

Prüfung Algebra und Diskrete Mathematik vom 6.3.2019 (Panholzer)

Die Angabe könnte unter Umständen von der Tatsächlichen abweichen, da sie bloß aus Erinnerungen rekonstruiert wurde. Eine Lösung reiche ich bei Zeit demnächst vielleicht noch nach.

1. Größter Gemeinsamer Teiler und Erweiterter Euklidischer Algorithmus

- a) Gesucht ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 27 und 37. Zur Ermittlung soll der Euklidische Algorithmus verwendet werden.
- b) Ermitteln der zu der Restklasse $\overline{27}$ multiplikativen inversen Restklasse $\overline{27}^{-1}$ im Teillerring $(\mathbb{Z}_{37}, +)$ unter Verwendung des Ergebnisses von a (**Erweiterter Euklidischer Algorithmus**)

2. Gegeben ist eine Matrix A der Form $\mathbb{Z}^{3 \times 3}$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnung der Eigenwerte der Matrix A
- b) Angeben einer Basis B von \mathbb{R}^3 die nur aus Eigenvektoren von A besteht.

3. Gegeben ist das folgende rekursive Bildungsgesetz

$$a_n + 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2} = 14 - 2^{n+1} \quad n \geq 2$$

Ermitteln Sie eine explizite Formel zur Berechnung von a_n mit den Anfangswerten $a_0 = 1$ und $a_1 = -5$

4. Aufgaben zur Kombinatorik

- a) Formulieren Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip für zwei Mengen
- b) Formulieren Sie das Inklusions-Exklusions-Prinzip für den allgemeinen Fall (**Wichtig:** Angeben der Formel)
- c) Formulieren Sie das Schubfachprinzip
- d) Berechnen Sie die Summe $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$ für alle natürlichen Zahlen n

5. Multiple Choice zur Graphentheorie. Gegeben sind vier Graphen durch ihre jeweilige Adjazenzmatrix.

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(G_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Bei welchen Graphen handelt es sich um Bäume?
- b) Welche Graphen besitzen eine geschlossene Hamilton'sche Linie?
- c) Welche Graphen besitzen eine geschlossene Euler'sche Linie?
- d) Wie viele starke Zusammenhangskomponenten besitzt G_4 ?
- e) Welcher Algorithmus ist geeignet um für einen gewichteten Graphen den minimalen Entfernungsbaum zu ermitteln?
- f) Für einen gerichteten azyklischen Graphen gilt:
 - a. Es existiert ein Knoten mit Weggrad = 0
 - b. Es existiert ein Knoten mit Weggrad = 0
 - c. Der Schatten des Graphen ist kreisfrei

Eventuell waren noch ein oder zwei MPC fragen, die sind mir aber entfallen.