Übungsrunde 7, Gruppe 2

LVA 107.369, Übungsrunde 7, Gruppe 2, 28.11.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 11/2006

1 3.34

1.1 Angabe

U sei auf dem Intervall $(0, 1)$ uniform verteilt. Zeigen Sie, daß dann $X = a + (b - a) \cdot U$ (mit $a < b$) auf dem Intervall (a, b) uniform verteilt ist.

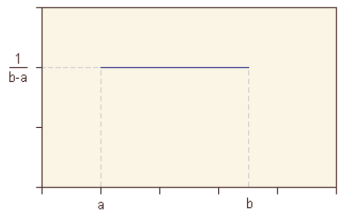
1.2 Theoretische Grundlagen: Uniforme Verteilung

1.2.1 Definition

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \leq x \leq b$$

Der Wert des interessierenden Parameters ist über den gesamten gültigen Bereich des Arguments gleich verteilt.

1.2.2 Grafische Darstellung



1.2.3 Anwendungen

Zufällige Zahlen, die von einem Computer erzeugt werden, zeigen normalerweise eine uniforme Verteilung. Eine Normalverteilung kann durch Anwendung des **zentralen Grenzwertsatzes** (s.u.) aus einer Gleichverteilung angenähert werden.
Allgemein gesprochen, sind zentrale Grenzwertsätze schwach-konvergente Resultate der Wahrscheinlichkeitstheorie. Diese Lehrsätze drücken die Tatsache aus, dass die Summe vieler unabhängiger, gleich verteilter Zufallsvariablen zu einer 'Attraktor-Verteilung' tendiert. Der bekannteste Vertreter dieser Grenzwertsätze wird als '**zentraler Grenzwertsatz**' bezeichnet und sagt aus, dass die Summe unabhängiger Variablen mit endlicher Varianz normalverteilt ist. Da es in der Natur viele Prozesse mit endlicher Varianz gibt, erklärt dies das ubiquitäre Auftreten der Normalverteilung.

1.3 Lösung des Beispiels

$V\{X\}$ sei die Verteilungsfunktion von X (unbekannt); $V\{U\}$ sei die Verteilungsfunktion von U (diese ist bekannt und die uniforme Verteilung in $(0,1)$):

$$V\{X\}(x) = W\{X \leq x\} = W\{a + (b-a) \cdot U \leq x\} = W\{U \leq \frac{x-a}{b-a}\} = V\{U\}(\frac{x-a}{b-a})$$

Bekannt ist: $V\{U\}(u) = 0$ für $u < 0$, daher:

$$\frac{x-a}{b-a} < 0 \ \Rightarrow \ x < a : \qquad V\{X\}(x) = 0 \ \forall \ x < a$$

Ausserdem ist bekannt, dass dass $V\{U\}(u) = 1$ für $u > 1$, daher:

$$\frac{x-a}{b-a} > 1 \ \Rightarrow \ x < b : \qquad V\{X\}(x) = 1 \ \forall \ x > b$$

Schließlich ist bekannt, dass $V\{U\}$ zwischen 0 und 1 linear steigt. Wenn die Schranken für u 0 und 1 sind, dann ergeben sich dadurch sind die Schranken für x bei a und b. $V\{X\}$ muss also zwischen a und b linear steigen.
Zusammenfassend:

$$\mathbf{V\{X\}(x) = 0} \ \forall \ \mathbf{x < a}$$
$$\mathbf{V\{X\}(x) = 1} \ \forall \ \mathbf{x > b}$$

Dazwischen linarer Anstieg - das ist genau die uniforme Verteilung in (a,b).

2 3.36

2.1 Angabe

Die Kilometerleistung eines Autos bevor die Batterie defekt wird, sei exponentialverteilt mit $\tau = 10000$ km. Jemand möchte eine Reise über 5000 km antreten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Reise beendet werden kann, ohne die Batterie zu ersetzen? Wie lang darf eine Reise höchstens sein, daß sie mit 90% Wahrscheinlichkeit beendet werden kann, ohne die Batterie ersetzen zu müssen?

2.2 Theoretische Grundlagen: Exponentialfunktion

Die Exponentialverteilung ist eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der positiven reellen Zahlen. Sie wird vorrangig bei der Beantwortung der Frage nach der Dauer von zufälligen Zeitintervallen benutzt, wie z.B. 'Länge eines Telefongespräches', 'Dauer von Dienstleistungen, Reparaturen, Instandhaltungsmaßnamen', 'Zeit zwischen zwei Anrufen', 'Lebensdauer von Atomen beim radioaktiven Zerfall', 'Lebensdauer von Bauteilen, Maschinen und Geräten, wenn Alterungserscheinungen nicht betrachtet werden müssen', 'Alter von Lebewesen', 'als grobes Modell für kleine und

mittlere Schäden in Hausrat', 'Kraftfahrzeug-Haftpflicht, Kasko in der Versicherungsmathematik'.
Eine stetige Zufallsvariable X genügt der Exponentialverteilung $\mathrm{Exp}(\lambda)$ mit dem Parameter λ, wenn sie die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

besitzt.
Man beachte, dass statt λ auch $\frac{1}{\tau}$ verwendet wird.[1]
Die Exponentialverteilung hat einen reellen Parameter λ. Er besitzt den Charakter einer Ausfallrate und $1/\lambda$ den einer Lebensdauer. Um ihre Normierbarkeit zu garantieren, wird $\lambda > 0$ gefordert.
Den maximalen Wert nimmt die Dichtefunktion der Exponentialverteilung bei $x_{max} = 0$ ein, er beträgt dort $f_{max} = \lambda$.

2.3 Lösung des Beispiels

Die Formel ist $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{t}}$. t ist bei uns 10000 (km) und x ist 5000. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 60.653% kann die Reise beendet werden.
Nun verwenden wir die 90%-ige Wahrscheinlichkeit:

$$0.9 = 1 - e^{-\frac{x}{10000}}$$
$$x = 10000 \cdot ln 0.1 = 23025.85$$

3 3.37

3.1 Angabe

Zeigen Sie die 'Gedächtnislosigkeit' der Exponentialverteilung, d.h. zeigen Sie für X Ex_r gilt:

$$W\{X > x + y | X > x\} = W\{X > y\}; x, y > 0$$

Wie läßt sich diese Beziehung interpretieren? (Hinweis: X sei z.B. die Lebensdauer einer Komponente.)

3.2 Theoretische Grundlagen: Exponentialfunktion

Siehe Beispiel 3.36.!

[1] Prof. Viertl verwendet in seinen VO-Folien $\frac{-}{\tau}$, ebenso auf S. 50 in 'Einführung in die Stochastik'. Bosch verwendet in 'Elementare Einf.i.d.Wahrscheinlichkeitsrechnung' auf S. 138 α, und in weiterer Literatur und in Websites wird oft λ verwendet.

3.3 Lösung des Beispiels

Die Gedächtnislosigkeit $W\{X > x + y \mid X > x\} = W\{X > y\}$ gilt im Falle einer geometrischen Verteilung natürlich nur für $x, y \in \mathbb{N}$ (und in diesem Sinne ist die geometrische Verteilung die einzige diskrete gedächtnislose Verteilung).
Wenn man jedoch fordert, dass $W\{X > x+y \mid X > x\} = W\{X > y\}$ für alle $x, y \in \mathbb{R} > 0$ gelten soll, dann ist die Exponentialverteilung die einzige gedächtnislose Verteilung.
Beweis (komplexer): Es bezeichne $F^{\diamond}-$ die Überlebensfunktion von X, d.h. $F^{\diamond}-y) = P(X > y)$.

$$W\{X > y + x|X > x\} = W\{X > y\}\forall x, y \in \mathbb{R} > 0 \;\Leftrightarrow$$
$$W\{X > x + y\} = W\{X > x\} \cdot W\{X > y\}\forall y, x \in \mathbb{R} > 0 \;\Leftrightarrow$$
$$F^{\diamond} - \{x + y\} = F^{\diamond} - \{y\} * F^{\diamond} - \{x\}\forall y, x\mathbb{R} > 0$$

Die Funktionalgleichung $F^{\diamond} - (x + y) = F^{\diamond} - (x) \cdot F^{\diamond} - (y)\forall x, y \in \mathbb{R} > 0$ besitzt genau die Funktionen $F^{\diamond} - (x)e^{-\alpha \cdot x}, \alpha \in \mathbb{R}$, als messbare (!) Lösungen. Weil $F^{\diamond}-$ ausserdem monoton fallen muss, erhält man noch $\alpha >= 0$.
Einfacherer Beweis: zu zeigen ist: $W\{X > x + y|X > x\} = W\{X > y\}$
Grundsätzlich gilt:

$$W\{A|B\} = \frac{W\{A \cap B\}}{W\{B\}} = \frac{W\{(X > x) \cap (X > x + y)\}}{W\{X > x\}} = \frac{W\{X > x + y\}}{W\{X > x\}}$$

Auf diesen Schritt kommt man einfach aus der Überlegung, dass wenn $X > x + y$ gilt ganz sicher auch $X > x$ gilt. Denn um den Durchschnitt zu erhalten muss man die Bedingungen logisch verbunden.

$$W\{X > x + y\} = 1 - F(x + y) = 1 - (1 - e^{\frac{(-x)\cdot(-y)}{\tau}}) = e^{\frac{(-x)\cdot(-y)}{\tau}} \cdot W\{X > x\} =$$
$$1 - F(x) = 1 - (1 - e^{\frac{-x)}{\tau}}) = e^{\frac{-x}{\tau}}$$

Dann einsetzen:

$$\frac{e^{\frac{(-x)\cdot(-y)}{\tau}}}{e^{\frac{(-x)}{\tau}}} = e^{\frac{-y}{\tau}} = W\{X > y\}$$

Die Exponentialverteilung ist somnit im folgenden Sinne 'gedächtnislos': $W\{X >= x + y|X \geq x\} = W\{X \geq y\}$
Das bedeutet: Ist bekannt, dass eine exponentialverteilte Zufallsvariable X den Wert x überschreitet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie x um mindestens y überschreitet genau so groß wie die, dass eine exponentialverteilte Zufallsvariable (mit gleichem Parameter λ) den Wert y überschreitet. Diese Verhalten wird auch Markov-Eigenschaft genannt.
Die Gedächtnislosigkeit ist sogar eine definierende Eigenschaft der Exponentialverteilung; diese ist die einzig mögliche stetige Verteilung mit dieser Eigenschaft. Dies folgt

direkt mit der Definition der bedingten Erwartung und der Cauchy-Funktionalgleichung. Das diskrete Pendant hierzu ist die geometrische Verteilung als einzig mögliche diskrete gedächtnislose Verteilung.
z.B.: Die Wahrscheinlichkeit einen 6er beim Lotto zu haben ist für einen Spieler der schon 100000mal gespielt hat genauso groß wie für einen Spieler, der das erste mal spielt, daher 'gedächtnislos'.

4 3.40

4.1 Angabe

Zeigen Sie, daß für die Verteilungsfunktion Φ der Standard-Normalverteilung gilt:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \qquad x > 0$$

4.2 Lösung des Beispiels

Eine Zufallsvariable Z hat die Dichte $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ und ist damit normalverteilt.
Die Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ lautet:

$$\Phi = P(Z < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du$$

Aus der Symmetrie der Dichte folgt für jedes z:

$$P(Z \leq -z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du = P(Z \geq z)$$

Daher ergibt wegen $1 = P(Z \leq z) + P(Z \geq z)$ und der o.g. Formel für alle reellen z die Identität

$$P(Z \leq -z) = P(Z \geq -z) = 1 - P(Z \leq z)$$

Und daher gilt für alle reellen z:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z); P(-z \leq Z \leq z) = 2\Phi(z) - 1$$

Es genügt daher, die Funktion Φ nur für nichtnegative Werte von zu tabellieren.

5 3.42

5.1 Angabe

Die Lebensdauer einer Bildröhre sei eine normalverteilte sG mit $\mu = 8.2$ Jahre und $\sigma = 1.4$ Jahre.

(a) Welcher Anteil solcher Röhren funktioniert länger als 10 Jahre, weniger als 5 Jahre, zwischen 5 und 10 Jahren?
(b) Sie kaufen einen 3 Jahre alten gebrauchten Monitor, der diesen Röhrentyp verwendet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert seine Röhre noch länger als 5 Jahre? (*) Hat die Normalverteilung die Eigenschaft der 'Gedächtnislosigkeit' (vgl. Bsp. 37)?

5.2 Theoretische Grundlagen: Normalverteilung

Die **Normal- oder Gaußverteilung** (nach Carl Friedrich Gauß) ist ein wichtiger Typ kontinuierlicher Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte wird auch Gauß-Funktion, Gauß-Kurve, Gauß-Glocke oder Glockenkurve genannt.
Die besondere Bedeutung der Normalverteilung beruht unter anderem auf dem **zentralen Grenzwertsatz**, der besagt, dass eine Summe von n unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen im Grenzwert $n \to \infty$ normalverteilt ist. Das bedeutet, dass man Zufallsvariablen dann als normalverteilt ansehen kann, wenn sie durch Überlagerung einer großen Zahl von Einflüssen entstehen, wobei jede einzelne Einflussgröße einen im Verhältnis zur Gesamtsumme unbedeutenden Beitrag liefert.
Viele natur-, wirtschafts- und ingenieurswissenschaftliche Vorgänge lassen sich durch die Normalverteilung entweder exakt oder wenigstens in sehr guter Näherung beschreiben (vor allem Prozesse, die in mehreren Faktoren unabhängig voneinander in verschiedene Richtungen wirken).
Zufallsgrößen mit Normalverteilung benutzt man zur Beschreibung zufälliger Versuche bei der Bestimmung von Geschwindigkeiten, Messfehlern, Beobachtungsfehlern wie:

- zufällige Beobachtungs- und Messfehler.
- zufällige Abweichungen vom Nennmaß bei der Fertigung von Werkstücken.
- Beschreibung der Brownschen Molekularbewegung.

In der Versicherungsmathematik ist die Normalverteilung geeignet zur Modellierung von Schadensdaten im Bereich mittlerer Schadenshöhen.
Definition: Eine stetige Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

heißt μ–σ–-normalverteilt, auch geschrieben als $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ oder (μ, σ^2)-normalverteilt, wobei μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung sind.
Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist gegeben durch

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}t$$

$$\varphi_{0;1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

5.3 Lösung des Beispiels

5.3.1 a

Wir berechnen:

- $P\{X \geq 10\} = 1 - \Phi\{\frac{10-8.2}{1.4}\} = 9.92\%$
- $P\{X \leq 5\} = \Phi\{\frac{5-8.2}{1.4}\} = 1.11\%$ - zu beachten: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- $P\{5 \leq X \leq 10\} = 1 - \Phi\{\frac{10-8.2}{1.4}\} - \Phi\{\frac{5-8.2}{1.4}\} = 88.96\%$

(Werte liest man aus Tabelle ab.)

5.3.2 b

Man verwendet die bedingte Wahrscheinlichkeit. Der Monitor hält länger als 8 Jahre (5+3). Wenn er schon länger als 3 Jahre gehalten hat (Wir kaufen ja keinen kaputten Monitor, also hat er schon 3 Jahre gehalten, d.h. er hält länger als 3 Jahre) gilt:

$$W\{X > 8|X > 3\} = W\{(X > 3) \cup (X > 8)\}/W\{X > 3\}$$
$$W\{(X > 3) \cup (X > 8)\} = W\{X > 8\}$$
$$W\{X > 8|X > 3\} = W\{X > 8\}/W\{X > 3\} = 0.5568552342$$

Das Ergebnis macht Sinn, da der Erwartungswert bei 8.2 Jahren liegt und die Standardabweichung nur 1.4 ist, da ist die Wahrscheinlichkeit sehr hoch dass der Monitor 3 Jahre überlebt, und wenn diese hoch ist, hat sie auch wenig Einfluss auf das Ergebnis. Die Normalverteilung ist nicht gedächtnislos. Daher ist das Ergebnis nur gültig, wenn man mit der bedingten Wahrscheinlichkeit rechnet. Der Grund für die fast gleichen Ergebnisse in diesem Beispiel ist, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls in den ersten drei Jahren sehr, sehr gering ist.
Dass die Normalverteilung nicht gedächtnislos ist, erkennt man auch an der Dichtefunktion, da diese nicht selbstähnlich ist, wie etwa die Exponentialfunktion.

6 3.43

6.1 Angabe

Für eine normalverteilte $sG, X\ N(\mu, \sigma^2)$, gelte: Der Median ist 89 und das 25
(a) Bestimmen Sie σ und μ
(b) Bestimmen Sie das 75
(c) Berechnen Sie $W\{X \leq 100\}, W\{X > 80\}, W\{|X - \mu| > 10\}$.

6.2 Theoretische Grundlagen: Normalverteilung

Siehe Beispiel 3.42.!

6.3 Lösung des Beispiels

6.3.1 a

Bei der Normalverteilung ist der Median gleich dem Mittelwert μ; für das p-Quantil x_p einer Normalverteilung gilt (u_p ist das p-Quantil der $N(0,1)$):

$$F(x_p) = W\{X \leq x_p\} = \Phi(\frac{x_p - \mu}{\sigma}) = p$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x_p - \mu}{\sigma} = u_p, \qquad \Rightarrow \qquad x_p = \mu + u_p\sigma$$

Der Parameter σ (Standardabweichung, Streuung) ergibt sich also wie folgt:

$$x_{0.25} = \mu + u_{0.25}\sigma \qquad \sigma = \frac{x_{0.25} - \sigma}{u_{0.25}} = \frac{75.5 - 89}{-0.6745} = 20.02$$

(Tabelle: $u_{0.25} = -u_{0.75} = 0.6745$)

6.3.2 b

75%-Quantil: $x_{0.75} = \mu + u_{0.75}\sigma = 102.5$
Wegen der Symmetrie gilt: $x_{0.75} = \mu + (\mu - 75.5\sigma) = 102.5$
90%-Quantil: $x_{0.0} = \mu + u_{0.90}\sigma = 114.65$

6.3.3 c

Die Wahrscheinlichkeitsfunktionen werden durch Standardisierung auf die Standardnormalverteilung zurückgeführt.

$$W\{X \leq 100\} = \Phi(\frac{100 - \mu}{\sigma}) = \Phi(0.5496) = 0.7087$$

$$W\{X > 80\} = 1 - W\{X \leq 80\} = 1 - \Phi(\frac{80 - \mu}{\sigma}) =$$
$$1 - \Phi(-0.4497) = 1 - (1 - \Phi(-0.4497)) = \Phi(0.4497) = 0.6735$$

$$W\{|X - \mu| > 10\} = 1 - W\{|X - \mu| \leq 10\} =$$
$$1 - W\{\mu - 10 \leq X \leq \mu + 10\} =$$
$$1 - (\Phi(\frac{\mu + 10 - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\mu - 10 - \mu}{\sigma})) =$$
$$1 - (\Phi(\frac{10}{\sigma}) - \Phi(\frac{-10}{\sigma})) = 2(1 - \Phi(\frac{10}{\sigma})) =$$
$$2(1 - \Phi(0.4996)) = 2(1 - 0.6913) = 0.6173$$

Wichtig: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

7 3.45

7.1 Angabe

Ermitteln Sie für die logarithmische Normalverteilung X   LN(0, 1) (LN ist die logarithmische Normalverteilung):
(a) die Wahrscheinlichkeit von X $>$ 1;
(b) die Dichte (+ Zeichnung);
(c) die Quartile von X (d.h. das 25%, 50% und 75%-Quantile).

7.2 Theoretische Grundlagen: Logarithmische Normalverteilung

Ein für die Logarithmische Normalverteilung $\mathcal{LN}[\mu, \sigma]$ zentralen Transformationssatz:
Satz: Ist die Zufallsvariable Z $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$-verteilt, so ist die Zufallsvariable $Y = Exp[Z]$ $\mathcal{LN}[\mu, \sigma]$-verteilt. Ist die Zufallsvariable Y $\mathcal{LN}[\mu, \sigma]$-verteilt, so ist die Zufallsvariable $Z = \log[Y]$ $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$-verteilt.

- Verteilungsdichte:

$$f[z] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}z\sigma} \cdot e^{-\frac{(log[z]-\mu)^2}{2\sigma^2}} & \forall z \geq 0 \\ 0 & \forall z < 0 \end{cases}$$

- Verteilungsfunktion:

$$f[z] = \begin{cases} 0 & \forall z < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}z\sigma} \cdot \int_0^z e^{-\frac{(log[t]-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2}(1 + Erf\frac{\log[z]-\mu}{\sqrt{2}\sigma}) & \forall z \geq 0 \end{cases}$$

- Eine $\mathcal{LN}[\mu, \sigma]$-verteilte Zufallsvariable Z besitzt den Erwartungswert

$$E(Z) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

- Varianz:

$$V(Z) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

7.3 Lösung des Beispiels

7.3.1 a

$$\mu = 0, \sigma = 1$$

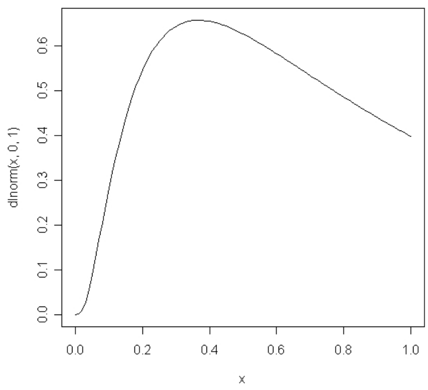
$$F(X > 1) = 1 - F(X \leq 1) = 1 - \Phi(\frac{ln(1) - \mu}{\sigma}) =$$

$$1 - \Phi(\frac{-\mu}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{0}{1}) = 1 - \Phi(0) = \underline{1 - 0.5 = 0.5}$$

7.3.2 b

Listing 1: Dichtefunktion visualisieren

```
x <- 0:1;
curve(dlnorm(x,0,1),0,1)
```



Die Schiefe ergibt sich zu $\mathrm{v}(X) = (e^{\sigma^2} + 2)\sqrt{e^{\sigma^2} - 1} > 0$, d.h., die Lognormalverteilung ist rechtsschief.
Ist $u_{(p)}$ das p-Quantil einer Standardnormalverteilung (d.h. $\Phi(u_{(p)}) = p$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung sei), so ist das p-Quantil der Logarithmischen Normalverteilung gegeben durch

$$x_{(p)} = e^{\mu + u_{(p)} \cdot \sigma}.$$

7.3.3 c

Listing 2: Quantile mit R berechnen

```
> x <- 0:1;
> qlnorm(0.25,0,1)
[1] 0.5094163
> qlnorm(0.5,0,1)
[1] 1
> qlnorm(0.75,0,1)
[1] 1.963031
> qlnorm(0.75,0,1)
```