2

Abgeleitete Begriffe der Kinematik: Geschwindigkeit und Beschleunigung

2.1 Vorbemerkungen

Die Beschreibung der Bewegung eines Körpers ist gleichbedeutend mit der Angabe seines Aufenthaltsortes zu jedem Zeitpunkt. Dies geschieht vorteilhaft in vektorieller Schreibweise durch Angabe seines Ortsvektors $\vec{r}(t)$ mit den Komponenten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ z.B. in einem kartesischen Koordinatensystem. Der Vektor $\vec{r}$ ist vom Koordinatenursprung zum Körper K gerichtet.

$$\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}. \tag{2.1}$$

Der Ortsvektor ändert bei der Bewegung des Körpers i. allg. seinen Betrag $r(t)$ und seine Richtung $\hat{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = r(t) \cdot \hat{r}(t). \tag{2.2}$$

Der Betrag r hat die Dimension einer Länge und wird in Meter gemessen. Der Einheitsvektor $\hat{r}$ zeigt nur die Richtung an und besitzt keine Einheit. Zur Einführung der abgeleiteten Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung werden zunächst einfache Spezialfälle betrachtet (Fig. 2.2/2.3):

(a) Der Körper bewegt sich auf einer Geraden (geradlinige Bewegung, Translationsbewegung). Der Ortsvektor ändert nur seinen Betrag, nicht aber seine Richtung, wenn man das Bezugskoordinatensystem passend wählt.

(b) Der Körper bewegt sich auf einem Kreis. Wenn man den Mittelpunkt zum Koordinatenursprung wählt, ändert der Ortsvektor nur seine Richtung, nicht aber seinen Betrag.

(c) Als Beispiele für den allgemeinen Fall werden schließlich Überlagerungen translatorischer Bewegungen betrachtet.

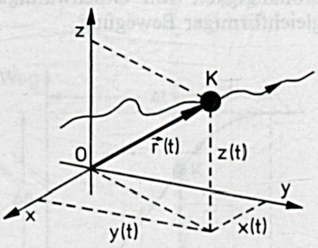


Fig. 2.1: Ein punktförmiger Körper K bewegt sich auf einem i. allg. krummlinigen Weg. Sein Ortsvektor $\vec{r}$, der vom Ursprung O des Koordinatensystems auf ihn zu zeigt, besitzt die Komponenten x, y und z.

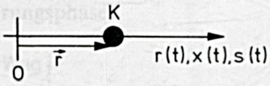


Fig. 2.2: Bewegung auf einer geraden Linie

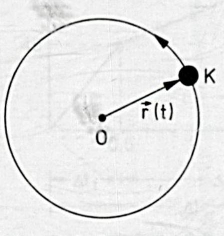


Fig. 2.3: Bewegung auf einer Kreisbahn

2.2 Geradlinige Bewegung

Der Körper K legt in einer gewissen Zeit t einen Weg s zurück. Den Quotienten aus Weg und Zeit nennt man seine Geschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit).

Definition:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{verstrichene Zeit}}$$

$$v = \frac{s}{t}; \qquad \text{Einheit: m/s.} \tag{2.3}$$

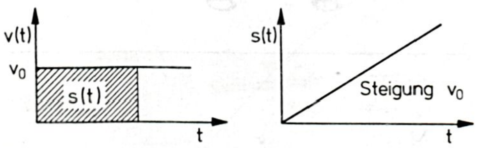


Fig. 2.4: Zeitabhängigkeit von Geschwindigkeit und Weg bei gleichförmiger Bewegung.

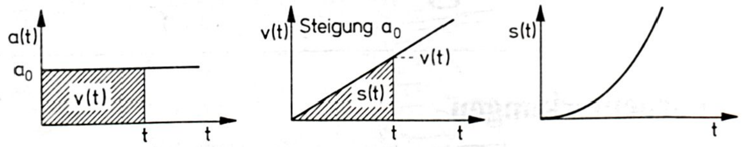


Fig. 2.5: Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist die Beschleunigung konstant, die Geschwindigkeit wächst linear und der zurückgelegte Weg quadratisch mit der Zeit an.

Ist die Geschwindigkeit zeitlich konstant ($v = v_0$), spricht man von *gleichförmiger Bewegung*. Der zurückgelegte Weg wächst linear mit der Zeit (Fig. 2.4):

$$\boxed{s(t) = v_0 \cdot t} \tag{2.4}$$

$s(t)$ ergibt sich als Fläche unter der $v(t)$-Kurve.

Wächst die Geschwindigkeit linear mit der Zeit (oder nimmt sie linear mit der Zeit ab), liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor (Bahnbeschleunigung).

Definition:

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitintervall}}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{Einheit: m/s}^2 \tag{2.5}$$

oder

$$a = \frac{v}{t} \qquad \text{bei geeigneter Wahl des Zeitnullpunktes.}$$

Die Geschwindigkeit $v(t)$ ergibt sich als Fläche unter der $a(t)$-Kurve, der Weg $s(t)$ als Fläche unter der $v(t)$-Kurve. Man gelangt so zum *Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung:*

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.} \tag{2.6}$$

Ein Beispiel für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist die Fallbewegung (Fig. 2.6); hier ist a gleich der Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Experimentell stellt man fest: *Alle Körper erfahren am gleichen Ort auf der Erde die gleiche Beschleunigung g.* Genauer gilt für 45° nördlicher Breite und Meeresniveau: $g = 9{,}806\ \mathrm{m/s^2}$ (Normalort).

t in s	s in cm	Δs in cm	$\Delta(\Delta s) = \Delta^2 s$ in cm
0	0		
		1,23	
1/20	1,23		2,45
		3,68	
2/20	4,91		2,45
		6,13	
3/20	11,04		2,45
		8,58	
4/20	19,62		2,46
		11,04	
5/20	30,66		2,45
		13,49	
6/20	44,15		2,45
		15,94	
7/20	60,09		2,45
		18,39	
8/20	78,48		2,46
		20,85	
9/20	99,33		
			Mittelwert: $\Delta^2 s = 2{,}45$ cm

Tab. 2.1: Fallversuch: Die in der Tabelle angegebenen Zahlenwerte werden in einem Experiment ermittelt, bei dem statt einer Kugel ein Plexiglasstab fällt; auf diesem werden von einem rotierenden Tintenspritzer im zeitlichen Abstand von 1/20 s Marken angebracht, die dann ausgewertet werden.

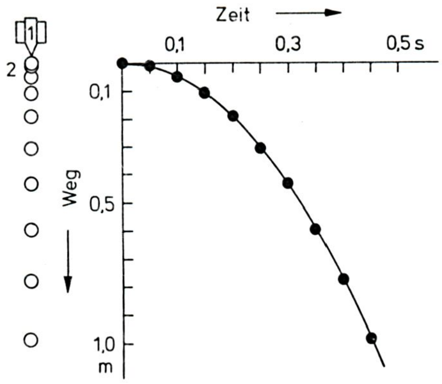


Fig. 2.6: Stroboskopische Aufnahme der Fallbewegung einer Kugel (2), die sich bei $t = 0$ von einem Elektromagneten (1) löst. Der zeitliche Abstand der Stroboskop-Lichtblitze beträgt 1/20 s.

Man erhält:

$$g = \frac{\Delta^2 s}{(\Delta t)^2} = \frac{2{,}45}{(1/20)^2} = 980\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s^2}}.$$

Bei der allgemeinsten geradlinigen Bewegung ist auch die Beschleunigung zeitlich veränderlich. Man hat Beschleunigungs- und Abbremsphasen sowie Phasen gleichförmiger Bewegung. Ein einfaches Beispiel gibt Fig. 2.7. Es lassen sich jetzt sowohl mittlere Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in einem Zeitintervall Δt als auch ihre Momentanwerte zu jedem Zeitpunkt t angeben.

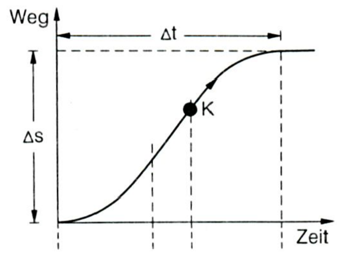


Fig. 2.7: Weg-Zeit-Verlauf einer Bewegung mit einer Beschleunigungsphase, einer Phase gleichförmiger Bewegung und einer Verzögerungsphase

Definition:

$$\text{Mittlere Geschwindigkeit} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{Zeitintervall}}; \quad \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (2.7)$$

Beispiel: Ein Auto fährt die erste Hälfte einer 90 km langen Strecke mit $v_1 = 90\ \mathrm{km/h}$, die zweite mit $v_2 = 30\ \mathrm{km/h}$. Gesucht ist die mittlere Geschwindigkeit. Die Weg-Zeit-Funktion ist in Fig. 2.8 skizziert.

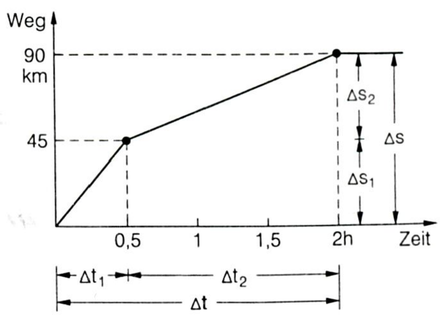


Fig. 2.8: Zur Erläuterung der mittleren Geschwindigkeit eines Autos, das die erste Hälfte seines Weges mit 90, den zweiten mit 30 km/h zurücklegt

Man berechnet für die benötigten Zeiten

$$\Delta t_1 = \frac{45\text{ km}}{90\text{ km/h}} = 0{,}5\text{ h}; \quad \Delta t_2 = \frac{45\text{ km}}{30\text{ km/h}} = 1{,}5\text{ h}; \quad \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2\text{ h}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich zu: $\bar{v} = s/t = 90\text{ km}/2\text{ h} = 45\text{ km/h}$. Es gilt also *nicht* $\bar{v} = (v_1 + v_2)/2 = 60\text{ km/h}$. Man hat vielmehr ein *gewichtetes Mittel* zu bilden, bei dem berücksichtigt wird, wie lange der Fahrer die jeweilige Geschwindigkeit eingehalten hat:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \quad \text{oder} \quad \bar{v} = v_1 \cdot \frac{\Delta t_1}{\Delta t} + v_2 \cdot \frac{\Delta t_2}{\Delta t}. \tag{2.8}$$

Die zeitlichen Bruchteile $(\Delta t_1/\Delta t)$ und $(\Delta t_2/\Delta t)$ sind als Gewichtsfaktoren zu berücksichtigen.

Der Tachometer des Autos zeigt jeweils die *Momentangeschwindigkeit* an:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{s}(t). \tag{2.9}$$

Sie ergibt sich als Steigung der Weg-Zeit-Kurve.
Analog definiert man die *mittlere Bahnbeschleunigung* im Zeitintervall Δt:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.10}$$

und die *Momentanbeschleunigung* als den entsprechenden Differentialquotienten

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{s}(t). \tag{2.11}$$

Momentangeschwindigkeit und Momentanbeschleunigung erhält man also durch zeitliche Differentiation der Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$. Umgekehrt ergibt sich aus der Momentanbeschleunigung durch einmalige Integration die Momentangeschwindigkeit und durch zweimalige Integration die Weg-Zeit-Funktion (unbestimmtes Integral) oder der zurückgelegte Weg (bestimmtes Integral).

1. Beispiel:
Gleichförmige Bewegung: $v(t) = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = v_0 = const.$

$$\mathrm{d}s = v_0 \cdot \mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow \quad \int_{s=s_0}^{s(t)} \mathrm{d}s(t) = \int_{t=0}^{t} v_0 \cdot \mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow \quad s(t) - s_0 = v_0 \cdot t$$

oder

$$\boxed{s(t) = v_0 \cdot t + s_0.} \tag{2.12}$$

2. Beispiel:
Gleichmäßig beschleunigte Bewegung: $a(t) = \mathrm{d}v(t)/\mathrm{d}t = a_0 = const.$

$$\mathrm{d}v(t) = a_0 \cdot \mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow \quad \int_{v_0}^{v(t)} \mathrm{d}v = \int_{0}^{t} a_0 \cdot \mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow \quad v(t) - v_0 = a_0 \cdot t$$

oder

$$\boxed{v(t) = a_0 \cdot t + v_0.} \tag{2.13}$$

Dies ist die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion; um zur Weg-Zeit-Funktion zu gelangen, muß ein zweites Mal integriert werden:

$$\int_{s_0}^{s(t)} \mathrm{d}s = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t (a_0 \cdot t + v_0)\,\mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow \quad s(t) - s_0 = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0.} \tag{2.14}$$

Dabei bedeuten v_0 und s_0 Geschwindigkeit bzw. Weg zum Anfangszeitpunkt $t = 0$.

Tab. 2.2: Beispiele für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Beispiele für Geschwindigkeiten		Beispiele für Beschleunigungen	
Elektronen in einem Leiter	$3 \cdot 10^{-4}$ m/s	Personenkraftwagen	3 m/s^2
Fußgänger	1,4 m/s	Fallbeschleunigung	9,81 m/s^2
Personenkraftwagen	22 m/s	100 m-Läufer	10 m/s^2
Revolverkugel	300 m/s	Gewehrkugel	5000 m/s^2
Schall in Luft	340 m/s		
Licht im Vakuum	$3 \cdot 10^8$ m/s		

2.3 Kreisbewegung

(a) Definitionen

Wählt man bei der Beschreibung der Kreisbewegung den Kreismittelpunkt als Bezugspunkt, dann ändert sich nur die Richtung $\hat{r}$ des Ortsvektors, nicht aber sein Betrag:

$$\vec{r}(t) = r_0 \cdot \hat{r}(t); \qquad r_0 = const. \tag{2.15}$$

Zweckmäßigerweise wird jetzt die Winkelkoordinate $\varphi(t)$ eingeführt, die relativ zur positiven x-Richtung gemessen wird. Man definiert die *Winkelgeschwindigkeit*

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}(t) \tag{2.16}$$

und die *Winkelbeschleunigung*

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\varphi}(t). \tag{2.17}$$

Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit spricht man von einer gleichförmigen, bei konstanter Winkelbeschleunigung von einer gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung.

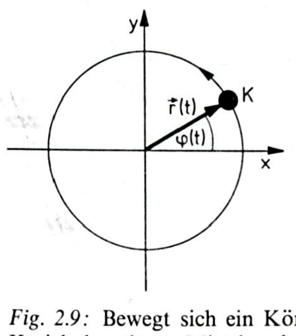


Fig. 2.9: Bewegt sich ein Körper K auf einer Kreisbahn, deren Mittelpunkt zum Koordinatenursprung gemacht wird, dann ändert sein Ortsvektor nur seine Richtung, nicht den Betrag.

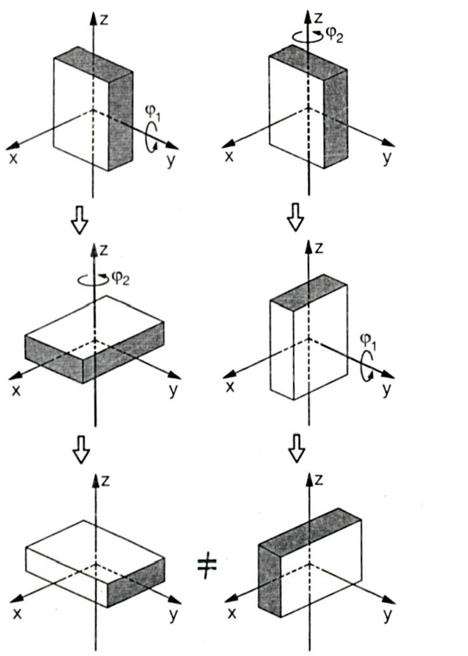


Fig. 2.10: Vergleichen Sie die links dargestellte Sequenz von 90°-Drehungen um die Koordinatenachsen x und y mit der rechts dargestellten: Die beiden Drehungen sind nicht vertauschbar. Das heißt Drehungen um endlich große Winkel sind i. allg. nicht als Vektoren darstellbar. Wären Drehungen um beliebige Winkel um nicht-parallele Achsen als Vektoren darstellbar, müßte das Endergebnis von der Reihenfolge unabhängig sein.

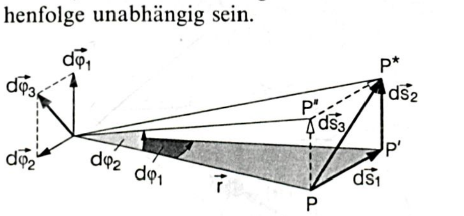


Fig. 2.11: Zur Addition von infinitesimal kleinen Winkeln. Diese Addition ist kommutativ: Infinitesimal kleine Winkel sind als Vektoren darstellbar.

(b) Vektorielle Erfassung von Drehbewegungen

Gleichförmige Drehbewegungen werden durch die Größe der Winkelgeschwindigkeit ω *und* durch einen Drehsinn, also eine Richtung beschrieben. Es stellt sich daher die Frage, ob man sie vektoriell erfassen, also durch Vektoren darstellen kann, z. B. analog zur linearen Bewegung. Die Frage ist also: Ist die folgende Analogie möglich?

Verschiebung	$\vec{s}$	$\stackrel{?}{\longleftrightarrow}$	Winkel	$\vec{\varphi}$
Geschwindigkeit	$\vec{v}$	$\stackrel{?}{\longleftrightarrow}$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega}$
Beschleunigung	$\vec{a}$	$\stackrel{?}{\longleftrightarrow}$	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha}$

Es zeigt sich, daß eine vektorielle Darstellung zwar für die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung möglich ist, nicht aber für Winkel beliebiger Größe. Wenn Winkel als Vektoren darstellbar wären, dann müßten sie auch der Kommutativität der Vektoraddition gehorchen; d.h. die Hintereinanderausführung zweier Drehungen um zwei beliebig gewählte Achsen müßte von der Reihenfolge unabhängig sein. In Fig. 2.10 wird an zwei 90°-Drehungen einer Streichholzschachtel demonstriert, daß dies i. allg. *nicht* zum gleichen Ergebnis führt: Die Prozedur „erste Drehung um die y-Achse, zweite Drehung um die z-Achse“ führt zu einem anderen Ergebnis als die umgekehrte Aufeinanderfolge „erste Drehung um z, zweite Drehung um y“. Wenn man also im obigen Sinne den Winkel versuchweise als Vektor darstellt, müßte man konstatieren:

$$\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2 \neq \vec{\varphi}_2 + \vec{\varphi}_1. \tag{2.18}$$

Das heißt:

Makroskopische Winkel sind nicht als Vektoren darstellbar.

Zieht man sich jedoch auf infinitesimal[1] kleine Winkel zurück, dann wird die Hintereinanderausführung von der Reihenfolge unabhängig: Fig. 2.11. Es ist gleichgültig, ob P über P' oder über P'' in P^* übergeführt wird. Die Wegelemente $d\vec{s}_1$ und $d\vec{s}_2$ addieren sich vektoriell zur resultierenden Verschiebung $d\vec{s}_3$, wobei die Reihenfolge gleichgültig ist:

$$d\vec{s}_3 = d\vec{s}_1 + d\vec{s}_2 = d\vec{s}_2 + d\vec{s}_1. \tag{2.19}$$

Die zu den infinitesimalen Drehwinkeln $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ gehörenden Vektoren $d\vec{\varphi}_1$ und $d\vec{\varphi}_2$ definiert man nun mit Hilfe der „Rechte-Faust-Regel“: Einer Drehung $d\varphi$ in Richtung der gekrümmten Finger der rechten Hand wird ein Vektor $d\vec{\varphi}$ in Richtung des ausgestreckten Daumens zugeordnet (Fig. 2.12). In unserem Beispiel steht also $d\vec{\varphi}_1$ senkrecht auf der vom Ortsvektor $\vec{r}(P)$ und der Verschiebung $d\vec{s}_1$ gebildeten Ebene; entsprechend ist $d\vec{\varphi}_2$ senkrecht zur Ebene $\{\vec{r}(P'), d\vec{s}_2\}$. Die mit den Wegelementen $d\vec{s}_i$ ausgeführte Addition läßt sich damit sofort auf die $d\vec{\varphi}_i$ übertragen. Es gilt also

$$d\vec{\varphi}_3 = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2 = d\vec{\varphi}_2 + d\vec{\varphi}_1, \tag{2.20}$$

[1] infinitesimal: im Grenzwert unendlich klein werdend.

und damit

$$\frac{d\vec{\varphi}_3}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}_1}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}_2}{dt} \quad \text{oder} \quad \vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \tag{2.21}$$

Das heißt aber: Winkelgeschwindigkeiten sind als Vektoren schreibbar. Sie charakterisieren Drehsinn und Geschwindigkeit der Rotation, ersteres mit Hilfe der Rechte-Hand-Regel: Fig. 2.12. Vektoren mit diesen Eigenschaften nennt man axiale Vektoren[2]. Festzuhalten bei dieser Definition ist lediglich, daß sich in Richtung des Vektors $\vec{\omega}$ nichts bewegt.

Gleichung (2.20) besagt aber außerdem noch, daß man die Überlagerung zweier Drehbewegungen mit den Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_1$ und $\vec{\omega}_2$ um verschiedene Achsen durch den Summenvektor $\vec{\omega}_3$ beschreiben kann (Fig. 2.13).

Kehren wir zurück zum rotierenden Körper K der Fig. 2.12. Seine Bahngeschwindigkeit ist stets tangential zur Kreisbahn gerichtet. Ihr Betrag ergibt sich aus:

$$ds = r_0 \cdot d\varphi,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r_0 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r_0 \cdot \omega. \tag{2.22}$$

Der Bahngeschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ steht senkrecht auf dem Ortsvektor $\vec{r}$ und auf dem Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$. Man kann also mit Hilfe des Vektorproduktes schreiben:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.} \tag{2.23}$$

Da sich die Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$ (wenn auch nur der Richtung nach) ständig ändert, haben wir es bei der gleichförmigen Kreisbewegung bereits mit einer *beschleunigten Bewegung* zu tun. Diese Beschleunigung dreht die Spitze des Geschwindigkeitsvektors stets zum Kreismittelpunkt hin, ändert aber nicht ihren Betrag.

(c) Mathematische Beschreibung der gleichförmigen Kreisbewegung

Wir führen ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem ein, charakterisiert durch die Einheitsvektoren $\hat{x}$ und $\hat{y}$. Der Ortsvektor $\vec{r}$ läßt sich dann in seine Komponenten zerlegen:

$$\vec{r}(t) = \hat{x} \cdot r_0 \cdot \cos\varphi + \hat{y} \cdot r_0 \cdot \sin\varphi. \tag{2.24}$$

Speziell bei einer gleichförmigen Kreisbewegung kann man schreiben:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{2.25}$$

Dabei bedeuten:

ν	Umlauffrequenz,
$T = 1/\nu$	Periodendauer = Zeit für einen vollen Umlauf,
$\omega = 2\pi\nu$	Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz.

[2] Die üblichen Vektoren werden zum Unterschied dazu als polare Vektoren bezeichnet.

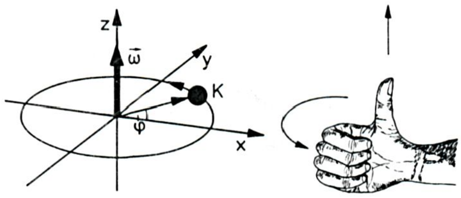


Fig. 2.12: Zur Festlegung der Richtung eines axialen Vektors – hier der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ – mit Hilfe der Rechte-Hand-Regel

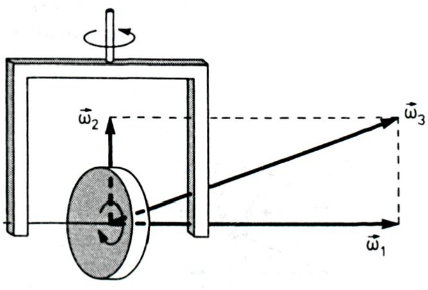


Fig. 2.13: Ein Rad dreht sich mit $\vec{\omega}_1$ in einer Gabelhalterung, die sich selbst mit $\vec{\omega}_2$ dreht. Die resultierende Drehbewegung wird durch $\vec{\omega}_3$ erfaßt, doch ist zu vermerken, daß $\vec{\omega}_3$ nicht mehr räumlich fixiert ist, sondern bei konstantem Betrag seine Richtung laufend ändert.

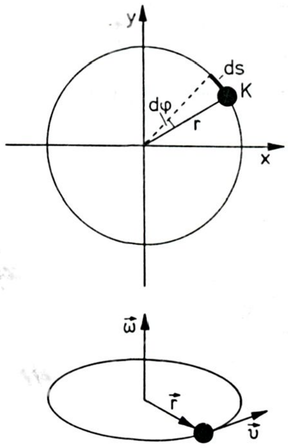


Fig. 2.14: Zur vektoriellen Erfassung der Drehbewegung

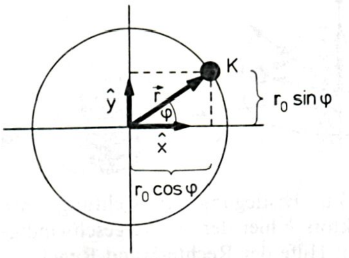


Fig. 2.15: Zur mathematischen Beschreibung der Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn in einem kartesischen $(\hat{x}, \hat{y})$-Koordinatensystem

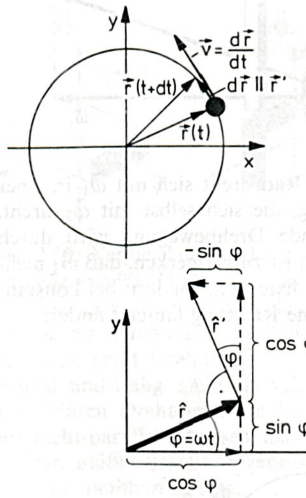


Fig. 2.16: Graphische Erläuterung der Gleichungen (2.27)

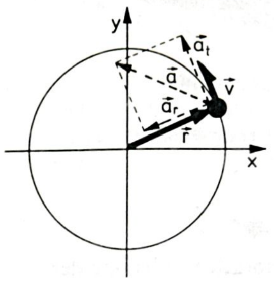


Fig. 2.17: Bei der gleichförmig beschleunigten Kreisbewegung ist der Beschleunigungsvektor i. allg. weder tangential noch radial gerichtet.

Die Zeitabhängigkeit des Ortsvektors steckt also ganz im Winkelanteil:

$$\vec{r}(t) = \underbrace{r_0}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{(\hat{x} \cdot \cos\omega t + \hat{y} \cdot \sin\omega t)}_{\text{Richtung}} = r_0 \cdot \hat{r}(t). \tag{2.26}$$

Durch zeitliche Differentiation ergibt sich die Bahngeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{r_0 \cdot \hat{r}(t)\right\} = r_0 \cdot \frac{d\hat{r}(t)}{dt} \\ &= r_0 \cdot \frac{d}{dt}\left\{\hat{x} \cdot \cos\omega t + \hat{y} \cdot \sin\omega t\right\} \\ &= \underbrace{\omega r_0}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{\left\{-\hat{x} \cdot \sin\omega t + \hat{y} \cdot \cos\omega t\right\}}_{\text{Richtung}} = \omega\, r_0 \cdot \hat{r}' = \omega \cdot \vec{r}'. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Der Einheitsvektor $\hat{r}'$, der die Richtung von $\vec{v}$ angibt, steht senkrecht auf dem Ortsvektor $\vec{r}$ (und senkrecht auf $\vec{\omega}$). Fig. 2.16 erläutert noch einmal die mathematische Prozedur der Gleichungen (2.27).

Die Differentiation des Ortsvektors ergibt also unmittelbar sowohl Betrag als auch Richtung des Bahngeschwindigkeitsvektors. Durch nochmalige Differentiation gelangt man in gleicher Weise zur Bahnbeschleunigung:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \underbrace{\omega^2 r_0}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{\left\{-\hat{x} \cdot \cos\omega t - \hat{y} \cdot \sin\omega t\right\}}_{\text{Richtung}} \\ &= \omega^2 \cdot (r_0 \cdot \hat{r}'') = -\omega^2 \cdot \vec{r}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Die Bahnbeschleunigung ist bei der gleichförmigen Kreisbewegung stets dem Ortsvektor entgegengerichtet, zeigt also immer auf den Kreismittelpunkt. Wir haben es mit einer reinen Radialbeschleunigung (Zentripetalbeschleunigung) zu tun und bezeichnen sie nun genauer mit $\vec{a}_r$. Ihr Betrag ist $a_r = \omega^2 r = \omega \cdot (\omega r) = \omega v$. Durch vektorielle Multiplikation erfaßt man auch die Richtung.

$$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{2.29}$$

Sie ist der obigen Beziehung (2.28) äquivalent, denn die Auswertung des doppelten Vektorprodukts ergibt nach dem Entwicklungssatz[3]:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot \underbrace{(\vec{\omega}\,\vec{r})}_{=0,\ \text{da}\ \vec{\omega} \perp \vec{r}} - \vec{r} \cdot (\vec{\omega}\,\vec{\omega}) = -\omega^2 \cdot \vec{r}. \tag{2.30}$$

Bei der *ungleichförmigen* Kreisbewegung (also z. B. bei der gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung) ändert sich auch der Betrag der Bahngeschwindigkeit v. Der Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ läßt sich dann in eine Radialkomponente $\vec{a}_r$ und eine Tangentialkomponente $\vec{a}_t$ zerlegen, wobei erstere für die Richtungsänderung, letztere für die Betragsänderung von $\vec{v}$ verantwortlich ist (Fig. 2.17).

[3] siehe Mathematischer Anhang.

2.4 Überlagerung von Bewegungen

Im allgemeinen Fall der beliebigen Bewegung eines Körpers wird sich sein Ortsvektor sowohl nach Betrag als auch der Richtung nach ändern. Formal haben wir jetzt zur Berechnung der Geschwindigkeit den Ortsvektor nach der bekannten Produktregel zu differenzieren:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{r(t)\cdot\hat{r}(t)\right\} = \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\hat{r}(t) + r(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\hat{r}(t)}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.31)$$

Derartige Differentiationen werden uns später nochmals begegnen. Zur *praktischen* Lösung führen wir das vektorielle Problem der Beschreibung der Bewegung auf äquivalente skalare Probleme zurück, indem wir unter Bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem die Vektoren in ihre Komponenten zerlegen. Dann kann man nämlich einfach schreiben.

$$\begin{aligned} &\text{Ortsvektor:} && \vec{r}(t) = x(t)\cdot\hat{x} + y(t)\cdot\hat{y} + z(t)\cdot\hat{z} \\ &&& \phantom{\vec{r}(t)} = \{x(t);y(t);z(t)\} \\ &\text{Bahngeschwindigkeit:} && \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \{v_x, v_y, v_z\} = \{\dot{x}(t);\dot{y}(t);\dot{z}(t)\} \\ &\text{Bahnbeschleunigung:} && \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \{a_x, a_y, a_z\} = \{\ddot{x}(t);\ddot{y}(t);\ddot{z}(t)\}. \end{aligned}$$

1. Beispiel: Der waagerechte Wurf. Der waagerechte Wurf ist die Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit v_0 in x-Richtung und einer Fallbewegung, also einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung in y-Richtung. Die z-Komponenten aller kinematischen Größen sind null.

	x-Komponenten	y-Komponenten
Beschleunigung	$a_x = 0$	$a_y = -g$
Geschwindigkeit	$v_x = v_0$	$v_y = -g\cdot t$
Weg	$x = v_0\cdot t$	$y = -g\cdot t^2/2$

In Vektorschreibweise:

$$\vec{r}(t) = v_0 t\cdot\hat{x} - \frac{1}{2}gt^2\cdot\hat{y}; \quad \vec{v}(t) = v_0\cdot\hat{x} - gt\cdot\hat{y}; \quad \vec{a}(t) = -g\cdot\hat{y}. \qquad (2.32)$$

$\{x = v_0 t;\ y = -gt^2/2\}$ ist als Parameterdarstellung der Bahnkurve anzusehen. Die Elimination von t führt zur expliziten Darstellung dieser Bahnkurve:

$$t = \frac{x}{v_0} \longrightarrow y = -\frac{g}{2v_0^2}\cdot x^2. \qquad (2.33)$$

Dies ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel im Koordinatenursprung (Fig. 2.18).

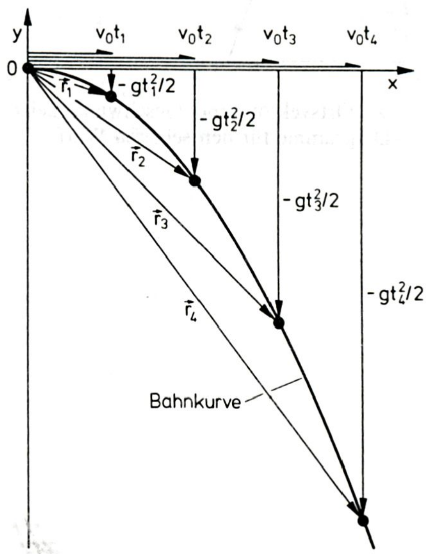


Fig. 2.18: Die Bahnkurve beim waagerechten Wurf ist eine nach unten geöffnete Parabel. Für mehrere Zeitpunkte sind die x- und die y-Komponenten der Ortsvektoren $\vec{r}_i$ angegeben.

2. Beispiel: Der schiefe Wurf. Wieder wird das Koordinatensystem passend gewählt: Die Bewegung verlaufe in der (x, y)-Ebene. Die Anfangsgeschwindigkeit besitzt nun aber eine Komponente in x- und in y-Richtung.

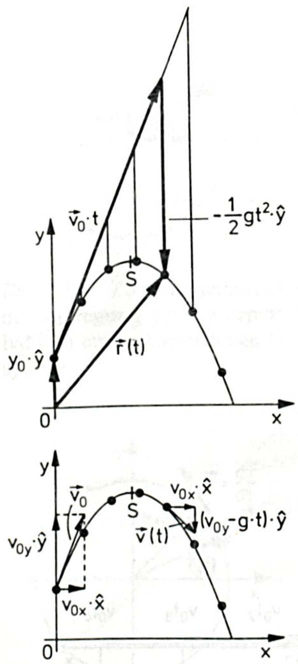


Fig. 2.19: Ortsvektor- und Geschwindigkeitsvektor-Diagramme für den schiefen Wurf

	x-Komponenten	y-Komponenten
Beschleunigung	$a_x = 0$	$a_y = -g$
Geschwindigkeit	$v_x = v_{0x}$	$v_y = v_{0y} - gt$
Weg	$x = v_{0x} \cdot t$	$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - gt^2/2$

Wie oben erhält man durch Elimination von t aus den beiden Weg-Zeit-Funktionen die Bahnkurve:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot x - \frac{g}{2\,v_{0x}^2} \cdot x^2. \tag{2.34}$$

Dies ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel

$$S = \left\{ \frac{v_{0x} v_{0y}}{g};\ y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2\,g} \right\}. \tag{2.35}$$

Sie ergibt sich als Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung in Richtung $\vec{v}_0$ und einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung in $-\hat{y}$-Richtung. Aus der Tabelle und den Vektordiagrammen der Fig. 2.19 liest man ab:

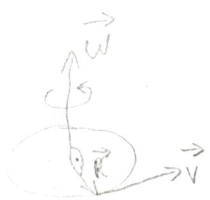
$$\text{Weg:} \quad \vec{r}(t) = y_0 \cdot \hat{y} + \vec{v}_0 \cdot t + (-gt^2/2) \cdot \hat{y}$$

$$\text{Geschwindigkeit:} \quad \vec{v}(t) = v_{0x} \cdot \hat{x} + (v_{0y} - gt) \cdot \hat{y} = \vec{v}_0 - gt \cdot \hat{y} = \dot{\vec{r}}(t).$$

2.5 Zusammenstellung und Vergleich der wichtigsten Beziehungen

Die Zeit ist eine skalare, der Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung sind vektorielle Größen (*polare Vektoren*). Die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung sind ebenfalls Vektoren (*axiale Vektoren*)[4]; man benötigt jedoch zu ihrer Festlegung eine Konvention, die *Rechte-Hand-Regel.* Für die Beträge der Größen, mit denen sich translatorische und rotatorische Bewegungen beschreiben lassen, gelten analoge Beziehungen.

Translation	**Rotation**
Weg s Bahngeschwindigkeit $v = \dot{s}$ Bahnbeschleunigung $a = \ddot{s}$	Winkel φ Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ Winkelbeschleunigung $\alpha = \ddot{\varphi}$
Gleichförmige Bewegung	
$v = const.$ $s = v \cdot t$	$\omega = const.$ $\varphi = \omega \cdot t$ Bahngeschwindigkeit, Bahnbeschleunigung: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
Gleichmäßig beschleunigte Bewegung	
$a = const.$ $v = v_0 + a \cdot t$ $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$	$\alpha = const.$ $\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$



[4] Zur Erklärung der Begriffe *axial* und *polar* siehe Mathematische Hilfmittel, Kap. 1.2.3.