sein?

●● 19.3.6 Fermis Theorie des β -Spektrums

Wir berechnen das Energiespektrum der β -Teilchen, d. h. die Wahrscheinlichkeit, mit der das β -Teilchen die Energie E_e mitbekommt, unter folgenden Annahmen bzw. Benutzung folgender Tatsachen: Der Ausgangszustand des Mutter- und der Endzustand des Tochterkerns sind für jeden individuellen Zerfallsakt die gleichen. Wenn trotzdem Elektronen unterschiedlicher Energie entstehen, liegt das daran, dass ein Neutrino den Rest wegführt. Das **Neutrino** ist wegen seiner kleinen (wahrscheinlich verschwindenden) Ruhmasse immer relativistisch, das Elektron manchmal (wann?; jedenfalls sind dann Rechnungen und Ergebnis viel einfacher). Die Wahrscheinlichkeit eines Zerfallsakts, charakterisiert durch eine bestimmte Kombination von Energien und Impulsen von Elektron und Neutrino, ist proportional dem entsprechenden Volumen im Impulsraum. Dieser ist sechsdimensional, weil es sich um zwei Teilchen handelt. Wie sieht das Energiespektrum aus mit relativistischem bzw. nichtrelativistischem Elektron?

●● 19.3.7 Weiße Zwerge

Sterne von ungefähr Sonnenmasse verbringen ihre alten Tage als **Weiße Zwerge**. Warum sie Zwerge werden, ist klar. Aber warum bleiben sie eine ganze Weile weiß? Schätzen Sie ab, welcher Teil des alten Sterns ein normales Gas, welcher ein Fermi-Gas bildet. Wie wird die Temperaturverteilung im Fermi-Gas aussehen? Wird der Weiße Zwerg sich bei weiterem Energieverlust kontrahieren, oder wie wird er sich sonst verändern?

●● 19.3.8 Suprafluidität

Helium 4 wird unter Normaldruck bei 4,211 K flüssig und unterhalb 24 bar niemals fest. Unterhalb des λ -Punktes 2,186 K nimmt ^4He seltsame Eigenschaften an: Die Viskosität wird immer kleiner und geht für $T \rightarrow 0$ ebenso wie die spezifische Wärmekapazität gegen Null, die Wärmeleitfähigkeit wird dagegen sehr groß. Das Helium kriecht in dünner Schicht längs der gemeinsamen Wand aus einem höheren in ein anfangs leeres tieferes Gefäß, wobei das höhere sich erwärmt, das tiefere abkühlt. Ähnliches passiert beim Überströmen durch eine sehr enge Kapillare (**mechanokalorischer Effekt**). Schallwellen breiten sich fast ungedämpft aus. Bei flüssigem ^3He kommt nichts dergleichen vor. Erklären Sie alles nach dem **Zwei-Flüssigkeiten-Modell von Tisza**: Bei Abkühlung unter den λ -Punkt sammeln sich immer mehr Teilchen im tiefstmöglichen Energiezustand (**Bose-Einstein-Kondensation**) und bilden die suprafluide Flüssigkeitskomponente. (Nobelpreis 1996 an Lee, Osheroff und Richardson)

Nichtlineare Dynamik

*Den letzten Menschen barg der Urlehm schon,
den Samen für des letzten Sommers Mohn.
Die Note, die der Schöpfungsmorgen schrieb,
dröhnt als des jüngsten Tages Donnerton.*

Aus den Rubáiyát des Omar Chayyám (1035–1122)

Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome: Rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.

Pierre Simon de Laplace (1749–1827), Essai philosophique sur les probabilités

■ Inhalt

20.1	Stabilität	1086
20.2	Nichtlineare Schwingungen	1093
20.3	Biologische und chemische Systeme	1101
20.4	Chaos und Ordnung	1113

▼ Einleitung

Man kann sich streiten, ob *Omar Chayyám* oder *Laplace* das Paradigma des Determinismus klarer formuliert hat. *Laplace* zieht noch die stolze und etwas schauerliche Folgerung, im Prinzip könne man alles vorhersagen, wobei er sich auf die überwältigenden Erfolge von *Newtons* Mechanik, besonders der Himmelsmechanik stützt. Die Relativitätstheorie hat dann in gewisser Weise sogar den eleatischen Philosophen, *Parmenides* und *Zenon*, recht gegeben, die jede Veränderung als Illusion entlarvt zu haben glaubten: Wer die Welt vierdimensional sehen könnte, *uno aspectu*, wie *Pierre Abélard* sagte, der sähe nur einen Zustand, keinen Prozess. Dem widersprachen Thermodynamik und statistische Physik, allerdings in sehr pessimistischem Sinn: Eine Einbahnstraße der Zeit sei durch den Entropiezuwachs gegeben, Veränderung gebe es noch, aber sie werde einmal ganz erlöschen. Auch nach der Quantenphysik entwickelt sich die ψ -Funktion eines isolierten Systems ganz vorhersagbar, wenn dieses sich anscheinend auch bei jeder Wechselwirkung, speziell mit einem Messgerät, für eine der „unzähligen möglichen Welten“ entscheidet, wie manche meinen (die ψ -Funktion von Mikrosystem und Messgerät, die natürlich kein Mensch formulieren kann, würde sich bestimmt völlig deterministisch entwickeln). ▶



„Es kann vorkommen, dass kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen schließlich große Unterschiede in den Phänomenen erzeugen. Ein kleiner Fehler zu Anfang wird später einen großen Fehler zur Folge haben. Vorhersagen werden unmöglich, und wir haben ein zufälliges Ereignis.“

Henri Poincaré, 1903

Prognose ist die zentrale Aufgabe und Bewährung jeder Naturwissenschaft. Was heißt „vorhersagbar“? Eine ganz einfache Frage: Wie heißt die tausendste Dezimale von $\sqrt{7}$? Niemand zweifelt, dass sie objektiv einen bestimmten Wert hat. Bei $\frac{1}{7}$ lässt sie sich sofort angeben: Es wiederholt sich die Periode 142857, und $1\,000 = 4 \pmod{6}$, also steht dort eine 8. Bei der irrationalen $\sqrt{7}$ gibt es keine solche „geschlossene“ Antwort, sondern nur einen Weg: Man muss vorher auch alle 999 vorausgehenden Ziffern ausrechnen. So kann einen der Frager schnell ins praktisch Unmögliche treiben. Der Schauer, den eine Ahnung hiervon auslöste, hat sich im Namen „irrational“ niedergeschlagen, und die Alten Griechen argwöhnten, der Entdecker dieser verrückten Zahlen sei nicht zufällig auf der Seefahrt umgekommen.

Wen interessiert aber die tausendste Dezimale? Wir werden Fälle kennen lernen, sehr einfache sogar und völlig determinierte, wo man tatsächlich beliebig viele Dezimalen kennen müsste, um einen weiteren Verlauf zu prognostizieren, weil unsere anfängliche Kenntnis sonst nach sehr kurzer Zeit in völliger Ungewissheit verschwämme, wohlge-merkt ohne jede quantentheoretische Unbestimmtheit. Determiniertheit bedeutet nicht immer Vorhersagbarkeit, falls nichtlineare Zusammenhänge gelten, und die gelten höchstens im Schulbuch nicht. Wir wollen uns der Spekulation enthalten, ob dies unser Gefühl rechtfertigt, keine Hampelmänner irgendeines Fatums zu sein, und unseren Eindruck, dass wenigstens in einigen Ecken des Weltalls fortwährend Neues entsteht. Wir wollen nur einige aufregende Entdeckungen schildern, die meist aus den letzten 10–20 Jahren stammen, und die Sie selbst nachvollziehen und ergänzen können.

20.1 Stabilität

20.1.1 Dynamische Systeme

Ein **dynamisches System** enthält eine oder mehrere Größen x_1, x_2, x_3, \dots , seine *Komponenten*, die sich mit der Zeit ändern. Sein Zustand zur Zeit t ist durch Angabe der Werte $x_1(t), x_2(t), \dots$ beschrieben. Diese Größen können Teilchen- oder Individuenzahlen bedeuten, physikalische Größen wie Pendelausschläge, Geschwindigkeiten, Feldstärken, wirtschaftliche wie Bruttosozialprodukte, Aktienkurse usw. Wie eine Größe x_i von der Zeit abhängt, ist durch sie selbst oder die übrigen Größen oder alle gemeinsam bestimmt. Ist der Zustand des Systems im folgenden Zeitpunkt mit dem jetzigen durch Gleichungen eindeutig verknüpft, dann spricht man von einer **deterministischen Dynamik**, lassen sich nur Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt dieses oder jenes Folgezustandes angeben, von einer **stochastischen** oder **probabilistischen**. Wenn der „folgende Zeitpunkt“ nur infinitesimal vom jetzigen entfernt ist, heißt die Dynamik **stetig** und wird durch Differentialgleichungen beschrieben. Wenn diese von erster Ordnung sind, lauten sie allgemein

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (20.1)$$

Wenn die Zeit t hier nicht explizit auftritt, heißt die Dynamik **autonom**. Gleichungen höherer Ordnung wie eine Schwingungsgleichung $m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = F \cos(\omega t)$ lassen sich auch auf ein (hier nichtautonomes) System erster Ordnung zurückführen, indem man einfach $v = \dot{x}$ als neue Variable einführt:

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}v - \frac{D}{m}x + \frac{F}{m} \cos(\omega t), \quad \dot{x} = v. \tag{20.2}$$

Oft sind auch diskrete Zeitschritte angebracht, die einen Tag, ein Jahr, eine Generation auseinander liegen und eine **diskrete** Dynamik ergeben, beschrieben durch Differenzen- oder Iterationsgleichungen:

$$\tilde{x}_i = F_i(x_1, x_2, x_3, \dots), \quad i = 1, 2, 3, \dots \tag{20.3}$$

x_i ist der alte, \tilde{x}_i der neue Wert der Variablen $x_i(t)$. In Anlehnung an die Programmierschreibweise kann man auch sagen

$$\boxed{x_i \leftarrow F_i(x_1, x_2, \dots)}. \tag{20.3'}$$

In einem Raum mit den Koordinaten x_1, x_2, \dots , dem **Phasenraum**, ist der augenblickliche Zustand des Systems durch einen Punkt dargestellt. Wir fassen also die Größen x_i zu einem Vektor \mathbf{x} zusammen. Dieser Punkt verschiebt sich mit der Zeit auf einer Kurve, genannt **Trajektorie** oder **Orbit** (Abb. 20.1), stetig oder sprunghaft, je nach Art der Dynamik. Die Gesamtheit aller Orbits für alle möglichen Anfangswerte heißt **Phasenporträt** des Systems. Abbildungen 20.2–20.5 zeigen Phasenporträts für Vorgänge, die wir von früher her kennen. Vom Standpunkt dieses Kapitels sind sie nicht sehr typisch: Entweder umkreisen sie ihren Fixpunkt (Abb. 20.2), statt in ihn zu münden, oder dieser liegt im Unendlichen (Abb. 20.3), oder er wird durch das Eingreifen des Erdbodens künstlich erzeugt.

× Beispiel ...

Erklären Sie das Phasenporträt von Abb. 20.2.

In der Kugel ($r < R$) gilt ein lineares Kraftgesetz, das die Ellipsen des Sinuspendels erzeugt, außerhalb $F \sim 1/r^2$ (Orbits s. Aufgabe 20.1.12). Der Übergang zwischen beiden erfolgt stetig und knickfrei: Wegen $v'v = \dot{v}$ würde ein Knick in v' auch eine Unstetigkeit in F bedeuten.

Der Vektor $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots)$ ist direkt die Geschwindigkeit des Systempunktes im Phasenraum. An manchen Stellen ist $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Solche Stellen heißen **Fixpunkte**, singuläre oder stationäre Punkte. Bei deterministischer Dynamik – nur davon reden wir zunächst – kann durch jeden Punkt nur genau ein Orbit gehen; nur in einem Fixpunkt können mehrere Orbits zusammenlaufen, allerdings nur asymptotisch, da ja die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ mit Annäherung an den Fixpunkt gegen $\mathbf{0}$ geht. Ein stabiler Fixpunkt ist ein **Attraktor** für Orbits. Bei nichtlinearen Systemen gibt es auch nichtpunkt-förmige Attraktoren, z. B. Kurven, in die mehrere Orbits asymptotisch einmünden. Sie heißen **Grenzyklen**. Systeme mit mehr als zwei Komponenten, also mit drei- oder höherdimensionalen Phasenräumen, können auch räumliche Gebilde, z. B. autoreifenähnliche **Tori** als Attraktoren ent-

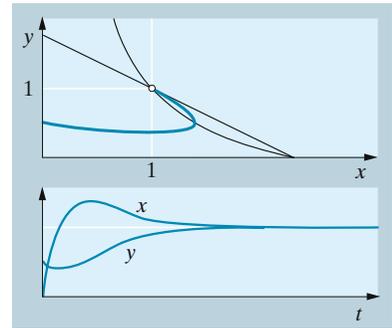


Abb. 20.1. Verhalten eines kontinuierlichen Fermenters, beschrieben durch $x' = d - x - xy, y' = xy - y$ mit $d = 2,3$ (x : Substrat-, y : Mikroorganismen-Konzentration, beide normiert). Unten: $x(t)$ - und $y(t)$ -Verlauf, oben: Phasendiagramm $y(x)$

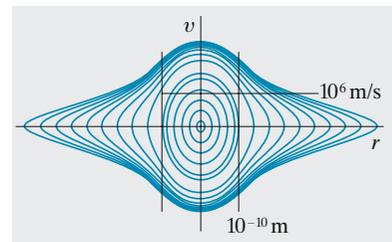


Abb. 20.2. Phasenporträt eines Elektrons innerhalb und außerhalb einer homogen positiv geladenen Kugel (Atommodell von Thomson). Für den Fall aus großer Höhe durch einen Schacht, der der ganzen Erdachse folgt, gilt dasselbe, falls kein Luftwiderstand herrscht

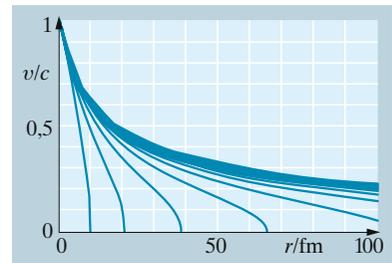


Abb. 20.3. Phasenporträt eines Elektrons, das aus einem gewissen Abstand kommend von einem Proton angezogen wird (vgl. Aufgabe 20.1.12; hier relativistisch berechnet)

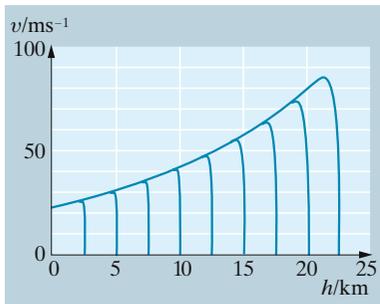


Abb. 20.4. Phasenporträt eines Menschen, der aus einem Flugzeug springt, vor Öffnung des Fallschirms. Die Luftdichte soll exponentiell von der Höhe abhängen (vgl. Aufgabe 20.1.13)

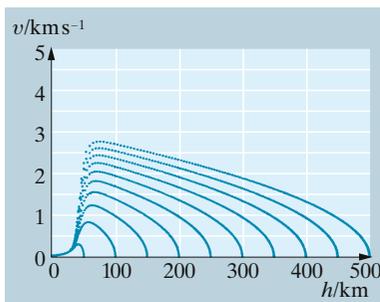


Abb. 20.5. Phasenporträt eines Satelliten, der aus der Höhe h_0 radial auf die Erde stürzt. Luftdichte und Erdbeschleunigung hängen von der Höhe ab (Aufgabe 20.1.14)

halten. Schließlich findet man auch in ganz einfachen, speziell in diskreten Systemen Attraktoren von sehr verschlungener, fraktaler Struktur, **seltsame Attraktoren**. Ein Fixpunkt kann auch instabiler Repulsor sein: Jeder Systempunkt, der nur ganz wenig neben ihm lag, entfernt sich immer weiter von ihm.

20.1.2 Stabilität von Fixpunkten

Wie entscheidet man, ob ein Fixpunkt stabil oder instabil ist? Die folgende Methode gilt zunächst nur für stetige autonome deterministische Systeme, lässt sich aber mutatis mutandis auf diskrete übertragen. Wir sprechen zunächst von linearen Systemen, beschrieben durch lineare Gleichungen

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + b_i, \quad (20.4)$$

oder in Matrix-Schreibweise

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}. \quad (20.4')$$

Zunächst beseitigen wir \mathbf{b} durch eine Nullpunktverschiebung im \mathbf{x} -Raum, nämlich $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{v}$, wobei \mathbf{v} die Lösung der inhomogenen Gleichung $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ ist. Dann wird

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Ay}. \quad (20.5)$$

Jetzt brauchen wir die Begriffe **Eigenwert** und **Eigenvektor**. Wendet man eine Matrix \mathbf{A} auf einen Vektor \mathbf{y} an, entsteht ein neuer Vektor \mathbf{Ay} , der i. Allg. eine andere Richtung hat als \mathbf{y} . Die Ausnahmen heißen Eigenvektoren von \mathbf{A} : Für sie ist \mathbf{Ay} parallel oder antiparallel zu \mathbf{y} , es gilt

$$\mathbf{Ay} = \lambda \mathbf{y}. \quad (20.6)$$

Jedes Vielfache $c\mathbf{y}$ eines Eigenvektors ist wieder ein Eigenvektor. Zunächst betrachten wir nur reelle Eigenwerte λ .

Wenn ein Systempunkt \mathbf{y} Endpunkt eines Eigenvektors der Systemmatrix ist, sieht man leicht, was mit der Zeit aus ihm wird:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Ay} = \lambda \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 e^{\lambda t}, \quad (20.7)$$

der Punkt verschiebt sich in Richtung oder Gegenrichtung zu \mathbf{y} . Bei $\lambda > 0$ entweicht er so beschleunigt ins Unendliche, und zwar exponentiell, wie (20.7) zeigt. Bei $\lambda < 0$ wandert er ebenfalls exponentiell, aber verlangsamt gegen den Fixpunkt $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, beide Mal auf der zu \mathbf{y}_0 parallelen Geraden.

Ein System aus n Komponenten hat eine n -reihige Systemmatrix, und diese besitzt n i. Allg. verschiedene Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren \mathbf{y}_i . Die Eigenvektoren sind linear unabhängig, d. h. sie spannen den ganzen n -Raum auf: Jeder Vektor \mathbf{x} lässt sich aus ihnen linearkombinieren: $\mathbf{x} = \sum c_i \mathbf{y}_i$. Damit ist klar, was aus \mathbf{x} wird:

$$\mathbf{x} = \sum c_i \mathbf{y}_i e^{\lambda_i t}. \quad (20.8)$$

Wenn alle Eigenwerte negativ sind, geht jedes \mathbf{x} gegen 0, der Fixpunkt ist stabil (Talgrund im Potentialgebirge). Sind alle λ_i positiv, entweicht jedes \mathbf{x} ins Unendliche (Gipfel). Sonst gibt es Richtungen, wo das eine, und solche, wo das andere eintritt (Pass oder Sattel). Abbildung 20.6

und Aufgabe 20.1.2 klassifizieren die möglichen Verhaltensweisen eines linearen Systems zweiter Ordnung, auch für komplexe Eigenwerte.

Diese Analyse lässt sich auf nichtlineare Systeme übertragen, wenn man hinreichend nahe am untersuchten Fixpunkt bleibt. Es sei

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots), \tag{20.1}$$

und x_i^* sei ein Fixpunkt, also $f_i(x_1^*, x_2^*, \dots) = 0$. Dann lautet die Taylor-Entwicklung (**Linearisierung**) um diesen Punkt mit $u_i = x_i - x_i^*$

$$\dot{u}_i \approx f_i(x_1^*, x_2^*, \dots) + \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_k} u_k = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_k} u_k. \tag{20.9}$$

Die höheren Reihenglieder sind klein, weil wir nahe am Fixpunkt sind. Die Matrix der $\partial f_i / \partial x_k = f_{i,k}$, die **Jacobi-Matrix**, spielt hier die Rolle der Systemmatrix **A**.

Eine etwas andere Betrachtung führt zum gleichen Ergebnis, ausgehend von $\dot{x} = Ax$. Man drehe das Koordinatensystem mittels einer orthogonalen Drehmatrix **D**. So geht **x** über in $z = Dx$, und $\dot{z} = DAx = DAD^{-1}z$. Es gibt immer eine Matrix **D**, bei der **DAD**⁻¹ Diagonalform, also Werte λ_i in der Diagonalen, sonst überall Nullen hat. Nach den Regeln der Matrix-Vektor-Multiplikation ist dann einfach $\dot{z}_i = \lambda_i z_i$ mit der Lösung $z_i = z_{i0} e^{\lambda_i t}$ bei reellem λ_i . Bei komplexem $\lambda_i = \mu_i + i\omega_i$ ist $z_i = z_{i0} e^{\mu_i t} \cos(\omega_i t)$. Man sieht leicht, dass die λ_i die Eigenwerte, die Spaltenvektoren der Drehmatrix **D** die Eigenvektoren von **A** sind. Den Fall reeller λ_i kennen wir schon, rein imaginäre $\lambda_i = i\omega_i$ bedeuten Rotation um den Fixpunkt auf Ellipsen, komplexe λ_i Spiralen, einwärts oder auswärts, je nachdem ob die Realteile der λ_i negativ oder positiv sind. Wir müssen also das Stabilitätskriterium präzisieren:

Ein Fixpunkt ist stabil, wenn alle Eigenwerte negative Realteile haben.

✘ Beispiel ...

Können für ein stetiges lineares System zweiter Ordnung bei $4D > T^2$ beide Drehrichtungen der Spiralen bzw. Ellipsen vorkommen? Wovon hängt das ab?

Man braucht nur zu prüfen, in welchem Sinn die Orbits z. B. die *x*-Achse überqueren. Dort ist $y = 0$, also $y = cx$. Bei $c < 0$ laufen alle Orbits im Uhrzeigersinn. Für die *y*-Achse ergibt sich dasselbe bei $b > 0$. Da $4D > T^2$ nur möglich ist bei $bc < 0$, können sich beide Bedingungen nie widersprechen.

Für *diskrete Systeme* überlegt man ganz ähnlich: Es sei $x \rightarrow Ax$. Ist **x** Eigenvektor von **A**, behält **x** seine Richtung bei ($\lambda > 0$) oder klappt sie um ($\lambda < 0$) und wird betragsmäßig größer oder kleiner, je nachdem ob $|\lambda| \geq 1$ ist.

Für diskrete Systeme herrscht Stabilität, wenn die Realteile aller Eigenwerte Beträge < 1 haben.

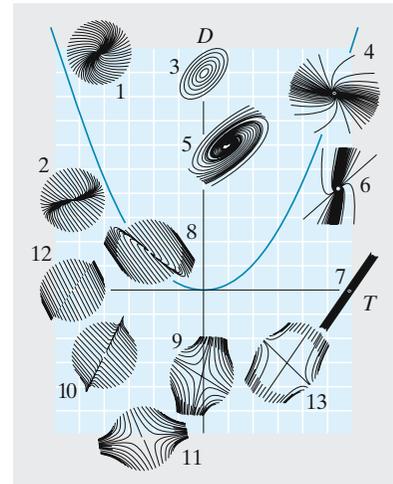


Abb. 20.6. Schon lineare stetige Systeme mit zwei Komponenten zeigen vielgestaltige Phasenporträts, hier klassifiziert nach den Werten der Systemdeterminante $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ und der Spur $T = a_{11} + a_{22}$. Die Parabel $D = T^2/4$ umschließt die Spiralporträts mit zwei konjugiert komplexen Eigenwerten; die Senkrechte $T = 0$ trennt die Systeme mit stabilem bzw. instabilem Fixpunkt (vgl. die Aufgaben zu 20.1). Die Eigengeraden, soweit reell, sind angedeutet

Bei nichtlinearen diskreten Systemen gilt in der Umgebung eines Fixpunktes sinngemäß dasselbe.

20.1.3 Der Phasenraum deterministischer Systeme

Der Zustand eines deterministischen dynamischen Systems n -ter Ordnung, das also n Komponenten x_1, x_2, \dots, x_n hat, zur Zeit t ist gegeben durch die Werte $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Er lässt sich übersichtlich durch einen einzigen Punkt in einem Raum mit den Koordinaten x_1, x_2, \dots, x_n darstellen. Im Laufe der Zeit wandert der Systempunkt in diesem Raum und beschreibt dabei eine Trajektorie oder ein Orbit. Bei stetigen Systemen ist die Trajektorie eine zusammenhängende Kurve, bei diskreten eine Punktfolge.

Ein stetiges System erster Ordnung, beschrieben durch $\dot{x} = f(x)$, hat eine Gerade als Phasenraum. Auf ihr kann sich der Phasenpunkt nur in einer Richtung bewegen, umkehren kann er nie. Sonst gäbe es ja Punkte, die er mal nach rechts, mal nach links passiert, was dem Determinismus und der Eindeutigkeit der Funktion $f(x)$ widerspräche: Diese gibt ja für jedes x ein eindeutiges Vorzeichen von \dot{x} . Alle Lösungen sind monoton steigend oder monoton fallend, je nachdem, ob man in einem Bereich positiver oder negativer $f(x)$ beginnt. Falls man hier die Wahl hat, gibt es mindestens eine Nullstelle von $f(x)$. Das ist dann ein Fixpunkt, dem sich x asymptotisch nähert oder von dem es wegstrebt. Stabil ist eine Nullstelle mit $f' < 0$, sie wird von links mit $\dot{x} = f > 0$ wie von rechts mit $\dot{x} = f < 0$ angestrebt; instabil ist eine mit $f' > 0$. Je zwei stabile Fixpunkte müssen durch einen instabilen getrennt sein, der die Grenze zwischen den beiden **Einzugsgebieten** bildet. Auch $+\infty$ oder $-\infty$ fungiert manchmal als Fixpunkt, stabil oder instabil.

Bei stetigen Systemen zweiter Ordnung gibt es schon mehr Verhaltensmöglichkeiten, hier in der x, y -Phasenebene. Man gewinnt einen Überblick, wenn man an möglichst vielen Punkten ein Linienelement mit der Steigung $dy/dx = f(x, y)/g(x, y)$ zeichnet. Die Trajektorien müssen sich in dieses **Richtungsfeld** von Tangentenrichtungen einschmiegen (Abb. 20.7), ebenso wie die Feldlinien gegeben sind als die Kurven, deren Tangentenvektor jeweils der Feldstärkevektor ist. Die Konstruktion wird erleichtert, wenn man zuerst die **Isoklinen**, die Linien gleicher Steigung dy/dx zeichnet. Auf ihnen kann man dann überall parallele Strichlein anbringen. Besonders wichtig sind die **Nullklinen** mit $f(x, y) = 0$ oder $g(x, y) = 0$. Sie zerlegen die Ebene in Gebiete; in einem solchen Gebiet zeigen die Richtungspfeile z. B. alle nach links oben. Nullklinen schneiden sich nur in Fixpunkten, wo $f = g = 0$ ist.

Ein stabiler Fixpunkt hat ein Stück der Ebene als Einzugsbereich, nämlich alle Punkte, von denen aus die Trajektorie diesem Fixpunkt zustrebt. Wenn es mehrere stabile Fixpunkte gibt, sind ihre Einzugsbereiche durch eine Kurve, die **Separatrix**, getrennt. Sie muss selbst auch eine Trajektorie sein, denn von irgendeinem ihrer Punkte aus darf man ja keinen der beiden Fixpunkte ansteuern.

Der Determinismus verlangt wieder, dass die einzigen Punkte, die mehreren Trajektorien angehören, Attraktoren sind. Außer stabilen oder instabilen Fixpunkten, wo mehrere Trajektorien enden bzw. beginnen, kann

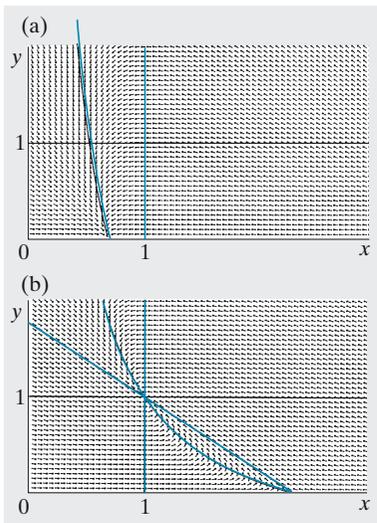


Abb. 20.7a,b. Richtungsfeld für das System $x' = d - x - xy$, $y' = y(x - 1)$, das einen einfachen kontinuierlichen Fermenter (Aufgabe 20.3.26) darstellt. (a) $d = 0,7$, (b) $d = 2,3$

es jetzt aber auch linienhafte Attraktoren geben, genannt **Grenzzyklen**. Das sind also Kurven, in die alle Trajektorien asymptotisch einmünden, die aus einem bestimmten Einzugsgebiet stammen. Eine solche Kurve muss entweder selbst wieder in einen Fixpunkt einlaufen, oder sie muss in sich selbst zurücklaufen (eigentlicher Grenzzyklus).

Wenn ein stabiler Fixpunkt ein allseitig begrenztes Einzugsgebiet hat, also durch eine in sich geschlossene Separatrix vom Rest der Ebene abgetrennt ist, kann man aus einem solchen System sehr leicht eines mit Grenzzyklus herstellen: Man kehrt einfach die Vorzeichen der Funktionen f und g um. Die Zeit läuft dann andersherum, alle Trajektorien werden im umgekehrten Sinn durchlaufen. Stabile Fixpunkte werden instabil, instabile werden allerdings nur stabil, wenn sie Knoten sind; Sättel haben ja immer attraktive und repulsive Richtungen. Eine geschlossene Separatrix wird ein Grenzzyklus und umgekehrt.

Existenz und Lage von Grenzzyklen sind nicht so leicht festzustellen wie die von Fixpunkten. Es gibt eigentlich nur ein Kriterium, das ebenso trivial klingt, wie es schwierig anzuwenden ist: Wenn es in der Phasenebene eine geschlossene Kurve gibt, längs der alle Richtungspfeile ins Innere dieser Kurve zeigen, kann ja keine Trajektorie daraus entweichen. Es muss dort drinnen einen stabilen Fixpunkt geben oder einen Grenzzyklus (*Poincaré-Bendixson*). Wie findet man eine geschlossene Kurve mit dieser Eigenschaft? Manchmal mithilfe einer **Ljapunow-Funktion**. Das ist eine Funktion $L(x, y)$, die längs jeder Trajektorie ständig abnimmt. Für mechanische Probleme mit Reibung hat die Energie $E(x, y)$ diese Eigenschaft, denn zeitliche Abnahme heißt auch Abnahme längs der Trajektorie. Jede Niveaulinie $E = \text{const}$ umschließt dann den oder die Attraktoren, und alle Trajektorien kreuzen sie in Einwärts-Richtung.

Ob ein Grenzzyklus stabil ist, d. h. ob sich benachbarte Trajektorien ihm asymptotisch nähern, prüft man mithilfe eines Poincaré-Schnittes. Das ist eine Fläche im dreidimensionalen, eine Linie im zweidimensionalen Phasenraum, durch die der Grenzzyklus und ihm benachbarte Trajektorien periodisch treten (Abb. 20.8). Der Grenzzyklus zeichnet sich so als Fixpunkt ab, die Durchstoßpunkte der anderen Trajektorien umgeben ihn als Punktwolke. Wenn diese von Umlauf zu Umlauf enger wird, ist der Zyklus stabil. So hat man die stetige Dynamik n -ter Ordnung in eine diskrete $(n - 1)$ -ter Ordnung übergeführt. Wie die Durchstoßpunkte von Umlauf zu Umlauf springen, wie die Poincaré-Abbildung aussieht, ist allerdings meist sehr mühsam zu berechnen.

Systeme dritter und höherer Ordnung können natürlich Fixpunkte und Grenzzyklen haben, aber auch Attraktoren höherer Dimension, z. B. Flächen. Auch hier kann man sagen: Bei Zeitumkehr geht eine solche in sich geschlossene Attraktorfläche, ein **Torus**, in eine Separatrix über. Außerdem sind jetzt aber auch Trajektorien möglich, die in keinen der genannten Attraktoren einmünden, sondern *chaotisch* umherlaufen. Ihre Spur, lange genug verfolgt, hat eine **fraktale** Struktur und wird als **seltamer Attraktor** bezeichnet.

Ein stetiges System zweiter Ordnung kann kein Chaos zeigen. Das folgt aus der Topologie der Ebene. Ein Radler fahre unbeschränkt lange in einem beschränkten Gebiet umher, wobei er sich deterministisch verhält:

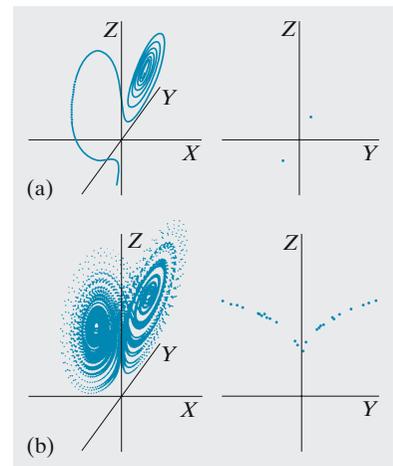


Abb. 20.8a,b. Ein Orbit des Lorenz-Systems (20.69) besteht i. Allg. aus zwei Flügeln. Der Übergang zwischen ihnen erfolgt zu unvorhersagbaren, weil empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängigen Zeiten. Rechts der Poincaré-Schnitt, bestehend aus den Durchstoßpunkten durch die Y, Z -Ebene, d. h. den Übergängen zwischen den beiden Flügeln. (a) $\alpha = 6, \beta = 20, \gamma = 4$: Eine Exkursion in den anderen Flügel, dann aber doch Spirale zum stabilen Fixpunkt; (b) $\alpha = 10, \beta = 30, \gamma = 3$: Kein stabiler Fixpunkt, seltsamer Attraktor, Übergang zum anderen Flügel zu unvorhersagbaren Zeiten, aber immer auf einem V-förmigen Poincaré-Schnitt in der Y, Z -Ebene

An jedem Punkt kann er nur in einer ganz bestimmten Richtung weiterfahren. Irgendwann muss er auf seine eigene Spur stoßen oder sich ihr asymptotisch nähern. An einem Punkt angekommen, wo er schon war, muss er entweder dort Halt machen (Fixpunkt) oder genauso weiterfahren wie vorher (Grenzzyklus). Für einen Irrflieger im Raum gilt das nicht: Er kann beliebig lange chaotisch umherirren.

Diskrete Systeme brauchen sich an keine der genannten Einschränkungen zu halten. Diese gelten für eine stetig kriechende Schnecke, nicht für einen Floh. Der kann, selbst wenn er auf einer Wäscheleine umherhopst (System erster Ordnung) über seine früheren Orte drüberspringen, oder in der Ebene über seine frühere Spur. Schon ein diskretes System erster Ordnung kann also alle Verhaltensweisen zeigen: Monotones oder gedämpft schwingendes Streben gegen einen Fixpunkt, periodisches Schwingen, chaotisches Umherirren. Wir werden alle aufgezählten Verhaltensweisen stetiger und diskreter Systeme an Beispielen kennen lernen.

Wir verfolgen die Schar aller Trajektorien, die von den Punkten eines begrenzten Volumens im Phasenraum ausgehen. Eine bestimmte Zeit später hat dieses Volumen eine andere Form, aber für mechanische Systeme, deren Gesamtenergie erhalten bleibt (**konservative Systeme**), hat es immer noch dieselbe Größe. Die Phasenpunkte strömen wie eine inkompressible Flüssigkeit. Für deren Geschwindigkeit \mathbf{v} gilt ja die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Im Phasenraum hat die Geschwindigkeit für ein System aus n Teilchen die $2n$ Komponenten \dot{x}_i, \dot{p}_i , wofür man im mechanischen Fall auch \dot{x}_i, \dot{p}_i setzen kann (Maßstabsänderung mit $p_i = m\dot{x}_i$). Die Gesamtenergie lässt sich durch die **Hamilton-Funktion** $H = T + U$ aus kinetischer Energie $T(\mathbf{p})$ und potentieller $U(\mathbf{x})$ zusammensetzen. Für sie gelten die **kanonischen Gleichungen** $\partial H / \partial p_i = \partial T / \partial p_i = \dot{x}_i$, $\partial H / \partial x_i = \partial U / \partial x_i = -\dot{p}_i$ von *Hamilton*, wie im Fall eines Massenpunktes sofort aus *Newtons* Axiomen folgt ($T = \frac{1}{2} p^2 / m$, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = -\operatorname{grad} U$). Als Divergenz der Phasenraum-Geschwindigkeit ist dann eine Größe mit den Komponenten $\partial \dot{p}_i / \partial p_i + \partial \dot{x}_i / \partial x_i$ aufzufassen, und das ist dank der kanonischen Gleichungen nichts anderes als $-\partial(\partial H / \partial x_i) / \partial p_i + \partial(\partial H / \partial p_i) / \partial x_i$, was wegen der Vertauschbarkeit der Ableitungen identisch verschwindet. Für konservative Systeme gilt also der **Satz von Liouville** (Abschn. 19.2.7) über die zeitliche Konstanz eines von Phasenpunkten erfüllten Volumens. Bekommt das System Energie zugeführt (durch Fremderregung oder Abruf aus einer Quelle bei Selbsterregung) oder entzogen (durch Reibung u. Ä.), ist es also **dissipativ**, kann sich das Phasenvolumen ändern. Es kann durch Energieverlust bis auf einen Punkt (Fixpunkt), eine Kurve (Grenzzyklus) schrumpfen, allgemein auf einen Attraktor niedrigerer Dimension. Das heißt aber nicht, dass Trajektorien mit benachbarten Startpunkten auch später benachbart bleiben. Sie können trotz der Volumenschrumpfung stark auseinander streben. Darin liegt die „Seltsamkeit“ chaotischer Attraktoren. Bei Energiegewinn erweitert sich das Volumen, u. U. unbegrenzt.

20.2 Nichtlineare Schwingungen

20.2.1 Pendel mit großer Amplitude

Dass die Schwingungsdauer eines Schwebpendels nicht von der Amplitude abhängt, gilt nur für sehr kleine Schwingungen (Abb. 20.9), bei denen man die Gleichung linearisieren, nämlich $\sin \alpha$ durch α ersetzen kann:

$$l\ddot{\alpha} = -g \sin \alpha \approx -g\alpha. \tag{20.10}$$

Für genaue Pendeluhren, wie sie vor Einführung der Funknavigation zur Bestimmung der geographischen Länge auf See unentbehrlich waren, ergibt sich daraus ein Problem: Ganggenauigkeit ist nur gewährleistet, wenn man entweder die Amplitude exakt konstant hält, was auf See fast unmöglich ist, oder wie *Huygens* eine **tautochrone Aufhängung** benutzt (Aufgabe 1.5.11).

Eine Gleichung zweiter Ordnung wie $l\ddot{\alpha} = -g \sin \alpha$ muss zweimal integriert werden, bis man auf $\alpha(t)$ kommt. Der Energiesatz erspart eine Integration: $\frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2$ ist die kinetische, $mg l(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$ die potentielle Energie, vom Vollausschlag an gerechnet, also

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \alpha - \cos \alpha_0)},$$

d. h.
$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} t. \tag{20.11}$$

Zwischen $\alpha = 0$ und $\alpha = \alpha_0$ liegt eine Viertelperiode, also ist diese Periode

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}}. \tag{20.12}$$

Die zweite Integration ist schwieriger. Sie können sie in Aufgabe 20.2.2 nachvollziehen. Sie liefert mit $k = \sin \alpha_0/2$, $T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \binom{2n}{n} k^{2n}$$

$$= T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha_0}{2} + \dots\right) \tag{20.13}$$

(Abb. 20.10). Um diese Abweichung von der Isochronie auszugleichen, erfand *Huygens* das **Zykloidenpendel** (Aufgabe 1.5.11). Nicht umsonst gab die Admiralität *James Cook* die beste damals verfügbare Uhr mit, als er auf *Tahiti* den Venusdurchgang vor der Sonnenscheibe zeitlich messen sollte, um zusammen mit der gleichen Beobachtung in *Greenwich* den Abstand Sonne–Erde zu bestimmen. Mit der gleichen Uhr vermaßen übrigens später *Mason* und *Dixon* die Grenze zwischen Nord- und Südstaaten der USA, die *Mason-Dixon-Linie*, nach der der Süden heute noch *Dixieland* heißt.

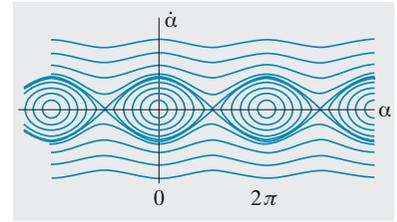


Abb. 20.9. Phasenporträt des mathematischen Pendels. Die cosinusförmige Separatrix trennt die Schwingungen von den Trajektorien mit Überschlag über den höchsten Punkt ($\alpha = \pi$)

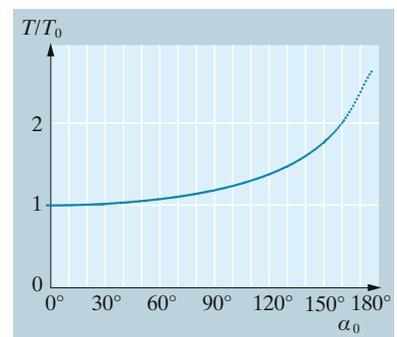


Abb. 20.10. Abhängigkeit der Periode T des mathematischen Pendels von seiner Winkelamplitude α_0 . Zur Berechnung wurden jedes Mal 150 Glieder der Reihe (20.13) aufsummiert, und trotzdem geht die Kurve nahe 180° zu stark gegen Unendlich

20.2.2 Erzwungene Schwingungen mit nichtlinearer Rückstellkraft

Die Seitenansicht eines symmetrischen Potentialtopfes lässt sich in erster Näherung durch eine Parabel, in zweiter durch ein Polynom vierten Grades $U = a + bx^2 + cx^4$ darstellen und übt auf ein Teilchen eine Kraft proportional $x + \alpha x^3$ aus. Mit $\alpha = -\frac{1}{6}$ gilt diese Näherung auch für die sin-Reihe beim Schwerependel. Eine zu stark komprimierte Spiralfeder wird meist härter, hat also $\alpha > 0$ (allerdings selten ein symmetrisches Potential: Bei Überdehnung wird sie eher weicher). Ein solcher nichtlinearer Schwinger (**Duffing-Schwinger**) verhält sich ganz merkwürdig, wenn man ihn periodisch anstößt:

$$m\ddot{x} + Dx + Ex^3 + k\dot{x} = F \cos(\omega t) . \tag{20.14}$$

Zunächst lassen wir die Dämpfung $k\dot{x}$ weg. Die stationäre Schwingung nach Abklingen des Einschwingvorganges wird auch periodisch mit ω sein, aber kein einfacher Cosinus, sondern sie wird Oberschwingungen enthalten. Wir versuchen es mit zeitsymmetrischen $\cos(k\omega t)$:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cos(k\omega t) , \quad \dot{x} = - \sum_{k=1}^{\infty} x_k k \omega \sin(k\omega t) , \tag{20.15}$$

$$\ddot{x} = - \sum_{k=1}^{\infty} x_k k^2 \omega^2 \cos(k\omega t) .$$

Wenn E klein ist, braucht man im Störglied nur die größte, die Grundschiwingung: $Ex^3 = Ex_1 \cos^3(\omega t)$. Zum Vergleich mit den anderen Gliedern müssen wir dies auf die Form $\cos(k\omega t)$ bringen: $\cos^3(\omega t) = \frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t)$ (man findet das, wenn man $e^{3i\omega t}$ umschreibt).

✘ Beispiel . . .

Stellen Sie $\sin^n x$ und $\cos^n x$ durch Summen von Gliedern der Form $\sin kx$ bzw. $\cos kx$ dar. Dasselbe für $\cos^2 x \sin x$ usw.

Alle genannten Ausdrücke kommen in der Binomialentwicklung von $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx) = (\cos x + i \sin x)^n$ vor. Man sammle und vergleiche die Real- bzw. Imaginärteile, z. B. für $n = 3$: $\cos(3x) = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$. Auch $\cos^2 x \sin x$ kommt in dieser Entwicklung vor: $\sin(3x) = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 4 \cos^2 x \sin x - \sin x$.

Ebenso wie hier dürfen demnach auch in $m\ddot{x} + Dx = \sum (D - mk^2\omega^2)x_k \cos(k\omega t)$ nur die Glieder mit $k = 1$ und $k = 3$ vorkommen: Das $\cos(\omega t)$ -Glied liefert

$$x_1(D - m\omega^2) + \frac{3}{4}Ex_1^3 = F , \tag{20.16}$$

das $\cos(3\omega t)$ -Glied liefert erst etwas von Null Verschiedenes, wenn man die höheren Näherungen von Ex_1^3 berücksichtigt. Um die Resonanzkurve $x_1(\omega)$ zu bestimmen, müssen wir die Gleichung dritten Grades (20.16) lösen. Das geschieht am besten graphisch: Man bringt die Ge-

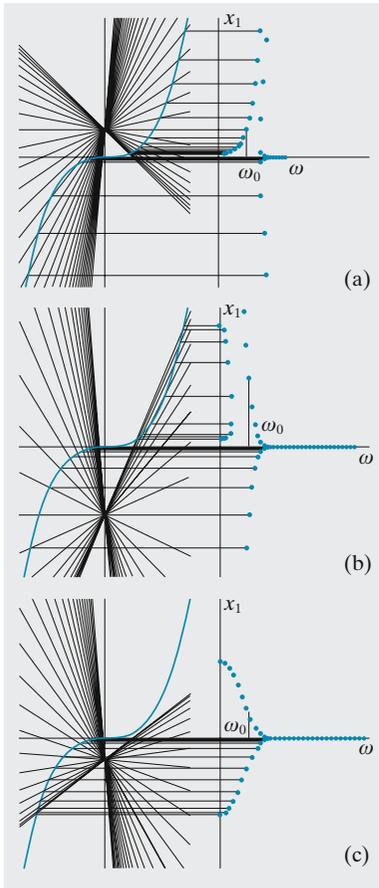


Abb. 20.11a–c. So kommt die schiefe Resonanzkurve für nichtlineare Schwinger (Duffing-Schwinger) zustande. Damit der „Rüssel“ besser erkennbar wird, sind die negativen Amplituden nach oben geklappt (Phasenumkehr). (a) $E > 0$; (b) $-\frac{4}{9}D(3/(2F))^2/3 < E < 0$; (c) $E < -\frac{4}{9}D(3/(2F))^2/3$

rade $F - (D - m\omega^2)x_1$ zum Schnitt mit der Parabel dritten Grades $\frac{3}{4}Ex_1^3$ (Abb. 20.11). Wir zeichnen ein Geradenbüschel durch den Punkt $(0, F)$, wobei die Steigung der Geraden mit wachsendem ω zunimmt und bei $\omega = \sqrt{D/m}$ durch 0 geht. Bei negativem E gibt es, von sehr hohem ω angefangen, nur einen Schnittpunkt bis zur Tangentenlage, von da ab drei. Die Tangente ist gegeben durch $m\omega^2 - D = \frac{9}{4}Ex_1^2$ (Steigung gleich); Einsetzen in (20.16) liefert als Koordinaten dieses Berührungspunktes

$$\omega_k = \sqrt{\frac{1}{m} \left(D + \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3}EF^2 \right)^{1/3} \right)}, \quad x_k = - \left(\frac{2F}{3E} \right)^{1/3}. \quad (20.17)$$

Unterhalb von ω_k hat die Resonanzkurve drei Äste, falls $D > -\frac{9}{4}(\frac{2}{3}F)^{2/3}E^{1/3}$: Sie streckt einen Rüssel bis nach $\omega = 0$ aus (der sich bei Dämpfung oberhalb umso eher schließt, je stärker die Dämpfung ist). Was der Schwinger selbst macht, ist noch interessanter: Er sucht im stationären Fall die kleinste dieser drei mathematisch möglichen Amplituden, springt also, wenn man von oben her ω_k erreicht, ganz plötzlich in den unteren Ast. In der Umgebung von ω_k ist das System fast unbeherrschbar: Das Einschwingen dauert sehr lange, und währenddessen kann die Interferenz zwischen Eigen- und erzwungener Schwingung zu übergroßen Amplituden führen, die das ganze System zerstören.

Vielleicht noch überraschender ist aber, dass das System in naher Umgebung der Kippfrequenz gewissermaßen nicht weiß, für welchen Ast der Resonanzkurve es sich entscheiden soll. Das ist natürlich streng determiniert, hängt aber empfindlich von den Anfangsbedingungen ab.

Noch komplizierter wird es, wenn die erzwingende Kraft unsymmetrisch ist, z. B. zum $\cos(\omega t)$ -Glied eine konstante Kraft hinzukommt: $F = F_0 + F_1 \cos(\omega t)$. Beim linearen Schwinger wäre die einzige Folge eine Nullpunktverschiebung. Wenn die Nulllage dagegen nicht mehr im Symmetriezentrum des Rückstell-Kraftgesetzes liegt, kann Folgendes passieren: Zunächst erfolgt nach Einschalten der erzwingenden Kraft ein ganz normales Einschwingen auf konstante Amplitude. Nun ändert man einen Parameter, schiebt z. B. die erregende Frequenz mehr in den Resonanzbereich, speziell näher an den Rand des bistabilen Bereichs. Jetzt wird die Amplitude nicht mehr konstant, sondern schwankt periodisch zwischen zwei Werten: groß – klein – groß – klein ... (Abb. 20.12). Eine winzige weitere Parameteränderung: Vier verschiedene, periodisch aufeinander folgende Amplituden. Und plötzlich ist von irgendeiner Konstanz, selbst einer Periodik, keine Rede mehr: Regellos folgen große und kleinere Amplituden, manche scheinen ganz auszufallen – eine Voraussage

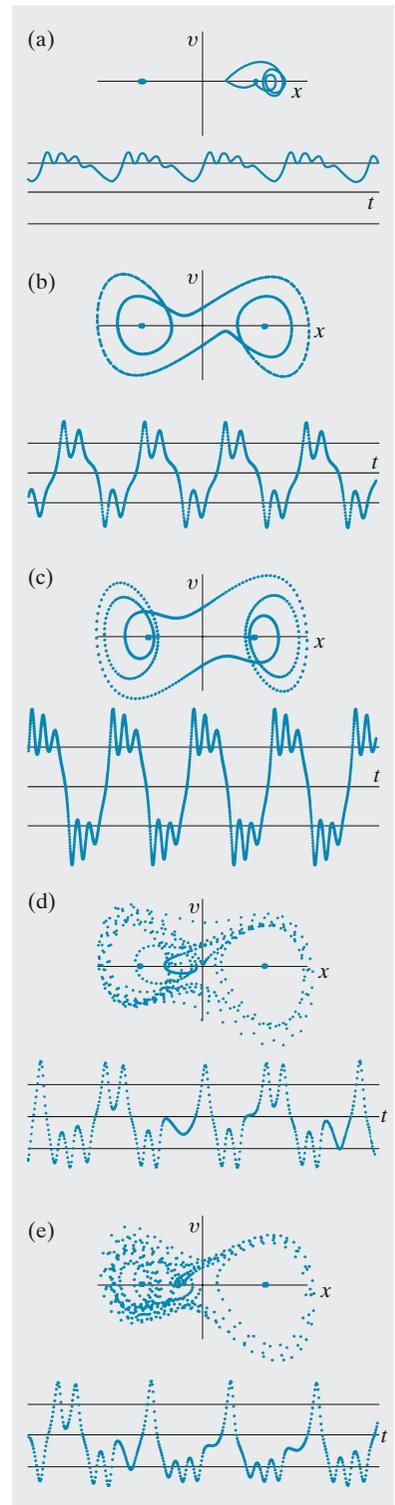


Abb. 20.12a–e. Duffing-Schwinger, hier realisiert als Drehpendel mit Unwucht. Unten: Schwingungsverlauf $x(t)$, oben: Phasentrajektorie $v(x)$. Vorhergegangen ist ein Einschwingen von etwa 200 Perioden. Die beiden Gleichgewichtslagen sind angedeutet; bei kleiner Erregungsamplitude F schwingt das Rad nur um eine davon (a), bei größeren überschreitet es den Pass dazwischen mit immer komplizierteren Teilperioden. Bei (d) und (e) sind die Anfangs-Ausschläge um 0,2% verschieden: Hohe Empfindlichkeit gegen Anfangsbedingungen; man kann auch sagen: Das Einschwingen dauert unendlich lange

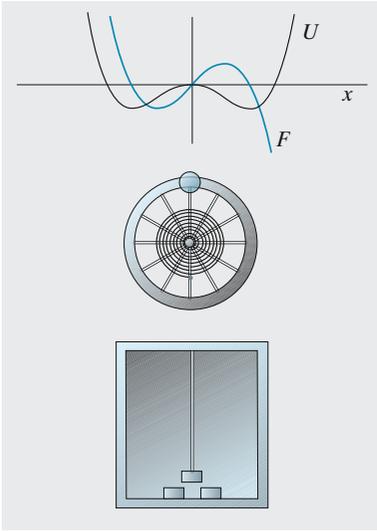


Abb. 20.13. Potential mit zwei Töpfen, getrennt durch eine Schwelle (hier $U = 0,2x^4 - x^2$), und die zugehörige Rückstellkraft. Darunter zwei Realisierungen: Ein Drehpendel mit Unwucht, die gegen die Spiralfeder das Rad aus der labilen in eine der stabilen Lagen bringen kann; und ein Magnet an einer Blattfeder, dem zwei Magnete beiderseits stabile Lagen zuweisen. Erregt man ein solches System periodisch (das Rad durch einen Motor mit Pleuelstange, den Rahmen unten einfach durch Schütteln), erhält man die im Text beschriebenen Verhaltensweisen

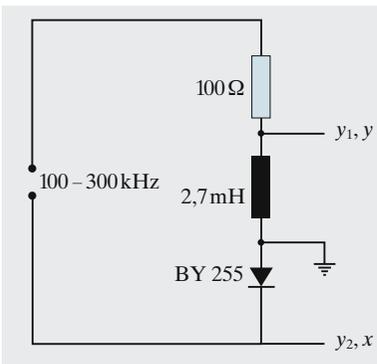


Abb. 20.14. Nichtlinearer Schwingkreis mit Varaktor statt Kondensator

ist, wenn überhaupt, nur ganz kurzfristig möglich. Diesem Übergang von der Stabilität über eine Periodik mit Verdopplungsschritten der Periode zum Chaos (**Feigenbaum-Szenario**) werden wir noch unter vielen völlig anderen Umständen begegnen.

Fast noch interessanter wird es, wenn wir die Vorzeichen der Kraftglieder mit x und x^3 umkehren: $m\ddot{x} = -kx + ax - bx^3 + F \cos(\omega t)$. Zur Kraft $ax - bx^3$ gehört ein Potential $-ax^2/2 + bx^4/4$, das zwei Minima bei $x = \pm\sqrt{b/a}$ hat, getrennt durch eine Schwelle bei $x = 0$ (Abb. 20.13). Eine solche bistabile Situation lässt sich realisieren durch einen Federstahlstreifen mit einem Eisenstück am Ende, das bei geradem Streifen in der Mitte zwischen zwei Magneten liegt, aber seine eigentlichen Ruhelagen über je einem von diesen hat. Schwingungen des Systems erregt man einfach durch Schütteln des Rahmens, in dem alles befestigt ist; die Biegeschwingungen registriert man z. B. mit einem dem Stahlband aufgeklebten Dehnungsmessstreifen. Ähnliches, nur mit einem etwas anderen Kraftgesetz, kann man mit einem Rad erreichen, das durch eine Spiralfeder in eine Ruhelage gezogen wird. Befestigt man in dieser Ruhelage ganz oben am Rad eine genügend große Zusatzmasse als Unwucht, kippt das Rad in eine von zwei seitlichen Gleichgewichtslagen.

Machen Sie einen Schwingkreis nichtlinear, indem Sie statt des Kondensators eine Varaktor-Diode einbauen (Abb. 20.14), die ihre Kapazität mit der anliegenden Spannung U so ändert, dass hier nicht $U = Q/C$, sondern ein Gesetz ähnlich $U = U_1(e^{Q/(CU)} - 1)$ gilt. Diesen Kreis erregen Sie mit einem kräftigen Sinusgenerator, der die Spannung $U_0 \cos(\omega t)$ liefert. Mit steigendem ω oder U_0 können Sie das ganze Feigenbaum-Szenario (Abschn. 20.3.1) durchlaufen: Sinus-Spannungen klappen plötzlich in Spitzen mit der gleichen Periode um, von denen noch viel plötzlicher jede zweite verschwindet, die verbleibenden nehmen ebenso schlagartig abwechselnd verschiedene Höhen an, und schließlich schwanken sie chaotisch. Die Simulation auf dem Rechner (Aufgabe 20.2.6, Abb. 20.15) zeigt, dass das angegebene $U(Q)$ doch nicht ganz stimmt: Nur in einem sehr engen Parameterbereich kommt dasselbe heraus wie im Realexperiment. Außerhalb davon beobachtet man z. B. auch Perioden-Verdreifachungen, sogar Siebzehner-Perioden.

20.2.3 Selbsterregte Schwingungen

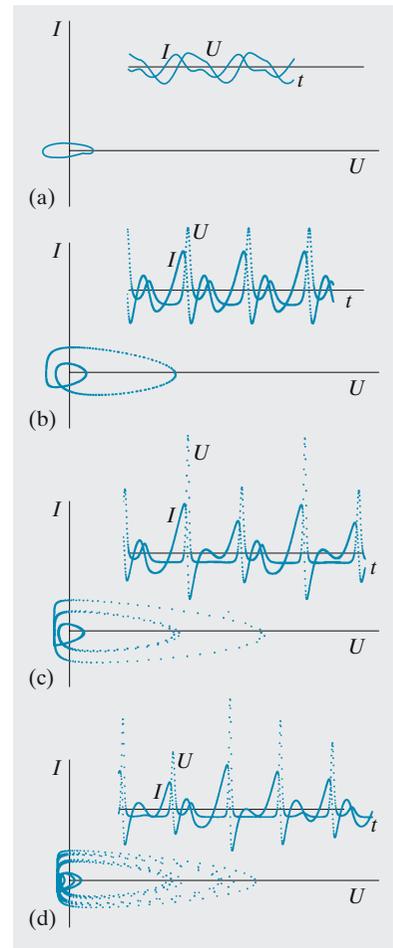
Einige wichtige Dinge unseres Alltags wie Uhren, Musikinstrumente, Radios sind mit den in Kap. 4 entwickelten Begriffen nicht vollständig beschreibbar. Gewiss hängt die Höhe des Geigentons außer von Masse und Spannung der Saite von der Länge ab, die der Finger auf dem Griffbrett abteilt. Es handelt sich um eine Eigenschwingung, deren Frequenz leicht zu berechnen ist. Aber eine solche Schwingung sollte infolge der Dämpfung rasch abklingen, wie es ein Pizzicato-Ton auch tut. Wieso hält der Bogenstrich die Schwingung beliebig lange aufrecht, obwohl er doch ganz einsinnig erfolgt, keinerlei Periodizität enthält? Ganz im Gegensatz zu den erzwungenen Schwingungen bestimmt hier offenbar das schwingende System selbst seine Frequenz und nutzt den äußeren Einfluss (Bogen, Luftstrom beim Blasinstrument, Gewicht, Feder, Batterie bei der Uhr) nur als

Abb. 20.15a–d. Nichtlinearer Schwingkreis mit Varaktor statt Kondensator. *Oben:* Zeitlicher Verlauf des Stromes I und der Spannung U am Varaktor. *Unten:* Phasendiagramm $U(I)$; dieses läuft über viel längere Zeit als die Kurven $U(t)$, $I(t)$, um klar zu zeigen, ob Periodik herrscht. Zwischen je zwei Plotpunkten liegen vier berechnete Punkte. Kontrollparameter ist die an den Kreis angelegte Spannungsamplitude U_0 . Nur bei sehr kleinem U_0 ergibt sich der vom linearen Serienschwingkreis bekannte Verlauf (Phasenellipse). Mit steigendem U_0 durchläuft man eine Folge von Periodenverdopplungen nach dem Feigenbaum-Muster bis zum chaotischen Verhalten. Oberhalb $U_0 = 1,55$ folgt dann aber merkwürdigerweise wieder ein völlig regulär-periodisches Verhalten. Ähnlich wie diese Computer-Simulation mit etwas schematisierter Varaktor-Kennlinie verhält sich der reale Schwingkreis

Energiequelle, aus der es in geeigneten, durch seine Eigenschwingung selbst bestimmten Zeitpunkten Energie abrufen und sich damit **entdämpft**. Deshalb spricht man von **selbsterregten Schwingungen**.

Entdämpfung verlangt Leistungszufuhr. Mechanische Leistung ist Kraft mal Geschwindigkeit. Bei der Reibung sind beide antiparallel und phasengleich (Wirkleistungsverlust), wogegen Trägheits- und Rückstellkraft mit ihrer $\pi/2$ -Phasenverschiebung gegen v nicht zur Leistung beitragen (Blindleistung). Der Geigenbogen übt auf die Saite eine Coulomb-Reibung aus. Kurzzeitig haftet die Saite an ihm, bedingt durch Rauheit und Klebrigkeit des Colophoniums, und wird ein Stückchen Δx mitgeführt; meist aber gleitet er. Jedes Haften ist ein erneutes Anzupfen. Da es in jeder Periode einmal erfolgt, nämlich immer dann, wenn die Saite gerade die Geschwindigkeit v des Bogens hat, hört man keine Pizzicato-Folge, sondern einen konstanten Ton. In diesem Haftbereich sind die Reibungskraft $\mu_h F_n$ (F_n : Kraft, mit der der Bogen auf die Saite gedrückt wird) und $v = \dot{x}$ auch bestimmt parallel, der Saite wird eine Energie $\Delta E = \mu_h F_n \Delta x$ zugeführt. Würde der Bogen nur gleiten, lieferte er der Saite keine Energie: Eine Kraft wäre da, aber sie wäre in guter Näherung v -unabhängig, x und v der Saite wären sin-Funktionen, der Mittelwert von Fv wäre 0. Das Geigenspiel beruht auf dem Übergang von Gleit- zu Haftreibung.

Aus der Bewegungsgleichung für die freie Saitenschwingung $m\ddot{x} + k\dot{x} + Dx = 0$ mit der Lösung $x = x_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t)$, $\delta = k/(2m)$ folgt eine Verlustleistung $P = -\dot{E} = Dx_0 \dot{x}_0 = Dx_0^2 \delta$. Dies muss durch die Energiezufuhr von $\mu_h F_n \Delta x$ pro Periode, also $P = \mu_h F_n \Delta x \omega / (2\pi)$ ausgeglichen werden. Δx lässt sich am besten aus dem Phasendiagramm $\dot{x}(x)$ ablesen. Ohne Haftung käme in der Bewegungsgleichung rechts nur die konstante Gleitreibung $\mu_g F_n$ hinzu: Die Gleichung wird inhomogen. Wir brauchen nach einem bekannten mathematischen Satz nur eine spezielle Lösung dieser inhomogenen Gleichung zu finden und sie zur bereits bekannten Lösung der homogenen zu addieren, dann haben wir die allgemeine Lösung unserer inhomogenen Gleichung. Eine solche spezielle Lösung ist einfach $x = \mu_g F_n / D$: Die Gleitreibung verschiebt die Nulllage der Saite etwas in Streichrichtung. Sonst sieht die Schwingung genauso aus wie üblich, ihr Phasendiagramm ist eine Spirale mit ellipsenartigen Bögen. Dies, wenn der Bogen nur gleitet, ihn z. B. jemand mit Seife beschmiert hat. Haftung dagegen verlangt konstantes $\dot{x} = v$: Das Phasendiagramm wird oben oder unten abgeflacht. Wie breit ist diese Flachzone? Die Haftung reißt ab,



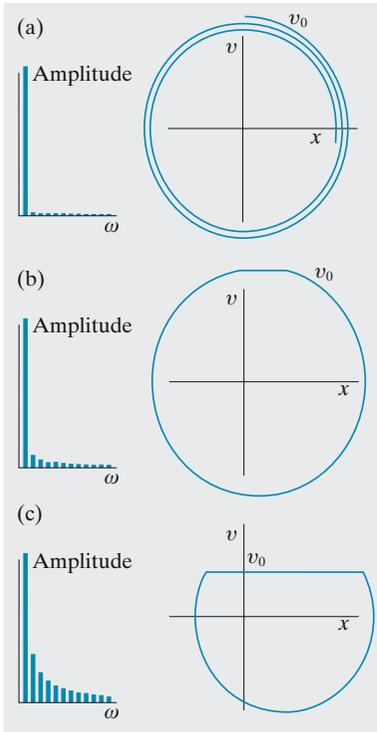


Abb. 20.16a–c. Der Geiger drückt den Bogen mit der Kraft F auf die Saite und zieht ihn mit der Geschwindigkeit v_0 darüber. Die Saite hat die Masse m , die Rückstellkonstante D und den Dämpfungsfaktor k , Gleit- und Haftreibungsfaktor zwischen Bogen und Saite μ_g und μ_h . Rechts: Phasenporträt, links: Fourier-Amplitudenspektrum. (a) Der Geiger drückt zu schwach; sein Ton klingt schnell ab (und enthält kaum Obertöne). (b) Dieser Ton klingt nicht ab, hat aber auch wenig Obertöne. (c) Dieser Geiger drückt stark und zieht den Bogen langsam; er erzeugt viele Obertöne

wenn die Rückstellkraft gleich der Haftreibung ist: $Dx = \mu_h F_n$. Das Zentrum der Phasenellipse liegt bei $\mu_g F_n / D$. So folgt $\Delta x = 2(\mu_h - \mu_g) F_n / D$, und aus der Leistungsbilanz für die Amplitude des Streichertones ergibt sich

$$x_0^2 = \frac{2m^{1/2}}{\pi D^{3/2} k} \mu_h (\mu_h - \mu_g) F_n^2. \quad (20.18)$$

Da die Phasenellipse deformiert ist, handelt es sich nicht mehr um einen reinen Sinuston, die Fourier-Analyse enthüllt ein Obertonspektrum, das die Klangfarbe bestimmt. Je größer $(\mu_h - \mu_g) / \mu_g$, desto stärker ist die Ellipse abgeflacht, desto mehr Obertöne sind zu erwarten (Abb. 20.16).

Ein solcher vom System selbst bedingter periodischer Vorgang heißt Grenzyklus. In ihn mündet jede von anderen Anfangsbedingungen ausgehende Trajektorie ein, von außen her abklingend, beim Geigen aber meist von innen, sogar von 0 her. Dieses Einschwingen bestimmt die Qualität des Spiels mit. Leider weiß ich deswegen immer noch nicht, warum *Perlman* so viel besser spielt als ich.

Vom mathematischen Standpunkt werden die Grenzyklen bei Uhr und Geige auf etwas künstliche, unstetige Weise erzeugt: Bei der mechanischen Uhr durch Überschnappen des Ankers über einen Steigradzahn (Abb. 4.13), beim Streichinstrument durch den Übergang vom Haften zum Gleiten. Wie müsste eine einheitliche Differentialgleichung aussehen, die einen solchen Grenzyklus als Lösung hat? Der Energieverlust infolge Reibung muss durch eine positive Wirkleistung ausgeglichen werden, d. h. durch eine Kraft, die mit \dot{x} phasen- und richtungsgleich ist. Wäre sie immer größer als die Reibung, würde die Amplitude ins Unendliche anschwellen. Sie muss also amplitudenabhängig sein: Bei kleinem x größer als die Reibung, ab einem gewissen x_k kleiner als diese. Das einfachste hinsichtlich x symmetrische Glied dieser Art heißt $-k(x_k^2 - x^2)\dot{x}$, die ganze Bewegungsgleichung ist die **van der Pol-Gleichung**

$$m\ddot{x} - \varepsilon(x_k^2 - x^2)\dot{x} + Dx = 0. \quad (20.19)$$

Eine mittlere Wirkleistung $\overline{P} = \overline{Fv} = \varepsilon \overline{(x_k^2 - x^2)\dot{x}^2} = 0$ beschreibt einen stationären Zustand, den Grenzyklus. Das System schwingt etwas über x_k hinaus in den Dämpfungsbereich, um die Entdämpfung bei kleineren x wettzumachen. Da annähernd noch eine Sinusschwingung vorliegt, gilt $\overline{\dot{x}^2} = \frac{1}{2}\dot{x}_0^2$, wie beim Effektivwert einer Wechselgröße.

$$\overline{x^2 \dot{x}^2} = x_0^2 \dot{x}_0^2 \overline{\sin^2(\omega t) \cos^2(\omega t)} = \frac{1}{4} x_0^2 \dot{x}_0^2 \overline{\sin^2(2\omega t)} = \frac{1}{8} \omega^2 x_0^4. \quad (20.20)$$

Das System schwingt bis $x_0 = 2x_k$. Aber der Grenzyklus ist keine exakte Ellipse (Abb. 20.17). Genaueres liefert erst die Fourier-Analyse:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)). \quad (20.21)$$

\dot{x} und \ddot{x} bildet man einfach durch „Rausholen“ der Faktoren $k\omega$ bzw. $-k^2\omega^2$. Im kleinen Störglied braucht man nur die Grundschwingung $a_1 \cos(\omega t)$:

$$\varepsilon \dot{x}(x_k^2 - x^2) = -\omega a_1(x_k^2 - a_1^2 \cos^2(\omega t)) \sin(\omega t). \quad (20.22)$$

Hier muss man $\cos^2(\omega t) \sin(\omega t)$ wieder in Ausdrücke wie $\sin(k\omega t)$ zerlegen:

$$\cos^2(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{1}{4}(\sin(3\omega t) + \sin(\omega t)). \quad (20.23)$$

In dieser Näherung kleiner ε brauchen wir also aus $\ddot{x} + \omega^2 x$ außer der Grundschiwingung auch nur die Glieder $b_1 \sin(\omega t)$ und $b_3 \sin(3\omega t)$. Der Koeffizientenvergleich der linear unabhängigen \sin bzw. \cos liefert

$$\begin{aligned} \text{aus } \cos(\omega t) : & \quad \omega = \omega_0 = \sqrt{D/m}, \\ \text{aus } \sin(\omega t) : & \quad a_1 = 2x_k, \\ \text{aus } \sin(3\omega t) : & \quad b_3 = -\frac{1}{4}\varepsilon x_k^3 \omega_0 / D. \end{aligned} \quad (20.24)$$

Der Grenzzyklus wird also mit der Eigenfrequenz ω_0 durchlaufen und hat die Form

$$x = 2x_k \cos(\omega_0 t) - \frac{\varepsilon}{4m} x_k^3 \sin(3\omega_0 t). \quad (20.25)$$

Für kleine ε ist das eine gute Näherung, sonst muss man auch im Störglied die höheren Fourier-Komponenten berücksichtigen.

Als Realisierung betrachten wir die elektromagnetische Schwingung eines Senders. Seine Frequenz wird bestimmt durch einen Schwingkreis, bestehend aus Kondensator (Kapazität C) und Spule (Induktivität L). Er würde, einmal angeregt, mit der Kreisfrequenz $\omega = 1/\sqrt{LC}$ immer weiter-schwingen, wenn nicht Spulen und Leitungen unvermeidlich auch einen Widerstand R enthielten. Die Gleichung für die freie Schwingung, völlig analog zur mechanischen, drückt einfach die Addition der Spannungen an den Elementen C, L, R aus: $U + RC\dot{U} + LC\ddot{U} = 0$ (vgl. (7.42)). Wirkleistung $P = UI = CU\dot{U}$ wird nur im Widerstand verbraucht, nicht aber in Spule und Kondensator, wo Spannung und Strom um $\pi/2$ phasenverschoben sind. Diesen Verlust kann man durch Rückkopplung ausgleichen, indem man den Kreis z. B. an das Steuergitter einer Triode anschließt (Abb. 20.18) und den dadurch gesteuerten Anodenstrom I_a einer Spule zuführt, die ihren Magnetfluss Φ , der proportional I_a ist, wie bei einem Transformator der Spule des Schwingkreises mitteilt (induktive Rückkopplung). Es wird also eine Induktionsspannung $U_i \sim \dot{I}_a$ in den Schwingkreis eingespeist. Nun ist I_a ungefähr linear abhängig von der Gitterspannung U . Die Gleichung erhält eine Inhomogenität: $U + RC\dot{U} + LC\ddot{U} = A\dot{U}$. Bei $A > R$ erfolgt Entdämpfung. Bis ins Unendliche schwillt die Amplitude aber nicht an: Die $I_a(U)$ -Kennlinie ist nichtlinear, S-förmig gekrümmt (Abb. 8.28). In der Umgebung des Wendepunktes ist sie nahezu punktsymmetrisch um diesen, lässt sich also darstellen als $I_a = I_w + SU - KU^3$. Damit wird $\dot{I}_a = S\dot{U} - 3KU^2\dot{U}$, und es entsteht die van der Pol-Gleichung

$$U + (RC - A + BU^2)\dot{U} + LC\ddot{U} = 0. \quad (20.26)$$

Wieder schwingt der Kreis sich weit ein, bis der Faktor von \dot{U} , der bei kleinem U negativ ist, ins Positive geht. Analog zu (20.24) erhalten wir die Amplitude $U_1 = 2\sqrt{(A - RC)/B}$.

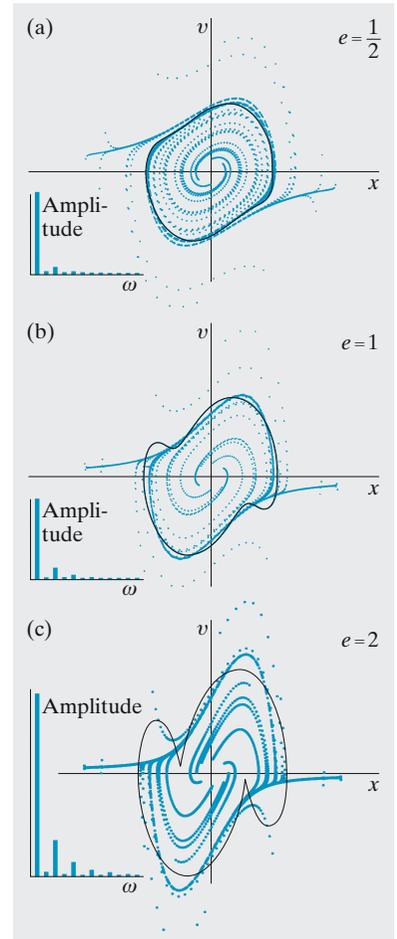


Abb. 20.17a–c. Phasenporträt eines van der Pol-Schwingers. Je zwei Punkte auf einer Trajektorie haben den gleichen Zeitabstand: Die Punktdichte deutet die Phasengeschwindigkeit an. Im Grenzzyklus erkennt man das kaum noch, weil viele Trajektorien in ihn eingemündet sind. *Dünne schwarze Kurve*: Fourier-Näherung mit ω und 3ω stellt für $e < 1$ den Grenzzyklus recht gut dar und ist kaum von ihm zu unterscheiden. *Links unten*: Vollständiges Fourier-Amplitudenspektrum

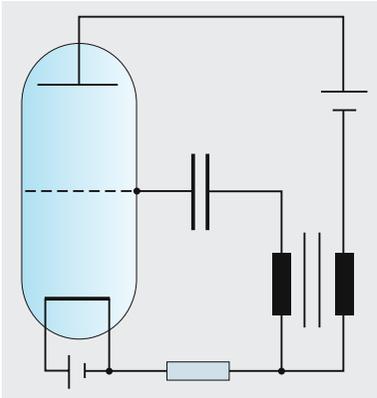


Abb. 20.18. Schaltskizze eines Senders

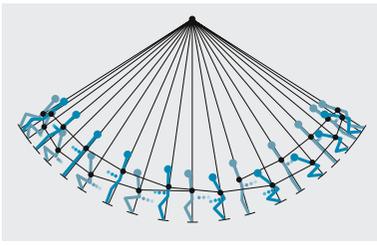


Abb. 20.19. Dieses Strichmännchen wirft seine Schaukel an. In jeder Schwingungsphase deuten die Punkte die Fahrtrichtung und Geschwindigkeit an; sie liegen da, wo die Person gerade war. Der Schwerpunkt und seine Bahn sind auch angedeutet

Die Kreide auf der Tafel, die Tür in ihren Angeln kann ebenfalls ihre Eigenschwingung aus einer aperiodischen Bewegung speisen. Der kontinuierliche Luftstrom, den der Holz- oder Blechbläser in sein Rohr leitet, lässt sich auch durch eine Bunsen-Flamme erzeugen und regt die Luftsäule zum Schwingen an, falls eine Symmetrie durch ein Mundstück, Rohrblatt oder Drahtgitter gebrochen wird. Das „Hui-Rad“ besteht aus einem Holzstab mit einigen Kerben darin, an dessen einem Ende ein Brettchen propellerartig drehbar angenagelt ist. Nimmt man das andere Ende in die Hand und rubbelt mit einem anderen Stab über die Kerben, beginnt das Brettchen sich schnurrend zu drehen, wobei der Drehsinn angeblich davon abhängt, ob man dabei „Hui“ oder „Hui-hui“ sagt. In Wirklichkeit berührt man heimlich mit einem Finger der rubbelnden Hand das Kerbholz oben oder unten. Eine Eigenschwingung des Kerbstabes in einer Ebene lässt sich ja immer in zwei gegenläufige Kreisbewegungen zerlegen, und der symmetriebrechende Finger unterdrückt die eine davon.

20.2.4 Parametrische Schwingungserregung

Ein Kind bringt die Schaukel ins Schwingen, indem es in bestimmtem Rhythmus in die Knie geht (oder, im Sitzen, den Körper zurücklehnt bzw. aufrichtet). Wie funktioniert das?

Man muss der Schaukel Energie zuführen. Energie ist Kraft mal Weg. Als Weg hat man nur Verschiebung des Körperschwerpunkts zur Verfügung. Die Schwerkraft nutzt hierbei nichts, denn man muss ja aus der Kniebeuge wieder hoch. Die Fliehkraft aber ist nicht konstant: Wenn sie groß ist, nahe dem Nulldurchgang, geht man um Δx in die Knie, wenn sie klein ist, nahe dem Maximalausschlag, kommt man fast verlustfrei wieder hoch. Man beschreibt so eine Art liegende Acht (Abb. 20.19) und gewinnt in jeder Periode zweimal annähernd die Energie $\Delta E = m\omega^2 l \Delta x$, also den Bruchteil $4\Delta x/l$ der derzeitigen Schwingungsenergie $\frac{1}{2}mv^2$. E schwillt daher etwa exponentiell an: $E = E_0 e^{t/\tau}$ mit $\tau = Tl/(4\Delta x)$.

Etwas komplizierter ist die Darstellung durch die Schwingungsgleichung $m\ddot{x} + mgx/l = 0$, in der wir den Parameter l mit der doppelten Eigenfrequenz $2\sqrt{g/l}$ ändern müssen, und zwar mit der richtigen Phase bezüglich x : Wenn $x = x_0 \sin(\omega t)$, muss $l = l_0 + l_1 \sin(2\omega t) = l_0 + 2l_1 x \dot{x}/(x_0 \omega)$ sein. Einschließlich eines Reibungsgliedes, das hier wohl eher $\sim \dot{x}^2$ ist, und ohne die Näherung $\sin \alpha \approx \alpha$ wird die Gleichung nur noch numerisch lösbar. Nach anfänglichem exponentiellem Anschwellen mündet die $\dot{x}(x)$ -Trajektorie meist in einen Grenzzyklus: Man kommt nicht mehr höher, erhält gerade eine periodische Schwingung aufrecht. Auch bei sehr geringer Reibung erzielt man einen Überschlag der Schaukel nur bei ziemlich großem Verhältnis l_1/l_0 (etwa $> 0,1$).

Solche parametrischen Schwingungen, erregt durch Änderung eines Parameters in der Schwingungsgleichung, spielen auch in der Elektrotechnik eine große Rolle.

x Beispiel...

In einem *LCR*-Serienschwingkreis ändert man die Kapazität C in der für die Schaukel gefundenen Weise. Wie reagiert der Schwingkreis? $U = Q/C$ sei die Spannung am Kondensator. Die Kirchhoff-Gleichung $L\ddot{U} + R\dot{U} + U/C = 0$ verwandelt sich mit $C = C_0 + C_1 \sin(2\omega t)$ analog zu Aufgabe 20.2.7 in eine van der Pol-Gleichung mit der Anfachbedingung $C_1 > \omega C_0^2 R$. So kann man einen Schwingkreis parametrisch erregen, ebenso auch durch geeignetes Wackeln an anderen elektrischen Parametern wie L oder R .

20.3 Biologische und chemische Systeme

Tabelle 20.1. Diskrete und stetige Systeme

Ressourcen- Erschöpfung	Dynamik	
	stetig	diskret
keine	$\dot{x} = Ax$ $x = x_0 e^{At}$ expon. Wachstum	$x \leftarrow ax$ $x = x_0 a^i$ expon. Wachstum
momentan	$\dot{x} = Ax(1-x)$ (<i>Verhulst</i>) monotoner Anstieg z. Sättigung	$x \leftarrow ax(1-x)$ (logist. Gl.) Monotonie – Periodik – Chaos $a \rightarrow$ Perioden-Verdopplg. (Feigenbaum) Intermittenz (<i>Pomeau-Manneville</i>)
verzögert	$\dot{x} = Ax(t)(1-x(t-\tau))$ Monotonie – ged. Schw. – Periodik – Katastr. $\tau \rightarrow$	$x_{i+1} = ax_i(1-x_{i-1}) + x_i$ Monotonie – ged. Schw. – Periodik – Chaos $a \rightarrow$

20.3.1 Populationsdynamik

Wie entwickeln sich Anzahl und Altersstruktur einer Bevölkerung bisexueller Lebewesen mit der Zeit? Wir beschränken uns auf diese scheinbar so einfachen Fragen (Ergänzungen in den Aufgaben) und werden dabei auf viele überraschende Phänomene stoßen. Die Wechselwirkung mit der Umwelt und anderen Spezies beschreiben wir ganz pauschal durch den Begriff Ressourcen. Ausführlicheres folgt im Abschn. 20.3.2.

Wenn jedes Paar k Nachkommen erzeugt, die ihrerseits fruchtbar werden, wächst die Population in jeder Generation um den Faktor $k/2$, also nach dem Exponentialgesetz $N = N_0 e^{(t/\tau) \ln(k/2)}$. Aber keine Population wächst bis ins Unendliche. Irgendwann verbraucht sie die lebensnotwendigen Ressourcen, selbst wenn diese nachwachsen, so weitgehend, dass die Vermehrung eingeschränkt wird. Am einfachsten beschreibt man dies durch einen Faktor $1 - N/N_{st}$, also

$$\dot{N} = AN \left(1 - \frac{N}{N_{st}} \right). \tag{20.27}$$

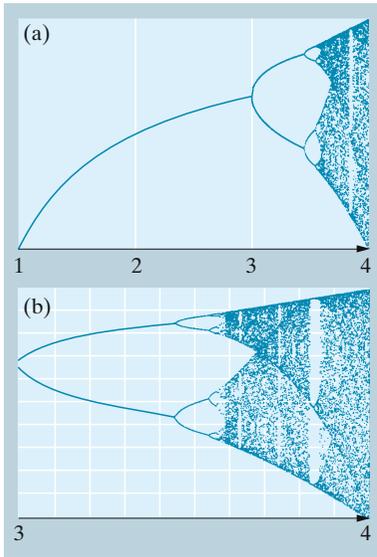
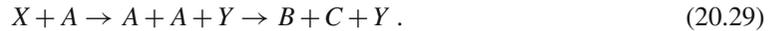


Abb. 20.20a,b. Nach 100 Generationen verhalten sich die Werte x_i im logistischen Modell (20.31) wie hier gezeigt: Für $a < 1$ ist $x = 0$ (nicht dargestellt), für $1 < a < 3$ Stationarität, für $3 < a < 3,569$ Periodizität der Ordnungen 2^n , für $a > 3,569$ Chaos mit intermittenten Einsprengeln (bes. Dreierperiode um $a = 3,83$)

Offenbar schwilt die Population nur bis N_{st} an (Sättigungs- oder hier besser Hungerzustand). Diese **Verhulst-Gleichung** hat die Lösung

$$N = N_0 \frac{N_{\text{st}}}{N_0 + (N_{\text{st}} - N_0) e^{-At}} \quad (20.28)$$

(auch mit Standard-Integration durch einen dazu äquivalenten Tangens hyperbolicus ausdrückbar). Analog wächst die Konzentration eines Stoffes, der monomolekular erzeugt wird (z. B. durch Autokatalyse) und bimolekular zerfällt (z. B. durch Umlagerung bei einem Stoß zweier seiner Teilchen):



Viele Lebewesen vermehren sich synchron, bringen z. B. jedes Jahr eine neue Generation hervor. Dann ist eine diskrete iterative Beschreibung angebracht:

$$N_{k+1} = aN_k \left(1 - \frac{N_k}{K}\right). \quad (20.30)$$

Diese so genannte **logistische Gleichung** liefert z. T. ein völlig anderes Verhalten (Abb. 20.20). Man erwartet wieder Stationarität, womit sich N nicht mehr ändert: $N = aN(1 - N/K)$, also $N_{\text{st}} = K(1 - 1/a)$. Bei $a < 1$ stirbt die Population aus, N klappt auf den anderen stationären Wert $N = 0$ ab. Allgemein studiert man das Verhalten am besten graphisch nach Normierung durch $x = N/K$, was

$$x_{k+1} = ax_k(1 - x_k) \quad (20.31)$$

liefert: Über einer x -Achse trägt man die Parabel $a(x - x^2)$ und die Gerade x auf. Ausgehend von einem bestimmten x_k auf der x -Achse erhält man x_{k+1} , indem man zur Parabel hochfährt. Diesen neuen Wert kann man durch waagerechtes Fahren zur x -Geraden auf die x -Achse übertragen usw. Man läuft so immer in einer rechteckähnlichen Spirale umher wie eine Spinne (Abb. 20.21). Dieses für jede Art von iterativem Gleichungslösen sehr nützliche Verfahren konvergiert oft auf den gesuchten stationären Wert, den Schnittpunkt von Parabel und Geraden, aber nur dann, wenn die Parabel dort nicht steiler fällt als 45° . Tut sie das doch, oszilliert die Spinne zunächst zwischen *zwei* Punkten: Die Population schwankt auf lange Sicht periodisch. Diese Zweierperiode setzt ein bei einem a -Wert, gegeben durch die Bedingungen $1 = a(1 - x)$ (Schnittpunkt) und $a - 2ax = -1$ (Steigung -1 am Schnittpunkt), woraus $a = 3$ folgt. Bei $a = 3,449$ passiert wieder etwas Neues: Die Periode verdoppelt sich, x schwankt zwischen vier Werten. Immer schneller folgen mit wachsendem a weitere Verdopplungen auf Achter-, Sechzehner-Perioden usw., und bei $a = 3,59$ bricht das vollendete Chaos aus: x springt in einem Bereich, der sich mit weiterwachsendem a immer mehr erweitert, scheinbar wahllos hin und her, immer wieder unterbrochen durch Zeitabschnitte mit annähernder Periodik. Dabei ist dieses **Chaos deterministisch**, jedes x ist streng durch seinen Vorgänger bestimmt. Aber der winzigste Unterschied im Anfangs- x erzeugt in diesem Bereich eine radikal andere Punktfolge. Auch hinsichtlich a gibt es immer wieder Unterbrechungen dieses Chaos,

Abb. 20.21a–d. So ist Abb. 20.20 zustande gekommen: In jedem Teilbild sieht man unten die „Seelilie“ bis zu einem bestimmten a -Wert a_1 . *Oben links* der Weg der „Spinne“ zwischen Parabel $y = a_1x(1 - x)$ und Gerader $y = x$. *Oben rechts* die zeitliche Folge der sich so ergebenden x -Werte; die *feinen* Punkte bilden die Einschwingphase, die *dickeren* sind unten bei $a = a_1$ eingetragen

kurze a -Intervalle mit Periodik, oft in ungeradem Rhythmus (z. B. Dreierperiodik um $a = 3,83$; s. weiter unten). Bei $a = 4$ schließlich ist der ganze x -Bereich von 0 bis 1 dem chaotischen Springen zugänglich, für $a > 4$ springen die x -Werte sogar über diesen sinnvollen Bereich hinaus.

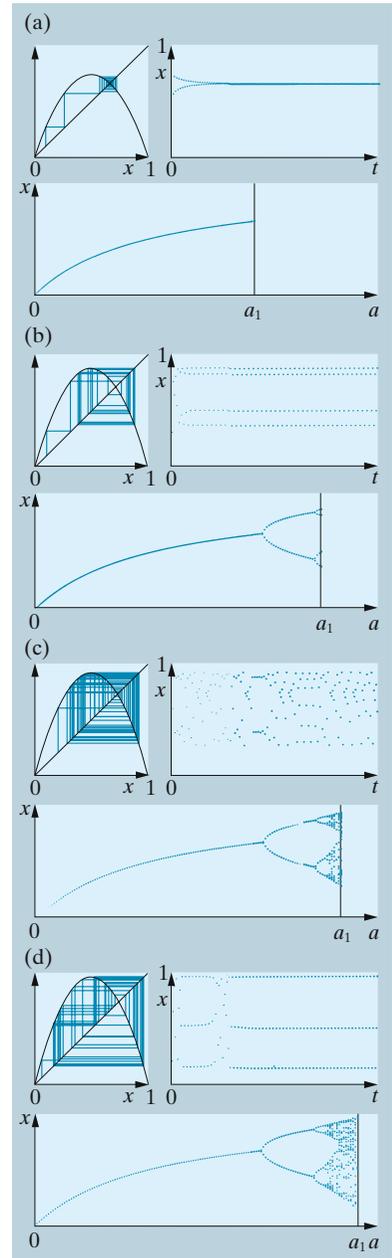
Die a -Bereiche, in denen eine 2^n -Periodik herrscht, werden immer kürzer, und zwar angenähert jedes Mal um den Faktor 4,669, die **Feigenbaum-Zahl**. Man versteht das annähernd, wenn man die Folge der Funktionen $f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, $f^4(x) = f(f(f(f(x))))$, ..., immer 2^n -mal geschachtelt, aufträgt (Abb. 20.22). Die Zweierperiodik springt zwischen den äußeren Schnittpunkten der x -Geraden mit $f^2(x)$ hin und her. Diese werden instabil, wenn $f^2(x)$ dort steiler fällt als 45° . Dann sucht sich das System die Schnittpunkte mit $f^4(x)$. Aber der Teil des Diagramms, wo f^2 und f^4 so konkurrieren, sieht fast genauso aus wie das ganze Diagramm aus f und f^2 , nur um etwa den Faktor 4–5 verkleinert. Die Bedeutung dieses **Feigenbaum-Szenarios** für den Übergang ins Chaos nach mehrfacher Periodenverdopplung liegt in seiner Universalität: Die verschiedensten Vorgänge aus vielen Gebieten verhalten sich so. Mathematisch liegt das daran, dass die Kurve $f(x)$ sehr oft einen parabelähnlichen Bogen bildet. Ein Mini-Feigenbaum-Szenario z. B., anfangend mit einer Dreierperiode, unterbricht das Chaos ab $a = 3,8284$, wo f^3 die x -Gerade erstmals an drei Stellen stabil und an ebenso vielen instabil schneidet.

x Beispiel ...

Geben Sie einen genaueren Wert für den Parameter a in der Iteration $x \leftarrow ax(1 - x)$, bei dem Chaos einsetzt, ausgehend von der Beobachtung, dass die Bereiche mit 2^n -Periodik bei Erhöhung von n jedes Mal um den gleichen Faktor kürzer werden.

Wir kennen den Bereich $(1, 3)$ mit einem stabilen Fixpunkt und den Bereich $(3, 1 + \sqrt{6})$ mit der Zweierperiode. Ihre Längen verhalten sich wie $\delta = 4,449\,49/1$. Die geometrische Reihe konvergiert zu $1 + 2 \sum_0^\infty \delta^{-v} = 1 + 2\delta/(\delta - 1) = 3,579\,796$. Das weicht nur um 0,3% vom exakten Wert 3,569 946 ab.

Mit dieser Dreierperiode hängt ein anderes Szenario des Übergangs ins Chaos zusammen, die **Intermittenz (Pomeau-Manneville-Szenario)**. Wir können a ja auch abnehmen lassen, und dann passiert kurz unterhalb von 3,8284 etwas, was sehr an Ereignisse des täglichen Lebens erinnert: Eine Weile scheint die Ordnung, hier die Dreierperiode, gut eingehalten zu werden, plötzlich wird sie aber durch einen Einbruch des Chaos unterbrochen, bevor sie sich wieder ein Weilchen stabilisiert. Ähnliches geschieht einer Fünferperiode um $a = 3,738$, einer Sechserperiode um $a = 3,626$, einer Siebenerperiode um $a = 3,708$ usw., hier nur in viel engeren a -Bereichen.



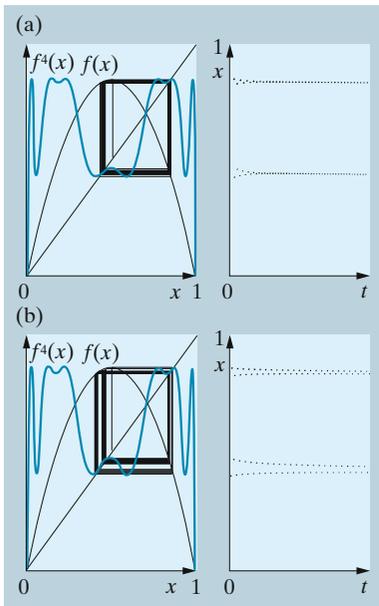


Abb. 20.22a,b. Periodenverdopplung: Die Kurve $y = f^4(x)$ hat nahe $a = 3,4$ schon sechs Minima. Bei $a = 3,40$ (a) steigt sie an den beiden Wendepunkten, wo sie die Gerade $y = x$ schneidet, flacher als diese, bei $a = 3,445$ (b) steiler, sodass zwei Schnittpunkte in je drei aufspalten. Je zwei davon sind Attraktoren. Gleichzeitig ist die Kurve $y = f^2(x)$ (nicht gezeichnet) dort steiler als -1 geworden

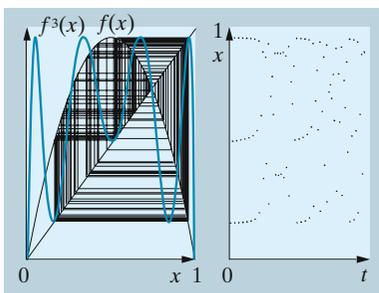


Abb. 20.23. Intermittenz: Bei $a = 3,287$ berührt die Kurve $y = f^3(x)$ die Gerade $y = x$ an drei Stellen, aber nicht in Wendepunkten wie in Abb. 20.22. Die meisten Iterationspunkte x liegen nahe diesen drei Stellen, denn die Spinne, dort eingeklemmt, kommt nur wenig voran und braucht lange, bis sie wieder ins Freie gelangt

Man versteht diese Route ins Chaos, wenn man die Dreifach-Iterierte $f^3(x)$ zeichnet (Abb. 20.23). Während der stabilen Dreierperiode gilt ja für jeden der drei Fixpunkte $x_f = f^3(x_f)$, d. h. die Kurve $y = f^3(x)$ schneidet dort die Gerade $y = x$ mit $f^{3'}(x) < 1$ (Stabilitätsbedingung). Mit abnehmendem a werden die Ausbeulungen der $f^3(x)$ -Kurve kleiner, schließlich berühren sie die Gerade $y = x$ nur noch (bei $a = a_c = 1 + \sqrt{8} = 3,82843$). Hier ist die Dreierperiodik eigentlich zu Ende. Beim Feigenbaum-Szenario war $y = x$ am Verzweigungspunkt auch Tangente z. B. an $f^2(x)$, aber eine *Wendetangente*, bei der Intermittenz berührt sie außerhalb des Wendepunktes. Für etwas kleinere a als a_c hat sich $y = f^3(x)$ noch nicht weit von $y = x$ entfernt, es bleibt zwischen beiden ein enger Kanal. Wenn die Spinne da hineingerät, muss sie sehr lange zwischen $f^3(x)$ und x im Zickzack laufen, wobei ihr x kaum von x_f abweicht. An zwei weiteren Kurvenbögen geschieht dasselbe. Man glaubt, eine Dreierperiodik zu sehen, bis die Spinne den Kanal endlich verlässt. Dann springt sie chaotisch, bis sie wieder in einem dieser Kanäle steckenbleibt.

Wenn die Tiere den Winter überleben, allgemein, wenn sie viele Jahre leben, aber nur jedes Jahr einmal Junge bekommen, müssen wir anders formulieren. Die Geburtenziffer sei wieder nicht einfach proportional zur Anzahl der Erwachsenen. Die Fruchtbarkeit hänge ab vom Nahrungsangebot, und dieses sei bereits eine gewisse Zeit, etwa ein Jahr zuvor durch die damals Lebenden dezimiert worden, was wir nach evtl. Normierung vielleicht durch den Faktor $1 - x(t-1)$ darstellen können. Dann setzt sich die Anzahl der Tiere $x(t+1)$ im nächsten Jahr zusammen aus den jetzt lebenden $x(t)$ und den Jungen vom letzten Jahr $ax(t)(1 - x(t-1))$, also

$$x(t+1) = x(t) + ax(t)(1 - x(t-1)). \quad (20.32)$$

Hier ist unsere Stabilitätsanalyse nicht direkt anwendbar; sie gilt nur für die Form $x(t+1) = f(x(t))$. Denken wir aber an die stetige Gleichung zweiter Ordnung $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$: Wir hatten die Ableitung \dot{x} einfach v genannt und so zwei Gleichungen erster Ordnung erhalten. Hier sagen wir statt Ableitung Differenz und nennen diese v :

$$v(t) = x(t+1) - x(t) \quad \text{oder} \quad x(t+1) = x(t) + v(t). \quad (20.33)$$

Das ist schon die erste Gleichung. Die zweite heißt

$$v(t) = a(x(t-1) + v(t-1))(1 - x(t-1)). \quad (20.34)$$

Symbolisch fassen wir beide zusammen:

$$x \leftarrow f(x, v) = x + v, \quad v \leftarrow g(x, v) = a(x + v)(1 - x). \quad (20.35)$$

Es gibt zwei Fixpunkte: $x = 0, v = 0$ und $x = 1, v = 0$. Die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a(1 - 2x - v) & a(1 - x) \end{pmatrix} \quad (20.36)$$

vereinfacht sich am Fixpunkt $(0, 0)$ auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} \quad (20.37)$$

mit der Säkulargleichung $\lambda^2 - (1+a)\lambda = 0$ und den Eigenwerten 0 und $1+a$. Der zweite ist im sinnvollen Bereich größer als 1, also ist dieser Fixpunkt immer instabil.

Am Fixpunkt $(1, 0)$ heißt die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \tag{20.38}$$

mit der Säkulargleichung $\lambda^2 - \lambda + a = 0$ und den Eigenwerten $\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a}$. Bei $a < \frac{1}{4}$ sind beide reell, ihre Beträge < 1 : Der Fixpunkt ist stabil und wird durch monotonen Anklingen angestrebt. Bei $a > \frac{1}{4}$ sind beide komplex; der Betrag $|\lambda| = \sqrt{a}$ zeigt, dass Stabilität, hier gedämpfte Schwingung (Realteil < 1) nur für $a < 1$ erhalten bleibt. Die Periode ist $2\pi/\sqrt{a - \frac{1}{4}}$. Für $a > 1$ zeigt erst die Simulation, welche Art Instabilität hier herrscht: Die Population schwingt nach dem Einschwingen ungedämpft auf und ab, mit oft sehr merkwürdigen Perioden. Von $a = 1,177$ bis 1,199 z. B. erhält man eine saubere Siebenjahresperiode, bei 1,224 bis 1,228 folgt eine von 15, um 1,235 eine von 8, bei 1,239 eine von 16 Jahren. Ab 1,271 wird x zeitweise so klein, dass Rundungsfehler es ins Negative treiben können (Abb. 20.24).

Bei asynchroner, also stetiger Vermehrung verläuft die Sache wieder anders. Die Ressourcen, die wir heute verbrauchen, schränken vielleicht nicht so sehr unsere Fruchtbarkeit ein wie die unserer Enkel. Man sollte diesen Verbrauch besser um eine Zeit τ zurückdatieren, also statt (20.27) schreiben

$$\dot{x}(t) = ax(t)(1 - x(t - \tau)) \tag{20.39}$$

Zuerst beseitigen wir den Parameter a durch Einführung der dimensionslosen Zeit $z = at$. Mit $c = a\tau$ wird dann

$$\frac{dx}{dz} = x(z)(1 - x(z - c)) \tag{20.40}$$

Es gibt zwei Fixpunkte: Den trivialen $x = 0$ und $x = 1$. Um diesen linearisieren wir: $x = 1 + u$, also

$$\frac{du}{dz} = (1 + u(z))u(z - c) \approx u(z - c) \tag{20.41}$$

Das c ändert nichts an der Gültigkeit des e-Ansatzes: $u = u_0 e^{\lambda z}$ mit komplexem λ . Einsetzen in (20.41) liefert $\lambda u(z) = u(z - c) = u(z)e^{-\lambda c}$, also

$$\lambda = e^{-\lambda c} \tag{20.42}$$

Das sieht einfacher aus als es ist: Die e-Funktion mit komplexem Argument $-\lambda c$ ist längs der i-Achse periodisch. Daher gibt es unendlich viele Lösungen. Uns interessiert aber nur, wann der Fixpunkt $x = 1$ stabil ist: Wenn alle Lösungen $\lambda_k = \mu_k + i\omega_k$ negative Realteile μ_k haben. Die Grenze dieses Stabilitätsbereiches liegt also bei $\mu = 0$. Dies impliziert $i\omega = e^{-i\omega c}$, was bei $\omega = 1$ und $c = \pi/2$ eintritt (bei größerem c folgen die anderen Lösungen). x ist an dieser Grenze und dicht darüber ungedämpft periodisch, im t -Maßstab mit der Periode $T - 2\pi/(\omega a) = 4c/a \approx 4\tau$.

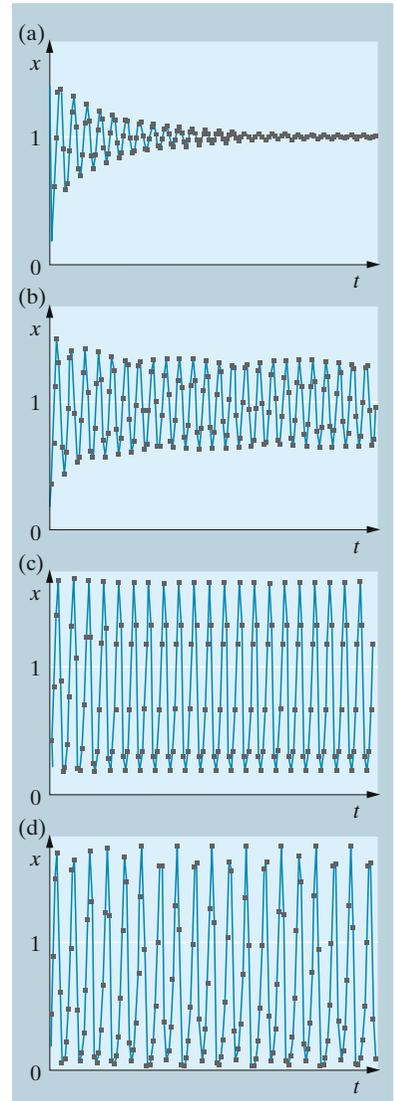


Abb. 20.24a–d. Diese Population entwickelt sich gemäß (20.32). Die Fruchtbarkeit wird vermindert durch die Ressourcenverarmung in der vorigen Generation: $x(t+1) = x(t) + ax(t)(1 - x(t-1))$. a -Werte in den Teilbildern: 0,95; 1,03; 1,19; 1,25

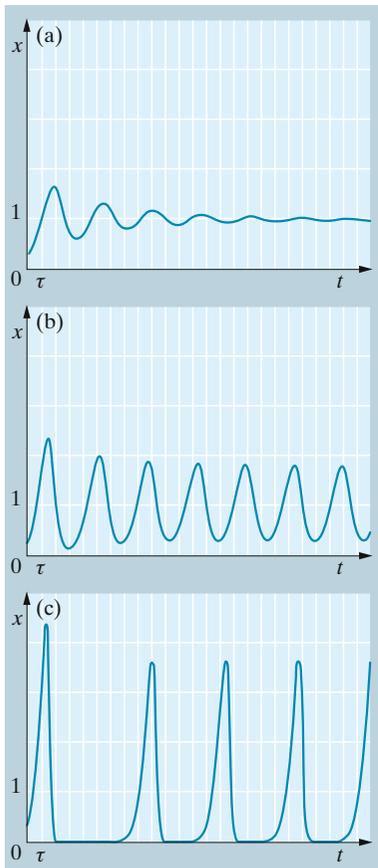


Abb. 20.25a–c. Stetiges Modell mit Verarmung der Ressourcen eine Zeit vorher gemäß (20.39): $\dot{x}(t) = ax(t)(1 - x(t - \tau))$. Der Parameter $c = a\tau$ hat in den Teilbildern die Werte 1,35; 2,25; 2,61

Man kann das auch anschaulich verstehen: x oszilliert dann etwa symmetrisch um die Linie $x = 1$. Erfolgt der Schnitt mit dieser Linie zur Zeit $t - \tau$, also $x(t - \tau) = 1$, dann folgt $\dot{x}(t) = 0$: Vom Nulldurchgang bis zum Maximum dauert es eine Zeit τ , die Periode ist näherungsweise 4τ . Bei größerem τ steigt die Periode allerdings.

Wie die Simulation zeigt (Abb. 20.25), geht x für $c < \pi/2$, d. h. $\tau < \pi/(2a)$, tatsächlich gegen 1, für größere τ aber oszilliert sie periodisch. Je größer τ , desto katastrophaler werden die Schwankungen: Die Population stirbt ziemlich plötzlich fast aus und erholt sich erst sehr langsam wieder. Bei Schadinsekten oder Erregern von Infektionskrankheiten erlebt man oft Ähnliches. Man glaubt sie ausgestorben, bis plötzlich die Plage wieder auftritt und fast noch schneller wieder verschwindet, weil alles kahl gefressen ist. Vielleicht sollte man diese Warnung aber auch bezüglich der Menschheit ernst nehmen.

20.3.2 Einfache ökologische Modelle

Ökologie ist die Lehre von den Wechselwirkungen zwischen Arten von Lebewesen oder zwischen diesen und ihrer Umwelt. Zwei Arten von Lebewesen wetteifern um die gleichen Ressourcen, oder sie nützen einander symbiotisch, oder eine frisst die andere oder parasitiert an ihr, oder sie haben überhaupt nichts miteinander zu tun. Alle diese Fälle lassen sich grob vereinfacht darstellen durch die Systemgleichungen

$$\dot{x} = ax(1 - cx - ey), \quad \dot{y} = by(1 - dy - fx). \quad (20.43)$$

Die Klammer drückt den Einfluss der Ressourcen oder der anderen Spezies auf die Fruchtbarkeit der betrachteten Spezies aus. Wir untersuchen folgende Vorzeichenkombinationen:

a	b	c	d	e	f	Modell
+	-	0	0	+	+	Einfaches Raubtier-Beute-Modell (Lotka-Volterra)
+	-	+	0	+	+	Verbessertes Raubtier-Beute-Modell
+	+	+	+	-	-	Symbiose
+	+	+	+	+	+	Wettbewerb, allgemein
+	+	+	+	+	+	$c = f, d = e$ Wettbewerb um identische Ressourcen

(20.44)

Machen Sie sich in jedem Fall die Bedeutung dieser Bedingungen klar! Andere Kombinationen können Sie in Aufgabe 20.3.18 interpretieren und diskutieren.

Der letzte Fall (identische Ressourcen) ist einfach: $dy/dx = by/(ax)$, also $y = y_0(x/x_0)^{b/a}$. In den anderen Fällen suchen wir die Fixpunkte, wo $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ist. Drei sind einfach zu finden: $(0, 0)$, $(0, 1/d)$, $(1/c, 0)$. Außerdem gibt es den Fixpunkt $((d - e)/(cd - ef), (c - f)/(cd - ef))$. Die Stabilitätsverhältnisse folgen aus den Eigenwerten der Systemmatrix

$$\begin{pmatrix} a(1 - 2cx - ey) & -aex \\ -bfy & b(1 - 2dy - fx) \end{pmatrix}. \quad (20.45)$$

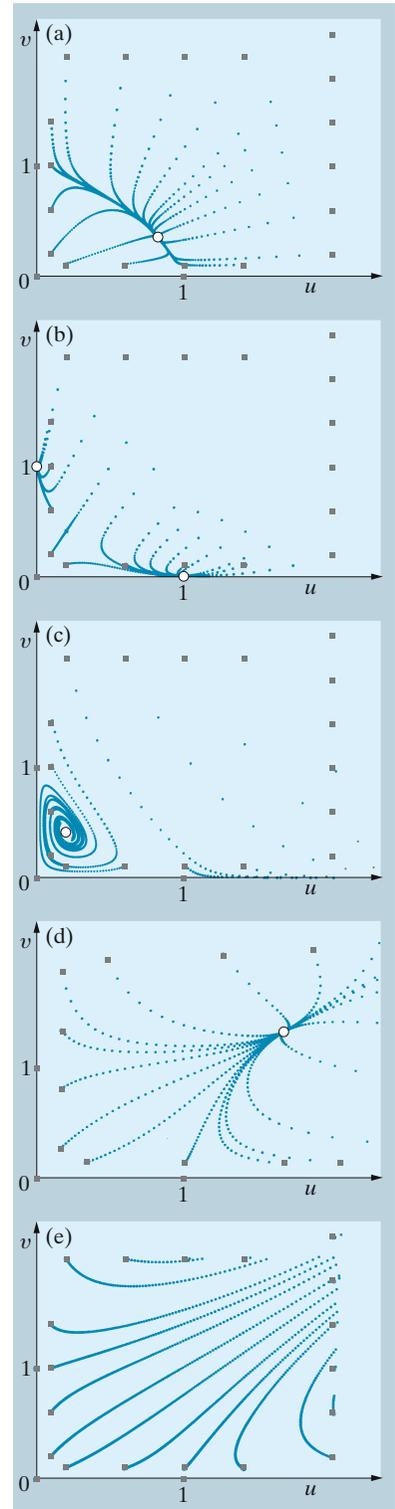
Für den Punkt $(0, 0)$ heißt sie $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, also $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b$: Dieser Punkt ist immer instabil, meist ein Knoten, außer beim Raubtier-Beute-Modell, wo er ein Sattel ist.

Auch die Punkte $(0, 1/d)$ und $(1/c, 0)$ ergeben Matrizen, bei denen ein Nichtdiagonalelement 0 ist. Dann sind die Eigenwerte einfach die Diagonalelemente: $a(1 - e/d)$ und $-b$ bzw. $-a$ und $b(1 - f/c)$. Bei $e > d$ und $b > 0$ ist $(0, 1/d)$ ein stabiler Knoten (Attraktor für Aussterben von x), bei $f > c$ trifft das für $(1/c, 0)$ zu (y stirbt), wenn beides gilt, müssen die beiden Attraktoren durch eine Kurve, die Separatrix, getrennt sein. Diese Kurve muss selbst eine Trajektorie sein, aber offenbar in keinen der beiden stabilen Knoten münden, sondern aus dem instabilen Punkt $(0, 0)$ kommen, bzw. aus dem Unendlichen, und bei der geringsten Abweichung vor dem vierten stationären Punkt ausweichen, der also ein Sattel sein muss. Eine echte Koexistenz zwischen Arten, die von den gleichen Ressourcen leben, ist also nur bei schwachem Wettbewerb ($e < d, f < c$) möglich. Dann ist P_4 stabil, P_2 und P_3 sind Sättel (Abb. 20.26).

Im Fall der Symbiose sieht man leicht, dass $(0, 0)$ ein instabiler Knoten ist: $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b$, beide positiv reell. $(0, 1/d)$ und $(1/c, 0)$ sind Sättel, weil die Diagonalelemente, die gleich den λ sind, verschiedene Vorzeichen haben. Der vierte stationäre Punkt liegt nur im erlaubten Quadranten positiver x und y , wenn $ef < cd$, d. h. wenn die Symbiose nicht zu förderlich ist. Sonst wachsen x und y in einer Wohltätigkeitsorgie ins Unendliche, das Modell wird sinnlos. Bei $ef < cd$ zeigt eine mühsame Rechnung, dass der vierte Punkt tatsächlich ein stabiler Knoten ist, auf den sich x und y schließlich einigen (Aufgabe 20.3.15).

Beim **Lotka-Volterra-Modell** wandern wegen $c = d = 0$ zwei der Fixpunkte ins Unendliche. Außer $(0, 0)$ bleibt nur $(1/f, 1/e)$. Der Nullpunkt ist ein instabiler Knoten. Beim anderen Fixpunkt hat die Matrix beide Diagonalelemente gleich 0, die beiden anderen heißen $-ae/f$ und $-bf/e$. Es folgt $\lambda^2 = ab$, und da $b < 0$, sind beide λ rein imaginär: $(1/f, 1/e)$ ist ein Zentrum, um das die nahe gelegenen Trajektorien als Ellipsen kreisen. Weiter draußen sind sie deformiert, stellen aber immer noch periodisches Verhalten dar. Dessen Kreisfrequenz ist $\omega = \sqrt{ab}$ (Geburtsrate der Beute mal Todesrate der Räuber), wenigstens nahe am stationären Punkt. In welchem Sinn diese Umläufe erfolgen, ist auch anschaulich klar: Gibt es wenig Füchse, vermehren sich die Hasen stark, die Fuchspopulation schwillt an

Abb. 20.26a–e. Phasenporträts einiger ökologischer Modelle: $u' = A(1 - u - Bv)$, $v' = v(1 - v - Cu)$ (normierte Form von (20.43)). \circ Fixpunkte, \blacksquare Startpunkte der Trajektorien. Zwischen zwei Punkten einer Trajektorie besteht immer der gleiche Zeitabstand. (a) $A = 1, B = 0,5, C = 0,3$: schwache Konkurrenz, stabile Koexistenz; (b) $A = 1, B = 2, C = 3$: starke Konkurrenz, Separatrix zwischen den Einzugsgebieten der beiden Fixpunkte, wo jeweils eine Spezies tot ist; (c) $A = -1, B = 0,5, C = 0,2$: Räuber-Beute-System; eine Separatrix trennt das Gebiet periodischen Einmündens in den vierten Fixpunkt von dem, wo eine Spezies sehr schnell ausstirbt; (d) $A = 1, B = -0,5, C = -0,3$: schwache Symbiose mit stabiler Koexistenz; (e) $A = -1, B = 2, C = 3$: starke Symbiose mit „Potlatsch“ ins Unendliche



und dezimiert schließlich die Hasen, was etwas später auf die Füchse zurückwirkt. Jedes Mal, wenn eine Spezies durch ihren stationären Wert geht (genauer durch die Nullkline), hat die andere ein Extremum.

Eine Infektionskrankheit wird durch Kontakt von Kranken auf Gesunde übertragen. Die Krankheit vermindere die Überlebenschancen nicht merklich. Wer sie überstanden hat, sei für sein weiteres Leben immun. x , y , z seien die Bevölkerungsdichten der Gesunden (die noch nie krank waren), der Kranken bzw. der Immunen. Diese Größen ändern sich gemäß

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \underset{\text{Geburt}}{A} - \underset{\text{Infekt.}}{\beta xy} - \underset{\text{Tod}}{bx}, \\ \dot{y} &= \underset{\text{Infekt.}}{\beta xy} - \underset{\text{Immun.}}{cy} - \underset{\text{Tod}}{by}, \\ \dot{z} &= \underset{\text{Immun.}}{cy} - \underset{\text{Tod}}{bz}.\end{aligned}\tag{20.46}$$

Es gibt zwei Fixpunkte, wie man speziell aus der y -Gleichung sieht:

$$\begin{aligned}P_0 &= \left(\frac{A}{b}, 0, 0\right), \\ P_1 &= \left(\frac{b+c}{\beta}, \frac{A}{b+c} - \frac{b}{\beta}, \frac{Ac}{b(b+c)} - \frac{b}{\beta}\right).\end{aligned}\tag{20.47}$$

P_1 liegt nur bei $A\beta > b(b+c)$ im sinnvollen (positiven) Bereich.

Für P_0 heißt die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} -b & -\beta A/b & 0 \\ 0 & A\beta/b - b - c & 0 \\ 0 & c & -b \end{pmatrix}.\tag{20.48}$$

Zwei Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = -b$, denn damit verschwindet in der Matrix $J - \lambda E$ eine ganze Spalte, die Determinante wird Null. $\lambda_3 = A\beta/b - b - c$ schafft dasselbe mittels einer Zeile. Bei $A\beta/b < b + c$ ist dieser Fixpunkt stabil (der andere existiert ja nicht im sinnvollen Bereich). Kranke und Immune verschwinden allmählich, der Erreger mit ihnen. Die Zeitkonstanten hierfür sind $1/b$ und $b/(b(b+c) - A\beta)$.

Die Jacobi-Matrix für P_1

$$\begin{pmatrix} -A\beta/(b+c) & -b-c & 0 \\ A\beta/(b+c) & 0 & 0 \\ 0 & c & -b \end{pmatrix}.\tag{20.49}$$

hat auch einen Eigenwert $-b$; die beiden anderen sind Wurzeln von $\lambda^2 + \lambda A\beta/(b+c) + A\beta - b(b+c) = 0$. Nach der **Regel von Descartes** gibt es keine positiv reellen Wurzeln, aber entweder zwei negativ reelle oder zwei konjugiert komplexe mit negativem Realteil (stabiler Knoten oder stabile Spirale), je nachdem ob $A\beta - b(b+c)$ kleiner oder größer als $(A\beta/(b(b+c)))^2$ ist. Dieser Fixpunkt ist jetzt stabil; es wird immer ein gewisser Krankenstand aufrechterhalten. Die Anteile von Gesunden, Kranken und Immunen an der Gesamtbevölkerung A/b sind $b(b+c)/(A\beta)$, $b/(b+c) - b^2/(A\beta)$, $c/(b+c) - cb/(A\beta)$. In einer zu dichten Bevölkerung $(A/b) > (b+c)/\beta$ bleibt die Krankheit erhalten, eine weniger dichte eliminiert den

Erreger. Diese Grenzdicke liegt umso tiefer, je infektiöser die Krankheit ist (β) und je geringer Todes- und Immunisierungsrate sind.

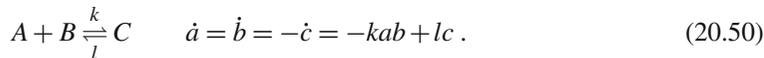
× Beispiel...

Was ändert sich an der Dynamik einer Infektionskrankheit (20.46), wenn diese manchmal tödlich ist?

Die Sterberate für die Kranken ist dann nicht mehr b , wie für Gesunde und Immune, sondern $d > b$. Die Stabilitätsgrenze zwischen den beiden Fixpunkten liegt jetzt bei $A/b = (d + c)/\beta$, also bei dichter Bevölkerung als vorher. P_0 hat noch den doppelten Eigenwert $-b$, außerdem $A\beta/b - d - c$, P_1 hat auch $\lambda_1 = -b$ und zwei negativ reelle oder konjugiert komplexe Eigenwerte.

20.3.3 Kinetische Probleme

Jede chemische Reaktionsgleichung beschreibt ein dynamisches System. Schreiben wir die Teilchen mit großen, ihre Konzentrationen mit kleinen Buchstaben, dann gilt z. B.



A und B begegnen sich ja umso häufiger, je größer beide Konzentrationen sind (bimolekulare Reaktion). Genauer ist k gleich Teilchengeschwindigkeit mal Reaktionsquerschnitt. C zerfällt monomolekular: Jedes Teilchen hat die gleiche Zerfallswahrscheinlichkeit. Das Gleichgewicht $\dot{a} = 0$ gibt das Massenwirkungsgesetz: $ab/c = l/k$. Diese Größe, deren negativer Zehnerlogarithmus in der Chemie oft pK heißt, hängt von der Temperatur nach einem Boltzmann-Gesetz $K \sim e^{-W/(kT)}$ ab (W : molekulare Reaktionsenergie). k und l einzeln enthalten ähnliche Faktoren, wobei allerdings W die Aktivierungsenergie für Hin- bzw. Rückreaktion ist.

Enzyme beschleunigen spezifisch chemische Reaktionen, indem sie deren Aktivierungsenergie herabsetzen. Wir betrachten die Verwandlung eines Substratmoleküls S in ein Produktmolekül P durch ein Enzym E über eine Zwischenstufe, in der sich E und S zu einem Komplex C zusammenlagern, der entweder S oder P entlässt (**Michaelis-Menten-Kinetik**):



Im zweiten Schritt wird die Rückreaktion gewöhnlich nicht berücksichtigt, was möglich ist, solange die Konzentration von P noch klein ist oder wenn es sich z. B. um eine Spaltung von S handelt, sodass man eigentlich schreiben müsste $C \rightarrow P_1 + P_2 + E$: dann ist das Zusammentreffen aller drei Partner für die Rückreaktion sehr unwahrscheinlich.

Für e , s , c , p , die Konzentrationen der beteiligten Teilchen, gelten die Erhaltungssätze

$$\begin{aligned} e + c &= e_0 && \text{(Enzym entweder frei oder gebunden) ;} \\ s + c + p &= s_0 && \text{(S noch frei, im Komplex, oder zu P verwandelt) .} \end{aligned}$$

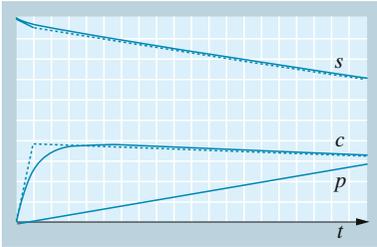


Abb. 20.27. Enzymkinetik nach Michaelis-Menten: s , p , c Konzentrationen von Substrat, Produkt und Enzym-Substrat-Komplex. (—): Exakte Lösungen, (---): Näherung nach (20.53); bei p nicht unterscheidbar. Parameter: $l = ks_0/2$, $m = ks_0$, $s_0 = 10e_0$

e_0 , s_0 sind die Anfangskonzentrationen, wenn man bei $t = 0$ reines Substrat mit reinem Enzym vermischt hat. Sehr bald danach stellt sich ein Quasigleichgewicht ein (Aufgabe 20.3.21, Abb. 20.27), in dem alles verschwindende Substrat als Produkt wieder erscheint:

$$kse - lc = ks(e_0 - c) - lc \approx mc \Rightarrow c \approx \frac{kse_0}{ks + l + m}; \quad (20.52)$$

die Erzeugungsrate des Produkts wird

$$\dot{p} \approx -\dot{s} \approx mc \approx \frac{mke_0s}{ks + l + m}. \quad (20.53)$$

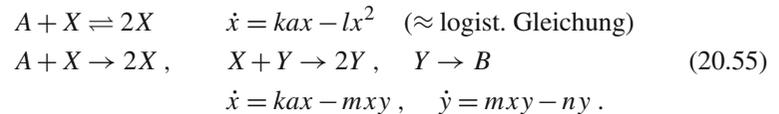
In den Koordinaten \dot{p}^{-1} und s^{-1} ergibt sich eine Gerade:

$$\dot{p}^{-1} \approx \frac{k + (l + m)s^{-1}}{mke_0}. \quad (20.54)$$

Aus diesem **Lineweaver-Burk-Plot** liest man sehr bequem die Michaelis-Menten-Konstanten $1/(me_0)$ und $(l + m)/(mke_0)$ ab.

Oft gibt es außer dem Substrat S noch ein anderes Teilchen T , das an das Enzymmolekül andocken kann, meist an eine andere Stelle; Enzyme sind ja meist Riesenproteine. S und T werden gegenseitig ihre Bindung und die Reaktion zu den Produkten P und Q fördern oder behindern, als *Aktivator* oder **Inhibitor** wirken. Es gibt dann drei Komplexe: $C = ES$, $D = ET$, $F = EST$. In Aufgabe 20.3.22 können Sie untersuchen, wie dies die Kinetik beeinflusst.

Wenn ein Stoff seine eigene Produktion fördert, spricht man von **Autokatalyse**. Beispiele wären



Die zweite Gleichung ist analog zum Lotka-Volterra-System für die Raubtier-Beute-Ökologie.

Manche Enzyme haben mehrere Bindungsstellen für ihr Substrat. Diese können kooperativ wirken oder nicht: Wenn eine Stelle besetzt ist, können die übrigen durch eine **allosterische Umwandlung** der Molekülkonfiguration leichter zugänglich werden oder umgekehrt. Beim **Hämoglobin** (Hb) ist das so, und zwar aus gutem Grund. Ein Hb-Molekül hat vier Hämgruppen, die je ein O_2 binden können. In Aufgabe 1.5.13 haben wir festgestellt, dass die körperliche Dauerleistung eines Tieres vom O_2 -Transport durch sein Hb begrenzt wird. Dabei wurde vollständige Aufladung mit O_2 in der Lunge und vollständige Entladung im arbeitenden Gewebe vorausgesetzt.

Hieße die Reaktion einfach $A + O_2 \xrightleftharpoons[l]{k} AO_2$, so wie es beim Myoglobin im Muskel mit seiner einen Hämgruppe auch ist, folgte in Abhängigkeit vom O_2 -Partialdruck p und der Gesamtkonzentration $c = [A] + [AO_2]$ das Gleichgewicht für die relative Besetzung mit O_2

$$\bar{v} = \frac{[AO_2]}{c} = \frac{kp}{l + kp}. \quad (20.56)$$

Das ist ein zunächst mit p steigender, dann in die Sättigung übergehender Hyperbelbogen. Wenn p im arbeitenden Muskel halb so groß ist wie in der Lunge, wird die Transportkapazität nur zu höchstens 17% ausgenutzt. Wir könnten nicht 600, sondern nur 100 Höhenmeter in der Stunde steigen.

Das Tetramer des Hb kann es viel besser. Es sättigt sich in einer Kette von O_2 -Bindungs- und Abtrennungsreaktionen. Seien k_i und l_i die Reaktionskonstanten für die i -te Stufe (Besetzung bzw. Freiwerden einer bestimmten Hämgruppe), dann ergibt sich im Gleichgewicht die mittlere Anzahl von O_2 , die an einem Hb hängt, zu

$$\bar{v} = 4 \frac{P_1 p + 3P_2 p^2 + 3P_3 p^3 + P_4 p^4}{1 + 4P_1 p + 6P_2 p^2 + 4P_3 p^3 + P_4 p^4}, \tag{20.57}$$

$$P_i = \prod_{\nu=1}^i \kappa_{\nu}, \quad \kappa_{\nu} = \frac{k_{\nu}}{l_{\nu}}$$

(Aufgabe 20.3.23). Sind alle κ_i gleich, haben wir wieder den Fall unabhängiger Bindungsstellen, wie beim Myoglobin. Werden die κ_i mit steigendem i immer kleiner, d. h. behindern die vorhandenen O_2 den Neuzug, wird die Kurve noch flacher. Bei Kooperativität (Zunahme der κ_i) wird sie steiler (Abb. 20.28). Im Grenzfall sind im Zähler und Nenner von (20.57) nur das erste und das letzte Glied wesentlich: Bevor die mittleren Glieder das erste einholen, hat das letzte das längst getan und ist dann nie mehr einzuholen:

$$\bar{v} \approx 4 \frac{\kappa_1 p + P_4 p^4}{1 + P_4 p^4}. \tag{20.58}$$

Die **Kooperativität** steigert die maximale Transportkapazität auf 60% (gleiche Voraussetzung wie oben: Halber O_2 -Druck im Gewebe). Eine weitere Steigerung auf fast 100% bringt der **Bohr-Effekt**: Mit abnehmendem pH der Umgebung, z. B. in dem durch CO_2 und Milchsäure angesäuerten Muskel, verschiebt sich die Kurve (p) nach rechts.

Streben chemische Reaktionen immer monoton einem Gleichgewicht zu? Lange hielt man dies für eine klare Folge des Satzes von der Zunahme der Entropie. Ausnahmen, bei denen sich Konzentrationen und sogar die Farbe von Lösungen periodisch änderten, führte man auf äußere Störungen oder Verfahrensfehler zurück. Erst die **Bjeloussow-Zhabotinski-Reaktion** (BZ-Reaktion) schwingt lange und zuverlässig genug, um die Skeptiker zu überzeugen: Malonsäure $CH_2(COOH)_2$ wird in Gegenwart von Bromat (BrO_3) teils durch CO_2 -Abspaltung zu Ameisensäure $HCOOH$, teils zu Brom-Malonsäure. Anwesende Metallionen wie $Ce^{3+/4+}$ ändern dabei periodisch Wertigkeit und Farbe, oft dramatisch von violett zu gelb oder rot zu blau. Diese Periodizität, die im Reagenzglas nach vielen Minuten erlischt, lässt sich unbegrenzt aufrechterhalten, wenn man immer wieder frische Reaktanten zu- und Produkte abführt. Die Reaktion strebt keinem Fixpunkt zu, sondern einem Grenzzyklus. Inzwischen kennt man Dutzende oszillierende Reaktionen, in denen sich auch verblüffende räumliche Muster entwickeln und verändern. Alle laufen fern vom Gleichgewicht (im Durchflussreaktor) und setzen mindestens eine Rückkopplung (Autokatalyse) voraus. Wir kennen schon eine autokatalytische

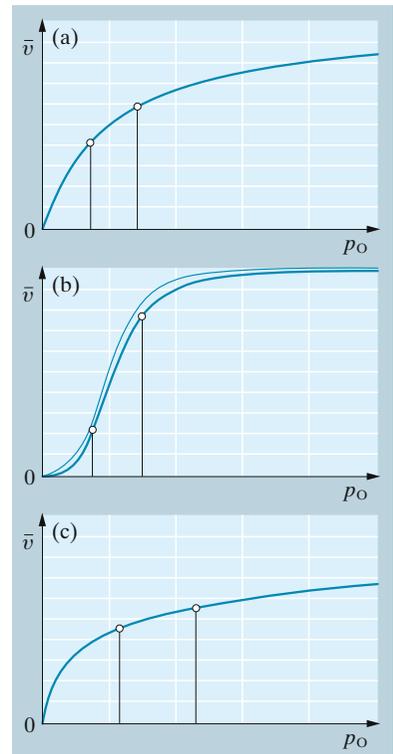


Abb. 20.28a–c. O_2 -Sättigung eines tetrameren Trägers in Abhängigkeit vom O_2 -Partialdruck p_{O_2} nach (20.57) (a) ohne, (b) mit positiver, (c) mit negativer Allosterie. In (b) ist die Näherungskurve (20.58) dünn angegeben. Optimale p_{O_2} -Werte sind eingetragen für den Fall, dass p_{O_2} im Gewebe halb so groß ist wie in der Lunge: Ausnutzung (a) 17%, (b) 55%, (c) 10%

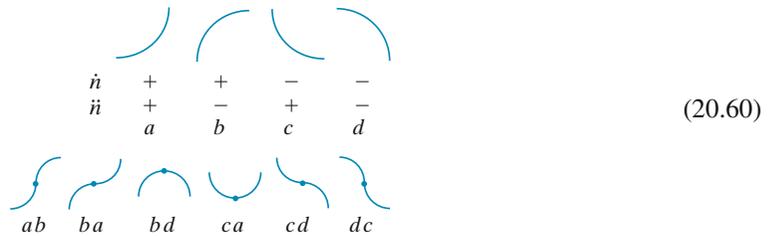
Reaktion, die Lotka-Reaktion (20.55), die zwar Periodik, aber keinen echten Grenzzyklus liefert: Viele zyklische Orbits und damit viele Perioden sind möglich. Das gängige Modell der BZ-Reaktion braucht 21 Substanzen und 18 Reaktionen, die sich mit einiger List auf „nur“ 5 reduzieren lassen. Bestimmt gibt es einen Zusammenhang zwischen solchen Grenzzyklen und den Zeitgebern für die biologischen Uhren der Lebewesen.

Auch die Kinetik von Elektronen und Löchern in Halbleitern stellt nichtlineare Probleme, die fast nie analytisch geschlossen lösbar sind. Wir betrachten das einfache Trapmodell (Abschn. 17.4.2) für einen Photoleiter. Die Gleichungen für Leitungs- und Trap-Elektronen (Teilchenzahldichten n, d) lauten

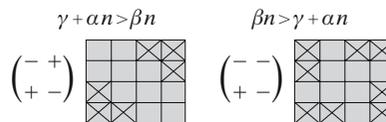
$$\begin{aligned} \dot{n} &= I - \beta n(n+d) - \alpha n(D-d) + \gamma d, \\ \dot{d} &= \alpha n(D-d) - \gamma d. \end{aligned} \tag{20.59}$$

Die Löcherdichte p ist gegeben durch den Erhaltungssatz $p = n + d$. Wie klingt n nach Einschalten des Lichtes an? Man kann solche Fragen numerisch behandeln, aber nur für wenige Sätze von Parametern, deren es hier recht viele gibt. Zur allgemeinen Diskussion bleiben qualitative und halbquantitative Methoden, die auch in vielen anderen Fällen nützlich sind.

Qualitativ: Wenn man nicht den genauen Lösungsverlauf $n(t), d(t)$ wissen will, sondern nur z. B., ob diese Kurven monoton steigen oder ein Extremum oder mehrere haben, genügt es zu wissen, aus welchen der folgenden Kurvenstücke sich $n(t)$ und $d(t)$ zusammensetzen und in welcher Reihenfolge:



Die Vorzeichen in der Systemmatrix (Jacobi-Matrix) geben bereits an, welche Kombinationen von n - und d -Kurvenstücken möglich sind. Unser Trapmodell kann folgende Vorzeichenmatrizen und **Möglichkeitsschemata** haben:



Auf diesen „Spielbrettern“ gelten nun für stetige und stetig differenzierbare Kurven folgende Sprungregeln: Von einem Innenfeld kann man auf beide Randfelder der gleichen Reihe springen, von einem Randfeld nur auf das benachbarte Innenfeld (vgl. (20.60)). Andere Sprünge in den Lösungskurven bedeuten. Sprünge sind auch nur innerhalb der gleichen Reihe möglich; ein Diagonalsprung in einen anderen Quadranten

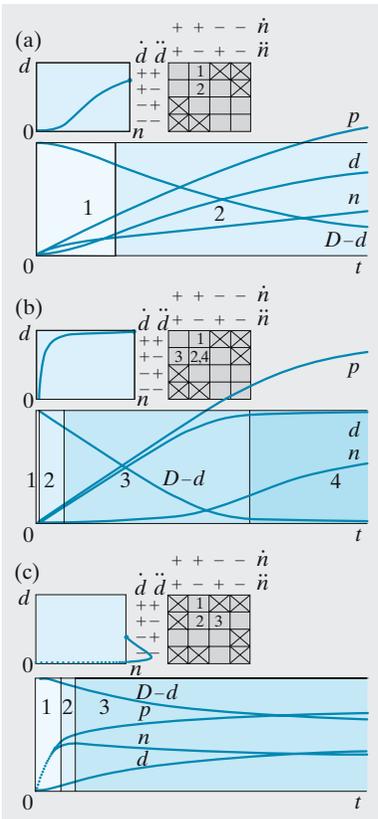


Abb. 20.29a–c. Anklingen der Photoleitung im Trapmodell (20.59). Unten: $n(t), d(t), p(t), D-d(t)$. Links oben: Phasendiagramm $d(n)$. Rechts oben: Zugehöriges Möglichkeitsschema; die Folge der Kurvenabschnitte (s. auch unten) ist hier eingetragen. (a) n klingt konvex an; (b) n steigt erst nach einem Anfangsplateau richtig an; (c) $n(t)$ durchläuft ein Maximum

z. B. würde $\dot{n} = \dot{d} = 0$, also Stationarität bedeuten. Es folgt z. B., dass das Anklingen im Trapmodell bei $\gamma + \alpha n > \beta n$ immer monoton verläuft, aber vielleicht über Zwischenplateaus; im anderen Fall kann ein Maximum auftreten, aber keine Plateaus im Anstieg. Numerische Rechnung und Experiment bestätigen das (Abb. 20.29). Für das Lotka-Volterra-Modell (20.55) erkennt man so sehr schnell, dass nur zyklische, keine stationär werdenden Lösungen möglich sind.

Halbquantitative Näherungslösungen erhält man, wenn man die konkurrierenden Glieder in n und d geschickt vergleicht und immer nur so viele beibehält, dass sich das reduzierte System leicht lösen lässt. Diese Teillösungen muss man dann passend zusammennähen. Für das Trapmodell empfiehlt sich folgende Fallunterscheidung, numerisch codiert:

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} 1 \cdots & d \ll D \\ 2 & \approx \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \cdots & n \gg d \\ 2 & d \gg n \end{matrix} \\ & \cdots \begin{matrix} 1 \cdots & \gamma d \ll \alpha n(D-d) \\ 2 & \approx \end{matrix} & \cdots \begin{matrix} 1 \cdots & \beta n p \ll I \\ 2 & \approx \end{matrix} \end{aligned} \tag{20.61}$$

Sie können die Teillösungen selbst zusammenfügen und die etwas mühsamen Fallunterscheidungen treffen.

20.4 Chaos und Ordnung

20.4.1 Einfache Wege ins Chaos

Die lineare Abbildung $x \leftarrow ax$ mit $a > 1$ treibt den Punkt x natürlich ins Unendliche. Wir sperren ihn im Bereich $(0,1)$ ein, indem wir die Gerade ax ab $x = \frac{1}{2}$ symmetrisch zurückknicken: $x \leftarrow a(1 - 2|\frac{1}{2} - x|)$. Ein Fixpunkt liegt immer bei $x_1 = 0$. Für $a > 1$ gibt es einen zweiten bei $x_2 = 2a/(1 + 2a)$. Da $f'(0) = a$, ist x_1 stabil für $a < 1$ und wird instabil ab $a = 1$, ohne dass x_2 dann stabil wird, denn das Dreieck ist auch dort steiler als 45° . Wie die Simulation zeigt, bricht ab $a = 1$ unvermittelt Chaos aus. (Dicht darüber ergeben sich zwei so enge chaotische Bänder, dass man bei ungenauem Plotten fast an Periodizität glaubt; Abb. 20.30.)

Noch interessanter ist es, den Punkt dadurch einzusperren, dass man z. B. mit $x < 1$ beginnt, bei jedem Schritt x verdoppelt, aber die 1 vor dem Komma streicht, sobald sie entsteht: $x \leftarrow 2x \pmod 1$ oder $x \leftarrow 2x - f(2x)$. Man kann auch an Winkel denken ($\text{mod } 360^\circ$) oder eine Uhr ($\text{mod } 12$), wobei z. B. 7^{h} in 2^{h} , 9^{h} in 6^{h} übergeht. Graphisch hat man einfach die rechte Flanke des Dreiecks von vornhin umgedreht (Abb. 20.31). Beide Fixpunkte 0 und 1 sind offenbar instabil (Steigung 2). Schreibt man x als Binärbruch, so besteht die Abbildung darin, dass man die Ziffern um eine Stelle nach links rückt und die evtl. vor dem Komma erscheinende 1 streicht. Man sieht, dass das Verhalten von x empfindlich vom Anfangswert abhängt und unvorhersagbar ist: Angenommen, dieser war auf n Binärstellen genau bekannt. Nach n Schritten ist eine anfangs völlig unbekanntes Ziffernfolge gleich hinter das Komma gerutscht. Bei einem in dieser Ge-

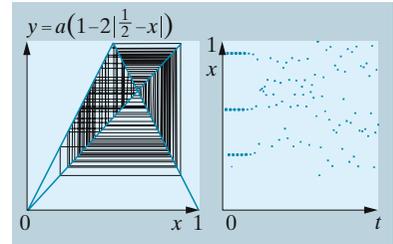


Abb. 20.30. Dreiecksdynamik $x \leftarrow a(1 - 2|\frac{1}{2} - x|)$, in double precision (16 Dezimalstellen) gerechnet. Die durch passende Wahl des Startwertes erzielte Periodizität explodiert sehr bald ins Chaos (die ersten 15 Schritte dick hervorgehoben); dies Chaos ist der Normalfall für $a > 1$

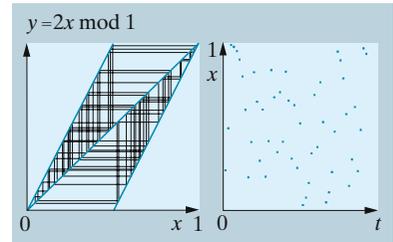


Abb. 20.31. Kreisdynamik $x \leftarrow 2x \pmod 1$, in double precision gerechnet. Wissen Sie, warum nur 50 Schritte eingetragen sind? Was würde danach passieren? Beachten Sie auch die Details!

nauigkeit unmerklich verschiedenen Anfangswert wären es ganz andere Ziffern. Die ursprüngliche Information ist ganz verloren.

✘ Beispiel . . .

Was hat die „Kreisdynamik“ $x \leftarrow 2x - f(2x)$ mit der Iteration $z \leftarrow z^2$ im Komplexen zu tun?

Auf dem Einheitskreis bedeutet $z \leftarrow z^2$ einfach: Verdopple den Winkel, denn $z = e^{i\varphi} \leftarrow z^2 = e^{2i\varphi}$.

In fast allen Binär- oder auch Dezimalzahlen kommt jede beliebige Ziffernfolge unendlich oft vor (Aufgabe 20.4.2). Das bedeutet: Unser Punkt besucht jedes Teilintervall des Bereichs $(0, 1)$, wie klein es auch sei, immer wieder, unendlich oft. Nach unendlich vielen Schritten ist der Bereich dicht erfüllt. Man nennt dieses Verhalten **ergodisch**. Es ist ebenfalls typisch für das Chaos, aber auch für andere Systeme in der statistischen Physik, d. h. für echte Zufallsprozesse.

Wir suchen ein Maß für die empfindliche Abhängigkeit von den Anfangswerten in einer diskreten Dynamik $x \leftarrow f(x)$. Eine Trajektorie beginne mit x_0 , die andere mit $x_0 + dx$. Der erste Schritt bringt die erste nach $f(x_0)$, die andere nach $f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0) dx$. Der Abstand hat sich um den Faktor $f'(x_0)$ geändert. Das führt einerseits wieder auf unser Stabilitätskriterium $|f'| < 1$. Andererseits können wir die Trajektorien über n Schritte weiterverfolgen: Zum Schluss ist der Abstand auf dx -mal dem Produkt aller $f'(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ an- oder abgeschwollen. Da wir exponentielles An- oder Abschwollen erwarten, setzen wir dies gleich e^{nL} :

$$e^{nL} = \prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)|. \quad (20.62)$$

Den **Ljapunow-Exponenten** L befreien wir durch Logarithmieren:

$$L = \text{Mittelwert der } \ln |f'| \text{ über die ganze Trajektorie} \\ \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (20.62')$$

$L > 0$ bedeutet Chaos, $L < 0$ Zusammenlaufen der Trajektorien. Die Dreiecks- und die Kreisdynamik (S. 1089) haben $L = \ln a$ bzw. $L = \ln 2$.

Wenn man den jetzigen Zustand eines nichtchaotischen Systems kennt, weiß man auch, was es in aller Zukunft machen wird, mit einer Genauigkeit ähnlich der, die für die Anfangswerte galt. Bei chaotischem Verhalten geht bei jedem Schritt etwas von der Anfangsinformation verloren, bis sehr bald nichts mehr davon da ist. In der Kreisdynamik $x \leftarrow 2x \bmod 1$ z. B. verschwindet bei jedem Schritt genau eine der n ursprünglich bekannten Binärziffern, also ein bit von n . Man kann leicht verallgemeinern, z. B. wenn die Abbildung eine Multiplikation mit $a = f'$ enthält und die Stellen vor dem Komma wieder gestrichen werden: **Informationsverlust** $\text{ld } f'$ bits ($\text{ld} = \text{Logarithmus zur Basis 2}$). Der Mittelwert dieses Verlustes unterscheidet sich vom Ljapunow-Exponenten nur um den Faktor $\ln 2 = 0,693$. Information und Entropie sind eng verwandt (Kap. 19):

Informationsverlust bedeutet eine dazu proportionale Entropiezunahme. x -Punkte, die anfangs in einem engen Intervall zusammenlagen, breiten sich bald über den ganzen verfügbaren Bereich aus, wie Gasmoleküle. Ordnung verschwindet, aber hier völlig deterministisch, nicht wie beim Gas stochastisch, zufällig, nur in Richtung auf den wahrscheinlicheren Zustand.

20.4.2 Chaos und Fraktale

Das Wetter ist das bekannteste Beispiel für **deterministisches Chaos**, wo trotz strenger Abhängigkeit des Folgezustandes vom vorhergehenden keine langfristige Vorhersage möglich ist, wo man also wie in (20.31) für $a < 3,57$ das Ergebnis jedes Einzelschritts angeben kann, aber kein geschlossenes Gesetz, das die ganze Zukunft umfasst. Notwendige Voraussetzung hierfür ist Nichtlinearität der Dynamik und sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen; winzige Änderungen in diesen müssen also sehr schnell (meist exponentiell) anschwellen, bis die entsprechenden Trajektorien weit auseinander gelaufen sind. Auch dann könnten sie ja schließlich noch in einen gemeinsamen Fixpunkt oder Grenzyklus münden. Chaos liegt vor, wenn das Phasenporträt keinen solchen gewöhnlichen Attraktor enthält, sondern einen seltsamen-Attraktor von zunächst undurchschaubar komplizierter Form, wie Abb. 3.74 ihn für eine ganz einfache diskrete zweikomponentige Dynamik zeigt.

Die herkömmliche Geometrie, auch die analytische, ist gegenüber solchen Gebilden allerdings hilflos, wie übrigens auch gegenüber den meisten natürlichen Strukturen: „Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel.“ Wie lang ist die Küste Italiens? Das Ergebnis hängt ganz davon ab, auf einer Karte welchen Maßstabs man diese Linie entlangfährt, oder ob man es zu Fuß tut. Je größer der Maßstab, desto mehr Buchten und Vorsprünge erscheinen, die vorher gar nicht erkennbar waren. Küsten und viele andere Naturgebilde sind **selbstähnlich** oder **skaleninvariant**: Ein vergrößerter Ausschnitt sieht im Prinzip ganz ähnlich aus wie das Ganze. Wenn das der Fall ist, steigert z. B. jede Verzehnfachung des Maßstabes m die gemessene Länge $l(m)$ nicht auf das Zehnfache, sondern um einen konstanten Faktor $f > 10$, d. h. $l(m) \sim m^D$, wobei im Beispiel $D = \log f$ ist. Bei einer Geraden oder glatten Kurve ist natürlich $f = 10$, $D = 1$. Bei der Fläche Italiens ist das anders: Man schneide sie aus der Karte aus und lege sie auf die Waage, die $A(m) \sim m^2$, also $D = 2$ liefert. Ein massives räumliches Gebilde liefert $D = 3$. Das rechtfertigt, D allgemein als **Hausdorff-Dimension** zu bezeichnen. Bei selbstähnlichen Gebilden ist D i. Allg. ein (meist unendlicher) Dezimalbruch (fraction), und solche Gebilde heißen **Fraktale**.

Seltsame Attraktoren von chaotischen Systemen, im Phasenraum dargestellt, sind fraktale Gebilde. Ein vergrößerter Ausschnitt zeigt immer neue Details, sieht aber im Ganzen ziemlich aus wie das Original. Solche Gebilde sind skaleninvariant. Das ist z. B. der Fall für das Feigenbaum-Szenario mit einer Kaskade von Periodenverdopplungen: Vergrößert man einen Zweig aus Abb. 20.20, sieht er genauso seelilienhaft aus wie das ganze Bild. Auch im chaotischen Teil verstecken sich zahllose winzige Seelilien ähnlicher Struktur.

Eine diskrete Dynamik kann schon bei einer Komponente einen chaotischen, seltsamen Attraktor haben (z. B. die logistische Gleichung (20.31)), erst recht bei zweien (Abb. 3.74). Im stetigen Fall kann dies nach dem **Satz von Poincaré-Bendixson** erst ab drei Komponenten vorkommen. Das erste und bekannteste Beispiel ist der Attraktor von *E. Lorenz*, dessen Dynamik eine aufs Äußerste vereinfachte Beschreibung der atmosphärischen Konvektion geben sollte (Abschn. 20.4.4).

Wenn ein System mehrere Fixpunkte hat, sind deren Einzugsgebiete keineswegs immer einfach zusammenhängend, sondern haben oft fraktale Struktur. Wir fassen x und y zum komplexen $z = x + iy$ zusammen und studieren z. B. die Abbildung

$$z \leftarrow z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3z^2}. \quad (20.63)$$

Die Fixpunkte sind die Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$, d. h. die Punkte $(1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$. Die Abbildung stellt die Iteration dar, mit der man nach *Newton* diese Lösungen bestimmt: Um $x = f(x)$ zu lösen, rechnet man zum Schätzwert x_1 zunächst $f(x_1)$ aus und korrigiert x_1 , indem man $f(x_1)/f'(x_1)$ davon abzieht. Unsere Iteration (20.63) liefert ganz kompliziert verwobene Einzugsgebiete (Abb. 20.36). Die Selbstähnlichkeit dieser „Zöpfe“ springt in die Augen. Die Grenzen zwischen verschiedenen Einzugsgebieten heißen **Julia-Mengen**. Ein Punkt, der auf einer Julia-Menge beginnt, kann sich nicht entscheiden, zu welchem Fixpunkt er hinspringt, sondern bewegt sich chaotisch. Julia-Mengen sind seltsame Attraktoren für die inverse Iteration $z \rightarrow f^{-1}(z)$. Für die Praxis der numerischen Rechnung heißt das, dass man oft schwer voraussagen kann, welche von mehreren Lösungen einer Gleichung man durch solch ein Iterationsverfahren finden wird: Selbst wenn der Ausgangswert nahe an einer Lösung liegt, kann eine ganz andere schließlich herauskommen.

Ein Punkt einer Julia-Menge bleibt immer in dieser; er darf ja definitionsgemäß keinem Fixpunkt zustreben. Betrachtet man auch das Unendliche als Attraktor, dann bildet die Berandung von dessen Einzugsgebiet eine spezielle Julia-Menge. Von den einzelnen Punkten dieses Einzugsgebietes aus wandert man verschieden schnell ins Unendliche davon. Koloriert man die Punkte verschieden, je nach ihrer Entweichgeschwindigkeit, erhält man auch fraktale Strukturen von unglaublicher Kompliziertheit und Schönheit. Die bekannteste ist das „Apfelmännchen“, das *Mandelbrot* zuerst konstruiert hat. Ihm liegt die komplexe Abbildung $z \rightarrow z^2 + c$ zugrunde: Schwarze c -Punkte verschwinden überhaupt nicht ins Unendliche, die anders gefärbten tun es verschieden schnell. Hinter der Struktur, die sich auf der reellen Achse bildet, steckt wieder einmal die logistische Gleichung $x \rightarrow ax(1-x)$.

Dies war das Bild in der c -Ebene (genauer diskutiert in Abschn. 20.4.3). Anders in der z -Ebene: Für einen festen Wert c gibt es zwei Sorten von Ausgangspunkten z . Für die einen strebt die Iteration $z \rightarrow z^2 + c$ gegen einen Fixpunkt oder ins Unendliche, für die anderen kann er sich nicht dazu entschließen. Die letztgenannten Punkte bilden die Julia-Menge zum Wert c . Wenn die Iteration $z \rightarrow z^2 + c$ so alle Punkte von der Julia-Menge

wegtreibt (außer denen, die direkt in dieser Menge liegen), muss die inverse Iteration $z \rightarrow \sqrt{z-c}$ sie genau dorthin treiben. So kann man das Bild dieser Menge sehr schnell generieren mit folgender Methode, die auch sonst sehr nützlich und elegant ist.

Ein Bild digital zu codieren, damit es z. B. auf dem Bildschirm entstehen kann, kostet sehr viel Information. Im schlimmsten Fall muss man jedem Bildpunkt (Pixel) eine Graustufe und einen Farbwert zuordnen. Selbst bei Schwarz-Weiß-Bildern ohne Graustufen verlangt jedes Pixel ein bit, das ganze Bild also einige 10^5 bits. Viel ökonomischer kann man codieren, wenn das Bild fraktal, selbstähnlich ist, wie bei vielen Naturobjekten. Schneidet man davon einen Teil ab, bleibt ein verkleinerter, vielleicht etwas verdrehter Rest übrig. Auch alle anderen Details sind dann kleine verdrehte, verschobene, evtl. verzerrte Kopien des Ganzen. Solche Kopien kann man durch eine **affine Transformation** des Originals erzeugen: $x \rightarrow Ax + b$; die Matrix A dreht, ändert den Maßstab und verzerrt linear, der Vektor b verschiebt. Mit wenigen (n) Kopien kann man meist alle wesentlichen Details der Struktur erfassen; deren $6n$ Konstanten sind eine riesige Ersparnis gegenüber der Codierung Pixel für Pixel (Abb. 20.32).

Bei der Bildkonstruktion könnte man von einer beliebigen Figur ausgehen, diese den n Transformationen unterwerfen, das aus den n Kopien überlagerte Bild nochmals transformieren usw. Sehr bald würde aber die exponentiell wachsende Zahl der Bildpunkte alle Speicher- und Rechenkapazitäten überschreiten. Erstaunlicherweise kommt schließlich genau dieselbe Grenzstruktur als seltsamer Attraktor heraus, wenn man von einem einzigen beliebigen Punkt ausgeht und auf ihn eine *zufällige Folge* der n Transformationen anwendet. Nach kurzem Einschwingen entwickelt sich erst schattenhaft, dann immer genauer und detailreicher die Grenzstruktur – ein geradezu magisch anmutender Vorgang. Soviel kann man schon mit affinen, also linearen Transformationen ausrichten. Nichtlineare sind noch viel flexibler. Vielleicht ist das Programm der Keimesentwicklung und des Wachstums im Genom der Lebewesen auf ähnliche Weise codiert.

Nun wieder zur Konstruktion der Julia-Mengen für $z \rightarrow z^2 + c$. Man erhält sie durch die Inversion $z \rightarrow \pm\sqrt{z-c}$, ausführlich geschrieben

$$x \rightarrow \pm\sqrt{(|z|+x-a)/2}, \quad y \rightarrow \pm\sqrt{(|z|-x+a)/2} \quad (20.64)$$

$$\text{mit } z = x + iy, \quad c = a + ib,$$

wobei die beiden Vorzeichen als verschiedene Abbildungen aufzufassen sind, die man im zufälligen Wechsel auf ein beliebiges Anfangs- z anwendet. Bei $y > b$ wähle man gleiche Vorzeichen dieser Wurzeln, bei $y < b$ verschiedene.

Für manche c -Werte ergibt sich ein zusammenhängendes Bild in Form einer Girlandenschnur (für reelle c symmetrisch zu den Achsen). Andere c -Werte liefern verstreute Flecken von komplizierter Struktur, die sich bei der Vergrößerung wieder in eine Art Cantor-Staub aus kleineren unzusammenhängenden Flecken auflösen. Es stellt sich heraus, dass genau jeder c -Wert aus der Mandelbrot-Menge, für die der Wert z bei der Itera-

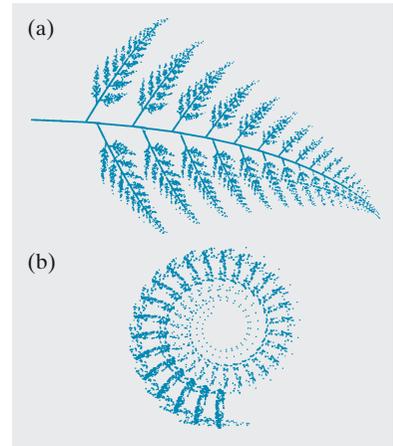


Abb. 20.32a,b. Dieser Farnwedel entsteht durch eine Zufallsfolge von vier affinen Abbildungen eines beliebigen Startpunktes (vgl. Aufgabe 20.4.9). Bei dem Ammoniten sieht man besser, wie die Sache funktioniert: Er ist aus lauter punktierten Ellipsen zusammengesetzt

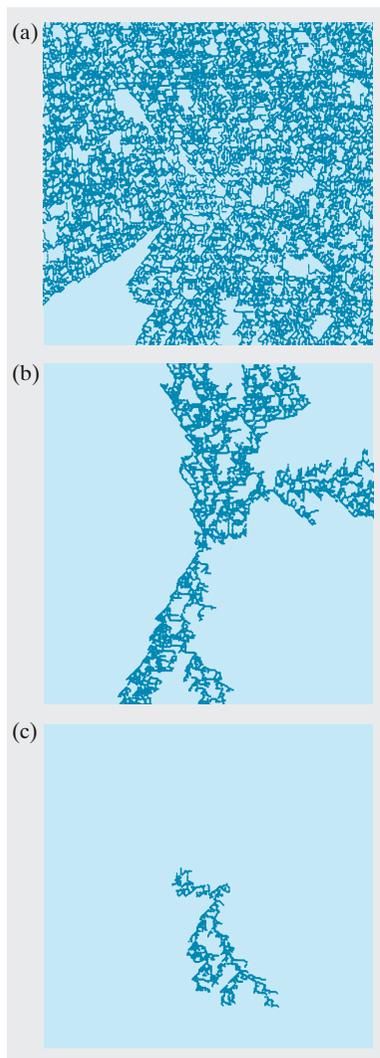


Abb. 20.33a–c. Fraktales Wachstum: Wenn Teilchen auf einer Zufallsbewegung um einen Keim herum auf diesen stoßen, lagern sie sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit an. Deren Wert (von Bild zu Bild nur 5% verschieden) entscheidet u. A. zwischen Aussterben und Weiterwachsen bis zum Rand. Die Struktur sieht nur deshalb etwas anders aus als Eisblumen am Fenster, weil denen das hexagonale Muster des Eiskristalls, diesen Bildern aber das quadratische des Bildschirms zugrunde liegt

tion $z \rightarrow z^2 + c$ nicht ins Unendliche entweicht, eine zusammenhängende Julia-Menge liefert. Für diese c , für die die Iteration konvergiert, gibt es ja einen stabilen Attraktor in Gestalt eines oder endlich vieler im Endlichen liegender Fixpunkte. Der Einzugsbereich dieses Attraktors muss allerdings eine zusammenhängende, wenn auch sicher fraktale Begrenzung haben, nämlich die Julia-Menge, zu denen ein seltsamer oder im Unendlichen liegender Attraktor gehört, sind dieser Beschränkung nicht unterworfen. Je mehr sich c dem Rand der Mandelbrot-Menge nähert, desto zerfaserter wird die Julia-Menge, desto kleiner wird das Einzugsgebiet der endlichen Fixpunkte, das sie einschließt, desto kleiner wird auch die fraktale Dimension dieses Einzugsgebietes. Kein Wunder, dass jenseits der Grenze der Mandelbrot-Menge die Julia-Menge ganz auseinander fällt in Sternhaufen, umgeben scheinbar von Einzelsternen, die sich in der Vergrößerung aber auch wieder in Sternsysteme auflösen. Dort muss sie die winzigen Bereiche (die Mikro-Apfelmännchen) umgrenzen, in denen ein endlicher Fixpunkt existiert und die überall in der Gegend verstreut sitzen, kleiner und kleiner. Kein Wunder also auch, dass die Julia-Menge bei genügender Vergrößerung fast genau dieselbe Struktur enthüllt wie die Mandelbrot-Menge. Alle diese Tatsachen, die wir heute so mühsam mit dem PC nachvollziehen, leitete *Gaston Julia* im Kriegslazarett 1918 her, nur mit Papier und Bleistift.

Wenn Sie über eine Videokamera verfügen, schließen Sie sie an Ihren Monitor und richten sie auf dessen Bildschirm, wobei Sie sie etwas seitlich kippen oder sogar auf den Kopf stellen. Verwenden Sie aber kein zu perfektes Video-Kabel (Grund: Aufgabe 19.4.23). Sie werden staunen, was da passiert (notfalls zünden Sie, indem sie eine Lampe oder ein brennendes Zündholz dazwischenhalten; meist genügt die Hand). Sowie Sie einen der Parameter Kippwinkel, Blende, Entfernung usw. verstellen, ändert sich die Erscheinung vollkommen. Natürlich handelt es sich bei dieser **Video-Rückkopplung** wieder um eine iterierte Abbildung. Sie schauen vielleicht zuerst in einen unendlichen Gang mit wendeltreppenartig verwundenen Wänden. Dieses Bild kann konstant sein (Fixpunkt der Iteration), aber bei Änderung eines Parameters geht es in eine periodische Bilderfolge (einen Grenzyklus) über, und schließlich flackert es unvorhersagbar, chaotisch.

Fraktales Wachstum: Wie ein Festkörper aus der Schmelze, einem übersättigten Dampf oder einer Lösung, allgemein aus der dispersen Phase wächst, hängt ganz von den Umständen ab. Jedenfalls lagern sich Einzelteilchen an den bestehenden Keim an. Nahe am thermodynamischen Gleichgewicht, wo die Gibbs-Potentiale G drinnen und draußen fast gleich sind, ist die Ablösung von Teilchen fast ebenso häufig wie die Anlagerung. Ein Teilchen bleibt vorzugsweise dort endgültig haften, wo es mehr Bindungen an vorhandene Teilchen betätigen, mehr Bindungsenergie einbringen kann als im Durchschnitt möglich ist. Dies ist rein geometrisch in den Halbkristallagen der Fall (Abb. 17.26). So komplettieren sich immer vorzugsweise glatte Netzebenen, und der Kristall erhält seine regelmäßige, kompakte Form.

Ganz anders fern vom Gleichgewicht (Abb. 20.33). Ist G für die disperse Phase sehr viel größer (hohe Übersättigung), bleiben die Teilchen fast immer dort kleben, wo sie sich zufällig angelagert haben. Das ist vorzugsweise an Vorsprüngen des festen Keimes der Fall. Man versteht das schon rein geometrisch, genauer aber so: Die Anlagerung kann begrenzt sein entweder durch die Diffusion, d. h. einen Konzentrationsgradienten, oder dadurch, dass die Kondensationswärme von der Wachstumsfläche abgeführt werden muss, wofür ein Temperaturgradient sorgen muss. In beiden Fällen handelt es sich um das Feld einer Größe, die einem Erhaltungssatz, also dem Satz von *Gauß-Ostrogradski* und damit bei Quellenfreiheit der Laplace-Gleichung gehorcht: Skalarfeld $T(\mathbf{r})$ bzw. $n(\mathbf{r})$, verbunden mit dem Vektorfeld $\mathbf{j} = -\lambda \text{ grad } T$ bzw. $\mathbf{j} = -D \text{ grad } n$. Legen Sie ein schweres Objekt auf eine Gummimembran. Die Gefahr, dass diese reißt, ist am größten an spitzen Vorsprüngen, denn dort entsteht die größte Spannung. Auch die Tiefe der Ausbeulung $h(\mathbf{r})$ und die Spannung σ , zumindest ihre senkrechte Komponente, gehorchen ja den genannten Sätzen (*Gauß* = Gleichgewichtsbedingung): An den Vorsprüngen drängen sich die Feldlinien enger und führen im elektrischen Fall zur Spitzenentladung, den **Lichtenberg-** oder den **Kirlian-Figuren**, bei der Kristallisation zum bevorzugten Wachstum der Vorsprünge. So entstehen vielfach verzweigte Äste, deren Geometrie sich nur fraktal beschreiben lässt. Ihre Hausdorff-Dimension liegt zwischen 2 und 3, meist um 2,5; erzeugt man ein solches Fraktal auf der Ebene des Computer-Bildschirms, liegt die Dimension um 1,5. Auch amorphe Festkörper wachsen so. Bei richtigen Kristallen prägt sich außer dieser Zufallsanlagerung oft auch die Kristallstruktur aus. So wächst die **Schneeflocke** vorzugsweise senkrecht zur c -Achse (zwei Bindungsstellen statt nur einer für eine neu zu schaffende Ebene in c -Richtung), wobei die Arme des Sechssterns mehr oder weniger genau die hexagonale Symmetrie spiegeln. Außerdem kommt es darauf an, ob das Wachsen durch Diffusion oder durch Wärmeabfuhr begrenzt war. Im ersten Fall ist die Flocke meist zerfasert wie in Abb. 20.33, im zweiten erkennt man in der Gesamtkontur jedes Armes oft deutlich die Parabel, die auch beim Wachsen der Eisschicht auf dem See auftritt (Aufgabe 5.6.13).

Als *Percolation* bezeichnet man das Durchsickern von Wasser durch den Erdboden oder durch Kaffeepulver (percolator = Kaffeemaschine), aber auch des Stromes oder des elektrischen Feldes durch ein inhomogenes Haufwerk von Teilchen verschiedener Leitfähigkeit bzw. Dielektrizitätskonstante (DK; Abb. 20.34). Widerstand oder DK eines solchen Leiters, die mechanische Festigkeit eines solchen Haufwerks, seine Transmission für irgendeine Strahlung, auch die Ausbreitung eines Waldbrandes oder die Frage, ob ein Telefonnetz mit Unterbrechungen noch Kommunikation übertragen kann, all dies hängt sehr empfindlich vom Mischungsverhältnis der Komponenten hart-weich, heil-kaputt, Baum-Zwischenraum usw. ab (Aufgabe 10.3.3, 6.2.5). Im Extremfall ergibt sich eine steile Stufe z. B. zwischen isolierend und leitend bei einem Mischungsverhältnis in der Nähe von 0,5. Die genaue Lage dieser Stufe hängt von der Form der Teilchen ab, ihre Breite ist dagegen vielfach eine universelle Größe.

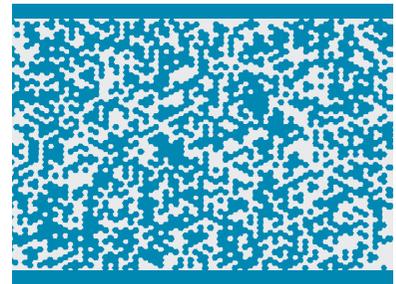


Abb. 20.34. Zufallsmuster aus gleichen Anzahlen blauer und weißer Kacheln. Wenn das ein von Motten angefressener Stoff ist, hält er noch irgendwie zusammen? Wenn die blauen Kacheln leiten, die weißen isolieren, leitet das Ganze?

20.4.3 Iteratives Gleichungslösen

Tartaglia, Cardano, Ferrari und Ferro fanden schon um 1500 nach Vorarbeiten von *Omar Chayyam* und *Ibn al Haitham* (um 1100) Lösungsformeln für Gleichungen 3. und 4. Grades (und stahlen einander diese Entdeckungen). Trotz ihrer geschlossenen Form sind diese Formeln sehr mühsam auszuwerten. Algebraische Gleichungen höheren Grades oder gar transzendente wie $x = e^{-x}$ sind nur noch in Spezialfällen geschlossen lösbar. Man löst sie graphisch (mit sehr beschränkter Genauigkeit) oder numerisch, iterativ, mit beliebiger Genauigkeit, aber immer nur für bestimmte Parameterwerte. *Newton* formulierte das graphisch sehr einsichtig: Um $f(x) = 0$ zu lösen, verfolge man vom Näherungswert x_n aus die dort angelegte Tangente an die $f(x)$ -Kurve bis zur x -Achse, die sie bei

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (20.65)$$

schneidet. Die Lösung x_∞ ist natürlich ein Fixpunkt der Iteration. Seine Stabilität, also die Konvergenz des Verfahrens folgt aus der Ableitung ff''/f'^2 der rechten Seite, was identisch Null ist, außer bei $f' = 0$: Die Tangente in einem Extremum kann ja nicht zur Lösung hinführen.

Newtons Iteration ist nicht die einzig mögliche zur Lösung von $f(x) = 0$. Man kann einfach irgendein x aus $f(x)$ auf die andere Seite bringen, z. B. statt $a e^{-x} - x = 0$ schreiben $x \rightarrow a e^{-x}$. Wenn dem Fixpunkt x^* der Iteration $x \rightarrow g(x)$ die Stabilität verloren geht, also $g'(x^*) > 1$ ist, kann man die Konvergenz einfach retten, indem man die Umkehrfunktion benutzt und mit $x \rightarrow g^{-1}(x)$ abbildet, denn die Ableitung von g^{-1} ist das Reziproke von g' , und eine dieser beiden ist sicher < 1 . Komplexe Lösungen kann man allerdings so nicht finden. Sie deuten sich im Graphen der Funktion $f(x)$ mit reellem x in keiner Weise an. Von ihrer Existenz erfährt man überhaupt erst z. B. durch den Fundamentalsatz der Algebra, nach dem jede algebraische Gleichung k -ten Grades genau k Lösungen hat. Die im Reellen fehlenden müssen komplex sein. Um sie zu finden, muss man in der komplexen Ebene iterieren. Für die Gleichung $z^3 = 1$, also die dritten Einheitswurzeln, lautet das Newton-Verfahren $z \rightarrow z - (z^3 - 1)/(3z^2) = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}z^{-2}$. Für den Computer muss man dies in Real- und Imaginärteil zerlegen. Das Ergebnis, ausgehend von verschiedenen Punkten der komplexen Ebene, ist verblüffend: Durchaus nicht immer wandert der Punkt zur nächstgelegenen Einheitswurzel hin, sondern er tut das oft auf ganz abenteuerlich verschlungenen Wegen. Für ganz nahe benachbarte Ausgangspunkte führen diese Wege manchmal weit auseinander zu verschiedenen Fixpunkten. Trilobitenähnliche Wesen scheinen von sechs Seiten auf weit entfernte Punkte zuzukriechen, jeder Trilobit ist wie bei *Escher* von kleineren Trilobiten umgeben (seine „Augen“ sind auch welche), die zu seinem Schwanz hinwollen, usw. ad infinitum (Abb. 20.36). Von einem Punkt auf der Grenzkurve zwischen diesen Einzugsbecken ausgehend, kann man sich definitionsgemäß für keinen der drei Fixpunkte entscheiden, man bleibt ewig auf dieser Grenzkurve; kein Wunder, denn schon ein in einem endlichen Bereich liegendes Stück von ihr hat unendliche Länge wie die Koch-Kurve (infolge der endlosen Staffelnung von

immer kleineren Trilobiten-Warzen). Natürlich hat sie daher eine fraktale Dimension > 1 , und erwartungsgemäß ist die Bewegung auf ihr chaotisch. Entsprechendes gilt für alle Punktmenge dieser Art, die Julia-Mengen.

Wir hätten die komplexe Ebene auch anders kolorieren können, nämlich je nach der Anzahl der Iterationsschritte, die entweder ins Unendliche oder in einen der Fixpunkte führen. Ähnlich entsteht *Mandelbrots* berühmtes **Apfelmännchen**, nämlich aus der Iteration $z \rightarrow z^2 + c$. Punkte c in der komplexen Ebene, für die dies konvergiert, werden schwarz (das Innere der großen und kleinen Äpfel); außerhalb davon richtet sich die Farbe danach, wie schnell z gegen ∞ geht, rechenpraktisch, nach wie vielen Schritten es eine vorgegebene Absolutschranke überschreitet. Wie ist z. B. der große Apfel begrenzt? Es ist der Bereich mit dem stabilen Fixpunkt $z^* = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}$, auf den die Iteration ohne Zögern zustrebt. Seine Grenze liegt da, wo $|f'(z^*)| = |1 \pm \sqrt{1-4c}| = 1$ ist. Man kann dies als Ljapunow-Exponenten auffassen oder als Eigenwert der Jacobi-Matrix. Nennen wir $\sqrt{1-4c} = w$; dann stellt $|1 \pm w| = 1$ in der w -Ebene einen Kreis mit dem Radius 1 um $(1, 0)$ oder $(-1, 0)$ dar: $w = \pm 1 + e^{i\varphi}$. Damit wird $c = \frac{1}{4}(1-w^2) = \frac{1}{4}e^{i\varphi}(2-e^{i\varphi})$. Das ist eine **Epizykloide**, die Spur eines Punktes auf der Felge eines Rades, das auf einem gleich großen außen abrollt, ähnlich wie die **Brennlinie** in einem Zylinderspiegel (Aufgabe 9.1.8, Aufgabe 20.4.11). Der kleine Kreis, der links auf dem großen Apfel aufsitzt, ist sogar leichter zu beschreiben. Er ist der Bereich mit der Zweierperiode. Man braucht nur die Bedingung $f^{2'}(z_2) = f'(z_2)f'(z_3) = 1$ ins Komplexe zu übersetzen: $|4z_2z_3| = |4(1+c)| = 1$ (Aufgabe 20.4.3): Kreis um $(-1, 0)$ mit dem Radius $\frac{1}{4}$. Die weiter links folgenden immer kleiner werdenden Kreise entsprechen den Vierer-, Achter-, ...-Perioden, dann folgt auch auf der reellen Achse ein chaotischer Bereich. Das ganze Szenario (im Reellen studiert in Aufgabe 20.4.3) lässt sich in das der logistischen Gleichung übersetzen mittels $x = \frac{1}{2} - z/c$, $c = r/2 - r^2/4$. Chaos tritt also ein bei $c = -1,440\ 115\ 5$. Dort und außerhalb der reellen Achse näher am Nullpunkt springt der Iterationspunkt z ziellos, bis er die vorgegebene Grenze überschreitet, und wird entsprechend dieser Schrittzahl koloriert. Überall in der Ebene sind schwarze Äpfelchen verstreut; sie entsprechen periodischen Einsprengeln im Chaos.

20.4.4 Chaos im Kochtopf

Lange glaubte man, Satelliten und Computer würden eine viel sicherere und längerfristige Wetterprognose ermöglichen, die einen, indem sie den momentanen Zustand der Erdatmosphäre erfassen, die anderen, indem sie dessen weitere Entwicklung berechnen. Radiohörer haben empirischen, Mathematiker theoretischen Grund zur Skepsis. Wer will auch nur voraussagen, wie das Wasser im Kochtopf in der nächsten Minute wirbelt? An einigen Stellen quillt es hoch, an anderen sinkt es wieder ab, manchmal in einem ganz einfachen Muster lang gestreckter Rollen, gerade oder ringförmig, je nach der Form des Topfes.

Im Wasser des von unten geheizten Topfes fällt die Temperatur T im Mittel linear nach oben ab. Wäre dieser Gradient überall gleich, könnte

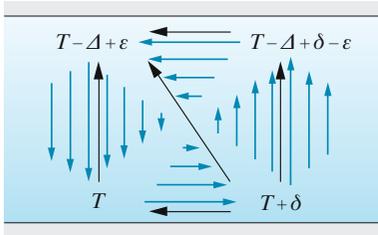


Abb. 20.35. Eine Konvektionswalze in einer von unten geheizten Flüssigkeitsschicht. (→): Strömungsgeschwindigkeit; (↗, ↘): Wärmestrom und seine Komponenten

das Wasser unten trotz seiner geringeren Dichte nirgends aufsteigen, die Wärme könnte nur durch Leitung aufwärts befördert werden. Bei sehr sanfter Heizung ist das auch so. Geringe Abweichungen vom Mittelwert zerstören dieses labile Gleichgewicht: Lokal erhöhte Temperatur treibt das Wasser dort hoch (Strömungsgeschwindigkeit v). Diese **Konvektion** transportiert die Wärme viel effizienter, trägt aber eben damit zum Ausgleich, d. h. dem Abbau ihrer eigenen Ursache bei.

Wir betrachten eine solche Konvektionswalze der Breite b in einer Flüssigkeit der Schichtdicke d . Der mittlere T -Unterschied zwischen unten und oben sei Δ , kann aber, wenn konstant, keine Konvektion antreiben. Hierfür ist ein T -Unterschied δ in b -Richtung erforderlich (Abb. 20.35). Bei einem Ausdehnungskoeffizienten $\beta = -d\rho/(\rho dT)$ entsteht eine antreibende Kraftdichte $g\rho\beta\delta$. Gebremst wird die Konvektion durch die innere Reibung mit der Kraftdichte $\approx 4\eta v/b^2$ (v -Gradient $\approx v/(2b)$, Volumen $\sim b/2$). Also ändert sich v gemäß

$$\dot{v} = g\beta\delta - \frac{4\eta}{\rho b^2}v. \quad (20.66)$$

Außer der T -Inhomogenität δ in b -Richtung muss es noch eine Abweichung vom mittleren T -Gradienten in d -Richtung geben. Die entsprechende T -Differenz heiße ε : Wo die Flüssigkeit aufsteigt, sei es zwar um δ wärmer, aber der T -Gradient in d -Richtung sei eben durch die Konvektion um $-\varepsilon/d$ geschwächt. Beide Abweichungen werden durch Wärmeleitung abgebaut, durch konvektive Wärmezufuhr auf- oder abgebaut, je nach dem Wärmeinhalt des Zu- und Abstroms. Die Komponenten der Leitungs-Wärmestromdichte sind $-\lambda\delta/b$ bzw. $-\lambda(\Delta - \varepsilon)/d$, die Konvektion befördert die Wärmestromdichte $c\rho v$, also

$$c\rho\dot{\delta} = -\frac{2\lambda}{b^2}\delta + \frac{2c\rho}{d}v(\Delta - \varepsilon), \quad c\rho\dot{\varepsilon} = \frac{2c\rho}{b}v\delta - \frac{2\lambda}{d^2}\varepsilon. \quad (20.67)$$

Mit den dimensionslosen Variablen

$$X = \frac{v}{v_0}, \quad Y = \text{Ra} \frac{\delta}{\Delta}, \quad Z = \text{Ra} \frac{\varepsilon}{\Delta}, \quad \tau = \frac{4\lambda}{\rho c b^2}t, \quad (20.68)$$

wobei $\text{Ra} = g\beta\rho^2cd^3\Delta/(\eta\lambda)$ die **Rayleigh-Zahl** ist und $v_0 = \lambda b^2/(4\rho cd^2)$, schreibt sich das System einfacher (der Punkt bedeutet jetzt Ableitung nach τ):

$$\dot{X} = \alpha(Y - X), \quad \dot{Y} = \beta X - XZ - Y, \quad \dot{Z} = -\gamma Z + XY. \quad (20.69)$$

$\alpha = \text{Pr} = \eta c/\lambda$ ist die **Prandtl-Zahl**, $\beta = b^2dcg\rho^2\beta\Delta/(\eta\lambda)$, $\gamma = b^2/d^2$.

Als *E. Lorenz* 1963 dieses aufs höchste vereinfachte Modell aufstellte und zu lösen versuchte, stellte er schockiert fest, dass es unter ganz realistischen Annahmen über die Parameter α , β und γ chaotisch werden kann. Wir untersuchen die Stabilität der drei Fixpunkte $(0, 0, 0)$ und $(\pm\sqrt{\gamma(\beta-1)}, \pm\sqrt{\gamma(\beta-1)}, \beta-1)$. Die Jacobi-Matrix heißt allgemein:

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta - z^* & -1 & -* \\ y^* & x^* & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (20.70)$$

für $(0, 0, 0)$:

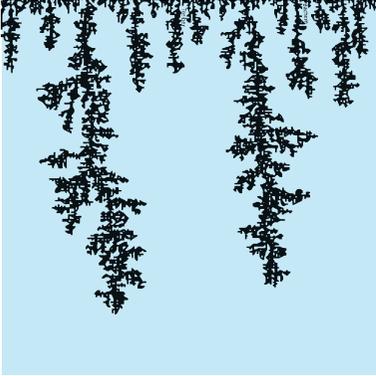
$$\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Ihre Eigenwerte $\lambda_1 = -\gamma$, $\lambda_{2,3} = -(1 + \alpha)/2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 4\alpha\beta}$ haben alle einen negativen Realteil für $\beta < 1$: Bei kleinem Δ , also schwacher Heizung ist dieser Fixpunkt stabil (die anderen beiden existieren gar nicht), es gibt keine Konvektion, die Wärme wird nur durch Leitung transportiert. Für $\beta > 1$ heißt die charakteristische Gleichung für die dann in Frage kommenden vom Nullpunkt verschiedenen Fixpunkte

$$\lambda^3 + (\gamma + \alpha + 1)\lambda^2 + \gamma(\beta + \alpha)\lambda + 2\alpha\gamma(\beta - 1) = 0. \quad (20.71)$$

Sie hat nach *Descartes* keine positiv reelle, sondern drei negativ reelle Wurzeln oder eine negativ reelle und ein konjugiert komplexes Paar (kein Zeichenwechsel im Positiven, drei im Negativen). Die Stabilität hängt vom Vorzeichen des Realteils der komplexen Wurzeln ab. Bei $\beta = 1$ heißen die Wurzeln 0 , $-\gamma$, $-\alpha - 1$, für etwas größere r sind also alle drei negativ reell, beide Fixpunkte sind stabile Knoten, jeder für seinen Einzugsbereich. Konvektions- und Temperaturmuster stabilisieren sich. Die Knoten werden zu Wirbeln ab einer negativen Doppelwurzel, wo die Eigenwerte ins Komplexe rutschen. Schließlich, immer mit steigendem r , überschreiten diese Eigenwerte die imaginäre Achse. Das passiert bei $\beta_{kr} = \alpha(3 + \alpha + \gamma)/(\alpha - \gamma - 1)$. Ab dieser **Hopf-Bifurkation** gibt es keinen stabilen Fixpunkt mehr, auch keine stabilen Grenzzyklen oder Tori, sondern chaotisches Verhalten (Abb. 20.8).

Allgemein besteht der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung sicher in einer ganzen Serie ähnlicher **Bifurkationen**, bei denen Wirbel immer kleineren Ausmaßes und immer höherer Umlauffrequenz entstehen. Die laminare Strömung entspräche dann einem stabilen Fixpunkt der Navier-Stokes-Gleichungen. Er kann sich durch eine Hopf-Bifurkation in einen Grenzzyklus verwandeln (eine Grundfrequenz mit ihren Oberschwingungen), dieser sich zu einem Torus mit zwei Grundfrequenzen (und ihren Linearkombinationen) aufblähen usw., bis eine unendliche Zahl von Frequenzen Chaos vortäuscht. So stellte *Lew Landau* 1944 die Turbulenz dar. Nach *Ruelle, Takens* und *Newhouse* kann der Übergang viel abrupter sein: Ein Torus kann auch direkt zum Chaos aufbrechen, das Bénard-System kann direkt von zwei Grundfrequenzen zu einem kontinuierlichen Spektrum springen. Noch früher geht das nach *Poincaré-Bendixson* (Abschn. 20.1.3) nicht. Anwendungen dieser Ideen reichen vom tropfenden Wasserhahn bis zu Störungen der Herztätigkeit.



Hier wachsen keine Kristalle aus der übersättigten Lösung: Ein Computer lässt „Teilchen“ vor einer Reihe von Keimen umherschwirren, bis sie daran kleben bleiben (hier erst nach 5 Berührungen; vgl. auch Abb. 20.33)

▲ Ausblick

Die nichtlineare Dynamik hat unseren Kausalitätsbegriff wesentlich gewandelt. Selbst wenn die Zukunft exakt durch die Gegenwart determiniert ist – man nennt diese Behauptung **schwaches Kausalitätsprinzip** –, ist das starke Prinzip „causa aequat effectum“, „ähnliche Ursachen bringen ähnliche Wirkungen“ entthront. Winzige, praktisch nie erfassbare Abweichungen können zu beliebiger Größe anschwellen. Das lässt zwar *Laplaces* Anspruch auf prinzipielle Allwissenheit scheitern, bewahrt uns aber vor trostlosem Fatalismus.

Sehr viele wichtige Fragen, die im Mittelpunkt der Chaos-Forschung stehen, haben wir nicht einmal anscheiden können. Wie unterscheidet sich eigentlich das deterministische Chaos vom reinen Zufall? Das kann man u. A. mit einer **Korrelationsanalyse** entscheiden. Zwei Größen f und g mögen die Zeitabhängigkeiten $f(t)$ und $g(t)$ haben, wobei wir die Mittelwerte von f und g einzeln schon abgezogen haben. Dann nennt man den Mittelwert von $f(t) \cdot g(t)$ die momentane Korrelation zwischen beiden. Sie ist 0, wenn f und g völlig unabhängig voneinander schwanken, dies allerdings erst im Grenzfall unendlich vieler Werte. f könnte auch durch den g -Wert zu einem früheren Zeitpunkt bestimmt sein. Man braucht also auch das Mittel von $f(t) \cdot g(t - T)$ für alle T . Die *Autokorrelation*, das Mittel von $f(t) \cdot f(t - T)$, deckt geheime Periodizitäten usw. in f selbst auf. Für einen reinen Zufallsprozess ist sie 0 für alle T , für einen deterministisch-chaotischen nicht, und z. B. auch nicht für die Pseudo-Zufallszahlen, die ein Computer liefert. Von einem so deterministischen System kann man das ja auch nicht verlangen, außer im Rahmen der **fuzzy logic**.

Wir sind bisher immer von einem mehr oder weniger plausibel vereinfachten Modell für ein vernetztes System ausgegangen und haben versucht, sein Verhalten in der Realität wiederzufinden. Oft will man umgekehrt aus einer empirischen Zeitreihe, z. B. der Anzahl der Füchse $f(t)$ in vielen aufeinander folgenden Jahren, ein Modell für diese Veränderungen erschließen. Man weiß ja aber gar nicht, welche und wie viele Größen den Fuchsbestand beeinflussen: Hasen, deren Futter, Jäger, Tollwutviren, usw. Hier hilft einem ein **Satz von Takens**: Eine einzige hinreichend lange Zeitreihe enthält bereits dieselbe Information wie das ganze System aus vielleicht sehr vielen Komponenten $f(t), g(t), \dots$. Speziell kann man die Topologie der Trajektorie und damit Existenz und Art der Attraktoren statt aus der Phasenbahn $f(g, \dots)$ auch aus einer **Wiederkehr-Abbildung** ablesen, in der man $f(t)$ über $f(t - T)$ aufträgt.

Kann Struktur aus dem Chaos wachsen? Andeutungen finden Sie in den Aufgaben 20.4.18–20.4.25. In Aufgabe 20.4.19 genügt es, wenn links ganz wenig mehr Kugeln sind als rechts: Schon ist das Kissen, das das Herausspringen hindert, links dicker, und wo mehr sind, fliegen noch mehr zu. Solche **Rückkopplung**, **Autokatalyse**, **Selbstverstärkung** oder wie man das nennen will, kann also Struktur, Abweichung ►

von der Zufallsverteilung erzeugen. In unzähligen winzigen Schritten ähnlicher Art hat die Natur, listiger als alle Philosophen, Antizufall, Entropieabbau, **Evolution** zuwege gebracht. Dass rein zufällig aus einem Molekülgemisch kein Homunculus, keine Amöbe, nicht einmal die richtige Aminosäuresequenz eines Proteins entstehen kann, ist kein Argument für transzendente Eingriffe. „Sire, je n'ai point besoin d'une telle hypothèse“ hat Laplace auch mal gesagt, zu Napoléon. Die nichtlineare Dynamik wird hierzu noch einiges zu sagen haben.

✓ **Aufgaben . . .**

www. CD

● **20.1.1 Lineare Vielfalt I**

Bestimmen Sie für die 13 Phasendiagramme in Abb. 20.6 aus den Werten D und T mögliche Matrixelemente und die Eigenwerte der Systemmatrix sowie die Steigungen der Eigengeraden, soweit reell.

● **20.1.2 Lineare Vielfalt II**

Klassifizieren Sie die stetigen linearen autonomen Systeme zweiter Ordnung nach der Lage von Eigenwerten und Eigenvektoren, dem qualitativen Verlauf der Orbits, Existenz und Stabilität der Fixpunkte usw. Wie viel davon lässt sich übertragen auf Systeme höherer Ordnung; diskrete Systeme; nichtlineare Systeme?

●● **20.1.3 Chemische Kinetik**

Gegeben eine Reihe von Größen x_1, \dots, x_n , die voneinander nach dem Differentialgleichungssystem $\dot{x}_i = \sum a_{ik}x_k$ abhängen. Ist ein chemisches Reaktionssystem immer von dieser Art? Welchen Sinn haben dann die Variablen und Konstanten? Versuchen Sie, allgemeine Angaben über die Vorzeichen der a_{ik} zu machen. Können Sie andere Anwendungen finden? Drehen Sie das Koordinatensystem, in dem \mathbf{x} und \mathbf{A} dargestellt sind, bis \mathbf{A} nur noch Diagonalelemente hat und die anderen Elemente Null werden. Zeigen Sie, dass eine solche Drehung für \mathbf{x} in der Multiplikation mit einer orthonormalen Matrix \mathbf{S} besteht. Zeigen Sie weiter, dass die Matrix \mathbf{S} , die diese Drehung auf Diagonalform leistet, als Zeilenvektoren lauter Eigenvektoren von \mathbf{A} hat und dass die entstehenden

Diagonalelemente Eigenwerte von \mathbf{A} sind. Wieso ist damit das Problem im Prinzip gelöst?

● **20.1.4 Homogenisierung**

Gibt es Fälle, wo sich das inhomogene System $\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ nicht durch eine Translation in ein homogenes überführen lässt? Was bedeutet das anschaulich? Soll man sich darüber freuen oder nicht?

● **20.1.5 Eigenvektoren**

Wo liegen die Eigenvektoren der Matrix eines linearen stetigen Systems zweiter Ordnung? Welche Rolle spielen sie für die Orbits? Verallgemeinern Sie auf ein System n -ter Ordnung.

● **20.1.6 Spiralen**

Welche Art Spiralen bilden die Orbits eines linearen stetigen Systems zweiter Ordnung im Fall $D > T^2/4$? Sind es archimedische ($r = r_0 + a\varphi$), logarithmische ($r = r_0 e^{a\varphi}$) oder andere Spiralen? Welches ist ihr Steigungswinkel (Winkel gegen die Radien), wie groß ist der Abstand zwischen zwei Windungen?

● **20.1.7 $D = 0$**

Wie verhält sich ein lineares stetiges System zweiter Ordnung, dessen Systemdeterminante 0 ist? Unter welchen Bedingungen ist ein Eigenwert 0? Wie sieht dann der andere aus?

● **20.1.8 Feldlinien**

Kann man die Orbits eines linearen Systems als Feldlinien auffassen? Unter welchen Umständen gibt es ein Potential? Wie sehen dann die Potentiallinien aus?

●● **20.1.9 Grenzyklus**

Hat das System, beschrieben durch die Dynamik

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - ay/(x^2 + y^2) \\ &\quad - bx\sqrt{x^2 + y^2} + cx^2 \\ \dot{y} &= y + ax/(x^2 + y^2) \\ &\quad - by\sqrt{x^2 + y^2} + cxy \end{aligned}$$

mit $a, b, c > 0$, $c < b$ Fixpunkte, Grenzyklen? Wie sehen sie aus? Sind sie stabil? Rechnen Sie in Polarkoordinaten um, wie schon das Auftreten von $x^2 + y^2$ nahe legt.

● **20.1.10 Linearer Grenzyklus**

Kann ein lineares System einen Grenzyklus haben? Wie viele Fixpunkte kann es haben? Prüfen Sie die allgemeine Theorie an einem System zweiter Ordnung.

● **20.1.11 Pendel**

Wie sieht das Phasenporträt eines Schwerependels ohne Beschränkung auf kleine Amplituden, aber ohne Reibung aus? Was ändert sich, wenn Reibung vorliegt?

● **20.1.12 Elektronenstoß**

Ein Elektron rast geradlinig auf ein Proton zu. Wie sieht das Phasenporträt aus? Hat es Wendepunkte, wenn ja, wo (Abb. 20.3)?

● **20.1.13 Absturz**

Ein Mensch fällt aus einem Flugzeug. Wie sieht das Phasenporträt aus? Berücksichtigen Sie die Höhenabhängigkeit der Luftdichte (Abb. 20.4)

● 20.1.14 Meteorit

Ein antriebsloser Satellit kehrt auf die Erde zurück oder ein Meteorit schlägt ein. Wie sieht das Phasenporträt eines solchen Fluges in radialer Richtung aus? Berücksichtigen Sie die Höhenabhängigkeit der Luftdichte und der Erdbeschleunigung (Abb. 20.5).

● 20.1.15 Stabilitätsbedingung

Zeigen Sie, dass die meist graphisch begründete Bedingung für die Stabilität eines stationären Wertes x_s eines diskreten Modells $x_{r+1} = f(x_r)$, nämlich $|f'(x_s)| < 1$, auch aus der in Abschn. 20.1.2 entwickelten Stabilitätsanalyse folgt.

● 20.2.1 Ein Integral

Was kommt heraus, wenn man über $\sin^{2n} x$ (was natürlich heißen soll $(\sin x)^{2n}$; n sei eine natürliche Zahl) integriert, speziell von 0 bis $\pi/2$?

●● 20.2.2 Noch ein Integral

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi/2} d\alpha / \sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}$ durch Reihenentwicklung des Integranden. Wählen Sie aber eine neue Variable, nach der die Entwicklung besser konvergiert als nach $\cos \alpha$. Beachten Sie auch, ob sich die Reihenglieder selbst integrieren lassen.

● 20.2.3 Smolletts Uhr

Die „Hispaniola“ sucht Treasure Island nach Billy Bones' Karte. Dort gibt es drei Berge; auf den höchsten hat Ben Gunn Captain Flints Schatz transferiert. Um wie viel durfte die Amplitude der Schiffs-Pendeluhr schwanken, damit Captain Smollett die Insel finden konnte?

●● 20.2.4 Duffing-Rüssel

Beschreiben Sie die $x_1(\omega)$ -Resonanzkurve für den Duffing-Schwinger genauer. Wie verläuft der „Rüssel“ bei $E > 0$ ins Unendliche? Wie dick ist er? Wie sieht er bei $E < 0$ aus, speziell bei $\omega = 0$?

●● 20.2.5 Van der Pol

Führen Sie die Fourier-Zerlegung für den Grenzzyklus der van der Pol-Gleichung ausführlich durch.

●● 20.2.6 Nichtlinearer

Schwingkreis

Stellen Sie die Gleichungen für Strom und Diodenspannung für den nichtlinearen Schwingkreis von Abb. 20.14 auf, beseitigen Sie möglichst viele Parameter und simulieren Sie $U(t)$, $I(t)$ bzw. $I(U)$ auf dem Computer. Beachten Sie, dass der Einschwingvorgang sehr lange dauern kann (manchmal mehr als 1 000 Perioden!). Ab wann erwarten Sie $U(t)$ -Verläufe, die nicht mehr sinusförmig sind? Wieso ist $I(t)$ dann doch noch sinusförmig? Wieso können zwei Differentialgleichungen erster Ordnung schon Chaos liefern? Kann bei einer normalen Diode (Abschn. 17.4.3) Ähnliches vorkommen?

●● 20.2.7 Schaukel

Mit welcher Zeitabhängigkeit muss das Kind seinen Schwerpunkt auf- bzw. abwärts verschieben, um die Schaukel anzuwerfen? Stellen Sie die Differentialgleichungen der Schaukel auf unter den Bedingungen (a) noch kleine Amplitude, (b) Schwerpunktsverschiebung \ll Länge der Aufhängung.

●● 20.2.8 Beta-Funktion

Die folgenden sechs Aufgaben wenden sich an leidenschaftliche Integralknacker. Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx$, genannt Eulersche Betafunktion $B(a+1, b+1)$, für ganzzahlige a und b durch mehrfache partielle Integration. Die Fakultät im Ergebnis lässt sich auch für unganze a, b durch ihre Verallgemeinerung, die Gamma-Funktion, ersetzen. Dann transformieren Sie mittels $t = \sin^2 \varphi$ auf ein Integral, das wir brauchen werden.

● 20.2.9 Superellipsen

Im neuen Zentrum Stockholms haben Straßenzüge, Brunnen usw. die Form von „Superellipsen“: $(x/a)^{2.5} + (y/b)^{2.5} = 1$. Plotten Sie diese Kurven für verschiedene Exponenten. Die Fläche innerhalb der Kurve $(x/a)^{1/c} + (y/b)^{1/d} = 1$ ist $4abcd/(c+d) B(c, d)$. Man findet das, wenn man im Flächenintegral die störende Klammer zur Variablen er-

nennt. Was kommt für die übliche Ellipse heraus? Alles lässt sich auch ins n -Dimensionale übertragen.

● 20.2.10 Minimaler Flugplatz

Flugzeuge starten und landen immer gegen den Wind (warum?). Auf Flugplätzen mit einer oder wenigen Startbahnen ist das nur annähernd erfüllbar. Legen Sie einen möglichst kleinen Flugplatz an, auf dem in jeder Windrichtung die Startbahnlänge L zur Verfügung steht, (a) wenn der Wind aus jeder Richtung kommen kann, (b) wenn er nur aus dem Sektor W-SW-S oder N-NO-O wehen kann. Zeigen Sie, dass Hypozykloiden dies erfüllen (ein Rad rollt in einem größeren ab). Kommen auch „Superellipsen“ in Frage?

● 20.2.11 Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion ist definiert als $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$. Zeigen Sie: Für natürliche x ist $\Gamma(x) = (x-1)!$ (partielle Integration). $\Gamma(\frac{1}{2})$ geht durch $u = \sqrt{t}$ über in ein Integral, das wir aus Aufgabe 1.1.8 kennen. Vergleich mit der bekannten Ellipsenfläche liefert laut Aufgabe 20.2.9 dasselbe.

● 20.2.12 Pendel-Periode I

Man lenkt ein Pendel bis $\alpha_0 = 90^\circ$ aus und lässt los. Vereinfachen Sie das Integral, das die Periode angibt, und berechnen Sie es mit Hilfe der Gamma-Funktion. Vergleichen Sie mit der genäherten Reihe (20.13).

● 20.2.13 Pendel-Periode II

Bei der Anfangsauslenkung 180° lässt sich das unbestimmte Integral, das die Zeit angibt, leicht lösen. Was kommt als Schwingungsdauer heraus, was für den Teil der Schwingung von 90° bis 0° ?

● 20.2.14 Van der Pol-Fixpunkt

Untersuchen Sie die Stabilität der (des) Fixpunkte(s) eines Systems, das sich nach der van der Pol-Gleichung verhält.

●● 20.2.15 Van der Pol-Schwänze

Wie kommen die „Schwänze“ zustande, die rechts und links am Grenzzyklus eines van der Pol-Systems hän-

gen und in die die meisten Transienten-Kurven einmünden (Abb. 20.17)?

●● 20.3.1 Descartes' Regel

Wir werden oft die Regel von *Descartes* benutzen, nach der man die Anzahl reeller Lösungen einer Gleichung n -ten Grades so abschätzen kann: In der Folge der Koeffizienten a_i des Polynoms $\sum a_i x^i$ zähle man die Zeichenwechsel; als ein Zeichenwechsel gilt, wenn auf ein positives ein negatives a_i folgt oder umgekehrt. Es gibt so viele positive Lösungen wie Zeichenwechsel oder eine gerade Anzahl weniger. Für die negativen Lösungen gilt Entsprechendes, wenn man die Vorzeichen aller a_i mit ungeradem i umkehrt. Gemäß *Descartes'* anderer Regel: „Akzeptiere nur, was du völlig klar einsehst“, beweisen Sie die obige Regel.

● 20.3.2 Bevölkerungsexplosion I

Wie viele Menschen werden in jeder Sekunde auf der Erde geboren, wie viele sterben? Wie entwickelt sich die Menschheit, wenn das so weitergeht?

● 20.3.3 Bevölkerungsexplosion II

Schätzen Sie die mittlere Anzahl fruchtbarer Nachkommen pro Person und die Generationsdauer für die Menschheit und entwickeln Sie Prognosen daraus.

● 20.3.4 Sterbemodell I

Modell 1): Alle Menschen, ob alt oder jung, haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahr zu sterben. Modell 2): Alter und Tod beruhen auf der Ansammlung genetischer Defekte. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Defekts ist altersunabhängig. Wenn sich eine bestimmte Anzahl angesammelt hat, stirbt man. Wie sieht die Alterspyramide einer stationären Bevölkerung nach diesen Modellen aus?

● 20.3.5 Sterbemodell II

Angenommen, von Leuten eines bestimmten Geburtsjahrganges werden 75% 65 Jahre oder älter, 50% 74 Jahre oder älter, 25% 84 Jahre oder älter. Wenden Sie das Modell „Altern ist Anhäufung genetischer Defekte“ an.

Welche Parameter können Sie aus den Daten entnehmen?

●● 20.3.6 Tierwachstum

Ein Wachstumsmodell will die Massenzunahme eines Tieres dadurch beschreiben, dass die Nahrungsaufnahme (Assimilation) proportional zur Körperoberfläche, die Dissimilation zur Körpermasse ist. Wie würden demnach Masse und „Radius“ des Körpers zunehmen? Wie wäre es für zweidimensionale, n -dimensionale Tiere? Hat $m(t)$ einen Wendepunkt, und wenn ja, wo liegt er?

● 20.3.7 Talent-Rückkopplung

Warum sind manche Leute in Physik oder im Geigen so unglaublich viel besser als andere? Wahrscheinlich werden genetische und kulturelle Unterschiede, die sicher existieren, in einer Art Rückkopplung durch Erfolgserlebnisse verstärkt. Machen Sie ein Modell dazu.

●● 20.3.8 Bifurkation

Beweisen Sie: Der Übergang von der Zweier- und Viererperiode in der Lösung der logistischen Gleichung $x_{k+1} = ax_k(1 - x_k)$ erfolgt bei $a = 1 + \sqrt{6} = 3,4495$. Kurz vorher pendelt x zwischen 0,8499 und 0,4400 hin und her.

● 20.3.9 Anti-Wojtilla

Wie die Fruchtbarkeit einer Population unter der Bevölkerungsdichte leidet, lässt sich durch viele Funktionen darstellen, wie z. B. durch $x_{t+1} = ax_t \exp(b(1 - x_t))$. Welchen Vorteil hat dies gegenüber der logistischen Gleichung? Bestimmen Sie die Stationaritäten und ihre Stabilität. Wo erwartet man Bifurkationen?

● 20.3.10 Lösbares Chaos

Bei $a = 4$ lässt sich die logistische Iteration leicht allgemein lösen durch die Substitution $x = \sin^2 \alpha$. Wie ändert sich dann α ? Was folgt daraus für die Lage und Dichte der Punktfolge x_n ?

●● 20.3.11 Feigenbaum verallgemeinert

Gegeben die diskrete Dynamik $x \rightarrow f(x)$. $f(x)$ habe nur ein Maxi-

mum, kein Minimum im betrachteten x -Intervall. Wie sieht die Zweifach-Iterierte $f^2(x)$ aus? Was bedeutet es, wenn die Gerade $y = x$ die Kurve $y = f^2(x)$ berührt, speziell, wenn sie das an ihrem Wendepunkt tut? Tut sie das immer dort?

●● 20.3.12 Intermittenz

Wie lange dauern im Mittel die quasiperiodischen Episoden, wenn die echte Periodizität soeben durch Intermittenz ins Chaos übergegangen ist? Verfolgen Sie, wie die Spinne durch den engen Kanal kriecht!

● 20.3.13 Stetig und diskret

Wie kommt es zu dem frappanten Unterschied im Verhalten stetiger und diskreter Systeme, z. B. zwischen der Verhulst- und der logistischen Gleichung (20.27) bzw. (20.30)?

●● 20.3.14 Die Sünden der Opas

Eine Tierart mit einer Lebensdauer von sehr vielen Jahren habe jeden Herbst eine Brunftzeit. Die Anzahl von Jungen pro Muttertier sei proportional den Nahrungsmengen, die die vorige Generation übrig gelassen hat. Wie entwickelt sich die Population? Bestimmen Sie stationäre Zustände. Sind diese stabil? Kommen Periodizitäten vor?

●● 20.3.15 Symbiose

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des vierten Fixpunktes ($(d - e)/(cd - ef)$, $(c - f)/(cd - ef)$) des Systems (20.43), speziell für den Fall der Symbiose.

● 20.3.16 Konkurrenz

Kann die Separatrix zwischen den Einzugsgebieten der beiden stabilen Fixpunkte im Wettbewerbsmodell (20.43) eine Kurve der Form $y \sim x^n - \text{Gerade, Parabel o. Ä.} - \text{sein?}$

●● 20.3.17 Ökologie

Normieren Sie das ökologische Modell (20.43), um die Anzahl der Parameter zu reduzieren. Klassifizieren Sie die möglichen Fälle.

●● 20.3.18 Parasitismus

Wie könnte man die bisher nicht erwähnten Vorzeichenkombinationen

der A , B , C von Aufgabe 20.3.17 biologisch deuten?

● 20.3.19 pH

Wie hängt der pH-Wert von der Säurekonzentration im Wasser ab? So einfach ist das gar nicht, selbst wenn Sie nur eine Dissoziationsstufe berücksichtigen. Wie ist es bei einer Base?

● 20.3.20 Auch nicht so einfach!

Wie hängt die Konzentration c im Reaktionsmodell (20.50) von der Zeit ab?

●● 20.3.21 Enzymkinetik

Unter welchen Bedingungen und nach welcher Zeit stellt sich das Michaelis-Menten-Quasigleichgewicht (20.52) ein?

●● 20.3.22 Inhibition

Wie arbeitet ein Enzym, das nicht nur Bindungsstellen für ein Substrat, sondern noch für ein anderes Teilchen hat?

●● 20.3.23 Hämoglobin

Wieso liefert Hämoglobin als Tetramer (vier Bindungsstellen für O_2) die Sättigungskurve (20.57) und im kooperativen Grenzfall die Näherung (20.58)? Wieso kann Kooperativität die Transportkapazität von 10% auf 60% steigern? (Voraussetzung: O_2 -Partialdruck im arbeitenden Gewebe sei halb so hoch wie in der Lunge.)

● 20.3.24 Trapmodell

Unter welchen Umständen lässt das Trapmodell Lösungen mit Extrema zu? Wie viele Extrema sind möglich und für welche Variablen? (Hinweis: Beziehen Sie $p = n + d$ mit ein!)

● 20.3.25 Was ist besser?

Vergleichen Sie die Aussagekraft der Stabilitätsanalyse und des Möglichkeitsschemas hinsichtlich des qualitativen Verhaltens der Lösungen (Monotonie usw.).

●● 20.3.26 Brauerei

Bier wird seit altersher im „Batch-Verfahren“ gebraut: Man lässt einen Bottich mit Malzschrot, Hefe und Wasser gären und setzt neu an, wenn das Bier fertig ist. Hier wie vielfach in der Verfahrenstechnik wäre ein Übergang zu einem kontinuierlichen Verfahren zeit- und kostengünstiger:

Ein Substrat S wird ständig in den Fermenterkessel eingeleitet, in dem Mikroorganismen daraus das Produkt P erzeugen, das ebenso ständig entnommen wird, wobei i. Allg. auch Mikroorganismen verloren gehen. Studieren Sie die Dynamik!

●● 20.4.1 Dreiecksdynamik

Liefert die Dreiecks-Abbildung $x \leftarrow a(1 - 2|\frac{1}{2} - x|)$ für $a > \frac{1}{2}$ immer Chaos, oder hängt es von den Anfangs- x ab, ob Konstanz, Zweier-, Dreier-...-Periodizität herauskommt? Falls das letztere stimmt: Sind diese Zustände gegenüber einer kleinen Änderung der Anfangswerte stabil?

●● 20.4.2 Irrationale Über-raschung

Beweisen Sie: In der Dezimaldarstellung fast jeder reellen Zahl wiederholt sich jede beliebige Ziffernfolge unendlich oft.

●● 20.4.3 Mal anders

Lösen Sie die Gleichung $x^2 - x + a = 0$ nicht wie üblich, sondern durch die Iteration $x \leftarrow x^2 + a$, ausgehend von verschiedenen Anfangswerten x_0 und verschiedenen a . Wann konvergiert das Verfahren, wann divergiert es gegen Unendlich, wann oszilliert es und mit welcher Periode? Gibt es Bifurkationen, gibt es Chaos? Prüfen und erklären Sie alle mit dem Computer gefundenen Aussagen, soweit möglich, auch theoretisch.

● 20.4.4 Ljapunow-Exponent

Wie groß ist der Ljapunow-Exponent im stabilen, im periodischen, im Chaos-Bereich, an den Bifurkationen eines Feigenbaum-Szenarios?

● 20.4.5 Koch-Garten

Um die „Koch-Kurve“ zu erzeugen, beginnt man mit einem gleichseitigen Dreieck, nimmt das mittlere Drit-

tel jeder Seite heraus und setzt dort ein kleines gleichseitiges Dreieck auf. Dies wiederholt man beim entstehenden Sechsstern usw. usw. Wie groß ist die schließlich umrandete Fläche, wie lang ist ihre Berandung, welche Hausdorff-Dimension hat sie? Wie lautet ihre Ableitung? Herr X., stolzer Besitzer eines von der Koch-Kurve begrenzten Gartens von 800 m^2 , bricht um 11 Uhr auf, seinen Garten zu umwandern (auf einer punktförmigen Stelze). Um 12 Uhr sucht ihn Frau X. Wo ist er?

● 20.4.6 Cantor-Staub

Aus einer Strecke lasse man das mittlere Drittel weg, aus jedem verbleibenden Teilstück ebenso usw. usw. Was bleibt, nennt man Cantor-Staub. Welche Hausdorff-Dimension hat er? In der Fläche entspricht dem der Sierpinski-Teppich (aus jedem „heilen“ Rechteck schneidet man immer wieder das mittlere Neunteil heraus), im Raum der Sierpinski-Schwamm (Menger-Schwamm). Geben Sie Flächen, Volumina, Dimensionen an!

● 20.4.7 Affine Transformation I

Beweisen Sie: Eine affine Transformation wandelt Gerade in Gerade um. Parallelität zweier Geraden und Längenverhältnis von Abschnitten einer Geraden bleiben erhalten.

● 20.4.8 Affine Transformation II

Was macht eine affine Transformation aus einem Kreis, einem Quadrat? Wie muss sie aussehen, damit sie nur eine Drehung mit Maßstabsänderung, keine Verzerrung bringt? Was kann man über die Eigenwerte der Matrix A sagen?

● 20.4.9 Farn

Der Farnwedel von Abb. 20.32 entsteht durch vier affine Transformationen mit den Elementen

Tabelle 20.2.

	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2
T_1	0	0	0	0,17	0	0
T_2	0,85	0,026	-0,026	0,85	0	3
T_3	-0,155	0,235	0,196	0,186	0	1,2
T_4	0,155	-0,235	0,196	0,186	0	3

Deuten Sie diese Transformationen: Welche Strukturdetails erzeugen sie? Wo fängt der Farnwedel an, wo ist er zu Ende? Vergessen Sie nicht, das Bild zu programmieren!

●● **20.4.10 Julia und Mandelbrot**
 Wie sieht die Julia-Menge der Iteration $z \leftarrow z^2 + c$ für $c = 0$ aus? Was kann man über ihre Symmetrie bei reellem c sagen, was generell über ihre Symmetrie?

●● **20.4.11 Brennlinie**
 Die Abendsonne fällt in ein Glas mit Rotwein und erzeugt eine herzförmige Brennlinie darin. Welche Kurve steckt dahinter? Was hat das mit dem „Apfelmännchen“ zu tun?

●● **20.4.12 $z^3 = 1$**
 Zwischen den Einzugsbecken der drei Fixpunkte des Newton-Algorithmus für $z^3 = 1$ (Abb. 20.36) gibt es manchmal „schwarze Löcher“, nämlich immer in den „Dreiländerecken“. Einige davon liegen auch auf der reellen Achse. Wie kommen diese Löcher zustande, und wie heißt das Gesetz für ihre Lage? Finden Sie auch solche Löcher im Komplexen?



Abb. 20.36. Genealogie der „schwarzen Löcher“ in der komplexen Newton-Iteration für $z^3 = 1$. Von einem Loch n -ter Ordnung, bezeichnet durch n Ziffern, kommt man in n Sprüngen zum Zentralloch $(0, 0)$. Zu diesem Loch n -ter Ordnung kommt man direkt von drei Löchern $(n + 1)$ -ter Ordnung aus, deren Codenummern durch Anhängen von 1, 2 oder 3 an die des Loches n -ter Ordnung entstehen

●● **20.4.13 Iteration**
 Gegeben die Iteration $x \leftarrow f(x)$. Aus der Kette $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, \dots , $x_n = f(x_{n-1})$ formulieren wir die höheren Iterationen $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$, \dots , also z. B. $x_n = f^n(x_0)$. Beweisen Sie folgende Tatsachen: $f^n(x_0) = f'(x_{n-1})f'(x_{n-2}) \dots f'(x_1)f'(x_0)$, speziell: Wenn x ein Fixpunkt von $x \leftarrow f(x)$ ist, gilt $f^n(x) = (f'(x))^n$. Ein Fixpunkt von $f(x)$ ist auch Fixpunkt von $f^n(x)$. Wenn er hinsichtlich $f(x)$ stabil/instabil ist, ist er es auch hinsichtlich $f^n(x)$.

● **20.4.14 Percolation**
 Ein Stoff bestehe aus zwei Sorten Teilchen, leitenden und nichtleitenden. Beide Teilchen sind gleich groß, regulär sechseckig und bedecken eine Ebene dicht, aber ganz zufällig verteilt. Wie groß muss der Anteil p der leitenden Teilchen sein, damit der ganze Stoff leitet? Wie lautet die Antwort bei drei- oder viereckigen Teilchen?

● **20.4.15 Wurzel**
 Das Wurzelziehen ist ja auch ein iterativer Vorgang. Formulieren Sie dieses Verfahren für die zweite, für die n -te Wurzel und führen Sie es auf dem Taschenrechner (ohne x^y - oder log-Taste) durch.

● **20.4.16 Trick 17**
 Hat die Iteration $x \rightarrow a e^{-x}$ stabile Fixpunkte? Wenn nicht, was macht man, um die Gleichung $x = a e^{-x}$ iterativ zu lösen?

● **20.4.17 Charlier-Modell**
 Wenn das Weltall in hierarchischer Staffelform Galaxie – Galaxiencluster – Supercluster ... aufgebaut ist (Aufgabe 12.10.8), kann man ihm dann eine Hausdorff-Dimension zuordnen?

● **20.4.18 Hele-Shaw-Muster**
 Legen Sie einen Klacks Butter (oder Schuhcreme o.Ä.) zwischen zwei glatte Platten (am besten Glas) und drücken sie beide zusammen. Welche Form nimmt der Klacks an? Ziehen Sie die Platten wieder ganz allmählich auseinander, senkrecht zur Plattenebene. Sie werden sich wundern.

Auch wenn die Platten wieder ganz getrennt sind, bleiben interessante Muster darauf. Erklären Sie! Steckt ein Minimalprinzip dahinter? Solche Prinzipien klingen immer teleologisch. Geht es auch kausal?

●● **20.4.19 Ein unmögliches Ergebnis**

Sie kennen vielleicht die Maschine zur Demonstration der kinetischen Gastheorie oder der atmosphärischen Dichteverteilung: Der Boden eines Schachtes hat einen Rüttelmechanismus und schleudert Kügelchen mit regelbarer Intensität („Temperatur“) in die Höhe. Teilen Sie den Boden durch eine ca. 1 cm hohe Trennwand in zwei Hälften und regeln Sie die Rüttelung ganz allmählich hinunter. Man erwartet, dass die Kugeln, wenn sie zur Ruhe gekommen sind, sich etwa gleichmäßig, nur mit Poisson-Schwankungen, auf beide Hälften des Bodens verteilen. Ist das so? Wenn nein, warum nicht?

●● **20.4.20 Stromsystem**
 Den Rand eines flachen Glasschälchens umgeben Sie ganz oder teilweise mit einem geerdeten Blechstreifen, schütten einige kleine Metallkugeln hinein (nicht zu viele, sodass sich höchstens einige berühren) und füllen ca. 5 mm hoch Öl darauf. Dann halten Sie eine sehr feine Drahtspitze, an 15–25 kV Hochspannung gelegt, darüber oder tunken sie etwas ins Öl. Die Kügelchen arrangieren sich zu baumartig verzweigten Mustern. Warum? Steckt auch hier ein Minimalprinzip hinter dieser Strukturbildung?

●● **20.4.21 Versorgungsnetz**
 Ein Raum- oder Flächenbereich soll von einer oder wenigen Zentralen aus mit Wasser, elektrischer Energie, Blut, Information, Verkehr o.Ä. versorgt werden. Dazu muss sich das Versorgungsnetz, ausgehend von dicken Leitungen nahe der Zentrale, immer feiner verzweigen. Material- und Arbeitsaufwand sollen dabei minimal bleiben. Entwickeln Sie an einfachen Beispielen Regeln für den Aufbau solcher Netze.

●● 20.4.22 Konvektionszellen

Der Verdacht liegt nahe, dass hinter dem Bénard-Phänomen (Abschn. 5.4.4) auch ein Optimierungsproblem steckt: Wie kann die Flüssigkeit die Wärme möglichst effizient aufwärts abführen? Begründen Sie diesen Verdacht.

●● 20.4.23 Video-Rückkopplung

Warum soll man für die Video-Rückkopplung kein zu perfektes Kabel benutzen? Erklären Sie einige Strukturen der entstehenden Bilder: Symmetrie, Rotationsbewegungen, Wellenausbreitung usw.

●● 20.4.24 Hamiltons Prinzip

Hamilton zeigte: Jedes mechanische System, dem man eine kinetische Energie T und eine potentielle U und damit eine Lagrange-Funktion

$L = T - U$ zuschreiben kann, entwickelt sich zwischen beliebigen Zeitpunkten t_1 und t_2 so, dass das „Wirkungsintegral“ $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ minimal ist. Dabei sind zur Konkurrenz alle Funktionen $L(t)$ zugelassen, die bei t_1 einen gegebenen Wert haben und ebenso bei t_2 . Zwischendurch können sie machen, was sie wollen. Zeigen Sie, dass man dieses scheinbar teleologische Prinzip auch kausal erklären kann (Methode der Variationsrechnung).

●● 20.4.25 Fermats Prinzip

Auch *Fermats* Prinzip, nach dem das Licht von A nach B immer so läuft, dass es am wenigsten Zeit braucht, klingt verdächtig teleologisch. Hat das Photon einen Willen und einen Bordcomputer, um diesen zu realisieren? Wo steckt hier der kausale Mechanismus?

●● 20.4.26 Lorenz-Bifurkationen

Analysieren Sie die Stabilität der Fixpunkte des Lorenz-Modells (20.69). Achten Sie besonders auf die „Bifurkationen“, die Stellen, wo sich das Verhalten qualitativ ändert.

●● 20.4.27 Das Apfelmännchen auf dem Feigenbaum

Bilden Sie die Mandelbrot-Iteration $z \leftarrow z^2 + c$ auf die logistische $x \leftarrow ax(1-x)$ ab. Für welchen Fall lassen sich die Stabilitätsbedingungen für die Attraktoren verschiedener Ordnung (einfacher Fixpunkt, Zweier-, Dreier-, Viererperiode) einfacher formulieren? Schreiben Sie die Periodizitätsbedingung als Gleichung in z bzw. x . Überlegen Sie, ob Sie dieses ganze Polynom brauchen, um die Stabilitätsgrenze zu finden (denken Sie an den Satz von *Vieta* über die Faktorzerlegung eines Polynoms).



Quellennachweis für die Einleitungs- und Ausblickabbildungen

Einleitungsabbildungen

Foto Deutsches Museum München (Kap. 1–11, 12, 13, 16, 16.2, 18–20)

Niels Bohr Archive Kopenhagen (Kap. 14)

T.W. Hänsch, Ludwig Maximilians Universität München (Kap. 15)

Siemens-Forum München und Familie Schottky (Kap. 17)

Ausblickabbildungen

I. Block, T. Esslinger, T.W. Hänsch, Ludwig Maximilians Universität München (Kap. 15)

EBM-Service für Verleger Luzern (Kap. 2)

D.M. Eigler, IBM Research Division: *Quantum Corrals*, in:
H. Sakaki und H. Noge (Eds.): *Nanostructures and Quantum Effects*,
Springer Ser. in Materials Sci., Vol. 31 (Springer, Berlin Heidelberg 1994)
(Kap. 13 *rechts*)

Foto Deutsches Museum München (Kap. 3–7, 11, 18)

Foto Hale Observatories (Kap. 19)

Foto Mt. Wilson and Palomar Observatories (Kap. 9)

J. Gimzewski, UCLA (Kap. 16)

Intel GmbH München (Kap. 17)

Verändert nach Le Grand Atlas de l'Astronomie, Encyclopædia Universalis, 3rd
Edition, Paris 1994 (Kap. 12)

D.C. Rapaport and M. Meyer, in: A. Bunde and S. Havlin (Eds.):
Fractals in Science (Springer, Berlin Heidelberg 1994) (Kap. 20)

P.E. Toschek, W. Neuhauser, in: D. Kleppner, F.M. Pipkin (Eds.):
Atomic Physics 7 (Plenum, New York 1981) (Kap. 8)

H. Vogel, TU München (Kap. 1, 10, 13 *links*)

J. Walz, CERN (Kap. 14)

Nebenstehende Abbildungen wurden
mit freundlicher Genehmigung ins
Buch aufgenommen © . . .

Sach- und Namenverzeichnis

A

- Abbe, Ernst* (1840–1905) 527
Abbe-Refraktometer 488
Abbe-Theorie des
 Auflösungsvermögens 527
Abbildung 484
Abbildungsgesetz
 – der Linse 491
 – des Hohlspiegels 485
Abbildungsgleichung 485
Abbildungsmaßstab 495
Abendrot 563
Aberration 503
 – chromatische 495
 – sphärische 494, 512
abgeschlossene Doppelleitung 444
abgeschlossenes System 23
Abgleich der Brücke 323
Abklingzeit 695, 941
Ablenkkondensator 452
Ablenkung
 – im elektrischen Feld 452
 – im Magnetfeld 453
Ablösearbeit 447
Abreißkante 125
Abschirmung 371, 1039
 – magnetische 362
Abschneidebedingung 912
absolute Feuchte 262
absolute Reaktionsraten 1066
absolute Temperatur 209
absoluter Nullpunkt 209
Absorber-Kühlschrank 292
Absorption 172, 178, 556
 – im Ionenkristall 919
 – im Metall 928
 – schneller Elektronen 700
 – von Mikrowellen 482
 – von Ultraschall 196
Absorptionsgesetz 178, 989
Absorptionsgrad 574
Absorptionskante 866, 937
Absorptionskoeffizient 178, 222,
 556, 764, 867
 – für Röntgenstrahlen 867
 – für Teilchen 222
 – von Ostwald und Bunsen 275
Absorptionslinie 560
Absorptionsquerschnitt 223, 866
- Absorptionsspektrum 556
 – des Festkörpers 920
4-Abstand 628
Abstände, raumartig, zeitartig 618
Abstimmsschärfe 415
Abstimmung 432
Abtasttheorem 964
Abtrennenergie 907
Abwärme 231
Abweichung, Standard- 6
Achromat 495
Achsen, freie 87
AC-Stark-Effekt 755, 774
Adams, John C. (1819–1892) 57
Adaptation 501
Additionstheorem, relativistisch 633
additive Farbmischung 583
Additivität der Entropie 244
Adhäsionskraft 103
Adiabasie der Schallausbreitung 164
Adiabate = Isentrope 220
Adiabaten-Exponent 219
Adiabatengleichungen 219
adiabatisch (ohne Wärmeaustausch)
 219, 1062
adiabatische Entmagnetisierung 274
adiabatische Expansion und
 Kompression 220
adiabatische Kompressibilität 164
adiabatische Zustandsänderung 219
adiabatisch-indifferente Schichtung
 100, 595
Adsorption 290, 340
Aerostatik 93
affine Transformation 1117
Aggregatzustände 261
Agone 368
Ähnlichkeitskriterium 117
Airconditioner 228, 272
Airy-Formel 539
Akkommodation 501
Akkord 191
Akkretionsscheibe 1077
Akkumulator 343, 376
Aktiniden 588, 849, 880
Aktionspotential 196
Aktionsprinzip 12, 13
Aktivator 695
aktivierter Zustand 259
- Aktivierungsenergie 110, 259, 287,
 946
Aktivität 999
akustischer Zweig 917
Akzeptorterm 939
akzessorische Pigmente 601
Albedo 603
Albedo-Neutronen 1034
d’Alembert, Jean le Rond (1717–1783)
 162
d’Alembert-Gleichung 162, 183
Alfvén, Hannes (1908) 477
Alfvén-Bedingung 477
Alfvén-Welle 477
Alhazen (Ibn al Haitham) (965–1039)
 483
Alkalien 849
Alkalihalogenide 949
Alkalihalogenid-Optik 587
allgemeine Relativität 650
allosterische Umwandlung 1110
 α -, β -, γ -Strahlung 480
 α -Helix 882, 903
 α -Spektrum 985
 α -Strahlen, Einzelstreuung 704
 α -Streuung 701
 α -Teilchen 982
 α -Zerfall 721, 1035
Alter
 – der Erde 288
 – der Welt 659
alternierende Gradienten 998
Altersbestimmung 986
Alvarez, Luis (1911–1988) 1036
Amboss, Hammer, Steigbügel 194
amorphe Halbleiter 944
amorphe Stoffe 94, 884
amorpher Zustand 94
Ampere (= A) 318
Ampère, André M. (1775–1836) 393
Amperemeter 323
Ampere-Ringströme 390
Amperes Durchflutungsgesetz 353
Amplitude 18
 – komplexe 156
Amplitudenmodulation 146, 158
Analysator 544
analytische Funktion 108
Anderson, Carl D. (1905–1991)
 1002, 1008, 1032

- Andromedanebel 68
 anelastisches Verhalten 132
 Anfahrvorgang 45
 Anfangsbedingungen 15
 angeregter Zustand 697
 Ångström-Einheit ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) 3
 anharmonischer Oszillator 1094
 Anharmonizität der Gitterschwingung 898
 Anionen 332
 Anker 420
 Anklingen der Photoleitung 1112
 Anklingzeit 940
 Anlauffarben 537
 Anlaufmoment 424
 Anlaufstrom 460
 Anode 331
 Anodenfall 470
 anomale Dispersion 199, 557
 anomaler Zeemaneffekt 753
 anomales magnetisches Moment 747, 1012, 1018
 – des Elektrons 855
 Anomalie des Wassers, thermische 211, 267, 291
 Anpassung, akustische 195
 Anregung 936
 Antenne 437
 Antennenrauschen 674
 Antiferroelektrizität 398
 Antiferromagnetismus 398
 Antikathode 857
 Antimaterie 819, 1004
 Antineutrino 1003, 1010
 Antineutron 1004
 Antiproton 1004
 Antiproton-Erzeugung 670
 Antiteilchen 751, 1003
 Antiwasserstoffatom 819
 AO-Methode 878
 aperiodischer Grenzfall 157
 Apertur, numerische 498
 Apfelmännchen 1121
 Aphakie 515
 Aquaplaning 138
 Äquipartitionstheorem 212
 Äquipotentialfläche = Niveaufäche 25, 300
 Äquivalentleitfähigkeit 335
 Äquivalenzprinzip 651, 652, 672
 Arago, Dominique (1786–1853) 543
 Aräometer 98
 Arbeit 20
 Arbeit und Wärme 1057
 Arbeitsdiagramm 229
 Arbeitsfähigkeit eines Systems 260
 Arbeitspunkt 461
 Arbeitstakte der Carnot-Maschine 231
 Arbeitswiderstand 461
 Archimedes
 – Hebelgesetz 81
 – Prinzip des 97, 136, 910
 Argand-Diagramm 156
 Argonionen-Laser 834
 Arrhenius, Svante (1859–1927) 448, 480
 Arrhenius-Auftragung 258, 449
 ϑ -Pinch 479
 Aspirationspsychrometer 263
 assoziierte Teilchenerzeugung 1005, 1023
 A-Sterne 821
 Asthenosphäre 369
 Astigmatismus 494
 Aston, Francis W. (1877–1945) 457, 972
 Aston-Dunkelraum 470
 asymmetrisches C-Atom 554
 Asynchronmotor 464
 Äther 609
 Atmosphäre
 – (\approx bar) 95
 – Aufbau der 285
 – homogene 99
 – isotherme 99
 Atmosphärendruck 99
 atmosphärische Refraktion 487
 atmosphärische Turbulenz 500
 atomare Beugung 782
 atomare Einheiten 734
 atomare Masseneinheit 972
 atomare Stöße 805
 atomarer Dipol 823
 atomarer Springbrunnen 800, 802
 atomarer Übergang 765
 Atombombe 977
 Atomgewicht 847
 Atominterferometer 783
 Atomkern, Einfluss auf
 Elektronenbewegung 784
 Atomlaser 815
 Atommodell 732
 Atomoptik 780
 – geometrische 782
 Atomphysik
 – nichtlineare 815
 Atomradius 889
 Atomstoß 698
 Atomstrahl 227
 Atomstrahlresonanz 796
 Atom-Strukturfaktor 894
 Atomuhr 798, 800
 Atomuhren 505
 Atomvolumen 849
 Atomwärme 212
 Atosekundenpulse 844
 Attraktor 140, 1087
 – seltsamer 1091
 Auer-Strumpf 588
 Auflösungsvermögen 498, 516, 527, 566
 – des Auges 526
 – des Elektronenmikroskops 512
 – des Fernrohrs 526
 – des Gitters 529
 – des Mikroskops 526
 – des Prismas 530
 – des Spektrographen 528
 Aufdampfschichten 909
 Aufenthaltswahrscheinlichkeit 711
 Auftrieb 97
 – dynamischer 117
 Auge 501
 Augenlinse 497
 Auger-Effekt 865, 881
 Ausbreitungsvektor 164
 Ausdehnungskoeffizient
 – kubischer 217
 – linearer 210
 Ausdehnungsthermometer 210, 284
 außerordentliches Licht 545
 Ausgleichsrechnung 8
 Auslöse-Zählrohr 993
 Ausströmungsgesetz von Torricelli 119
 Austauschentartung 756
 Austauschintegral 756
 Austauschkraft 970, 1015, 1035
 Austauschwechselwirkung 1035
 Austrittsarbeit 447
 Auswahlregel 698, 767, 871, 874
 Auswuchten 88
 Autokatalyse 1110, 1124
 Autokorrelation 1124
 auxochrome Gruppen 587
 Avogadro, Amadeo (1776–1856) 98
 Avogadro-Gesetz 212
 Avogadro-Zahl 212
 Axiome
 – der Elektrodynamik 426
 – der Mechanik (Newton) 12, 13
 – der Quantenmechanik 708
 azeotropes Gemisch 278

B

- Babinet, Jacques* (1794–1872) 566
 Babinet-Prinzip 566
 Bahndrehimpuls 52
 Bahngeschwindigkeit 16
 Bahnlinien 104
 Bahnmoment 393
 Bahnstörungen 57
 Bakteriophage 512
 Balkenbiegung 134, 140
 ballistische Kurve 44
 ballistisches Galvanometer 408
 Ballon 285
 Bandbreite 1080
 Bande 869
 Bandenkopf 869
 Bandenspektrum 869
 Bändermodell 931
 Bandfilter 404, 442
 bar, mbar 95
Bardeen, Brattain, Shockley 943
Bardeen, John (1908–1991) 960
 Bardeen-Cooper-Schrieffer-Theorie 960
 Bariumtitanat 317, 398
 Barkhausen-Effekt 398
 Barkhausen-Röhrenformel 461
 barn 978, 984
 Barometer 99
 barometrische Höhenformel 224
 Baryon 1004, 1021
 Baryonenzahl 1021
 Basilmembran 195, 205
 Basis
 – eines Gitters 889
 – eines Transistors 943
 Basiseinheit 889
 Basis-Strukturfaktor 894
 bathochrome Gruppen 587
 Bauchflächen 184
 Bausteinprinzip 852
 BCS-Theorie 960
 Beauty Quark = Bottom Quark 1023
 Becquerel (= Bq) 999
Becquerel, Henri (1852–1908) 981
Bednorz, J. Georg (1950) 962
 Beer-Gesetz 178, 764
Bekesy, Georg v. (1899–1972) 195
 Beleuchtung 571
 Beleuchtungsichte 571
 Beleuchtungsstärke 571
 Beleuchtungstechnik 602
 Belichtungsmesser 940
 Bénard-Zellen 237
 Bergsteigen 65
Bernoulli, Daniel (1700–1782) 118
Bernoulli, Jakob (1654–1705) 65
Bernoulli, Johann (1667–1748) 65
 Bernoulli-Gleichung 118
 Beschleunigung 11
 Beschleunigungsleistung 76
 Beschleunigungsmesser 202
Bessel, Friedrich Wilhelm (1784–1846) 503
 Bessel-Funktion 171, 526
 Bestrahlung 570
 Bestrahlungsstärke 569
 β^+ -Zerfall 1002
 β -Faltblatt 882
 β -Spektrum 985
 β -Strahlung 982
 Betatron 418, 995
 β -Zerfall 1014, 1035
Bethe, Hans (1906) 989
 Bethe-Logarithmus 775
 Beugung 175, 519
 – atomare 782
 Beugungsbedingung 892
 Beugungsbild 526
 Beugungsgitter 176, 490, 523
 Beugungsgrenze 833
 Beugungslimit 833
 Beugungsspektrum 524 ff.
 Beweglichkeit 328, 458, 467, 937
 – von Elektronen 458
 – von Ionen 333, 467
 Beweglichkeitskante 945
 Bewegung
 – geradlinig gleichförmige 12
 – gleichförmige Kreis- 16
 – gleichmäßig beschleunigte 14
 – unter Reibung 42
 Bewegungsgleichung 12, 15, 80
 Bezugssehweite 495
 Bezugssystem 9, 33, 608
 – rotierendes 56
 Bhabha-Streuung 1017
 Biegung 93, 134
 Bifurkationen 1123
 Big Bang 663
 Bilanzgleichung 1081
 Bild 484
 Bildgröße 495
 Bildkodierung 1117
 Bildkraft 310
 Bildröhre 473
 Bildweite 485
 Bimetallstreifen 210
 bimolekulare Kinematik 940
 bindendes Elektronenpaar 876
 Bindungen 60
 Bindungsenergie 719
 – des H_2 821, 876
 – pro Nukleon 1035
 Bindungstypen 896
 Binnendruck 268, 270
Binnig, Gerd (1947) 450, 512
 Binomialkoeffizient 1047
 Biot-Savart-Gesetz 361
 Biprisma 523
 bistabiles Potential 1096
 Bitter-Streifen 397
 Bjeloussow-Zhabotinski-Reaktion 1111
 Bjerrum-Fehler 906
 Blasenkammer 992
 Blasenkammerspur 1004
 Blasinstrumente 185
 Blasius-Gesetz 125
 Blende 484
 Blindleistung 404
 Blindleistungsmesser 376
 Blindstrom 405
 Blindstromkompensation 405, 407, 415
 Blindwiderstand 404
 Blitz 372, 469
 Bloch-Wände 397
 Bodenfrost 288
 Bodenkörper 275
 Bogenentladung 470
 Bogenmaß 4
Bohr, Niels (1885–1962) 673, 732, 989, 1012
 Bohr-Effekt 1111
 Bohr-Energie 598
 Bohr-Frequenzbedingung 697
 Bohr-Magneton 745, 820
 Bohr-Modell
 – für Kernbahn 880
 – für Quarks 1042
 Bohr-Postulate 715
 Bohr-Radius 733
 Bohr-Sommerfeld Postulate 732
 Bohr-Sommerfeld-Modell 732, 880
 Bolometer 590
Boltzmann, Ludwig (1844–1906) 110, 225, 337
 Boltzmann-Arrhenius-Gesetz 329
 Boltzmann-Konstante 209
 Boltzmann-Nernst-Satz 341
 Boltzmann-Verteilung 224, 225, 1053
 – einfache Herleitung 1081
 Bondisches k -Kalkül 633
Born, Max (1882–1970) 896
 Born-Haber-Kreisprozess 896

- Born-Oppenheimer-Näherung 805
 Bose-Einstein-Kondensat 810
 Bose-Einstein-Kondensation 810, 1083
 Bose-Einstein-Statistik 1068, 1071
 Bose-Flüssigkeit 1071
 Boson 821, 1014, 1068
 bosonische Stimulierung 808
Bothe, Walter W. (1891–1957) 681
 Bottom Quark = Beauty Quark 1023
 Bottonium 1023
 Bourdon-Rohr 282
 Boyle-Mariotte-Gesetz 98, 216
 Brachistochrone 65
Bradley, James (1693–1762) 503
Bragg, William Henry (1862–1942) 857
Bragg, William L. (1890–1971) 858
 Braggs Reflexionsbedingung 531, 858, 892, 964
 Bragg-Spiegel 837
 Brandung 206
Braun, Karl Ferdinand (1850–1918) 455
 braune Zwerg 666
 braunsche Röhre 455
 Bravais-Gitter 890
 Brechen der Wellen 205
 brechende Kante 489
 Brechkraft 492
 Brechung 487
 Brechungsgesetz 173
 – für Elektronen 507
 Brechungsindex 487, 764
 Brechungsindex, makroskopisch 763
 Brechzahl 487, 559
 Breiteneffekt 1031, 1044
 Breit-Rabi-Formel 789
 Breit-Wigner-Formel 153
 Bremsen 65
 Bremsformel 1039
 Bremsstrahlung 862, 881, 980
 Brennlinie 494, 514, 1121
 Brennpunkt 485
 Brennspannung 470
 Brennstoffzelle 346
 Brennweite 485
 – hintere 491
 – vordere 491
 Brewster-Fenster 568
 Brewster-Gesetz 548
 Brewster-Winkel 548
 Bridgman-Verfahren 909
 Brillouin-Streuung 895, 921
 Brillouin-Zone 893, 964
 Brinell-Härte 135
Brown, Robert (1773–1858) 223
 brownische Bewegung 193, 223
 Bruchdehnung 132, 895
 Brücke 140
 Brückenschaltung 323, 481
B-Sterne 821
 bucky ball 910
 Bügeleisen 374
 Bugwelle 201, 206
 Bündel von Strahlen 483
Bunsen, Robert (1811–1899) 120, 572
 Bunsen-Absorptionskoeffizient 275
 Bunsenbrenner 120
 Bunsen-Effusiometer 120
 Burgers-Vektor 951
Busch, Hans (1884–1973) 507
 Büschel von Strahlen 483
- C**
- ¹⁴C-Uhr 987, 1037
c_p und *c_v* 213
c-Achse 886
 Candela (= cd) 571
 Carborund 935
 Cardioide 53
Carnot, Sadi (1796–1832) 229, 231, 249
 Carnot-Maschine 250
 Carnot-Prozess, differentieller 288
 Carnot-Wirkungsgrad 231
 Carnot-Zyklus 221
 Carotinoide 601
 Cäsium-Uhr 5
 Catenoide 87
 C-Atom 878
Cavendish, Henry (1731–1810) 47
 CCD (charge-coupled devices) 590
 CdS-Zelle 940
 Celsius-Skala 211
Čerenkov, Pawel A. (1904–1990) 174, 204, 444, 672
 Čerenkov-Zähler 994
 Ceres-Bahn 57
 CGS-System 3
Chadwick, James (1891–1974) 971, 1002
 Chadwick-Goldhaber-Experiment 1009
 Chalkogene 849
 Chalkogenidglas 944
Chamberlain, Owen (1920) 1004
Chandrasekhar, Subrahmanyan (1910) 822
 Chandrasekhar-Grenze 822, 1074, 1077
 Channeling-Elektronen 593
 Chaos 129, 1102, 1113
 chaotische Trajektorie 1091
 Charakteristik des Zählrohrs 993
 charakteristische Gleichung 150
 charakteristische Strahlung 863, 881
 charge conjugation 1028
 Charge-coupled devices (CCD) 590
 Charles-Gesetz 217
 Charlier-Modell 673
 charm 1023
 charmed quark 1023
 Charmonium 1023
Charpak, George (1924) 994
Chayyám, Omar (1035–1122) 1085
 chemische Bindung 719
 chemische Energie 255
 chemische Fehlordnung 946, 948
 chemische Kinetik 1125, 1128
 chemische Verschiebung 794, 821
 chemisches Potential 810
 Child-Gesetz 460
 Chiralität 1027
 Chladnische Klangfiguren 186
 Chlorophyll 599
 Chopper 589
 Christiansen-Filter 588
 chromatische Aberration 495
 – der Fresnel-Linse 533
 Chromatographie 290
 chromophore Gruppen 587
 Chromosphäre 591
 Cladding 837
Clausius, Rudolf (1822–1888) 37, 1060
 Clausius, Ungleichung von 252
 Clausius-Clapeyron-Gleichung 264
 Clausius-Mosotti-Beziehung 315
 Clebsch-Gordon-Koeffizienten 749
 cloudy crystal ball 975
 cm-Wellen 464
 CN-Zyklus 978
 CO₂ 291
 CO₂, *pV*-Diagramm 267
 CO₂-Krise 35
 CO₂-Laser 835
 COBE-Satellit 580
 Cochlea 195
 Cockcroft-Walton-Beschleuniger 995
 Coehn-Regel 338
 Cohen-Fritzsche-Ovshinsky-Modell 945
 Color 1024
 Colorimetrie 582

- Compound-Kern 983
Compton, Arthur (1892–1962) 680
 Compton-Effekt 680, 726
 Compton-Streuung 1017
 Compton-Wellenlänge 1018
 confinement time 979
Cooper, Leon N. (1930) 960
 Cooper-Paar 960, 967
Copernicus, Nikolaus (1473–1543) 69, 605
Coriolis, Gustave (1792–1843) 56
 Coriolis-Beschleunigung 56, 70, 90
 Coriolis-Kraft 56, 57
Cornell, Eric A. (1961) 811
 Cornu-Spirale 535
 Corona 205, 370, 599
 Corona-Entladung 469
 Cortisches Organ 195
 Coulomb (= C) 294, 318
Coulomb, Charles A. de (1736–1806) 298
 Coulomb-Gesetz 295
 – für Magnetpole 363
 Coulomb-Integral 756
 Coulomb-Kraft 296, 347
 Coulombmeter 410
 Coulomb-Potential 302
 Coulomb-Reibung 40
 Coulomb-Stoßradius 474
 Coulomb-Streuung 702
 Coulomb-Wall 977
 Cowan-Reines-Experiment 1002, 1041
 CP-Invarianz 1028
 CP-Verletzung 1028
 Crab-Nebel 605, 1082
 CsCl-Struktur 887
 Cs-Uhr 465
 CTP-Invarianz 1028
 Curie (= Ci) 999
Curie, Marie (1867–1934) 981, 1037
Curie, Pierre (1859–1906) 392, 981, 1037
 Curie-Gesetz 392
 Curie-Temperatur 367, 394
 Curie-Weiss-Gesetz 394
 cw-Laser 833
 Cygnus X-1 659
- D**
- Dalitz-Plot 1007
 Dampf, übersättigter 268
 Dampfdruck 261
 Dampfdruckdiagramm 277
 Dampfdrucksenkung 277
 Dampfmaschine 219, 227, 229
 Dampfturbine 227
 Dämpfung 150, 414
 Dämpfungskonstante 693
 Dauerstrichlaser 833
Davissou, Clinton J. (1881–1958) 685
de Broglie, Louis (1892–1987) 168, 683, 710
 de Broglie-Beziehung 168
 de Broglie-Welle 683
 de Broglie-Wellenlänge 684
de Gennes, Pierre G. (1932) 956
 de Haas-van Alphen-Effekt 932
 de l'Hôpital-Regel 145
Debye, Pieter (1884–1966) 184, 208, 338, 922
 Debye-Frequenz 197
 Debye-Giauque-Verfahren 274
 Debye-Grenzfrequenz 914
 Debye-Hückel-Länge 338, 375
 Debye-Hückel-Onsager-Theorie 336
 Debye-Hückel-Wolke 375
 Debyes spezifische Wärme 914, 964
 Debye-Scherrer-Verfahren 685, 859
 Debye-Sears-Verfahren 191
 Debye-Temperatur 913
 Debye-Theorie der dielektrischen Polarisierung 373
 Debye-Waller-Faktor 895
 Decelerationsparameter 661
 Defektelektronen 935
 Definition, operationelle 2
 Deformationsenergie 134
 deformierbarer Körper 93
Dehmel, Hans G. (1922) 798
Dehmel, Hans-Georg (1922) 464, 465
 Dehnung 130
 Dehnungsmessstreifen 330, 924
 Dehnungsmodul 130
 Deklination 368
 Dekrement, logarithmisches 150, 414
 Delokalisierung 817
 δ -Cephei-Sterne 205
 δ -Funktion 711
 Dendriten 1119
 Dephasierung 792
 des H₂ 881
Descartes, René (1596–1650) 483
 Descartes-Regel 1108, 1127
 Destillation 277, 292
 Detektor-Teleskop 1039
 Determinismus 1085
 deterministisches Chaos 1102, 1115
 Deuterium 973
 Deuteron 973
 Dewar-Gefäß 241
 Dezibel 194
 Dialyse 276
 Diamagnetismus 392
 Diamant 888, 896, 904, 909
 Diamantgitter 887, 963
 Diamant-Schleiferei 963
 Dia-Projektor 498
 Diathermieströme 418
 Dichroismus 547
 Dichte 13, 898
 Dichteanomalie des Wassers 905
 Dichtemodulation 463
 Dicke-Brans-Jordan-Theorie 655
 Dielektrika 312
 dielektrische Medien, dünne 764
 dielektrische Polarisierung 313, 314, 558
 dielektrische Relaxation 315
 dielektrische Suszeptibilität 313, 764
 dielektrische Verluste 315
 dielektrische Verschiebung 357
 Dielektrizitätskonstante 312
 – von Ionenkristallen 919
 Diesel-Motor 221, 229, 231
 differentieller Widerstand 470
 differentieller Wirkungsquerschnitt 703
 differentielles Ionisierungsvermögen 468
 Diffusion 224, 238, 239
 – von Fehlstellen 947
 Diffusionsgleichgewicht 225
 Diffusionsgleichung 966
 Diffusionskonstante 240
 Diffusionspumpe 238, 280
 Diffusionsstrom 225
 Digitalanzeiger 555
 Dilatation 93
 Dimension 3
 Dingweite 485
 Diode 449
 – Halbleiter- 941, 965
 Diodenlaser 837
 Dioptrie 492
 Dipol 308
 Dipolantenne 437
 Dipol-Auswahlregel 768
 Dipolbindung 896, 903
 Dipolfeld 57, 367
 Dipolkräfte, optische 778
 Dipolkristall 903, 963
 Dipol-Matrixelement 765, 767
 Dipolmoment 308, 313

- Dipol-Operator 767
Dirac, Paul A.M. (1902–1984) 294, 1002, 1029
 Dirac-Gleichung 184, 751
 direkte Bandlücke 837
 Direktionskraft 19
 Dislokation 899, 938, 950
 dispergierende Materiewellen 184
 disperse Phase 339
 Dispersion 169, 199, 205, 440, 489, 557
 – akustische 178
 – anomale 199
 – im interstellaren Plasma 1083
 – normale 199, 489
 – von Wasserwellen 199
 Dispersionsbereich 541
 Dispersionsbeziehung 183
 Dispersionsformel 964
 Dispersionskräfte, Londonsche 902
 Dispersionskurve, Theorie 559
 Dispersionsmittel 339
 Dispersionsrelation für
 Gitterschwingungen 915, 964
 Dispersionsstufe 178
 dissipativ 24
 dissipative Strukturen 1082
 dissipatives System 1092
 Dissoziation 375, 882
 Dissoziationsenergie 882
 Dissoziationsgrad 335, 375
 Dissoziationskinetik 375
 Divergenz 106, 830
D-Linien 694
 DNS 512
 Donatorterm 939
 Doppelbrechung 544 ff., 568
 Doppelhelix 882
 doppellogarithmischer Auftrag 8
 Doppelpulsar 656
 Doppelschichtlinse 509
 Doppelspalt 567, 688
 Doppelspalt, Beugung am 687
Doppler, Christian (1803–1852) 177
 Doppler-Effekt 176, 177, 203, 505, 778
 – transversaler 670
 Doppler-Effekt, transversal 622
 Doppler-Temperatur 780
 Doppler-Verbreiterung 727
 Dosimetrie 467, 999, 1039
 Dosis 1000
 – tödliche 1002
 Dosisäquivalent 1000
 Dosisleistung 1000, 1039
 Dotierung 937, 938, 945
 Drahtkammer 994
 Drahtwellen 438
 Drallstabilisierung des Kreisels 43
 Drehachse 72
 – momentane 88
 Drehbeschleunigung 73
 Dreheisen-Messwerk 409
 Drehfeld 423
 Drehgeschwindigkeit 73
 Dreheisen-Messwerk 409
 Drehfeld 423
 Drehgeschwindigkeit 73
 Drehimpuls 27, 76
 Drehimpulsbarriere 807
 Drehimpulsoperator 728, 738
 Drehimpulsquantenzahl 738, 851
 Drehimpulsatz 26, 77
 Drehkondensator 415
 Drehkristallmethode 859
 Drehmoment 76
 Drehpendel 85
 Drehschieberpumpe 279
 Drehschwingung 85
 Drehspiegelmethode 504
 Drehspulamperemeter 408
 Drehstrom 411
 Drehstrom-Asynchronmotor 422
 Drehung der Polarisationssebene 553
 Drehung, infinitesimale 73
 Drehwaage 47
 Dreiecksschaltung 411
 Dreierstoß-Rekombination 698
 3-Kelvin-Strahlung 580
 Dreiphasenmotor 422
 Dreiphasenstrom 411
 Driftgeschwindigkeit 466
 Driftkammer 995
 Drillung 93, 131
 dritte Spektroskopie 1024
 Dritter Hauptsatz der Wärmelehre 259, 260
 Drosselspule 470
 Druck 95
 Druck eines Gases 136, 214 ff.
 Druckabhängigkeit des Widerstandes 330
 Druckamplitude 162
 Druckarbeit 95, 220
 Druckaufschmelzung 291
 Druckfestigkeit 133
 Druckkraft 111
 Druckkraftdichte 116
 Drucksonde 119
 Druckverbreiterung 694
Drude, Paul (1863–1906) 923, 928
 Drude-Absorption 928
 Drude-Ansatz 474
 Drude-Lorentz-Theorie 923
 Dualität des Lichtes 678
 Duane-Hunt-Gesetz 863
 Duffing-Schwinger 1094
 Düker-Möllenstedt-Versuch 726
 Dulong-Petit-Regel 213, 911, 927
 Dunkeladaptierung 501, 571
 Dunkelentladung 469
 Dunkelfeldbeleuchtung 172
 Dunkelfeldkondensator 498
 dunkle Masse 666
 dünne Plättchen 537
 Dünnschicht-Elektrolyse 376
 Duplex-Interferometrie 541
 Durchgriff 461
 Durchschlag 482
 Durchschlagsfeldstärke 469
 Durchschlagskraft von Geschossen 29
 durchstimmbare Laser 838
 Durchstrahlungsmikroskop 511
 Durchtritt durch den Potentialtopf 730
 Durchtritt durch Potentialsschwellen 718 ff.
 Düsenantrieb 27, 28
 Dynamik 12
 – autonome 1087
 – deterministische 1086
 – diskrete 1087
 – probabilistische 1086
 – stetige 1086
 – stochastische 1086
 dynamische Zähigkeit 109
 dynamischer Auftrieb 117
 dynamisches System 1086
 dynamoelektrisches Prinzip 400
 Dynamomaschine 399
 Dynamotheorie 368
 Dynode 451

E

- e/m*-Bestimmung 473
 Ebbe und Flut 51
 ebener Raum 663
 Ebullioskopie 277
 ebullioskopische Konstante 277
 Echelette-Gitter 531
 Echo-Satellit 515
k-Raum 891
p · *A*-Kopplung 766
r · *E*-Kopplung 766
Eddington, Arthur S. (1882–1944) 294, 668, 1040
 Eddington-Dirac-Beziehung 674
 Eddington-Grenze 1077

- Edelgase 849
 EDFA 836
 edge dislocation 950
 effektive Masse 934, 965
 Effektivspannung 401, 402
 Effektivwerte 401
 Effusiometer 120
 Eggert-Saha-Gleichung 451
Ehrenfest, Paul (1880-1933) 967
 Eichung 649
Eigen, Manfred (1927) 1079
 Eigenfehlstelle 946
 Eigenfrequenz 182
 Eigenfunktion 707
 Eigenhalbleitung 937
 Eigenschwingung 181, 182, 439
 Eigenvektor 77, 1080, 1088
 Eigenwert 707, 1088
 eightfold way 1020
 einachsige-negative Kristalle 545
 Eindringtiefe für Totalreflexion 488
 Einelektronenatom 743
 einfach-kubische Gitter 887
 Einfangquerschnitt
 – für Elektronen 700
 – für Neutronen 974, 1010, 1041
 eingefrorene Fehlordnung 947
 eingefrorene Freiheitsgrade 213
 Einheiten 2, 3
 Einkristall 945
 einsames Elektronenpaar 904
 Einschlusszeit (confinement time) 979
 Einschwingvorgang 157
 Einschwingzeit 154
Einstein, Albert (1879–1955) 54, 55, 139, 538, 576, 673, 678, 683, 911, 1012, 1029
 Einstein-A-Koeffizient 770, 825
 Einstein-Beziehung 225
 Einstein-B-Koeffizient 773
 Einstein-de Haas-Effekt 395
 Einstein-Gleichung 449
 Einstein-Koeffizient 577
 Einstein-Raum 663
 Einsteins Ableitung des Planck-Gesetzes 577
 Einstein-Smoluchowski-Formel 223
 Einstein-Temperatur 912
 Einstein-Theorie der spezifischen Wärme 964
 Einstein-Viskosität 139
 Einstein-Weltall 662
 Einzellinse 509
 Einzugsgebiete 1090
 Eis 888, 896, 903
 Eisdecke, Dickenwachstum 291
 Eisenkern 415
 Eisen-Kristall 963
 Eisenverluste 416
 Eisgitter 887, 963
 Eiszapfen 904
 EKG 410
 elastische Dämpfung 140
 elastische Energie 134
 elastische Energiedichte 134
 elastische Hysterese 133, 950
 elastische Konstanten 133
 elastische Kraft 19
 elastische Membran 184
 elastische Nachgiebigkeit 949
 elastische Nachwirkung 133
 elastische Streuung 983
 elastischer Stoß 805
 Elastizitätsgrenze 132
 Elastizitätsmodul 130, 895
 – von Gummi 955
 elastische Welle 162
 Elektret 398
 elektrische Elektronenlinse 509
 elektrische Erregung 357
 elektrische Feldstärke 296, 297
 elektrische Ladung 293
 elektrische Leitfähigkeit 328, 474
 – des Plasmas 474
 elektrische Leitung von Metallen 929
 elektrische Polarisierbarkeit 763
 elektrische Relaxation 330
 elektrischer Fluss 297
 elektrischer Unfall 373, 375
 elektrisches Feld 296, 357
 elektroakustische Schallgeber 197
 elektrochemisches Äquivalent 332
 elektrochemisches Potential 336, 337
 Elektrode 331
 Elektrodynamik 379 ff.
 elektrodynamisches Messwerk 408
 Elektrodynamometer 376
 Elektrokardiograph 410
 Elektrolumineszenz 943
 Elektrolumineszenzdioden 837
 Elektrolyse 331
 Elektrolyt 331
 – starker 336
 elektrolytische Polarisation 342
 elektrolytischer Trog 510
 Elektromagnet 364
 elektromagnetische Wellen 425 ff.
 Elektrometer 307
 Elektromotor 389, 420
 Elektron 294, 447 ff.
 Elektronegativität 881
 Elektronenaffinität 875, 881
 Elektronenbeugung 684, 687
 Elektronengas 474
 Elektronen-Hohlspiegel 509
 Elektroneninterferenz 683
 Elektronenlinse
 – elektrische 509
 – magnetische 510
 Elektronenmikroskop 507, 511
 Elektronenoptik 507
 Elektronenradius, klassischer 1041
 Elektronenröhre 458
 Elektronenspiegel 518
 Elektronen-Spin 759
 Elektronenstrahlzilloskop 455
 Elektronenstreuung im Neutron 1019
 Elektronen-Synchrotron 995
 elektrooptischer Effekt 555
 Elektroosmose 339
 Elektrophorese 339, 376
 elektroschwache Wechselwirkung 1016
 Elektrostatik 293, 318, 346
 elektrostatische Energie des Kerns 1035
 elektrostatischer Entstauber 372
 elektrostatischer Generator 996
 Elektrostriktion 197, 317
 Elektrozähler 409
 Elementarladung 294
 Elementarlänge 1040
 Elementarteilchen 1002
 Elementarzeit 1013, 1022
 Elementarzelle 889
 Ellipsenbahn 52
 ellipsoide Kerne 975
 elliptische Polarisation 543
 Elmsfeuer 469
e-Messung 307, 373
 Emissionsdichte 570
 Emissionsmikroskopie 511
 Emissionsvermögen 236
 Emitter 943
E-Modul 132, 963
 Empfindlichkeit 84, 408
 Enddruck 279
 endergonische Reaktion 258
 Endmaße 3
 endotherme Reaktion 258
 Energie
 – freie 253
 – geothermische 36
 – kinetische 22
 – potentielle 24
 Energie, relativistisch 642
 Energieauflösung 991

- Energiebänder 931
 Energiedichte 169, 316, 431
 – des Magnetfeldes 388
 Energiedosis 1000
 Energieeigenwert 716 ff.
 Energie-Impuls-Relation, relativistisch 642
 Energiekrise 35
 Energielücke 960
 Energie-Masse-Äquivalenz 643
 Energieoperator 713, 715
 Energiequantum 576
 Energiesatz 180
 – mechanischer 25
 – quantenmechanischer 716
 – thermodynamischer 218
 Energiespektrum
 – der β -Teilchen 985
 – der Primärstrahlung 1031
 Energiestromdichte 169, 431
 Energietal 974
 Energieübertragung beim Stoß 34
 Energieverlust schneller Teilchen 989
 Ensemble von Gibbs 1056
 entarteter Eigenwert 707
 entartetes Gas 926, 1072
 Entartung 188, 707
 Entartungstemperatur 926, 1072
 Entdämpfung 1097
 Enthalpie 253, 1061
 Entmagnetisierung 391
 Entmischung 289
 Entropie 242, 243, 1048, 1060
 – ideale 248
 – und Information 1048 ff., 1079 ff.
 – und Wahrscheinlichkeit 242 ff., 1048 ff.
 Entropiekraft 954
 Entropiequelle 1082
 Entropiestrom 1081
 Entsalzung 291
 Enzym 259, 1067
Eötvös, Loránd (1848–1919) 47
 epitaxiales Wachstum 908
 Epizentrum 203
 Epizykloide 1121
 Erbium-Laser 836
 Erdalkalien 849
 Erdbebenwellen 203
 Erde, Alter der 288
 Erden 849
 Erdkern 203
 Erdmagnetismus 367
 Erdrotation 61
 Erdsatellit 515
 Ereignis, relativistisch 608
 Ereignishorizont 665
 ergodisch 1114
 Erhaltung der Ladung 294
 Erhaltungssätze 59, 1026
 Erholungszeit 947, 993
 Ermüdung des Lichts 665
 Ersatzschaltbild 407, 417
 Erstarren 266
 Erster Hauptsatz der Wärmelehre 217
 Erwartungswert 711
 erweitertes kosmologisches Postulat 664
 Erzeugung von Magnetfeldern 353
 erzwungene elektrische Schwingung 414
 erzwungene Emission 577, 603
 erzwungene Schwingung 154
 Esaki-Diode 464, 943
 η -Meson 1003
 Euklid-Algorithmus 204
 Euklidischer Raum 663
Euler, Leonhard (1707–1783) 135, 143, 910
 Euler-Knicklast 135
 Eustachische Röhre 195
 Evolution 1125
 Ewald-Konstruktion 893
 Excimer-Laser 835
 Exciton 966
 Exciton-Supraleiter 957
 exergonische Reaktion 258
 Exosphäre 286, 1034
 exotherme Reaktion 258
 Expansion des Weltalls 660 ff.
 exponentieller Zerfall 824
 Extinktionskoeffizient 556
 Exzentrizität einer Ellipse 52
 Eyring-Glasstone-Laidler-Theorie 1066
- F**
- Fabry-Pérot-Interferometer 540, 831
 Facettenauge 567
 Fadenelektrometer 307
 Fading 444
 Fall, freier 15
 Fall, freier mit Luftwiderstand 43
 fallende Kennlinie 464
 fallende Widerstandskennlinie 470
 Fallschirm 66
 Farad (= F) 305
Faraday, Michael (1791–1867) 332, 379, 1012
 Faraday-Becher 304
 Faraday-Dunkelraum 470
 Faraday-Gesetze der Elektrolyse 332
 Faraday-Käfig 304
 Faraday-Konstante 333
 Farbdreieck 582, 605
 Farbe der Quarks 1024
 Farbenblindheit 582
 Farbfernsehen 583
 Farbfilm 587
 Farbkuppler 587
 Farbladung 1024
 Farbmetrik 582
 Farbstofflaser 838
 Farbstoffe 587
 Farbtemperatur 581, 604
 Farbton 582
 Farbzentren 949
 Faserlaser 836
 Fast Fourier Transform, FFT 149
 Fata Morgana 517
 Federkonstante 19, 134
 Fehler
 – absoluter 5
 – grober 5
 – konstanter 5
 – parallaktischer 5
 – relativer 5
 – systematischer 6
 – zufälliger 6
 Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß 6, 8
 Fehlerquadrat,
 mittleres = Standard-Abweichung 6
 Fehlerrechnung 5 ff.
 Fehlordnung 946
 Feigenbaum-Szenario 1096, 1103
 Feigenbaum-Zahl 129, 1103
 Feinstruktur 750, 821
 Feinstruktur im Wasserstoff 750
 Feinstrukturkonstante 734, 855, 866, 1013
 Feinvakuum 283
 Feldbogen 470
 Feldemission 450, 721
 Feldemissions-Mikroskop 372
 Feldenergie, elektrische 310, 316
 Felder, konservative 24
 Feldgradient 998
 Feldlinien 25
 Feldlinse 497
 Feldquanten 1015
 Feldstärke
 – des Gravitationsfeldes 48
 – elektrische 296
 Femtosekundenlaser 842
Fermat, Pierre (1601–1665) 537

- Fermat-Prinzip 173
Fermi, Enrico (1901–1954) 669, 976, 985, 1002, 1010, 1014, 1031, 1074
 Fermi-Beschleuniger 1044
 Fermi-Dirac-Statistik 1068
 Fermi-Druck 819, 822
 Fermi-Einheit (10^{-15} m = 1 fm) 3
 Fermi-Energie 926
 Fermi-Fläche 932
 Fermi-Gas 473, 818, 925, 1071, 1076
 Fermi-Grenze 344, 964, 1070
 Fermi-Impuls 925
 Fermion 821, 1014, 1068
 Fermi-Statistik 1014
 Fermi-Theorie
 – des β -Spektrums 1083
 – energiereicher Stöße 1074
 Fermi-Verteilung 448, 1070
 Fernkraft 55
 Fernleitung 441
 Fernrohr 499
 Fernrohr-Auflösung 526
 Fernsehantennenkabel 438
 Fernsehöhre 455, 481, 940
 Fernsehschirm 695
 Ferraris-Zähler 409
 Ferrielektrizität 398
 Ferrimagnetismus 398
 Ferrit 398
 Ferritkern 415
 Ferroelektrizität 398
 Ferromagnetismus 393
 Feshbach-Porter-Weisskopf-Modell 975
 feste Körper 93
 Festigkeitsgrenze 132
 Festkörper 93, 460, 884
 Festkörperlaser 836, 945
 Fettauge 103
 Fettfleckphotometer 572
 feuchtadiabatischer Gradient 595
 Feuchte 262
Feynman, Richard P. (1918–1988) 1012, 1042
 Feynman-Graphen 1016
 FFAG-Fokussierung 998
 Fibonacci-Folge 189, 204
 Ficksche Gesetze 238
 Figurenachse 88
 Filter
 – akustisches 192
 – elektrisches 404
 Filter, elektrisches 442
 Filter, optisches 588
 Fixpunkt 1087
 Fixpunkte der Temperaturskala 211
 Fixsternparallaxe 605
Fizeau, Armand (1819–1896) 504, 516
 Fizeau-Versuch 669
 Fizeau-Zahnradversuch 504
 Flächensatz 26, 27, 52
 Flächenträgheitsmoment 140
 Flachwasserwellen 200
 Flageolet 184
 Flammenionen 452
 Flare 369
 Flaschenzug 82
 flavor 1016, 1022
 Fledermaus-Sonar 204
 Flettner-Rotor 139
 Fließen 132
 Flucht vor dem Zwang 266
 Fluchtgeschwindigkeit 30
 Flugzeug, dynamischer Auftrieb 128, 138
 fluide Körper 94
 Fluidität 109
 Fluoreszenz 694
 Fluoreszenzlöschung 695
 Fluss 105
 – elektrischer 297
 flüssige Luft 272
 flüssiges Helium 272, 1083
 Flüssigkeit 93
 – ideale 115, 118
 – inkompressible 104
 Flüssigkeitsmanometer 99
 Flüssigkeitsthermometer 210
 Flüssigkristalle 555
 Flussmittel 695
 Flussquant 967
 Flussregel 297, 301, 302
 Flussrichtung 942
 Flussschlauch-Zustand 959
 Flussspatgitter 887
 Flussspatoptik 588
 Fokussierung, starke und schwache 996, 998
 formelastisch 93
 Formierung einer Glühkathode 449
 Fortrat-Diagramm 872
Foucault, Léon (1819–1868) 504, 517
 Foucault-Drehspiegel 504
 Foucault-Pendel 57, 70
Fourier, Jean-Baptiste (1768–1830) 146, 168, 186, 208, 592, 707
 Fourieranalyse 146
 Fourier-Integral 148, 727
 Fourier-Reihe 146, 727
 Fourierspektrum 146
 Fourier-Synthese 528
 Fourier-Transformation 894
 – diskrete 148
 Fourier-Transformations-Spektrometer 566
 fovea centralis 496, 502, 526
 Fragmentation eines Quarkpaares 1025
 Fragmente der Kernspaltung 976
 Fraktale 1091, 1115
 fraktale Dimension 1115
 fraktales Wachstum 1118
 fraktionierte Destillation 278
Franck, James (1882–1964) 696
 Franck-Condon-Prinzip 874
 Franck-Hertz-Versuch 696
 Frank-Read-Quelle 952
Fraunhofer, Joseph (1787–1826) 532
 Fraunhofer-Beugung 532
 – am Kreisloch 525
 – am Spalt 525
 Fraunhofer-Linien 576, 596
 freie Achse 88
 freie Elektronen 326, 448
 freie Energie 253, 1061
 freie Enthalpie 253
 freie Flugdauer 466
 freie Ströme 390
 freie Weglänge 286, 466
 – mittlere 222, 286
 freier Fall 15
 freier Induktionszerfall 792
 freier Spektralbereich 505
 Freier-Elektronen-Laser (FEL) 839
 Freiheitsgrad 72, 182, 211
 – eingefrorener 213
 – mechanischer 72
 – sechster 213
 fremderregter Generator 400
 Frenkel-Fehlstellen 938, 946
 Frequenz 20
 – einer Welle 164 ff.
 Frequenzband 168
 Frequenz-Messbrücke 442
 Frequenzmodulation 159
 Frequenznormale 798
 Frequenzspektrum 146
Fresnel, Augustin J. (1788–1827) 173, 519, 521, 538, 543, 550, 687
 Fresnel-Beugung 176, 535
 Fresnel-Biprisma 372, 523
 Fresnel-Doppelspiegel 566
 Fresnel-Formeln 549
 Fresnel-Linsen 532
 Fresnel-Spiegel 521, 566
 Fresnel-Zonenplatte 533

- Friedmann, Aleksandr A.* (1888–1925) 663
 Friedmann-Raum 663
 Friedmann-Zeit 661, 663
Friedrich, Walther (1883–1968) 857
 Frontlinse 498
 Frostschutzmischung 292
 Fujiyama-Modell 970
 Fulleren 909, 910
 Fundamentalschwingungen 181
 Funken 469, 471
 Funkenkammer 992
 Funkenschlagweite 471
 Funkenstrecke 471
 Funktion-Vektor-Analogie 705
 Funkverkehr 476
 Fusion 37, 977, 1036
 Fusionsenergie 37
 Fusionsplasma 477
 Fusionstemperatur 727
 fuzzy logic 1124
F-Zentrum 949
- G**
- Gaede, Wolfgang* (1878–1945) 238, 280
 Gaede-Pumpe 280
 galaktische Magnetfelder 593
 Galaxienhaufen 287
 Galaxienquintette 676
 Galaxis-Rotation 92
Galilei, Galileo (1564–1642) 12, 62, 68, 502, 503
 Galilei-Fernrohr 499
Galle, Johann Gottfried (1812–1910) 57
 galvanische Abscheidung 331
 galvanische Elemente 341
 Galvanometer 408, 442
 Gamma-Astronomie 501
 γ -Elektroskop 1000
 γ -Lebensdauer 1014
 γ -Resonanzabsorption 682
Gamow, George (1904–1968) 663
 Gamow-Modell 1038
 Gangunterschied 520
 Gasballast 280
 Gasdruck 98, 136, 214
 Gasdynamik 120
 Gase 93
 Gasentartung 925, 1068
 Gasentladung 465
 – selbständige 469
 – unselbständige 469
 Gasentladungslampe 471, 591
 Gaskinetik 214
 Gaskonstante 216
 Gaslaser 833
 Gasthermometer 217
 Gasturbine 227
 Gasverflüssigung 270
 Gaszentrifuge 290
 Gate 944
Gauß, Carl Friedrich (1777–1855) 57, 368, 464
 Gauß-Funktion 61, 1051
 Gauß-Ostrogradski-Satz 106, 297, 302, 1119
 Gaußscher Satz 297
 Gaußstrahlen 829
 Gauß-Verteilung 7, 701
 Gauß-Zahlenebene 143
 Gay-Lussac-Gesetz 216
 gebundene Ströme 390
 Gefrierpunktssenkung 277
 Gegeninduktivität 389
 Gegenionenwolke 375
 Gegenkapazität 390
 Gegenkopplung 462
 Gegenstandsgröße 495
 Gegenstandsweite 485
 Gegenstrom-Wärmeaustauscher 271
 Geigenspiel 1097
Geiger, Hans (1882–1945) 681, 701, 992
 Geiger-Müller-Zähler 373, 467
 Geiger-Nuttall-Regel 987, 1039
 Geiger-Reichweitegesetz 990
 Geißler-Rohr 470
 gekoppelte Pendel 181
 Gelbfilter 568
Gell-Mann, Murray (1929) 1019
 Gemenge 275
 Genauigkeit 408
 Generator 399, 420
 genetische Mutation 1001
 geodätische Linie 653
 Geomagnetismus 367 ff.
 Geometrie
 – π 4
 geometrische Atomoptik 782
 geostationärer Satellit 67
 geothermische Energie 36
 geothermische Tiefenstufe 367
 geradlinig gleichförmige Bewegung 12
 Geräusch 191
Germer, Lester H. (1896–1971) 685
 Gesamtpuls 23
 gesättigte Lösung 275
 gesättigte Verstärkung 828
 Geschossdrill 92
 Geschosseschwindigkeit 27
 Geschwindigkeit 10
 Geschwindigkeitsamplitude 169
 Geschwindigkeitspotential 108
 Geschwindigkeitsraum 226
 Geschwindigkeitsverteilung (Maxwell) 226
 Gesetz von Blasius 138
 Getriebe 82
 Getterpumpe 281
 Gewächshauslampen 472
 Gewicht 16
 Gewitter 469
 Gewittertheorie 372
 Gezeitenbremsung 61
 Gezeitenenergie 36
 Gezeitenkraft 49, 50, 68
 gezogener Lauf 92
g-Faktor 745
 gg-, gu-, uu-Kerne 973
Gibbs, Willard (1839–1903) 253, 267
 Gibbs-Ensemble 1056
 Gibbs-Phasenregel 267
 Gibbs-Potential 253, 1061
Gilbert, William (1544–1603) 367
 Gitter 523
 – Auflösungsvermögen 529
 – einer Röhre 461
 Gitterdynamik 915
 Gitterenergie 895
 Gitterfehler 945
 Gitterkonstante 857
 Gitterschwingung 182, 910
 Gitterspektrograph
 – Auflösungsvermögen 529
 Gittervektoren 889
 Glas 884, 944
 – elektrische Eigenschaften 944
Glaser, Donald A. (1926) 992
 Glasfaser 488
 Glaskörper 501
 gleichförmige Kreisbewegung 16
 Gleichgewicht
 – indifferentes 82
 – labiles 82
 – stabiles 82
 – thermodynamisches 251, 1060
 Gleichgewichtsbedingungen 80
 Gleichgewichts-Isotopieeffekt 1082
 gleichmäßig beschleunigte Bewegung 14
 Gleichrichter 449
 Gleichrichterkennlinie 942
 Gleichstrom 318, 322
 Gleichstrommotoren 421

- Gleichverteilungssatz 208, 212, 911, 1065
 Gleitebene 950
 Gleitreibung 40, 114
 Glimmentladung 470
 Glimmlampe 469, 472
 Glimmlicht, negatives 470
 Glimmzünder 482
 Global Positioning System 803
 Glowkurve 966
 Glühemission 447, 1082
 Glühlampe 575, 604
 Glühstrumpf 589
 Gluon 1015, 1016
G-Messung 67
G-Modul 132
 Goepfert-Mayer, Jensen-Modell 974
 Golay-Zelle 590
 Goldene Regel der Mechanik 82
 Goldener Schnitt 189, 204
 Golfstrom 285
 Goos-Hänchen-Effekt 488
 Gouy-Phase 830
 GPS 800, 803
 Gradient 25, 232
 Gradientendrift 479
 Graetz-Schaltung 402
 Grammatom 212
 grand unification 1016, 1022
 grand unified theories (GUT) 1028
 Granulation 599
 graphischer Fahrplan 668
 Graphit 888, 909
 Graphit-Moderator 1041
 grauer Strahler 581
 Gravitation 1, 46, 1012
 Gravitationsfeld 48
 Gravitationsgesetz 46
 Gravitationskollaps 658
 Gravitationskonstante 86
 Gravitationslinse 666, 676
 Gravitationspotential 49
 Gravitationstheorie, einsteinsche 652
 Gravitationswellen 655, 674
 Gravitationswellen-Interferometer 542
 Graviton 971, 1012
 Gray (= Gy) 1000
 Grenzbedingung = Randbedingung 187
 Grenzflächenspannung 103
 Grenzfrequenz der Röntgenstrahlung 863
 Grenzkurve der Supraleitung 958
 Grenzschiicht 124
 Grenzschiichtablösung 125
 Grenzwert des β -Strahlers 985
 Grenzwinkel 487
 Grenzyklus 129, 1087, 1091
 große Vereinheitlichung 996, 1016, 1022
 Gross-Pitaevski-Gleichung 813
 Grundgesamtheit 61
 Grundgitterabsorption 938
 Grundschiwingung 146, 182
 Grundvektoren 889
 Grundzustand 697
 Grüneisen-Kurve 930
 Gruppengeschwindigkeit 168, 200, 206, 505, 506
Guericke, Otto v. (1602–1686) 136
 Gummielastizität 955
 Gunn-Diode 463, 464, 943
 GUT (grand unified theories) 1028
 Güte des Schwingkreises 415
 Gütefaktor 151, 157
 Güteschaltung 839
 Gyromagnet 745
 gyromagnetisches Verhältnis 395, 745, 820
- H**
- H₂-Molekül 876
 H₂O-Molekül 877
 Haarhygrometer 263
 Hadron 1021
 Hadronenära 675
 Hadronenerzeugung 1025
 Hadron-Jets 1025
 Haftreibung 40
 Haftspannung 103
 Haftstellen 940
 Hagen-Poiseuille-Gesetz 112
Hahn, Otto (1879–1968) 976
 H-ähnliche Störstelle 939
 Haidinger-Streifen 540
 Halbkristalllage 907
 Halbleiter 933, 935
 Halbleiter-Bauelemente 941
 Halbleiterdetektor 329, 590, 991
 Halbleiterelemente 463, 464
 Halbleiter-Kinematik 940
 Halbleiter-Laser 944
 Halbwertszeit 986
Hall, Edwin H. (1855–1938) 350
 Hall-Effekt 350
 – Quanten- 965
Halley, Edmond (1656–1742) 61
 Hall-Generatoren 350
 Hall-Spannung 350
 Hallwachs-Effekt (= Photoeffekt) 449
 Hall-Widerstand 965
 Haloerscheinung 516
 Halogene 849
 Halogenlampe 604
Hamilton, William R. (1805–1865) 59, 710
 Hamilton-Funktion 59, 1092
 Hamilton-Mechanik 59
 Hamilton-Operator 713, 717
 – im Magnetfeld 729
 Hämoglobin 65, 1110
 Hämolyse 276
 Hangabtrieb 85
 harmonische Schwingung 18, 141
 harmonische Welle 161, 710
 harmonischer Oszillator 722, 724, 871, 1054, 1055
 Härte 135
 – der Röntgenstrahlung 863
 harte Myon-Komponente 1032
 harte Supraleiter 958, 960
 hartmagnetisch 394
 Hauptachse, optische 545
 Hauptachsen 88
 Hauptachsentransformation 707
 Hauptebene der Linse 493
 Hauptkrümmung 655
 Hauptkrümmungsradien 187
 Hauptpunkte der Linse 493
 Hauptquantenzahl 740, 850
 Hauptreihensterne 596
 Hauptsatz der Wärmelehre
 – Dritter 259, 260
 – Erster 217
 – Zweiter 248
 Hauptschluss 400
 Hauptschlussmotor 422
 Hauptträgheitsachsen 77
 Hausdorff-Dimension 1115
 Hauteffekt 424
Hawking, Stephen W. (1942) 673
 Hawking-Strahlung 659, 673
 H-Bombe 478, 978
 H-Brücke 882, 903
 H-Brücken 599
³He-⁴He-Verfahren 273
 Hebel 82
 Hebelgesetz 81
 Hefner-Kerze (= HK) 571, 602
Heisenberg, Werner (1901–1976) 129, 397
 Heisenbergsche
 Unbestimmtheitsrelation 691, 712
 Heißluftmotor 229

- Heitler-London-Methode 878
 Heizofen 235
 Heizung 288
 Heizwert 290
 Helium 4 1083
 Helium II 1083
 Helium-Atom 755
 Helium-Neon-Laser 833, 834
 Helium-Problem 675
 Helizität 1027
 Helladaptierung 571
 Helligkeit der Sterne 603
Helmholtz, Hermann v. (1821–1894) 126, 192, 195, 501, 582
 Helmholtz-Gleichung 259, 260
 Helmholtz-Potential 253, 1061
 Helmholtz-Spulen 454
 Henry (= H) 386
 Henry-Dalton-Gesetz 275
 Herbstlaub 138
 Hermite-Polynome 723
 Hermiteische Differentialgleichung 723
 hermitescher Operator 707, 708
Herschel, Wilhelm (1738–1822) 587
Hertz, Gustav (1887–1975) 696
Hertz, Heinrich (1857–1894) 430, 563, 597, 700, 1013
 Hertz-Oszillator 433
 Hertscher Dipol 761
 Hertzprung-Russell-Diagramm 596
 Hertz-Wellen 430
Hess, Viktor (1883–1964) 1030
 heteropolar 896
 heteropolare Bindung 875
 Heusler-Legierungen 394
 hexagonal dichtes Gitter 888
 hexagonal dichteste Kugelpackung 885
H-Feld 356
 Hg-Hochdrucklampe 591
 Hg-Höchstdrucklampe 472
 HiFi-Empfang 159
 Higgs-Teilchen 666, 1028
Hilbert, David (1862–1943) 705
 Hilbert-Raum 705, 728
 Himmelsblau 562
 Hintergrundstrahlung 580, 1031
 Hittorf-Dunkelraum 470
 Hittorf-Überführungszahlen 335
 Hitzdrahtamperemeter 410
 H-Maser 465
 Hoch- und Tiefdruckgebiete 57
 Hochdrucklampe 469
 Hochfrequenzströme 418
 Hochleistungs-Laserdioden 838
 Hochpass 404
 Hochpolymere 952, 956
 Hochspannungskabel 373
 Hochtemperatur-Supraleiter 962
 Hodograph 38
 Hof um Sonne und Mond 567
 Hofstadter-Versuch 1019
 Höhenformel, barometrische 99
 Höhen Sonne 471
 Hohlleiter 437, 439
 Hohlraamoszillator 431, 439
 Hohlraumresonator 440
 Hohlraumstrahlung 575
 Hohlspiegel 484
 Hohlwelttheorie 516
 Hohmann-Bahnen 68
 holländisches Fernrohr 499
 Holographie 534
 homogene lineare Differentialgleichung 150
 Homogenität
 – der Zeit 59
 – des Raumes 59
 homöopolar 896, 898
 homöopolare Bindung 876
 Hookesches Gesetz 722
 hooksches Gesetz 130
 Hopf-Bifurkation 1123
 Hörfläche 194
 Hornhaut 501
 horror vacui 278
 Hörschwelle 194, 205
 Hoyle-Bondi-Gold-Theorie 664, 674
Hubble, Edwin P. (1889–1953) 660
 Hubble-Effekt 69, 660
 Hubble-Konstante 660
 Hubschrauber 139
 Hui-Hui-Rad 1100
Hulse, Russel A. (1950) 674
 Hund-Mulliken-Methode 878
 Hundsche Regeln 853
Huygens, Christiaan (1629–1695) 172, 538, 857
 Huygens-Aufhängung 1093
 Huygens-Fresnel-Prinzip 172
 Huygens-Okular 497
 Hybridzustand 875, 904
 Hydratationsenergie 341
 Hydratisierung 331
 hydraulische Presse 95
 hydraulische Waage 97
 hydraulischer Druck 95
 hydraulischer Widder 139
 Hydrodynamik 104
 hydrodynamische Ähnlichkeitstheorie 117
 hydrodynamischer Impulssatz 121
 hydrodynamisches Paradoxon 120
 Hydrosol 339
 Hydrostatik 93
 hydrostatischer Druck 96
 hydrostatisches Paradoxon 96
 hydrothermale Züchtung 909
 Hygrometer 263
 Hygrometrie 262
 Hyperbelbahnen 702
 hyperbolischer Raum 663
 Hyperfeinstruktur 786, 821, 975
 Hyperladung 1021
 Hyperon 1004, 1005, 1021
 Hyperonzerfall 1041, 1043
 hyperop 502
 Hyperschall 184, 197
 Hypertonie 276
 Hypozentrum 203
 hypsochrome Gruppen 587
 Hypsothermometer 262
 Hysteresis
 – elastische 133
 – ferromagnetische 394
 Hysteresisschleife 394
 Hysteresis-Schleife 133
 Hysteris-Verluste 417

I

- Ibn al Haitham (Alhazen)* (965–1039) 483
 ideale Flüssigkeit 115, 118
 ideale Lösung 275
 idealer Trafo 416
 idealer Wirkungsgrad 230
 ideales Gas 98, 216
 – Entropie 248
 – Zustandssumme 1065
 Idealkristall 946
 Identität träger und schwerer Masse 651
 Ikonoskop 589
 Immersionslinsen 509
 Immersionsobjektiv 498
 Impuls 14, 23
 Impulserhaltung 179
 Impulsoperator 710, 728
 Impulsraum 39, 247, 925
 Impulssatz 23
 – der Hydrodynamik 121
 Impulsübertragung 33, 1038
 indifferentes Gleichgewicht 82
 Induktion 319, 379
 Induktionsdichte 348

- Induktionsgesetz 351, 381, 383
 Induktionskonstante 356
 Induktionsmesswerk 409
 Induktionsmotor 422
 Induktionstensor 671
 induktive Blindleistung 404
 Induktivität 386
 Induktor 418
 induzierte Emission (= erzwungene Emission) 521
 inelastische Streuung 983
 inelastischer Stoß 33, 806
 Inertialsystem 55
 Inertialsysteme 608
 infinitesimale Drehungen 73
 Influenz 309, 372
 Influenzkonstante 295
 Influenzmaschine 310
 Information 168, 1080
 Informationsverlust 1114
 Infrarot 587
 Inhibitor 1110
 Inklinationswinkel 367
 inkohärent 149
 inkohärente Streuung 172
 inkompressible Flüssigkeit 104
 Innenwiderstand 324, 481
 – des Generators 400
 – einer Röhre 461
 – einer Spannungsquelle 324
 innere Konversion 985
 innere Reibung 93, 109
 innerer Photoeffekt 865
 Insektenauge 567
 Insel der Stabilität 855, 974
 instabile Kerne 981 ff.
 instabiler Resonator 832
 integrierende Empfänger 590
 Intensität 169, 569
 Interferenz 519
 – gleicher Dicke 538
 – gleicher Neigung 538
 Interferenzfarben 537
 Interferenzfilter 540, 588
 Interferenzglied 150
 Interferenzmaxima 521
 Interferenzoptik 521
 Interferenzordnung 521
 Interferenzstreifen 521
 Interferometer
 – für Neutronen 690
 – Zweistrahl- 541
 Interferometrie 538
 Interferikum 364
 Interkombinationsverbot 760
 Intermittenz 1103
- Internationales System (SI) 2
 Intervalle, musikalische 191
 Invarianz 59, 1026
 inverse Osmose 291
 inverser Compton-Effekt 681
 Inversion 406, 826, 1027
 Inversionstemperatur 271
 Invertierung 554
 Ionen 331
 Ionenbeweglichkeit 467
 Ionenbindung 889, 896
 Ionendosis 1000
 Ionenfehler 905
 Ionengas 474
 Ionengetter 239
 Ionenkinetik 465
 Ionenkonzentration 466
 Ionenkristalle 900
 – Optik der 918
 Ionenlawine 468
 Ionenleitungsmikroskop 513
 Ionenradius 889
 Ionenrakete 482
 Ionenresonanz 920
 Ionenwolke 336
 Ionisationskammer 466, 467, 990
 Ionisations-Vakuummeter 283
 Ionisierung 698, 989
 Ionisierungsdichte 990
 Ionisierungsenergie 451, 698, 849
 Ionisierungsfunktion 468
 Ionisierungsgrad 451
 Ionisierungsspannung 880
 ionogene Bindung 875
 Ionosphäre 368, 444, 475
 IR-Fernsehkamera 590
 IR-Holographie 535
 Iris 501
 Irreversibilität 242
 irreversible Prozesse 1066
 isentrop 1062
 Isentrope (= Adiabate) 220
 Ising-Modell 396
 Isobare 220
 isochor (ohne Volumenänderung) 220
 Isochronie 1093
 Isokline 1090
 Isolator 921, 933, 965
 Isomere 983
 Isospin 1021
 Isostasie 67
 Isotherme 220
 isotherme Expansion 246
 Isotonie 276
 Isotop 849, 972
 Isotopenverhältnis D : H 979
- Isotopieeffekt 960
 Isotopieverschiebung 784
 Isotropieverschiebung der Sprungtemperatur 967
 Iteration 140
 iteratives Gleichungslösen 1120
 iteratives Verfahren 129
- J**
- Jacobi-Matrix 1089
 Jeffries-Jeans-Theorie 68
Joliot-Curie, Frederic (1900–1958) 976, 1002
Joliot-Curie, Irène (1897–1956) 976, 1002
 Jolly-Gasthermometer 217
Josephson, Brian D. (1940) 961
 Josephson-Gleichheit 961
 Josephson-Strom 967
 Josephson-Wechseleffekt 932, 961
 Joule (= J) 21
Joule, James Prescott (1818–1889) 218
 Joule-Gesetz 322
 Joule-Thomson-Effekt 270
 Joule-Wärme 322
 Julia-Mengen 1116
 Jupiter 822
- K**
- K*-, *L*-, *M*-Serie 865
 K^0 -Meson 1005
⁴⁰K-Uhr 1037
 Käfigläufer 422
 Kalkspatgitter 887
 Kalkspatoptik 544 ff.
 Kalorie 214
 Kalorimeter 214
 kalte Neutronen 1010
 Kältemaschine 228
 Kältemischung 292
 kalter Stoß 806
 Kamera 516
 Kamerasucher 533
Kamerlingh Onnes, Heike (1853–1926) 957
 Kanalplatte 688
 Kanalstrahl 473
 kanonische Gleichungen 1092
 kanonische Verteilung 1051
 kanonisches Ensemble 1056
Kant, Immanuel (1724–1804) 61
 Kaon 1004, 1022

- Kapazität 305
 kapazitive Blindleistung 403
 Kapillardepression 103
 Kapillardruck 103
 Kapillarelektrometer 344
 Kapillarität 103
 Kapillarkondensation 292
 Kapillarsteighöhe 103
 Kapillarviskosimeter 113
 Kapillarwellen 199, 201
 Karborund 935
 Kármán-Wirbelstraße 124
 Kaskadengenerator 996
 Katalysator 259, 1067
 katalysierte Fusion 981, 1036
 Kathode 331
 Kathodenfall 470
 Kathodenstrahlbohrer 473
 Kathodenstrahlen 473
 Kathodenstrahlöfen 473
 Kathodenstrahl-Oszillograph 411
 Kathodenzerstäubung 473
 Kationen 331
 Kausalität 620
 Kausalitätsprinzip, schwaches 1124
 Kavitation 120
 Kegelschnittbahnen 53
 Keimbildung 908
 K-Einfang 984
Kelvin (Thomson, William)
 (1824–1907) 413
 Kelvin-Skala 209
 Kennedy-Thorndike-Experiment 612
 Kennlinie 420, 467, 839
 – der Ionisationskammer 467
 – der Spannungsquelle 325
 – des Generators 401
 – des Motors 420
Kepler, Johannes (1571–1630) 52
 Kepler-Bahnen, relativistische 653,
 654
 Kepler-Ellipse 52
 Kepler-Fernrohr 499
 Kepler-Gesetze 52, 54
 Kepler-Hyperbel 53
 – des α -Teilchens 702
 keramische Supraleiter 962
 Kern der Galaxis 1078
 Kernaktivierung durch Neutronen
 1012
 Kernbausteine 969
 Kernchemie 983
 Kerndichte 704
 Kernenergie 969
 Kernfusion 227, 478, 721, 972, 977
 Kerninduktion 856
 Kernkräfte 969
 Kernmagnetische Resonanz (NMR)
 789
 Kernmagnetismus 786
 Kernmitbewegung 784
 – einfache 785
 Kernmodelle 973
 Kernmomente 975
 Kernphotoeffekt 983
 Kernradien 704
 Kernreaktion 983
 Kernreaktor 977, 1036
 Kernspaltung 37, 976, 1035
 Kernspin 821, 975
 Kernspin-Tomographie 795
 Kernspurplatten 994, 1006
 Kernverdampfung 994, 1032, 1083
 Kernvolumeneffekt 784, 785
 Kernzertrümmerung 994
 Kerr-Effekt 555
 Kerr-Linsen-Modenkopplung 842
 Kerr-Zelle 504, 555
 Kesselzustand 180
 Kettenlinie 87, 91
 Kettenmolekül 953
 Kettenreaktion 976
Ketterle, Wolfgang (1957) 814
 Kilogramm (= kg) 2
 Kilopond 16
 Kinematik 9, 10
 kinematische Zähigkeit 109
 Kinetik 1109
 kinetische Energie 22
 kinetische Gastheorie 214
 kinetischer Isotopieeffekt 1082
 Kippdrehzahl 424
 Kippmoment 423
 Kippschwingung 1095
 Kippspannung 455
 Kippung 84, 86
Kirchhoff, Gustav (1824–1887) 307,
 575
 Kirchhoff-Gesetz 603
 Kirchhoffs Knotenregel 319
 Kirchhoffs Maschenregel 319
 Kirchhoff-Waage 307
 Kirlian-Figur 1119
k-Kalkül 633
 Klang 191
 Klangfarbe 192, 204
 Klangfigur 186
 klassischer Elektronenradius 597,
 1018
 klassischer Umkehrpunkt 724, 736
 Klavier 149
 Klein-Gordon-Gleichung 184
 Kleinsignalverstärkung 828
 Kleinwinkel-Korngrenze 952
 Klemmenspannung 324
 Klettern der Versetzung 951
 Klirrfaktor 462
 Klystron 463
 Knicklast 135
 Knickung 135
 knochensuchende Radioelemente
 1001
 Knotenebenen 165
 Knotenflächen 184
 Knotenlinie 204
 Knotenregel 319
 Knotensatz 724
 Knudsen-Effekt 1082
 Knudsen-Strömung 222, 282
 Koaxialkabel 440
 Koaxialleitung 438
 Kochplatte 374
 Koerzitivfeld 394
 Koexistenz von Phasen 261 ff.
 kohärente Streuung 172
 Kohärenz 172, 520
 – longitudinal 520
 – transversal 521
 Kohärenzlänge 520
 Kohäsionskraft 103
 Kohlebogen 471
 Kohlenstoff-Uhr 987
 kollektive Elektronenbewegung 929
 kollektives Kernmodell 975
 Kollektivlinse 497
 Kollektor 943
 kolloidale Lösung 339
 Koma 500
 Kombinationsprinzip 697
 kommunizierende Röhren 97
 Kommutativität 713
 Kommutator 421
 Kompensationseffekt 480
 Kompensationsmethode 320
 Kompensationsschaltung 324
 Komplementärfarben 583
 komplexe Amplitude 156
 komplexe Inversion 404
 komplexe Rechnung 402
 komplexe Zahlen 143
 komplexer Widerstand 403
 Komposition 1046
 Kompressibilität 96, 98, 131
 Kompression 93, 130
 Kompressionsmodul 133
 Kompressionsverhältnis 230
 Kompressorkühlschrank 272
 Kondensation 261

- Kondensationskeime 269, 376
 Kondensationspumpe 281
 Kondensationswärme 100
 Kondensator 372
 – als Wechselstromwiderstand 403
 kondensierte Materie 94
 Kondensor 498
 konforme Abbildung 108, 407
 konjugierte Größen 713
 Konkavgitter 531
 Konkurrenz 1107
 konservative Felder 24
 konservatives System 1092
 Kontaktspannung 344
 Kontinentalverschiebung 370
 kontinuierliches Spektrum 148
 Kontinuitätsgleichung 321
 Kontrast 498
 Konvektion 232, 237, 1122
 Konversionseffizienz 835
 Konversionselektronen 985
 Konzentration 275
 Kooperativität 1111
 Koordinationszahl 889
 Kopfwellen 179
 Koppelpendel 181
 Kopplungseffekt 785
 Körper
 – deformierbarer 93
 – fester 93
 – fluider 94
 – starrer 71 ff.
 Korrelationsanalyse 1124
 kosmische Häufigkeit 974
 kosmische Schauer 1044
 kosmische Strahlung 1030, 1031
 kosmische Tankstellen 70
 kosmischer Schauer 1032
 kosmisches Betatron 1031
 kosmologisches Kraftglied 662
 kosmologisches Postulat 660
Kossel, Walther (1888–1956) 860
 Kossel-Stranski-Theorie 907
 kovalente Bindung 889, 902
 Kovolumen 268, 270
 Kraft 12
 – atomare 804
 – auf Strom im Magnetfeld 348
 – elastische 19
 – Fern- 55
 – Nahewirkungs- 54
 – Trägheits- 55
 – verallgemeinerte 1057
 – zwischen Leitern 361
 Kraftdichte 111
 – im Magnetfeld 364
 Kräftepaar 76
 Kraftfeld 24
 Kraft-Wärme-Maschine 228
 Krätzscher-Huffmann-Verfahren 910
 Kreisbewegung, gleichförmige 16
 Kreisel 88
 Kreiselgleichung 790
 Kreiselkompass 92
 Kreiselstabilität 43
 Kreisfrequenz 20
 Kreisprozess 229
 – reversibler 249
 Kreisspiegelung 407
 Kreuzgitter 859
 Kreuzspul-Messwerk 408
 Kriechfall 151
 Kristall 94, 884
 Kristallbaufehler 946
 Kristallbindung 896
 Kristalldiode 941
 Kristallgitter 884
 Kristallinterferenz 857 ff., 891
 Kristallklassen 890
 kristallographische Hauptachse 545
 Kristalloptik 544
 Kristallphosphor 966
 Kristallschwingungen 182 ff., 910 ff.
 Kristallspektrograph 861
 Kristallstrukturanalyse 891
 Kristallsysteme 890
 Kristalltracht 889
 Kristallwachstum 907
 Kristallzähler 993
 Kristallzüchtung 908
 kritische Geschwindigkeit 815
 kritische Grenze 977
 kritische Masse 977
 kritische Temperatur 268
 kritisches Magnetfeld 958
 Kroto-Smalley-Versuch 909
 krummes Licht 508
 Kryopumpe 281
 Kryoskopie 277
 kryoskopische Konstante 277
 kubischer Ausdehnungskoeffizient 217, 895
 kubisches Gitter 890
 kubisch-flächenzentriert 885, 888, 963
 kubisch-raumzentriert 887, 888, 963
 Kugelfallmethode 113
 Kugelflächenfunktionen 738
 Kugelfunktionen 58, 656
 Kugelkondensator 305
 Kugellager 45
 Kugelpackungen 885
 Kugelumströmung 124
 Kugelwelle 160, 171
 Kühlakku 292
 Kühlfalle 238, 281
 Kühlmittel 292
 Kühlschranks 228, 272
 Kundtsches Rohr 190
 künstlicher β^+ -Zerfall 1037
 Kupferverluste 416
 Kurbel 82
 Kurbelwelle 83, 148
 Kurvenüberhöhung 63
 kurze magnetische Linse 511
 Kurzschlussfall 406
 Kurzschlussläufer 422
 Kurzsichtigkeit 502
 Kurzwellenschwund 369
 Kurzzeitlaser 839
 Kutta-Shukowski-Formel 128
k-Vektor 164
 kWh-Zähler 409
 Kyropoulos-Verfahren 909
- L**
- Labilität 82
 Laborsystem 33
 Ladung 293
 – wahre und scheinbare 313
 Ladungsdichte 301
 Ladungsumkehr 1028
Lagrange, Joseph L. (1736–1813) 60, 710, 1052
 Lagrange-Dichte 1027
 Lagrange-Gleichung 60
 Lagrange-Multiplikator 1052
 Laguerre-Polynome 741
 Lamb shift 855, 1012
 λ -Punkt 811, 815, 1083
 Lambert-Beer-Bouguer-Gesetz 556
 Lambert-Gesetz 571
 Lambert-Strahler 571
 Lamb-Shift 752, 775, 1018
 laminare (schlichte) Strömung 110, 115
Landau, Lew D. (1908–1968) 129, 1074, 1123
 Landau-Strahlung 445
 Landau-Theorie der energiereichen Stöße 1074
 Landau-Turbulenz 1123
 Landé-Faktor 745, 754
 Langbasis-Interferometrie 526, 543, 654

- lange magnetische Linse 510
 Längeneinheit 2
 Längenkontraktion 613
Langevin, Paul (1872–1946) 441
Langmuir, Irving (1881–1957) 280
 Langmuir-Frequenz 475, 927, 980
Laplace, Pierre S. (1749–1827) 60, 164, 302, 657, 673, 1085
 Laplace-Formel für Schallgeschwindigkeit 164
 Laplace-Gleichung 102, 302
 Laplace-Grenze 665, 1078
 Laplace-Operator 110, 302, 716
 Larmorformel 434, 761
 Larmor-Frequenz 392, 441, 453, 454, 561, 729, 745, 820
 Laser 577, 827–829, 834
 Laser-Bedingung 845
 Laserdiode 838
 Laser-Doppler-Sonde 505
 Laserfusion 478, 979
 Laserholographie 534
 Laserkühlung 274, 778, 802
 Laserleistung 832
 Laserlicht 521
 Laserlinien 834
 Laserphysik 823
 Laser-Ratengleichungen 827
 Laserreflexion 505
 Laserschwelle 827, 828
 Laserspeckel 823
 Laserspektroskopie 787
 Laser-Wellenlängen 835
Laue, Max v. (1879–1960) 857
 Laue-Diagramm 858
 Laue-Indizes (= Miller-Indizes) 886, 893
 Lauffeldröhre 463
 Laufterm 698
 Lautstärke 193
 Lawinendiode 463, 464
 Lawinen-Laufzeitdiode 464
Lawrence, Ernest O. (1901–1958) 997
 Lawson-Kriterium 979
 LCAO-Methode 878
 LCD (liquid crystal device) 555
 Le Chatelier-Braun-Prinzip 266
 Lebensdauer 983
 – des angeregten Zustandes 693
 – des Kerns 986
 – des Protons 1016
 Lebensdauer von Ionen 466
 Lecher-System 438
 Lecksuche 283
 LED-Diode (= Elektrolumineszenz-Diode) 943
Lederman, Leon M. (1922) 1023
Lee, Tsung Dao (1926) 1027
 Leerlauffall 406
 Leerlaufspannung 324, 399
 Lee-Yang-Theorie 1010, 1027
 Legendre-Polynome 738
 Legierung 275
 Leistung 26
 – des Wechselstroms 401
 – eines Schwingers 155
 – eines Stromes 322
 Leistungsanpassung 324, 325, 400
 Leistungsfaktor 404
 Leistungsmessung
 – am Drehstrom 412
 – an einem Motor 45
 Leiter im Magnetfeld 348
 Leiter, elektrischer 327 ff.
 Leiterschleife 349
 Leitfähigkeit
 – von Elektrolyten 333
 – von Metallen 320
 Leitungsband 936
 Leitungselektronen 447
 Leitwert 403
Lemaître, Georges (1894–1966) 662
 Lemaître-Eddington-Kosmos 662
 Lemaître-Weltall 663
 Lemniskate 53
Lenard, Philipp (1862–1947) 700
 Lenard-Fenster 700
 Lennard-Jones-Potential 805
 Lenz-Regel 384
 Lepton 1004
 Leptonenära 675
 Leptonzahl 1010
 Leslie-Würfel 603
 Leuchtcharakteristik 571
 Leuchtdichte 572
 Leuchtdiode (LED) 329, 504, 517
 Leuchtelektron 743
 Leuchtkraft 598
 Leuchtschirm 456
 Leuchtstoffröhre 469, 471, 602
Leverrier, Urbain (1811–1877) 57
 Lichtablenkung 673
 Lichtausbeute 603
 Lichtbogen 469, 470
 Lichtbündel 483
 Lichtelektrischer Effekt (= Photoeffekt) 449
 Lichtemission, -absorption 573, 691
 Lichtenberg-Figuren 1119
 Lichtgeschwindigkeit 502 ff.
 lichtinduzierter Stoß 806
 Lichtkraft 777, 778
 Lichtkrümmung 487
 Lichtleiter 488
 Lichtmenge 572
 Lichtmühle 292
 Lichtquant 573 ff.
 Lichtstärke 572
 Lichtstrahl 483 ff.
 Lichtstrom 571
 Lichtsumme 695
 Lichtuhren 612
 Lichtweg 174
 Linde-Verfahren 271
 Linearbeschleuniger 995, 996, 1040
 lineare Dynamik 1088
 lineare Operatoren 707
 lineare Polarisierung 543 ff.
 lineare Regression 8
 lineare Vektorfunktion 706
 linearer Ausdehnungskoeffizient 210, 900
 linearer Oszillator 431
 Linearisierung 1089
 Linearität der Wellengleichung 164
 Linearmotor 401
 Lineweaver-Burk-Plot 1110
 Linienintegral 21, 108
 Linienspektrum 147
 Linienerweiterung 692
 Linse 490, 492, 493, 501
 – dicke 493
 – dünne 492
 – elektrische 509
 – kurze magnetische 511
 – lange magnetische 510
 Linsenfehler 494, 512
 Liouville, Satz von 1063, 1092
 Lissajous-Schleife 142
 Lithographie 528
 Littrow-Prisma 834
 Ljapunow-Exponent 1114
 Ljapunow-Funktion 1091
Lobatschewski, Nikolai (1792–1856) 663
 Lobatschewski-Bolyai-Raum 663
 Loch (Defektelektron) 933, 935
 Lochblende 525
 Lochblendenlinse 509
 Löcherleitung 936
 Lochkamera 483, 533
 lockernes Elektronenpaar 877
 logarithmische Spirale 53
 logarithmischer Verstärker 462
 logarithmisches Dekrement 150, 414
 logistische Gleichung 1102

- Londonsche Dispersionskräfte 902
 long, short Kaon 1022
 longitudinale Gitterschwingung 915
 longitudinale Schwingung 182
 Longitudinalwelle 161
Lorentz, Hendrik A. (1853–1928) 296, 348, 923, 1012
 Lorentz-Attraktor 1122
 Lorentz-Karussell 442
 Lorentz-Konvention 671
 Lorentz-Kraft 296, 348, 453, 671
 Lorentz-Kurve 762
 Lorentz-Oszillatoren 761
 Lorentz-Theorie der Metalle 923
 Lorenz-Attraktor 1116, 1122
 Loschmidt-Zahl 212
 Löschspannung 472
 Lösung 275
 Lösungstension 342
 Lösungswärme 258, 275
 Lotablenkung 67
 Lotka-Volterra-Modell 1107
Lowell, Percival (1855–1916) 57
 LS-Kopplung 760
 Luftballon 285
 Luftdruck 99
 Luftkissenboot 206
 Luftspalt 364
 Luftwiderstand 42
 Lumen 572
 Luminiszenz 940
Lummer, Ernst (1850–1941) 575
 Lummer-Brodhun-Würfel 572
 Lummer-Gehrcke-Platte 541
 Lummer-Pringsheim-Messungen 575
 Lupe 496
 Lux (= Lx) 572
- M**
- Mach, Ernst* (1838–1916) 542
 Mach-Kegel 174, 177
 Mach-Welle 176
 Machzahl 177
 Mach-Zehnder-Interferometer 542
 Madelung-Faktor 901, 963
 Magdeburger Halbkugeln 136
 magische Nukleonenzahl 189, 974
 Magnetband 192
 Magnetfeld 296, 355
 – der Erde 367 ff.
 – der Spule 359
 – des Drahtes 358
 – des Kreisringes 361
 Magnetfluss 356
 magnetisch eingeschlossenes Plasma 980
 magnetisch hart, weich 394
 magnetische Abschirmung 362
 magnetische Anomalien 368
 magnetische Antenne 445
 magnetische Erregung 357
 magnetische Flasche 478, 1033, 1036
 magnetische Kühlung 274
 magnetische Linse 510
 magnetische Polarisation 392
 magnetische Polstärke 363
 magnetische Quantenzahl 851
 magnetische Relaxation 477
 magnetische Resonanz (MR) 789
 magnetische Sättigung 394
 magnetische Spannung 365
 magnetische Speichen 478
 magnetische Stürme 368
 magnetische Suszeptibilität 391, 392
 magnetischer Dipol 367
 magnetischer Druck 477, 980, 1036
 magnetischer Monopol 1029
 magnetischer Widerstand 365
 magnetisches Dipolmoment 744
 magnetisches Feld 357
 magnetisches Moment 350
 – anomales 747
 – des Nukleons 1018
 – des Stromkreises 362
 Magnetisierung 367, 391
 Magnetit 398
 Magnetohydrodynamik 478
 magnetohydrodynamische Relaxationszeit 477
 magnetohydrodynamischer Generator 399, 441
 Magnetometer 377, 803
 Magneto-optische Falle 780
 magnetooptischer Effekt (= Faraday-Effekt) 561
 Magnetopause 368
 Magnetoresistenz 329, 932
 Magnetosphäre 368
 Magnetostatik 362
 Magnetostriktion 197
 Magnetpolstärke 363
 Magnetresonanz, funktional 796
 Magnetron 464, 482
 Magnus-Effekt 128, 138
 Makromolekül 953
 makroskopischer Quantenzustand 808
 Makrozustand 242, 1081
Malus, Etienne (1775–1812) 543
 Mandelbrot-Menge 1116, 1121
 Manometer 99, 119
 Markow-Kette 1080
 Mars-Klima 286
 Maschenregel 319
 Maschinen, einfache 82
 Maßeinheiten 2, 13
 Maser 577, 827
 Masse 12
 Masse-Leuchtkraft-Gesetz 598
 Massenabsorptionskoeffizient 700, 867
 Massendefekt 971
 Massenpunkt, Begriff und Problematik 1
 Massenschale 642
 Massenspektrograph 457
 Massenspektrographie 972
 Massenstreuoeffizient 867
 Massenverlust der Sonne 670
 Massenwirkungsgesetz 257, 336
 Massenzahl 847
 Maßsysteme 2
 Materiewelle 814
 Mathias-Regel 957
 Matrix 77, 705
Maxwell, James Clerk (1831–1879) 128, 225, 425, 1012
 Maxwell-Gerade 268
 Maxwell-Gleichungen 426
 – in bewegten Medien 376
 – relativistische 671
 Maxwell-Lorentz-Theorie 677
 Maxwell-Relation 430, 557
 Maxwell-Schwanz 227
 Maxwell-Verteilung 225, 287, 460, 978, 1065
Mayer, Robert (1814–1878) 218
 McLeod-Vakoskop 282
 mechanisches Wärmeäquivalent 218
 mechanokalorischer Effekt 1082, 1083
 Megaparsec (= Mpc) 660
 Meißner-Dreipunktschaltung 481
 Meißner-Ochsenfeld-Effekt 958, 966
Meitner, Lise (1878–1968) 976
 Membranschwingungen 187
Mendeleejew, Dmitrij (1834–1907) 847
 Mercalli-Skala 203
 Meson 970, 1003, 1004, 1019
 Messbereichsumschaltung 322
 Messgeräte, elektrische 322
 Messinstrument 151, 203
 Metagalaxis 673
 Metallbindung 889, 896
 Metalle 903, 933

- metallischer Wasserstoff 1076
 Metall-Isolator-Übergang 818
 Metalloptik 927
 metastabiler Zustand 699
 Metazentrum 98
 Meter (= m) 3
 Methode der kleinsten Quadrate 8
 Methode der stationären Phase 200
 Metrik im Schwerefeld 652
 Metrologie 734
Meyer, Lothar (1830–1895) 847
 MHD-Generator 399, 441
 Michaelis-Menten-Kinetik 1109, 1110
Michelson, Albert A. (1852–1931) 542
 Michelson-Interferometer 541, 542, 610
 Michelson-Versuch 504, 667
 Mie-Streuung 563
 Mikroskop 172, 496
 – Abbes Theorie 527
 Mikrotron 997
 Mikrowellengenerator 961
 Mikrowellen-Heizung 482
 Mikrowellen-Herd 482
 Mikrozustand 242, 1081
Milanković, Milutin (1879–1958) 60
 Miller-Indizes (= Laue-Indizes) 886, 893
Millikan, Robert A. (1868–1953) 307
 Millikan-Versuch 307, 372
 Minimalflächen 102
 Minimalprinzip 758
 minimum legibile, perceptibile, separabile 502
 Mintrop-Welle 174
 Minuskommutator 728
 Mischbarkeit 290
 Mischkristall 275
 Mischungsdiagramm 292
 Mischungsentropie 246, 253, 290, 1055
 Mischungskalorimeter 214
 Mischungslücke 275
 Miser 832
 Mitführungshypothese 610
 Mittelpunktsteiler 411
 Mittelwert 6
 mittlere freie Weglänge 222
 mittlere kinetische Energie 208
 mittlere Lebensdauer 986
 mittleres Geschwindigkeitsquadrat 226
 mittleres Verschiebungsquadrat 223
 Modell der Hadronen 1042
 Modenkopplung 839
 Moderation von Neutronen 977, 1035
 Moderator 1010
 Modulation 146, 158
 Mögel-Dellinger-Effekt 369
 Möglichkeitsschema 1112
 Mohs-Härte 135
 mol 212
 molare Wärmekapazität 212
 Molarität 275, 335
 Molekularfeld 814
 Molekulargewichtsbestimmung 277
 Molekularkräfte 137
 Molekularpumpe 280
 Molekularstrahlen 227
 Molekularströmung 282
 Molekülgeschwindigkeit 209
 Molekülkristalle 896, 902
 Molekülmasse 212
 Molekülmassenbestimmung nach Bunsen 120
 Molekülspektren 869
 Moleküldichten 215
 Möllenstedt-Düker-Versuch 372, 684
 Møller-Streuung 1017
 Molwärme 213
 Momentanbeschleunigung 11
 Momentangeschwindigkeit 10
 Momentenkenlinie 420 ff.
 MO-Methode 878
 Mondfinsternis 514
 monoklines Gitter 890
 Monomer 952
 monomolekulare Schicht 103
 Monopol 1043
 mooresches Gesetz 528
 Morse-Code 1080
Mößbauer, Rudolf (1929) 681, 682, 726
 Mößbauer-Effekt 651, 681, 682, 726, 895, 986, 1014
Moseley, Henry (1887–1915) 864
 Moseley-Gesetz 864
 MOSFET 944
 Motorkennlinie 401
 Mott-Phasenübergang 818
 ms-Pulsar 445
Müller, Karl Alex (1927) 962
 Multimeter 323, 374
 Multinomialkoeffizienten 1047
 Multiplett 1021
 Multiplex-Interferometrie 541
 Multiplifier 451, 572, 589, 590
 Multiplizität des Sterns 1074
 Multipol-Kernschwingungen 1013
 Mutation, somatische und genetische 1001
 Myon 1002, 1008
 Myon-Atom 1041
 Myonen 669
 Myonen, Zeitdilatation 622
 Myonium-Atom 1008
 Myon-Neutrino 1011
 Myonzerfall 1041
 myop 502
 Myo-Wasserstoff 981, 1008
 M-Zentrum 949
- N**
- Nabla-Operator 107
 Nachhall 205
 Nachhallzeit 186
 Nachthimmelleuchten 603
 NaCl-Struktur 887
 Na-Dampflampe 472
 Nahwirkungskraft 54
 Nahordnung 94
 Nahpunkt 495
 nahresonante Näherung 762
 Nahzone 434
 nasse Straße 517
 Natriumdampflampe 697
 natürliche Linienbreite 693, 694
 Naturtöne 192
 Navier-Stokes-Gleichung 115, 237
 Navigation 803
 Nebelkammer 220, 991
 Nebelkammerspur 1004, 1038
 Nebengruppe 849
 Nebenquantenzahl 851
 Nebenschluss 400
 Nebenschlussmotor 422
 Néel-Temperatur 398
Ne'eman, Yuval (1925) 1019
 negative Temperatur 826
 negatives Glimmlicht 470
 Negativfilm 587
 nematisch 555
 Neodym-Laser 836
 Neptun-Bahn 57
Nernst, Walther (1864–1941) 260
 Nernst-Gleichung 340
 Nernstscher Satz 260
 Nernst-Stift 588
 Nernst-Verteilungssatz 275
 Nervenerregung 196
 Netzebene 857, 893
 Netzebenenkeime 908
 Neukurve 394
Neumann, Janos v. (1903–1957) 986

- Neumann-Kopp-Regel 911
 neutrale Faser 134
 neutrale Wechselwirkung 1016
 Neutralgas 474
 Neutralität, elektrische 294
 Neutrino 985, 1002, 1010
 Neutrino-Masse 1083
 Neutrino-Oszillation 1012, 1043
 Neutrino-Stoßquerschnitt 1016
 Neutron 971, 1002
 Neutronenbeugung 726
 Neutronenbombe 977
 Neutronendiffusion 1036
 Neutroneneinfang 983
 Neutronenerzeugung 1009
 Neutronenflussdichte 1036
 Neutronengas 473, 1077
 Neutronen-Nachweis 1009
 Neutronenstern 1074, 1077
 Neutronenstreuung 894
 Neutron-Phonon-Streuung 921
 Neutron-Zerfall 1010
 Newton (= N) 13
Newton, Sir Isaac (1643–1727) 12, 16, 29, 46, 55, 60, 108, 123, 163, 305, 500, 517, 519, 538, 605, 687, 1012
 Newton-Abbildungsgesetz 485, 491
 Newton-Reibung 41
 Newton-Ringe 537, 566
 Newtons Abkühlungsgesetz 236
 Newtons Axiome 12, 13
 Newtons Iteration 1116, 1120
 Newtons Weltmodelle 659 ff.
 nichtlineare Dynamik 1085 ff.
 nichtlineare Optik 846
 nichtlineare Schwingungen 1093 ff.
 nichtsphärische Kerne 975
 Nichtstöchiometrie 938
 Nicol-Prisma 547
 Niveauflächen 300
n-Leitung 939
 NMR (nuclear magnetic resonance) 789
Noether, Emmy (1882–1935) 1026
 – Satz von 60
 Nordlicht 482
 Norm eines Vektors 706
 Normale 2
 normale Dispersion 199, 557, 762
 normaler Zeeman-Effekt 745
 Normalität einer Lösung 334
 Normalkomponente 11
 Normalkraft 40
 Normalschwingung 913
 Normalton 194
 Normalverteilung 7, 62
 Normierung der potentiellen Energie 24
 Normierung von ψ 709
n-p- und *n-p-n*-Übergang 941
 NTC-Leiter 328
 Nuklearantrieb 210
 Nukleinsäure 882, 903
 Nukleon 971
 – innere Struktur 1018
 Nuklid 973
 Nullkline 1090
 Nullleiter 411
 Nullpunkt, absoluter, Unerreichbarkeit 260
 Nullpunktsenergie 719, 871, 911
 Nullpunksentropie des Eises 906
 numerische Apertur 498, 527
 Nutation 88, 92
 Nutationskegel 89
 Nutzeffekt der Wärmekraftmaschine 228
 Nutzlast 28
 Nyquist-Rauschen 224, 589, 657
- O**
- oberflächenaktive Stoffe 101
 Oberflächendiffusion 908
 Oberflächenenergie 100, 1035
 – der Kerne 973
 Oberflächenspannung 100, 343
 Oberschwingungen 146
 Obertöne 202
 Objektiv 496
 ocean floor spreading 370
 Öffnungsfunken 387
 Ohm (= Ω) 320
Ohm, Georg S. (1787–1854) 319
 ohmsches Gesetz 320, 458, 923
 – des Magnetismus 365
 – für Wechselstrom 402
 Ohr 194
 ökologische Modelle 1106
 Oktaederlücken 885
 Okular 497
 Okularskala 497
 Olbers-Paradoxon 673
 Ölhautschillern 537
 Ommatidium 567
Onsager, Lars (1903–1976) 1081
 Onsager-Koeffizienten 1081
 Onsager-Relation 1081
 operationelle Definitionen 2
 Operationsverstärker 462
 Operator 706
 – der Impulskomponente 710
 – der kinetischen Energie 716
 – der Lagekoordinate 710
 – der potentiellen Energie 716
 optische Achse 546
 optische Aktivität 553
 optische Anisotropie 544
 optische Dichte 487
 optische Dipolkräfte 778
 optische Drehung 554
 optische Gitterschwingungen 917
 optische Isotropie 544
 optische Lithographie 528
 optische Melasse 779
 optische Resonatoren 831
 optischer Kerr-Effekt 842
 optischer Maser 827
 optischer Transistor 541
 optischer Zweig 917
 optisches Kernmodell 975
 optisches Pumpen 803
 Orbit 1087
 Orbital 876
 Orbitalbewegung in der Wasserwelle 198
 ordentliches Licht 545
 Ordnung der Interferenz 522 ff.
 Ordnungsparameter 814
 Ordnungszahl 847
 Orientierungspolarisation 315
 Orthogonalität 706, 708, 727
 – von sin und cos 149
 Orthogonalsystem 149
 Orthogonaltrajektorie 25
 Ortho-Helium 759
 Ortho-Positronium 1023
 orthorhombisches Gitter 890
 Ortho-Zustand 1022
 Ortskurve 405
 Ortsoperator 710
 Ortsvektor 9
 Osmose 275
 osmotischer Druck 276
O-Sterne 821
 Ostwald Farbenkreisel 583
 Ostwald-Absorptionskoeffizient 275
 Ostwaldsches Verdünnungsgesetz 336, 375
 Ost-West-Effekt 1031
 Oszillatorstärke 765
 oszillierende Reaktion 1111
 Oszilloskop 455, 481
 Otto-Motor 220, 229
 Oxygenierung 1110
 Ozon 591

- P**
- p*, *T*-Diagramm 262
p, *V*-Diagramm 229
 Paarbildung 868, 1017
 Paarvernichtung 869, 881
 Paläomagnetismus 370
 Pangäa 369
 Panspermie 726
 Parabolspiegel 486, 515
 paraelektrischer Zustand 399
 Para-Helium 759
 parallaktischer Fehler 5
 Parallelschaltung 321
 Parallelschwingkreis 414
 paramagnetische Kühlung 273
 Paramagnetismus 392
 parametrische Schwingungserregung 1100
 Para-Positronium 1023
 Parität 769, 1027
 Paritätsverletzung 1027
 Partialdruck 263
 Partialladung 877, 881
 partikuläre Lösung 157
 partition function 1053
 Parton 1019
 Pascal (= Pa) 95
Pascal, Blaise (1623–1662) 285
 Pascal-Schnecke 53
Paschen, Friedrich (1865–1947) 470
 Paschen-Back-Effekt 753, 754
 Paschen-Regel 470
Paul, Wolfgang (1913–1993) 464, 465, 798
Pauli, Wolfgang (1900–1958) 985, 1002
Pauling, Linus (1901–1994) 881
 Pauli-Prinzip 759, 808, 851, 973, 1067
 Peierls-Umklappen 922
 Peltier-Effekt 346
 Peltier-Koeffizient 346, 1082
 Peltier-Kühlung 273
 Pendel
 – mathematisches 32
 – mit großer Amplitude 1093
 – physikalisches 86
 Pendellänge, reduzierte 86
 Pendeluhr 61
 Penning-Vakuummeter 283
 Pentode 462
 Penzias-Wilson-Strahlung 664, 674
 Percolation 1119
 perfekter Leiter 966
 Perihelverschiebung 654
 – Merkur 57
 Periode 19
 Periodensystem 189, 847, 880
 Periodenverdopplung 1102 ff.
 Permanentmagnet 391
 Permeabilität 357, 391
 Permutation 1045
 Perowskit-Struktur 962
 perpetuum mobile 1. Art 217
 perpetuum mobile 2. Art 248
Perrin, Jean (1870–1942) 286
 Perrin-Versuch 286
 Pfeffersche Zelle 276
 Pfeife 185
 Phase 19
 Phase der Welle 160
 Phase (thermodynamisch) 261
 Phasenschnitt 944
 Phasendiagramm 262
 Phasengeschwindigkeit 161, 204
 Phasengleichgewicht 261
 Phasenkontrast 498
 Phasenkontrast-Mikroskop 160
 Phasenmodulation 159
 Phasenporträt 1087
 Phasenprüfer 470, 472
 Phasenraum 59, 129, 1014, 1063, 1087
 Phasenraumdichte 808
 Phasenraumzelle 808
 Phasenregel von Gibbs 267
 Phasenschieber 159, 405
 Phasenschieberszillator 481
 Phasenspektrum 148
 Phasensprung 171
 Phasenstabilität 996
 Phasenübergänge 967
 Phasenverschiebung 156, 403
 Phasenvolumen 1063
 Phon 194
 Phonometrie 194
 Phonon 920
 Phononenspektrum 208
 Phononenstoß 964
 Phosphor 966
 Phosphoreszenz 695
 Phot 572
 Photinos 1029
 Photodiode 329, 517, 943
 Photoeffekt 449, 866
 – äußerer 329
 – innerer 329
 Photoelement 329, 943
 Photoleiter 329
 Photometrie 569
 photometrische Größe 571
 photometrische Größen 572
 Photon 678 ff.
 Photonenära 675
 Photonenrakete 482
 Photonen-Stoß 680
 Photonen-zähler 678
 Photon-Photon-Streuung 846
 Photosphäre 595
 Photostrom 941
 Photosynthese 599
 Photovoltaik 966
 Photowiderstand 572
 Photozelle 450, 572, 589
 Phycobiline 601
 physikalisches Pendel 86
 physiologische Lösung 276, 375
 4π 61
Piazzi, Giuseppe (1746–1826) 57
 π -Bindung 877
Pickering, Edward (1846–1919) 57
 Pickering-Serie 821
 Pictet-Trouton-Regel 255
 Piezoeffekt 197, 317
 Piezometer 96
 Pinch-Effekt 479, 980
p-i-n-Diode 943
 Pinning-Zentren 960
 Pion 1002, 1005, 1009
 Pion-Zerfall 1041
 Pirani-Vakuummeter 283
 Pitot-Rohr 119
 Pixel 590
 Pizzicato 186
Planck, Max (1858–1947) 576, 678, 683
 Planck-Gesetz 577, 578
 Planck-Konstante 576
 Planck-Länge 1026, 1029, 1041
 plancksches Wirkungsquant 449, 576 ff.
 Planck-Strahlungsgesetz 1055
 Planeten 51
 Planetenbahnen 52
 Planetenhelligkeit 603
 Planeten-Oberflächentemperatur 604
 Planetensysteme, ferne 566
 planparallele Schicht, Interferenz 537
 Plasma 473, 979
 Plasmafrequenz 475, 482
 Plasmaschwingungen 929
 Plasmolyse 276
 Plasmon 930
 plastische Verformung 950
 plastisches Fließen 93
 Plateau des Zählrohrs 993
 Plattenkondensator 306

- Plattenschwingungen 186 ff.
 Plattentektonik 369, 370
 Platzwechselfvorgänge 109
p-Leitung 939
 Pleuelstange 83
 Pluto 58
 Pluto-Bahn 57
 pneumatisches Feuerzeug 220
p-n-Übergang 942
Poincaré, Henri (1854–1912) 60, 129, 1085
 Poincaré-Bendixson, Satz von 1116, 1123
 Poincaré-Bendixson-Kriterium 1091
 Poincaré-Schnitt 1091
Poisson, Denis (1781–1840) 164, 589
 Poisson-Fleck 536
 Poisson-Gleichung 302, 347, 459
 Poisson-Gleichungen (Adiabatengleichungen) 219
 Poisson-Rauschen 589
 Poisson-Verteilung 988, 989, 1032
 Poisson-Zahl 130
 polare Achse 317
 Polarisation 543
 – der Röntgenstrahlung 862
 – des Vakuums 855
 – dielektrische 313
 – elektrolytische 342
 – lineare, elliptische und zirkulare 543
 Polarisationsapparat 544
 Polarisationsfilter 547, 572
 Polarisationsmikroskopie 552
 Polarisationsphotometer 544
 Polarisationsrichtung 164
 Polarisationspektrometer 544
 Polarisationswinkel 548
 Polarisator 544
 Polarisierbarkeit 314
 – elektrische 763
 Polarlicht 369, 370, 482
 Polonium 982
 Polpaare 423
 Polschwankung 92
 Polstärke 363
 Polwanderung 368
 Pomeau-Manneville-Szenario 1103
 Pomerantschuk-Effekt 274
 Populationsdynamik 1101
 positive Säule 470
 Positron 1002, 1032
 Positronenstrahlung 983
 Positronium 881
 Positronzerfall 1037
 Potential 49, 108, 299
 4-Potential 649
 Potentialfelder 24
 Potentialfläche 300
 Potentialkasten 447
 Potentialkurve
 – des Kristallteilchens 898
 – im Molekül 872
 Potentialkurven-Modell 806
 Potentialkurvenschema 882
 Potentialströmung 126
 Potentialtheorie 298 ff.
 Potentialtopf, Teilchen im 717
 potentielle Energie 24, 716
 – im Erdschwerefeld 30
 Potentiometer 320, 325
 Pound-Rebka-Versuch 683
Powell, Cecil F. (1903–1969) 1002, 1004
 Poynting-Vektor 430, 431, 433, 444
 pp-Reaktion 978
 Präfixe für Einheiten 3
Prandtl, Ludwig (1875–1953) 129
 Prandtl-Grenzschicht 113
 Prandtl-Staurohr 119
 Prandtl-Zahl 1122
 Präzession 44
 – der Erdachse 92
 – Keplerellipse 59
 Präzessionsbewegung 89
Prigogine, Ilya (1917) 1082
 Prigogine, Satz von 1082
 Primärstrahlung 1030
Pringsheim, Otto (1860–1925) 575
 Prinzip
 – der virtuellen Verschiebung 83
 – des kleinsten Zwanges 266
 – von Fermat 173
 – von Huygens-Fresnel 172
 Prisma 489
 – Auflösungsvermögen 530
 Prismenfeldstecher 515
 Prismenfernrohr 499
 Produktmesser 409
 Prony-Zaum 45
 Propeller 122
 Propellerantrieb 28
 Proportionalitätsgrenze 132
 Proportionalzähler 993
 Protein 1081
 – Entropie 289
 Proteinmolekül 289
 Proton 970
 Proton-Antiproton-Paar 671
 Protonen-Synchrotron 995
 Protonen-Therapie 881
 Protonenzerfall 1016, 1041
 Protuberanzen 478
 Ψ /J-Teilchen 1008, 1023
 Ψ /J-Zerfall 1042
 PTC-Leiter 328
 Pulfrich-Refraktometer 488
 Pulsar 445, 593, 1074, 1077, 1083
 Pulsationsveränderliche 205
 Pulslängen-Bandbreite-Produkt 843
 Punktladung 3
 Punktsymmetrieklasse 890
 Purpurgerade 582
 Pyroelektrizität 316
 Pyrometrie 2, 581
 pythagoräische Stimmung 191
- Q**
- QCD 1023
 QED 970, 1012, 1017
 QGD 1026
 Q-Switching 840
 quadratischer Stark-Effekt 755
 Quadrupolfeld 57
 Quadrupol-Kernschwingungen 1013
 Quadrupolmoment 673
 Quadrupolpotential 656
 Quadrupolstrahlung 656
 Qualitätsfaktor 1000
 Quantelung der Ladung 294
 Quantenausbeute 589
 Quantenchemie 875
 Quantenchromodynamik 1023
 Quantenelektrodynamik 970, 1012, 1017
 Quantenfluktuationen 733, 1026
 Quantenflüssigkeit 815
 Quantengeometrodynamik 1026
 Quanten-Hall-Effekt 965
 Quantenhypothese 576
 Quanteninterferenz 962
 quantenmechanische Axiome 708
 Quantenphasenübergang 818
 Quantenstatistik 1067
 Quantenzahl 725
 – Wasserstoffatom 741
 Quark 1019, 1042
 Quark confinement 1024, 1042
 Quarkmodell 1019
 Quarkonia 1023
 Quarz 317
 Quarz, Rechts- und Links- 554
 Quarzoptik 588
 Quarzuhr 5, 481
 Quasar 664, 673, 1078
 quasifreier Bereich 155

- quasineutrales Plasma 474
 quasistationärer Zustand 42
 quasistatischer Bereich 155
 Quelldichte 106, 302
 Quellen und Senken 105
 Quellenfreiheit des Magnetfeldes 356
 Querkontraktion 130
 Querkontraktionszahl 130
 Quinckesches Resonanzrohr 190
 Quotientenmesser 408
- R**
- R*-, *P*-, *Q*-Zweige 872
 Rabi-Frequenz 772, 797, 824
 Rabi-Versuch 821
 rad (= rd) 1000
 Radarkontrolle 177
 Radarortung 505
 Radarreflexion 505
 Radfahren 92
 radiale Schrödinger-Gleichung 740
 radiale Wellenfunktion 740
 Radiant (= rad) 4
 radioaktive Erdwärme 1037
 radioaktiver Fallout 977
 radioaktives Gleichgewicht 987, 1037
 Radiofenster 570
 Radiokarbon-Uhr 987
 Radiometer 292
 Radiometer-Effekt 282
 Radioteleskop 526
 Radiowellen-Ausbreitung 436
 Radium 982
 Radius eines Nukleons 704
 Radon 982, 1031
 Rakete, Antrieb 28, 64, 138, 209, 284
Raman, Chandrasekhara (1888–1970) 696
 Raman-Effekt 695
Ramsey, Norman (1915) 465
Ramsey, Norman F. (1915) 798
 Ramsey-Methode 798
 Randbedingungen 187
 random walk 956
 Randschicht 965
 Randverdunkelung 598
 Randwertprobleme der Wärmeleitung 234
 Randwinkel 103
Raoult, François M. (1830–1901) 275, 277
 Rastermikroskop 512
 Raster-Tunnelmikroskop 450, 512
 Raubtier-Beute-Modell 1106
 Raumakustik 186
 Raumausdehnungskoeffizient 211
 Raumdither 858
 Raumladung 459, 469
 raumladungsbegrenzte Ströme 459
 räumliches Hören 196
 Raumspiegelung 1027
 Raumstation 70
 Raumsymmetrieklassen 891
 Raumwinkel 4
 Rauschen 475, 589
 – thermisches 205
 – weißes 192
Rayleigh, Lord (J. W. Strutt) (1842–1919) 196, 289, 938
 Rayleigh-Jeans-Gesetz 578
 Rayleigh-Konvektion 237, 289, 1122
 Rayleigh-Scheibe 125, 191
 Rayleigh-Streuung 563
 Rayleigh-Zahl 1122
 RC-Generator 152
 Reaktionsenthalpie 257
 Reaktionsgeschwindigkeit 480
 Reaktionskinetik 1109
 Reaktionsprinzip 13
 Reaktionsquerschnitt 286
 Reaktionswärme 258
 reale Flüssigkeit 123
 reale Gase 267
 Realkristall 946
 Rebka-Pound-Experiment 651
 Rechteck-Potentialtopf 718
 Rechtsabweichung von Geschossen 44
 Redundanz 1080
 Reduplikation der DNS 882
 reduzierte Masse 737, 874
 reelles Bild 484
 Referenzwelle 534
 Reflektor 500
 Reflexion 484
 – metallische 927
 Reflexionsfaktor 170, 171
 Reflexionsgesetz 173
 Reflexionsgitter 531
 Reflexionsgrad 574
 Reflexionsvermögen 549, 927
 – einer Grenzfläche 170
 Reflexklystron 463
 Reflexminderung 550
 Refraktometer 488
 Refraktor 499
 Regentropfen, Fallgeschwindigkeit 113
 Regression, lineare 8
 Reibung 40
 – gleitende 40
 – Haft- 40
 – rollende 45
 – trockene 40
 – viskose 41
 Reibungselektrizität 338
 Reibungsgeschwindigkeit 45
 Reibungskoeffizient 40
 Reibungskraft 40
 Reibungskraftdichte 116
 Reichweite 1001, 1038
 – von Radiowellen 436
 Reichweitengesetz von Geiger 990
 Reifendruck 136
 Reihenschaltung 321
 Reihenschluss 400
 Reihenschlussmotor 422
 reine Stimmung 205
 Rekombination 465, 936
 – im Dreierstoß 698
 Rekombinationskoeffizient 466
 Rekombinationsquerschnitt 465
 Rekonstruktionswelle 534
 Rektifikation 277
 Relativbewegung 54, 69
 relative Feuchte 262
 relativistische Chemie 856
 relativistische Entartung 1073
 relativistisches Bohr-Modell 880
 relativistisches Fermi-Gas 473
 Relativität der Felder 351
 Relaxation
 – akustische 178
 – des thermischen Gleichgewichts 178, 234
 – dielektrische 315, 373
 Relaxationsfrequenz 436
 Relaxationskraft 375
 Relaxationszeit 234, 330, 373, 947
 rem 1000
 Remanenz-Magnetisierung 394
 Repulsoren 140
 Resist 529
 Resonanz 1004
 Resonanz 154, 415
 Resonanzeinfang 1010
 Resonanzenergie 730
 Resonanzfluoreszenz 694, 825
 Resonanzkurve 156, 558
 Resonanzpeak 1010
 Resonanzteilchen 1008
 Resonatormethode 507
 Reststrahlmethode 588
 Restwiderstand 924
 Retina 501

- reversibel 242
 reversibler Kreisprozess 249
 Reversionspendel 86
Reynolds, Osborne (1842–1912) 129
 Reynolds-Kriterium 42
 Reynolds-Zahl 117
 Reziprok von Onsager 1081
 reziprokes Gitter 892
 Rheostat (Widerstand) 319
 rhomboedrisches Gitter 890
 Richardson-Gesetz 448
 Richtdiode 942
Richter, Burton (1931) 1023
 Richtgröße eines gedrillten Drahtes 131
 Richtungsfeld 1090
 Richtungsquantelung 739, 744
Riemann, G. F. Bernhard (1826–1866) 603
 Riemengetriebe 82
 Riesensterne 598
 Rifts 369
 Ringresonator 832
 Ringströme, Ampersche 390
Ritter, Johann W. (1776–1810) 590
Ritz, Walter (1878–1909) 668
 Ritz-Hypothese 668
 Ritz-Kombinationsprinzip 697, 715
 Roche-Grenze 50, 665
 Rochelle-Salz 317
 Roche-Lobe 1078
 Rohr, laminare Strömung 112
Rohrer, Heinrich (1933) 450, 512
 Rohrlinse 510
 Rohrströmung 112, 125, 138
 Rolle 82
 Rollreibung 45
Rømer, Ole (1644–1710) 502, 516
 Röntgen (= R) 1000
Röntgen, Wilhelm Conrad (1845–1923) 856
 Röntgenabsorption 865
 Röntgen-Astronomie 501
 Röntgenbeugung 857
 Röntgenfluoreszenz 863
 Röntgen-Grenzfrequenz 863
 Röntgenmikroskop 861
 Röntgenoptik 861
 Röntgenröhre 473
 Röntgenstrahlung 856
 Röntgenstreuung 894
 Röntgen-Therapie 881
 Roots-Pumpe 280
 Rotation 72, 107
 Rotation der Galaxis 68
 Rotationsbanden 870
 Rotationsdispersion 554
 Rotations-Doppler-Effekt 561
 Rotationsenergie 74
 Rotations-Freiheitsgrad 211
 Rotationsoperator (rot) 107, 355
 Rotationsparaboloid 94
 Rotations-Schwingungs-Spektrum 871
 Rotator 729, 870
 rotierendes Bezugssystem 56
 Rotor 420
 Rotverschiebung 660
 Rowland-Kreis 531
 RTM 512
Rubbia, Carlo (1934) 999
Rubens, Heinrich (1865–1922) 588
 Rubin-Ford-Effekt 665
 Rubinglas 938
 Rückkopplung 152, 1124
 Rückkopplungsfaktor 462
 Rückstoßenergie 895
 rückstoßfreie Emission 682
 Rückstoßkern 985
 Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario 1123
 Ruhmasse des Neutrinos 1011, 1083
 Ruhmasse des Photons 671
Rutherford, Ernest (1871–1937) 701, 984, 1002, 1012
 Rutherford-Modell 731
 Rutherford-Soddy-Regeln 983
 Rutherford-Streuformel 703
 Rutherford-Streuung von Leitungselektronen 924
 Rydberg-Atome 846
 Rydberg-Gesetz 741
 Rydbergkonstante 734
- S**
- Saccharimetrie 554
 Sachs-Lyddane-Teller-Beziehung 919
 Saftsteigen 137
 Saha-Gleichung 451
 Saitengalvanometer 410
 Saitenschwingung 187, 202, 1096
 Sammellinse 492
 Sargent-Regel 987
 Saros-Zyklus 92
 Satellit 602
 – geostationärer 67
 Sattelpunktmethode 200
 Sättigung eines Phosphors 695
 Sättigungsdampfdruck 261
 Sättigungsfeuchte 262
 Sättigungsintensität 777
 Sättigungskonzentration 275
 Sättigungsmagnetisierung 365, 367, 395
 Sättigungsspannung 450
 Sättigungsstrom 448, 460, 467
 Saturnringe 68
 Satz von Gauß-Ostrogradski 106
 Satz von Liouville 1092
 Satz von Stokes 108
 Saugleistung 279
 Saugvermögen 279
 Säule, positive 470
 Säureprüfer 376
 Säurerest 332
 scanning microscope 512
 Schäfchenwolken 205
 Schalenmodell der Kerne 975
 Schalenmodell, Atome 852
 Schallabsorption 178
 Schalldruck 171, 204
 Schallgeschwindigkeit 163, 210, 916
 Schallintensität 191
 Schalleistung 194
 Schallmauer 177
 Schallquant 920
 Schallradiometer 191
 Schallreflexion 170, 204
 Schallschnelle 125, 169
 Schallstärke 194
 Schallstrahlungsdruck 191
 Schallwellenwiderstand 170
 Schärfe der γ -Linien 682
 Schärfentiefe 515
 Schatten 484, 514
 Schauer, kosmischer 1032, 1044
Shawlow, Arthur, L. (1921–1999) 823
 scheinbare Ladungen 313
 Scheinkraft 55
 Scheinleistung 404
 Scheinwiderstand 404
Scherrer, Paul (1890–1969) 860
 Scherung 93, 131
 schiefe Ebene 82
 Schießen und Strömen 139
 Schiffsschraube 122
 Schiffswellen 201
 Schlaginstrumente 186
 Schleifenoszillograph 410
 Schleifringläufer 424
 Schlupf 423
 Schmelzen 265
 Schmelztemperatur 266, 895
 Schmelzwärme 266

- Schmerzschwelle 193
 Schmetterlingsfarben 531
 Schmidt-Optik 500
 Schmidt-Platte 531
 Schmiermittelreibung 45, 114
 Schnecke (Innenohr) 195
 Schneeflocke 904, 1119
Schottky, Walter (1886–1976) 460, 883
 Schottky-Diode 943
 Schottky-Fehlordnung 938, 946
 Schottky-Langmuir-Raumladungsformel 460
 Schottky-Randschicht 965
 Schraubenlinie 455
 Schraubenversetzung 951
 Schreiber 324
Schrieffer, John R. (1931) 960
Schrödinger, Erwin (1887–1961) 188
 Schrödinger-Gleichung 716, 717
 – im Magnetfeld 729
 – radiale 740
 Schub 28
 Schubmodul 131
 Schubnikow-Gruppe 891
 Schubspannung, viskose 109
 Schutzerde 412
 schwache Wechselwirkung 1012 ff.
 schwacher Stoßquerschnitt 1016
 Schwankungserscheinungen 244, 1050
 Schwartz-Ledermann-Steinberger-Versuch 1011
 schwarze Strahlung 575
 schwarze Temperatur 581
 schwarzes Loch 593
 Schwarzes Loch 654, 655, 657, 673, 1074, 1077
 Schwarzschild-Radius 654, 655
 Schwebekondensator 307
 Schweben 97
 Schwebung 167, 182
 Schwebungsfrequenz 146
 Schwerebeschleunigung 48
 Schweredruck 96
 Schwerewellen 199 ff.
 Schwerionen-Beschleuniger 999
 Schwerpunkt 23, 81
 Schwerpunktsatz 23
 Schwerpunktsystem 33
 Schwimmen 97
 Schwingfall 150
 Schwingkreise 413
 Schwingquarz 462, 481
 Schwingung
 – harmonische 141, 144
 Schwingung, harmonische 18
 Schwingungen, höchstfrequente 463
 Schwingungsdauer 161
 Schwingungsebene des Primas 547
 Schwingungsenergie 31
 Schwingungsmittelpunkt 86
 Schwungrad 91
 sechster Freiheitsgrad 213
 Seebeck-Effekt 344, 345
 Sehschärfe 502
 Sehweite, deutliche 495
 Sehwinkel 495
 Seiches 200, 203, 205
 Seichtwasserwelle 200
 Seifenblase 102, 537, 566
 Seifenhaut-Analogcomputer 236
 Seignette-Salz 317, 398
 Seilwelle 160
 Seismograph 203
 sekundäre Naturkonstante 734
 Sekundärelektronen 451, 468
 Sekundärelektronen-Vervielfacher 451
 Sekundärelement 343
 Sekundäremissionsvermögen 451
 Sekundärstrahlung 1030
 Sekunde 4, 801
 selbstadjungierter Operator 707
 Selbstähnlichkeit 1115
 selbständige Entladung 469
 Selbstdiffusion 947
 Selbstenergie 776, 1016
 selbsterregte Schwingung 1097
 selbsterregter Generator 400
 Selbsterregungsbedingung 481
 Selbsterregungsgleichung 462
 Selbstinterferenz 687
 Selbstmasse 1018
 Selbststeuerung 152
 Selbstverstärkung 1124
 Seldowitsch-Sunajew-Effekt 681, 726
 Selektivstrahler 588
 Selenzelle 329
 self avoiding walk 956
 seltene Erden 394, 588, 835, 849, 880
 seltsame Teilchen 1004
 seltsamer Attraktor 129, 1088, 1091
 Seltsamkeit 1004, 1021
 semipermeable Wand 275
 Sendeanlage 462
 Sendemast 437
 Senken 105
 sensibilisierte Fluoreszenz 699
 Separatrix 1090
 Sequenz 1046
 Seriengrenze 698
 Serienschaltung
 – von *C* 306
 – von *R* 321
 Serienschwingkreis 414
 Seyfert-Galaxien 665
 short, long Kaon 1022
 Shunt 323
 SI (Système International) 2
 Sicherheitsabstand 63
 Siedediagramm 277
 Sieden 262
 Siedepunkt 261
 Siedepunktserhöhung 277
 Siedetemperatur 262
 Siedeverzug 269
 Sievert (= Sv) 1000
 σ -Bindung 877
 singulärer Punkt 1087
 Sinuston 191
 Sinuswelle 161
 Sirius B 67
 Skalarprodukt von Funktionen 705
 Skalenhöhe 99
 Skaleninvarianz 956, 1115
 Skineffekt 424, 443
Smekal, Adolph (1895–1959) 696
Snellius, (Willebrord, Snel van Royen) (1580–1626) 487
 Snellius-Gesetz 487
 – für Elektronenstrahlen 508
 Snoek-Effekt 948
 Sol 339
 Solarenergie 36
 Solarkollektor 606
 Solarkonstante 593
 Solarzelle 943
 Solarzelle, Wirkungsgrad 966
 Solvation 273
 Solvationsenergie 341
 somatische Mutation 1001
 Sommerfeld-Theorie der spezifischen Wärme 927
 Sonar 196
 Sonde 452
 Sone-Skala 194
 Sonne, Temperatur 285
 Sonnen- und Sterntag 4, 61
 Sonnenaktivität 369
 Sonnenenergie 978
 Sonnenfinsternis 61, 514
 Sonnenflecken 477, 820, 1043
 Sonneninneres 605
 Sonnenkollektor 606
 Sonnen-Neutrino 1041

- Sonnenstrahlung 593
 Sonnensystem 51, 57
 Sonnentag 4
 Sonnenwind 368
 Sorptionspumpen 281
 Spaltblende 175, 443, 525
 Spaltpolmotor 443
 Spaltströmung 111
 Spaltung, Kern- 37, 976
 Spaltungsenergie 976, 977
 Spaltungsgrenze 976
 Spaltungsneutronen 976
 Spannung 298
 – mechanische 130
 Spannungsabfall am Widerstand 320
 Spannungs-Dehnungskurve 132
 Spannungsdoppelbrechung 552
 Spannungspfad 409
 Spannungsquelle 319
 Spannungsreihe
 – elektrochemische 341
 – reibungselektrische 338
 – thermoelektrische 345
 Spannungsverstärkung 461
 Spartransformator 326
 Spatprodukt 71
 Speicherring 998, 1007, 1041
 Spektralanalyse 692
 Spektalapparat 489
 spektrale Empfindlichkeitskurve des Auges 571
 spektrale Energiedichte 575
 spektrales Auflösungsvermögen 529
 Spektralfarbenzug 582
 Spektralklassen 821
 Spektallampe 469
 Spektrallinien 146, 692
 Spektralserie 698, 742
 Spektralterm 697
 Spektraltypen der Sterne 821
 Spektren 691
 Spektrograph 489
 – Auflösungsvermögen 528
 Spektroskop 490
 Spektrum 489
 – der schwarzen Strahlung 575 ff.
 – diskretes 677
 – kontinuierliches 148
 Sperrichtung 942
 Sperrschichtzähler 991
 Sperrschieberpumpe 279
 spezifische Ausstrahlung 570
 spezifische Entropie 255
 spezifische Ladung 326
 spezifische Lichtausstrahlung 579
 spezifische Oberflächenenergie 100
 spezifische Wärme 964
 spezifische Wärmekapazität 212, 911
 – bei konstantem Druck 213
 – bei konstantem Volumen 213
 – c_p und c_V 218
 – des Elektronengases 926
 spezifischer Widerstand 320
 Sphalerit-Struktur 887
 sphärische Aberration 494, 512
 sphärisches Weltall 663
sp-Hybridisierung 875
 Spiegel 484 ff.
 Spiegelgalvanometer 224
 Spiegelladung 309
 Spiegeloptik in Tieraugen 531
 Spin 80, 851
 Spinabsättigung 974
 Spin-Bahn-Kopplung 748
 Spin-Echo 793, 821
 Spin-Gitter-Relaxation 792
 Spinmoment 393, 395
 Spinoperatoren 747
 Spinor 751
 Spinquantenzahl 747, 851
 Spin-Spin-Relaxation 792
 Spirale, logarithmische 53
 Spiralfeder 85
 Spiralwachstum 908, 952
 Spitzenladung 305
 spontane Emission 577
 spontane Magnetisierung 396
 Spontankraft 777
 Sprengstoff 27
 Spring- und Nipptiden 68
 Springbrunneneffekt 1082
 Sprungbrett 91
 Sprungpunkt 957, 967
 Spule als Wechselstromwiderstand 403
 Spulenzahl 359
 Sputtering 473
 Squarks 1029
 Stäbchen (Auge) 501
 stabiles Gleichgewicht 82
 Stabilität
 – des Schwimmens 98
 – von Fixpunkten 1088
 Stabilitätstal 1035
 Stabilitätsuntersuchung 1086
 Stabschwingung 186
 STAG-Glas 944
 Stahlherstellung 963
 Standard-Abweichung 6, 61, 729, 988
 Standfestigkeit 84
 starke Kraft 1024
 starke Wechselwirkung 1012 ff., 1018
 Stark-Effekt 755
 stationäre Atomzustände 717
 stationäre Ionenkonzentration 466
 stationäre Phase, Pinzip der 200
 stationäre Strömung 104, 116
 stationäre Temperaturverteilung 232, 234
 stationärer Kosmos 664
 stationärer Zustand 466, 715
 Stationarität 232
 Stationaritätsbedingung der Gasentladung 466
 statischer Druck 118
 statischer Einstein-Kosmos 662
 statisches Gleichgewicht
 – des Leitungsbandes 937
 – von Elektronen 937
 statistische Kernmodelle 975
 statistische Kette 953
 statistische Mechanik 1045
 statistische Schwankung 988
 statistischer Charakter der Kernprozesse 988
 statistisches Gewicht 225, 1062
 Stator 420
 Staubfilter 372
 Staudruck 118
 steady-state-Kosmologie 660, 664
 Stefan-Boltzmann-Gesetz 236, 579
 Stefan-Boltzmann-Konstante 580
 stehende Lichtwelle 536
 stehende Welle 166, 184, 189
 Stehwellen-Resonator 832
 Steighöhe 103
 Steilheit der Kennlinie 461
 steinerscher Satz 75, 85
 Steinsalzoptik 964
 Stellarator 479
 Steradian 4
 Stereoplatte 192
 Sterilisationslampe 471
 sterische Behinderung 954
 Stern in kosmischer Strahlung 1032
 Sternenergie 978
 Stern-Gerlach-Versuch 744, 820
 Sternhelligkeit 603
 Sternmultiplizität 1074
 Sternschaltung 411
 Sternseismograph 656
 Sternstag 4
 Stetigkeit der Wellenfunktion 718
 Steuergitter 461
 Steuerspannung 461
 Stilb 572

- Stimmgabel 186
 stimulierte Absorption 825
 stimulierte Emission 521, 771, 825
 Stirling-Formel 144, 246, 289, 1049
 Stirling-Maschine 220, 229
 stochastische Kühlung 999
 stochastische Prozesse 1086
 Stockbarger-Verfahren 909
 Stokes (= St) 109
Stokes, George Gabriel (1819–1903),
 Satz von 108
 Stokes-Gesetz 113
 – für Rotation 137
 Stokes-Regel 694
 Stokes-Reibung 41
 Stokes-Verschiebung 472
 Störterme 924, 938
 Störungsrechnung 57
 Stoß 32
 – atomarer 805
 – zentraler 33
 – zweiter Art 698
 Stoßanregung 227
 Stoßfrequenz 222
 Stoßgesetze 32
 Stoßionisation 227
 Stoßionisationslawine 467
 Stoßparameter 702
 Stoßprozess 805
 Stoßquerschnitt 222
 Stoßverbreiterung 694
 Stoßwellen 179
 Stoßzahl 215
 Strahl (Wellennormale) 483
 Strahlenchemie 1001
 Strahlendosis 999
 Strahleneffekte 1001
 Strahlenschutz 1001
 Strahltaile 830
 Strahlungsdämpfung 432, 727
 Strahlungsdichte 570
 Strahlungsdruck 171, 288, 679, 726,
 777
 Strahlungsempfänger 589
 Strahlungsfeld des Hertz-Dipols 569
 Strahlungsfeldgrößen 572
 Strahlungsfluss 570
 Strahlungsgesetz
 – von Kirchhoff 575
 – von Planck 576 ff.
 Strahlungsgesetz von Planck 1055
 Strahlungsgürtel 368, 1032, 1044
 Strahlungskorrektur 775
 Strahlungslänge des γ -Quants 1032
 strahlungsloser Übergang 865
 Strahlungsstärke 570
 Strahlungsstromdichte 569
 Strahlungsverluste im Betatron 420
 Strahlungsverschiebung 774
 strange attractor 129, 1088
 strange particles 1004, 1006
 strangeness 1004, 1021
Straßmann, Fritz (1902–1980) 976
 Stratosphärentemperatur 595
 Streak-Kamera 845
 Streckgrenze 132
 streifende Inzidenz 861
 Streufluss 416
 Streukoeffizient 867
 Streulänge 807
 Streuquerschnitt 563
 Streuung 728
 – inkohärente 172
 – kohärente 172
 – Operator 728
 – von α -Teilchen 701
 – von Röntgenstrahlung 867
 Streuverluste 416
 Streuwelle 172, 527
 Streuwinkel 33
 Streuzentren 923
 strings 1029
 Stripper 996
 Stroboskopeffekt 61
 Stromdichte 105, 320
 Strömen und Schießen 139
 Stromlinien 104, 106
 Stromlinienform 125
 Strompfad 409
 Stromröhre 106
 Strom-Spannungs-Kennlinie 319,
 325, 459
 Stromstärke 318
 Strömung 104
 – ideale 115
 – inkompressible 104
 – laminare (schlichte) 110, 115
 – stationäre 104, 116
 – turbulente 115
 Strömungsdoppelbrechung 544, 552
 Strömungslehre 104
 Strömungswiderstand 108, 112, 123
 Stromverzweigung 319
 Stufengitter 531, 564
 Stufenlinse 490
 Stufenprinzip, Rakete 28
 Stufenversetzung 950
 Sturm-Liouville-Randwertaufgabe
 724
 Subduktionszonen 369
 Sublimationskurve 266
 Substitutionswaage 84
 subtraktive Farbmischung 583
 Summenkonvention 629
 Supernova 605, 1078, 1082
 Superposition 372
 – ungestörte 164
 Superpositionsprinzip 357
 superstabile Elemente 855
 Superstrings 1029
 Supersymmetrie 1029
 Suprafluidität 811, 815, 1083
 Supraflüssigkeit 811
 Supraleitung 329, 330, 957
 surge glaciers 115
 Suszeptibilität
 – dielektrische 313, 763, 764
 – magnetische 391, 392
 Symmetrie 1026
 Symmetriebrechung 1028
 Symmetrieelemente 890
 Symmetrieprinzip 357
 symmetrische Belastung 412
 symmetrische Schaltung 412
 symmetrischer Durchgang 489
 Synchronmotor 423
 Synchrotron 998, 1040
 Synchrotron-Strahlung 591, 997
 Synchrozyklotron 997, 1040
 systematischer Fehler 6
 Szintillationsmikroskop 701
 Szintillationspektrometer 991
 Szintillationszähler 993

T

- T, S*-Diagramm 229, 231
 $T^{3/2}$ -Gesetz 924
 Tachyon 671, 1042
 Tachyonen 620
Tacke, Ida (verh. *Noddack*)
 (1896–1978) 976
 Tageslänge 61
 Takens, Satz von 1124
 Tandem-van de Graaff 996
 Target 984
 Tauchkugel, Tauchboot 140
 Tauchspindel (Aräometer) 98
 Tauchspule 415
 τ -Lepton, Tauon 1011
 Taupunkt 263
 tautochrone Aufhängung 1093
 Tautochronie 65
 Taylor-Hulse-Doppelpulsar 656, 674
 Taylor-Orowan-Polanyi-Versetzung
 950
 Teilchenbeschleuniger 995
 Teilchenstromdichte 238

- Teilchenzahldichte 216
 Telegraphengleichung 435
 TEM-Moden 831
 Temperatur 2, 208, 1058
 – tiefste 272
 Temperaturgradient 232
 Temperaturkoeffizient des Widerstands 328
 Temperaturleitwert 234
 Temperaturskala 209
 Temperaturstrahler 588
 Temperaturwellen im Erdboden 288
 temperierte Stimmung 192, 205
 Tensor 77
 Tensorellipsoid 88
 terrestrisches Fernrohr 499
 Tesla ($T = V s/m^2$) 348
 Tesla-Transformator 418
 Tetraederlücken 885
 tetragonales Gitter 890
 Tetrode 462
 Theorie der Nebelkammer 1039
 Theorie des β -Zerfalls 1010
 theory of everything 1029
 thermische Anomalien des Wassers 905
 thermische Ausdehnung 899, 963
 thermische Bewegung 94
 thermische effektive Masse 927
 thermische Fehlordnung 946
 thermische Gitterschwingung 910
 thermische Ionisation 451
 thermische Kernreaktion 978
 thermische Neutronen 1010
 thermische Relaxationszeit 234
 thermisches Gleichgewicht 573
 thermisches Rauschen 205, 223, 442
 Thermodynamik 227 ff.
 Thermodynamik irreversibler Prozesse 1081
 thermodynamische Temperaturskala 209
 thermodynamisches Gleichgewicht 251 ff.
 thermoelektrische Spannungsreihe 345
 Thermoelement 345, 572, 589
 Thermogenerator 346
 Thermokraft 345, 1082
 Thermometer 210
 thermomolekulare Druckdifferenz 1082
 thermonukleare Bombe 978
 thermonukleare Reaktion 180
 Thermoosmose 1082
 Thermo säule 589
 Thermosflasche 573
 Thermospannung 345
 Thermostrom 345
 Thomas-Fermi-Näherung 814
 Thomas-Korrektur 748
 Thomson, Elihu, Versuch von 417
Thomson, George P. (1892–1975) 685
Thomson, Sir Joseph John (1856–1940) 456, 473, 731
Thomson, William (Lord Kelvin) (1824–1907) 209, 271, 288, 413
 Thomson-Absorptionsquerschnitt 597
 Thomson-Beziehung 1082
 Thomson-Effekt 346
 Thomson-Gleichung 413
 Thomson-Koeffizient 346
 Thomson-Modell 371, 701, 702, 731
 Thomson-Parabelversuch 456, 481
 Thomson-Querschnitt 867, 1077
 Thyristor 944
 Tidenhub 68
 Tiefpass 405
 Tiegelverfahren 909
Ting, Samuel (1936) 1023
 Tisza-Modell 1083
 Titan-Saphir-Laser 838
T-Jump-Relaxation 290
 TOE (theory of everything) 1029
 Tokamak 981
Tolman, Richard (1881–1948) 326
 Tolman-Versuch 326, 327, 375
Tombaugh, Clyde (1906) 57
 Tomographie 881
 Ton 191
 Tonband 192
 Tonfilm 192
 Tonhöhe von Musikinstrumenten 185
 top-Quark 1023
 Torr (= T) 99
Torricelli, Evangelista (1608–1647) 119, 477
 Torricelli-Ausströmungsgesetz 119
 Torricelli-Vakuum 261
 Torsion 140
 Torsionsmodul 131
 Torsionsschwingungen 185
 Torus 1087, 1091
 Totalreflexion 487
 Totalrefraktometer 488
 tote Zone für Schall 204
 Totwasser 123, 205
 Totzeit des Geigerzählers 993
 Townsend-Formel 468
 träge Masse 12
 Trägerwelle 158, 437, 462
 Tragfähigkeit eines Balkens 134, 140
 Tragflächenprofil 128
 Trägheitskraft 55, 70
 Trägheitsmoment 74
 – des Moleküls 871
 Trägheitsprinzip 12, 13
 Tragkraft des Magneten 365
 Trajektorie 1087
 Transformator 389, 415, 442
 Transistor 462, 943
 Transkription der DNS in RNS 882
 Translation 72
 Translations-Freiheitsgrad 211
 Translationsgitter 890
 Transmissionsfaktor 170
 Transmissionsgrad 556
 Transportphänomene 239
 Transurane 855
 transversale Beschleunigung 670
 transversale Schwingung 182
 Transversalität der elektromagnetischen Welle 428
 Transversalwelle 161
 Traps 940
 travelling wave tube 464
 Treibhauseffekt 35, 606
 Treibmittelpumpe 280
 Treibstrahlgeschwindigkeit 27, 209
 Trennfläche 126
 trigonales (rhomboidrisches) Gitter 890
 triklines Gitter 890
 Triode 461, 481
 Tripelpunkt 266
 trockenadiabatischer *T*-Gradient 595
 Trockenobjektiv 498
 Trommelfell 194
 Tröpfchenmodell 973, 1035
 Tropfen 101
 Tropfenbildung 137
 Troposphäre 100
 Trouton-Noble-Versuch 672
 Trübung 172
Tscherenkow (Čerenkov), Pawel A. (1904–1990) 174, 204, 444, 672
 Tscherenkow-Effekt 174, 204
 Tscherenkow-Strahlung 444, 672
 Tscherenkow-Welle 178
 Tscherenkow-Zähler 994
 Tsunami 200, 206
 Tubuslänge, optische 497
 Tumorthherapie 881
 Tunguska-Meteorit 659, 674
 Tunnel diode 463, 464, 722, 944
 Tunneleffekt 488, 506, 720, 945, 978

Tunneleffekt-Rastermikroskop 512
 Tunnelhaftleitung 722
 Tunnelmikroskop 512
 Tunnelstrom 450
 turbulente Strömung 115
 Turbulenz, atmosphärische 500
 Turmalin 317
 Tyndall-Streuung 921
 Typ I-, Typ II-Supraleiter 957

U

Überdruck in der Seifenblase 102
 Überführungszahlen, Hittorfsche 335
 Übergangskurve normal-supraleitend 958
 Übergangskurve normal-supraleitend 967
 Übergangsmetalle 880, 898
 Übergangswahrscheinlichkeit 1014, 1069
 Überlagerung
 – von Schwingungen 142
 – von Wellen 164
 Überlappungsintegral 876
 Überlichtelektron 174
 übersättigter Dampf 268
 Überschallknall 174, 177
 Überschallströmung 120, 179
 Übersetzungsverhältnis des Transformators 416
 übersichtlich 502
 überthermische Fehlordnung 947
 Übertragungskapazität 1080
 U-Bombe 977
 Uhren 4, 481
 Uhrenparadoxon 621
 Uhrenvergleich
 – im Schwerfeld 651
 UKW 159
 Ulbricht-Kugel 573
 Ultramikroskop 172, 527
 ultrarelativistischer Compton-Effekt 665
 Ultrarot *siehe* Infrarot
 Ultrarotdetektor 603
 Ultraschall 196, 205, 535
 Ultraschallabsorption 196
 Ultraschall-Holographie 535
 Ultraschall-Interferometer 190
 Ultraschallkavitation 120
 Ultraviolett 587 ff., 590
 Ultraviolett-Katastrophe 578
 umkehrende Schichten 596
 Umkehrfilm 587

Umkehroschnecke 291
 Umkehrprisma 515
 Umklapp-Prozesse 922
 Umkristallisierung 909
 Umlaufzeit 16
 – auf Kepler-Bahnen 54
 Unbestimmtheitsrelation 153, 168, 690, 691, 711, 727, 728, 820
 Undulator 839
 Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunkts 260
 ungestörte Superposition 164
 unipolare Ströme 339
 Unipolargenerator 672
 Unschärferelation *siehe* Unbestimmtheitsrelation
 unselbständige Entladung 469
 Unterwasserfotografie 516
 U-Reihe 1037
 Urknall 659
 Urknall-Hypothese 580
 Ursprung der Elemente 663
 Ursprung der kosmischen Strahlung 1031
 Urstrahlung 674, 1011
 UV-Astronomie 501
 UV-Laser 845
 UV-Quelle 590

V

Vakuum 278
 Vakuum-Polarisation 880, 1018
 Vakuumpumpen 279
 Vakuumröhre 459
 Vakuum-Spektrometer 591
 Valenzband 936
 Valenzbindung 896
 Valenzkristalle 901
 van Allen-Gürtel 368, 1034, 1044
 van Arkel-de Boer-Verfahren 909
 Van de Graaff-Generator 995
van der Meer, Simon (1925) 999
 van der Pol-Gleichung 1098
van der Waals, Johannes D. (1837–1923) 268
 van der Waals-Bindung 896
 van der Waals-Gleichung 268, 291
 van der Waals-Kräfte 804, 902
van't Hoff, Jacobus H. (1852–1911) 258, 276
 van't Hoff-Gesetz 258, 276
 van't Hoff-Gleichung 258
 Varaktor 1096
 variable range hopping 945
 Varianz 61
 Variationsrechnung 1130
Veksler (Weksler), Wladimir I. (1907–1966) 998
 Vektor 9, 71
 Vektorboson 971, 1015, 1016
 Vektorfeld 104
 Vektor-Funktion-Analogie 705
 Vektorpotential 365, 366
 Vektorprodukt 71
 Vektorraum 705, 728
 Venushorizont 517
 Verarmungsrandschicht 965
 verborgene Masse 1078
 verborgene Parameter 986
 verbotene Übergänge 1014
 verbotene Zone 932, 936
 Verbrennungsmotor 227
 Verdampfung 261 ff.
 Verdampfungsenergie
 – molare 264
 – spezifische 264
 Verdampfungsenthalpie 255
 Verdampfungskühlen 811, 819
 Verdampfungswärme 264
 Verdet-Konstante 561
 Verdunstungskälte 264
 Vergaser 139
 Vergrößerung 495
 Vergütung 550
 Verhulfs-Gleichung 1102
 Verkettungen von Spannungen 411
 Verkettungsgesetz
 (Durchflutungsgesetz) 353
 Verneuil-Verfahren 909
 Verschiebungsdichte 311
 Verschiebungsenergie 299
 Verschiebungspolarisation 314
 Verschiebungsquadrat, mittleres 223
 Verschiebungssätze von Rutherford und Soddy 983
 Verschiebungsstrom 351, 425
 Versetzung (Dislokation) 938, 946, 949, 950
 Versetzungslinie 950
 Verstärker 461
 Verstärkung
 – im Laser 826
 – Spannungs- 943
 Vertauschbarkeit 728
 Vertauschbarkeit der Operatoren 746
 Vertauschbarkeit von Ding und Bild 492
 Vertauschungsrelation 713
 Verteilungsfunktion 1053
 Verteilungskoeffizient 275

- Verteilungsmodul 1053
 Verteilungssatz von Nernst 275
 Vertrauensgrenze 7
 verunreinigungskompensierter Halbleiter 937
 Very Long Baseline Interferometry (VLBI) 526
 verzerrungsfreie Aufzeichnung 158
 Verzögerungsleitung 464
 Vestibularapparat 195
 Video-Rückkopplung 1118
 Vielfachmesser 374
 Vielstrahlinterferenz 531
 Vielteilchen-Quantenzustände 813
 Vierer-Elektrodynamik 671
 Viererstromdichte 646
 Vierervektor 366, 670
 Vier-Niveau-Laser 834
 Vierpol 405
 Viertelwellenplättchen 552
 Vieta-Satz 1130
 Virgo-Haufen 665
 Virialsatz 37
 virtuelle Teilchen 1017
 virtuelle Verschiebung 83
 virtuelles Bild 484
 Visibilität 542
 viskose Reibung 41
 viskose Schubspannung 109
 Viskosimeter 113
 Viskosität 41, 109, 239, 240
 – von Suspensionen 139
 Vollmond 602
 vollständige Basis 149
 vollständiges Orthogonalsystem 708, 728
 Vollständigkeit 708
 Volt (= V) 296
 Voltmeter 410
 Voltaspannung 344
 Voltmeter 322
 Volumenelastizität 93
 von *Klitzing, Klaus* (1943) 965
 Vorherbestimmtheit 1085
 Vorhersagbarkeit 1085
 Vorpumpe 238
 Vortex-Zustand 959
 Vortizes 815
 Vorwiderstand 325
 V-Teilchen 1004
 Vulkanisierung 955
 V-Zentrum 949
- W**
- Waage 84
 Wafer 529
 Wafer Stepper 529
 Wahrscheinlichkeit und Entropie 242 ff., 1048 ff.
 Waltenhofen-Pendel 385
 Wälzlager 45
 Wanderfeldröhre 464
 Wandverschiebung 397
 Wärme 1057
 Wärmeaustausch 247
 Wärmedurchgang 236
 Wärmekapazität 212
 Wärmekraftmaschinen 227, 249
 Wärmeleitfähigkeit 233, 241, 330, 474
 Wärmeleitung 232, 239
 – im Plasma 474
 – in Isolatoren 921
 – in Metallen 929
 Wärmeleitungsgleichung 233
 Wärmeleitwert 237
 Wärmepumpe 228
 Wärmequelllichte 234
 Wärmequellen 232
 Wärmestrahlung 232
 Wärmestromdichte 233
 Wärmeströmung 232
 Wärmeübergang 236
 Wärmewellen 964
 Wärmewiderstand 237
 Wasserkraft 36
 Wasserleitung 138
 Wassermolekül 877
 Wasserschlag 139
 Wassersprung 139
 wasserstoffähnliches System 939, 965
 Wasserstoffatom 736
 Wasserstoffbrücke 399, 598, 904
 Wasserstoffelektrode 342
 Wasserstoff-Elektrode 341
 Wasserstoff-Orbitale 741
 Wasserstrahlpumpe 120
 Wasserstruktur 290
 Wasserwellen 197
 Wasserwert 214
 Watt (= W) 21, 26
 Wattmeter 376, 404, 409
 Weakonen 1015
 Weber-Fechner-Gesetz 193, 589
 Weber-Versuch 657, 674
 Wechselstrom 322, 398
 Wechselstromwiderstände 402
 Wechselwirkung, starke und schwache 971, 1012
 Weckglas 285
 Wegener, Alfred (1880–1930) 369
 Wehnelt-Kathoden 449
 Wehnelt-Zylinder 455, 456
 Weicheisen-Messwerk 409
 weichmagnetisch 394
 Weißer Zwerg 1073, 1076, 1083
 Weißlicht-Interferometrie 542
 Weiss, Pierre (1865–1940) 394, 397
 Weiss-Bereiche 397
 Weiss-Gesetz 394
 Weizsäcker, Carl Friedrich Freiherr v. (1912) 973, 1035
 Wexler (Veksler), Wladimir I. (1907–1966) 998
 Welle 141
 – Ausbreitungsgeschwindigkeit 160 ff.
 – ebene 160
 – elastische 162 ff.
 – stehende 166, 184
 Wellenfunktion, radiale 740
 Wellengleichung 435
 – für dispergierendes Medium 183
 – von d'Alembert 162
 Wellengruppe 168, 206
 Wellenimpuls 171
 Wellenlänge 161
 Wellenleiter 439
 Wellenpaket 167, 711
 Wellenwiderstand 170, 429
 Wellenzahl 161
 Wellenzahl-Vektor 164
 Wellenzone 433
 Wellenzug 167 ff.
 Weltalter 659
 Weltfläche 626
 Weltraumspiegel 514
 Weltraumstrahlung 674
 Weltraumtemperatur 604
 Wettbewerb 1106
 Wetterprognose 1121
 Wheatstone-Brücke 323
 Wheeler, John Archibald (1911) 1042
 Whiddington-Gesetz 990
 Whiskers 909, 952
 Widderstoß, Widderwelle 139
 Wideroe, Rolf (1902) 996
 Wideroe-Bedingung 419
 Widerstand 320, 403
 – spezifischer 320
 Widerstandsbeiwert 123, 125
 Widerstandsthermometer 329
 Wiedemann-Franz-Gesetz 330, 375, 923, 964
 Wiederkehr-Abbildung 1124
 Wiemann, Carl E. (1951) 811

Wien, Wilhelm (1864–1928) 578
 Wiener, Otto H. (1862–1927) 536
 Wiener-Versuch 237
 Wiensches Strahlungsgesetz 578
 Wiensches Verschiebungsgesetz 578
 wiggler 592
 Wigner-Eckart-Theorem 753
 Wilson, Charles T.R. (1869–1959) 991
 Wilson, Kenneth G. (1936) 956
 Wilson-Kammer 729
 Windenergie 36
 Windkanal 117
 Windrichtung 69
 Winkel 4, 706
 Winkelgeschwindigkeit 16, 73
 Winkelrichtgröße 85
 Winkelspiegel 484
 Wirbel 123, 125
 Wirbeldichte 126
 Wirbelkern 126
 Wirbelpaar 124
 Wirbelstärke 125
 Wirbelstraße 124
 Wirbelströme 385
 Wirbelstrom-Verluste 416
 Wirkleistung 404
 Wirkleistungsmesser 376
 Wirkungsgrad 228, 229, 287, 421
 – des Generators 400
 Wirkungslinie der Kraft 74
 Wirkungsquerschnitt 984
 – differentieller 703
 – schneller Elektronen mit Atomen 700
 Wirkwiderstand 404
 Wölbspiegel 486
 Wolkenbildung 290
 Wollaston-Prisma 567
 W-Teilchen 971, 1015
 Wurf, schiefer 16, 63
 Wurfweite 63
 Wurtzit-Struktur 887

X

XBO-Lampe 472
 Xe-Höchstdrucklampe 472
 Xerox-Kopierverfahren 944

X-Teilchen 1016

Y

Yang, Chen Ning (1922) 1027
 YBaCuO 962
 Young, Thomas (1773–1829) 519, 521, 538, 582, 687
 Young-Helmholtz-Theorie 582
 youngscher Doppelspalt 521
 Yukawa, Hideki (1907–1981) 970, 1002, 1008, 1015
 Yukawa-Kraft 970, 1015

Z

Z⁰-Teilchen 1016
 Zähigkeit 109
 Zählodiode 991
 Zählertotzeit 1038
 Zählrate 988
 Zählrohr 467, 992
 Zahnradgetriebe 82
 Zahnradversuch von Fizeau 504
 Zäpfchen (Auge) 501, 526
 Zeeman, Pieter (1865–1943) 562
 Zeeman-Effekt 562, 820
 Zeigerdiagramm 143, 402, 539
 – des Trafos 416
 zeitabhängige und zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung 717
 Zeitdilatation 612, 620, 668
 Zeitgleichung 148
 Zeitkonstante, L/R 387
 Zener-Diode 943
 zentraler Stoß 33
 Zentralkraft 26
 Zentrifugaldrift 478
 Zentrifugalkraft 18, 56
 Zentrifuge 64
 Zentripetalbeschleunigung 17
 Zerfall des neutralen Vakuums 856, 999
 Zerfallsenergie 984
 Zerfallsgesetz, radioaktives 986
 Zerfallskonstante 983, 986
 Zerfallsreihen 983
 Zersetzungsspannung 342
 Zerstäubung 139
 Zerstreuungslinse 492
 Zeta-Funktion 603
 Zhabotinski-Reaktion 1111
 Zirkularbeschleuniger 996
 zirkulare Welle 552
 Zirkularpolarisation 543
 Zirkulation 108, 125
 Zonen-Nivellierung 909
 Zonenplatte 533
 Zonenschmelzverfahren 909
 z-Pinch 479
 zufällige Fehler 6
 Zugfestigkeit 133
 Zündbedingung 469
 Zündspannung 472
 Zustandsänderung 1058
 Zustandsdichte 809
 Zustandsfunktion 708
 Zustandsgleichung 216
 Zustandsgrößen der Quantenmechanik 708
 Zustandssumme 1053
 Zustandsvariable 216
 zweiachsiges Kristalle 547
 Zwei-Elektronen-Atom 821, 881
 Zwei-Flüssigkeiten-Modell von Tisza 1083
Zweig, George (1937) 1019
 Zweikammer-Klystron 463
 Zweipol 405
 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre 248
 Zwillingssparadoxon 669
 Zwischenbild 496
 Zwischengitterdiffusion 946
 Zwischengitterplatz 946
 Zwischenkern 983
 Zykloide 65
 Zykloidenbahn 65, 351
 Zykloidenmodell des Weltalls 660
 Zykloidenpendel 65, 1093
 Zyklotron 670, 995, 997, 1039
 Zyklotronresonanz 932
 Zyklotronstrahlung 980, 997
 Zylinderfehler 494
 Zylinder-Funktionen 171
 Zylinderlinse 515
 Zylindersymmetrie 235
 Zylinderwelle 160, 171

Einige Eigenschaften fester Elemente

H	Fe Element																He	
0,088	7,87 Dichte (g cm ⁻³)																0,205	
14,01	1808 Schmelzpunkt (K)																4,22	
0,01	4,29 Gitterenergie (eV/Gitterteilchen)																0,001	
0,02	12 lin. Ausdehnungskoeffizient (10 ⁻⁶ K ⁻¹)																	
	16,83 Elastizitätsmodul (10 ¹⁰ N m ⁻²)																0,01	
Li	Be	Ku wurde zu Rf = Rutherfordium (IUPAC 1997)										B	C	N	O	F	Ne	
0,542	1,82	Ha wurde zu Db = Dubnium (IUPAC 1997)										2,47	3,52	1,03	1,14		1,51	
453,7	1551	Sg = Seaborgium nach <i>Glenn T. Seaborg</i> *1912										2570	3820	63,3	54,8	53,5	24,5	
1,65	3,33	Bh = Bohrium (IUPAC 1997)										5,81	7,36	0,06	0,07		0,02	
58	12,3	(Niels Bohr, dänischer Physiker 1885 – 1962)											1,2					
1,16	10,03	Hs = Hassium										17,8	54,5	0,12			0,10	
		(lat. <i>Hassia</i> = Hessen, deutsches Bundesland)																
Na	Mg	Mt = Meitnerium (<i>Lise Meitner</i> ,										Al	Si	P	S	Cl	Ar	
1,013	1,74	österreichische Physikerin, 1878 – 1968)										2,70	2,33	1,82	1,96	2,03	1,77	
371,0	922,0	Ds = Darmstadtium (Sitz der Gesellschaft für Schwerionen-										933,5	1683	317,2	386,0	172,2	83,95	
1,13	1,53	forschung, GSI, an der die Elemente 107 – 112										3,34	4,64	0,54	0,11	0,106	0,080	
71	26	synthetisiert wurden)										23,8	7,6	124	64,1			
0,68	3,54	Rg = Roentgenium (<i>Wilhelm Conrad Röntgen</i> ,										7,22	9,88	3,04	1,78		0,16	
		deutscher Physiker, 1845 – 1923)																
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr	
0,91	1,53	2,99	4,51	6,09	7,19	7,47	7,87	8,90	8,91	8,93	7,13	5,91	5,32	5,77	4,81	4,05	3,09	
336,8	1112	1812	1933	2163	2130	1517	1808	1768	1726	1357	692,7	302,9	1211	1090	490	266,0	116,6	
0,941	1,825	3,93	4,855	5,30	4,10	2,98	4,29	4,387	4,435	3,50	1,35	2,78	3,87	3,0	2,13	0,151	0,116	
84	22,5		9	7,5	23	12	13	12,8	16,8	26,3	18	6	37					
0,32	1,52	4,35	10,51	16,19	19,01	5,96	16,83	19,14	18,6	13,7	5,98	5,69	7,72	3,94	0,91		0,18	
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	J	Xe	
1,63	2,58	4,48	6,51	8,58	10,22	11,50	12,36	12,42	12,00	10,50	8,65	7,29	5,76	6,69	6,25	4,95	3,78	
312,0	1042	1796	2125	2741	2890	2445	2583	2239	1825	1235	594	429,3	505,1	903,9	722,7	386,7	161,3	
0,858		4,387	6,316	7,47	6,810		6,615	5,753	3,936	2,96	1,160	2,6	3,12	2,7	2,0	0,226	0,16	
90		4,8	7,1	5			9,6	8,5	11	19,7	29,4	56	27	10,9	17,2	83		
0,31	1,16	3,66	8,33	17,02	33,6	29,7	32,08	27,04	18,08	10,07	4,67	4,11	5,5	3,83	2,30			
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn	
1,997	3,59	6,17	13,20	16,66	19,25	21,03	22,58	22,55	21,47	19,28	14,26	11,87	11,34	9,80	9,31		4,4	
301,6	998	1193	2500	3269	3683	3453	3318	2683	2045	1338	234,3	576,7	600,6	544,5	527	575	202,1	
0,827	1,86	4,491	6,35	8,089	8,66	8,10	8	6,93	5,852	3,78	0,694	1,87	2,04	2,15	3			
97			6,5	4,3			6,6	6,6	9,0	14,3		29	29,4	13,5				
0,2	1,03	2,43	10,9	20,0	32,32	37,2	41,8	35,5	27,83	17,32	3,82	3,59	4,30	3,15	2,6			
Fr	Ra	Ac	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	110	111	112		114		116		118	
300	5 973	10,07 1323																
					Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
					6,77	6,78	7,00		7,54	5,25	7,89	8,27	8,53	8,80	9,04	9,32	6,97	8,84
					1071	1204	1283	1350	1345	1095	1584	1633	1682	1743	1795	1818	1097	1929
					4,77	3,9	3,35		2,11	1,80	4,14	4,1	3,1	3,0	3,3	2,6	1,6	4,4
					2,39	3,06	3,27	3,5	2,94	1,42	3,83	3,99	3,84	3,97	4,11	3,97	1,33	4,11
					Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr
					11,72	15,37	19,05	20,45	19,81	11,87	13,51	14						
					2020	1900	1405	913	914	1267	1610							
					5,93	5,46	5,405	4,55	4,0	2,6								
					11													
					5,43	7,6	9,87	6,8	5,4									

Quellen: Handbook of Chemistry and Physics
CRC Press 1972 – 1973

Kittel: Introduction to Solid State Physics
New York: Wiley 1971

Kohlrausch: Praktische Physik
Stuttgart: Teubner 1956

Umrechnung von Energiemaßen und -äquivalenten

	J	erg	mkp	cal	eV	T/K	kcal/mol	ν /Hz	λ /m	m/AME
1 J	1	10^7	0,1020	0,2389	$6,242 \cdot 10^{18}$	$7,244 \cdot 10^{22}$	$1,439 \cdot 10^{20}$	$1,509 \cdot 10^{33}$	$1,986 \cdot 10^{-25}$	$6,701 \cdot 10^9$
1 erg	10^{-7}	1	$1,020 \cdot 10^{-8}$	$2,389 \cdot 10^{-8}$	$6,242 \cdot 10^{11}$	$7,244 \cdot 10^{15}$	$1,439 \cdot 10^{13}$	$1,509 \cdot 10^{26}$	$1,986 \cdot 10^{-18}$	$6,701 \cdot 10^2$
1 mkp	9,807	$9,807 \cdot 10^7$	1	2,343	$6,121 \cdot 10^{19}$	$7,103 \cdot 10^{23}$	$1,411 \cdot 10^{21}$	$1,480 \cdot 10^{34}$	$2,025 \cdot 10^{-26}$	$6,571 \cdot 10^{10}$
1 cal	4,184	$4,184 \cdot 10^7$	0,4269	1	$2,613 \cdot 10^{19}$	$3,032 \cdot 10^{23}$	$6,023 \cdot 10^{20}$	$6,318 \cdot 10^{33}$	$4,745 \cdot 10^{-26}$	$2,805 \cdot 10^{10}$
1 eV	$1,602 \cdot 10^{-19}$	$1,602 \cdot 10^{-12}$	$1,634 \cdot 10^{-20}$	$3,827 \cdot 10^{-20}$	1	11 600	23,05	$2,418 \cdot 10^{14}$	$1,240 \cdot 10^{-6}$	$1,073 \cdot 10^{-9}$
T 1 K	$1,381 \cdot 10^{-23}$	$1,381 \cdot 10^{-16}$	$1,408 \cdot 10^{-24}$	$3,298 \cdot 10^{-24}$	$8,617 \cdot 10^{-5}$	1	$1,986 \cdot 10^{-3}$	$2,084 \cdot 10^{10}$	0,0149	$9,250 \cdot 10^{-14}$
1 kcal/mol	$6,951 \cdot 10^{-21}$	$6,951 \cdot 10^{-14}$	$7,088 \cdot 10^{-22}$	$1,660 \cdot 10^{-21}$	0,0434	503,47	1	$1,049 \cdot 10^{13}$	$2,858 \cdot 10^{-5}$	$4,657 \cdot 10^{-11}$
ν 1 Hz	$6,626 \cdot 10^{-34}$	$6,626 \cdot 10^{-27}$	$6,756 \cdot 10^{-35}$	$1,583 \cdot 10^{-34}$	$4,136 \cdot 10^{-15}$	$4,799 \cdot 10^{-11}$	$9,532 \cdot 10^{-14}$	1	$2,998 \cdot 10^8$	$4,440 \cdot 10^{-24}$
λ 1 m	$1,986 \cdot 10^{-25}$	$1,986 \cdot 10^{-18}$	$2,025 \cdot 10^{-26}$	$4,745 \cdot 10^{-26}$	$1,240 \cdot 10^{-6}$	0,0149	$2,858 \cdot 10^{-5}$	$2,998 \cdot 10^8$	1	$1,331 \cdot 10^{-15}$
m 1 AME	$1,492 \cdot 10^{-10}$	$1,492 \cdot 10^{-3}$	$1,522 \cdot 10^{-11}$	$3,565 \cdot 10^{-11}$	$9,315 \cdot 10^8$	$1,018 \cdot 10^{13}$	$2,147 \cdot 10^{10}$	$2,252 \cdot 10^{23}$	$1,31 \cdot 10^{-15}$	1

Anwendungsbeispiele:

Wenn eine Atomgewichtseinheit (AME) zerstrahlt, könnte ein Photon von $2,252 \cdot 10^{23}$ Hz oder $\lambda = 1,331 \cdot 10^{-15}$ m entstehen; diese Energie entspricht $T = 1,081 \cdot 10^{13}$ K oder einem Umsatz von $2,147 \cdot 10^{10}$ kcal/mol.

Bei 11 600 K hat ein Teilchen etwa 1 eV, ein Photon etwa $2 \cdot 10^{14}$ Hz und $\lambda \approx 10^{-6}$ m = 104 Å. Ein Photon von $\lambda = 1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ m hat 12 400 eV und entspricht $1,49 \cdot 10^8$ K und $1,331 \cdot 10^{-5}$ AME (da $W = hc/\lambda$, ist die λ -Zeile die einzige, bei der man dividieren muß, statt zu multiplizieren).