4.0 VU Theoretische Informatik und Logik Teil 1 SS 2013 24. Juni 2013				
Kennzahl	Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe A

1.) Sei $\Sigma = \{\underline{a}, \underline{b}\}$ und $G = \langle \{S\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \{S \to aaS \mid a \in \{\underline{a}, \underline{b}\}\} \cup \{S \to \varepsilon\}, S\rangle$.

a) Ist G regulär, kontextfrei und/oder monoton? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

Lösung: G ist eine kontextfreie Grammatik, da alle Produktionen in P die Form $A \to \beta$ haben, wobei $A \in N$ und $\beta \in (N \cup T)^*$. Wegen der Produktion $S \to aaS$ ist G nicht regulär, wegen $S \to \varepsilon$ ist G nicht monoton, da das Startsymbol auf der rechten Seite von Produktionen vorkommt.

(*Hinweis:* Beachten Sie folgenden Unterschied:

$\{S \to aaS \mid a \in \{\underline{a}, \underline{b}\}\} = \{S \to \underline{a}\underline{a}S, S \to \underline{b}\underline{b}S\}$ wohingegen

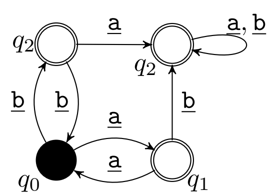
$\{S \to abS \mid a, b \in \{\underline{a}, \underline{b}\}\} = \{S \to \underline{a}\underline{a}S, S \to \underline{a}\underline{b}S, S \to \underline{b}\underline{a}S, S \to \underline{b}\underline{b}S\}$)

b) Geben Sie die von G erzeugte reguläre Sprache L an. **(1 Punkt)**

Lösung: $L = (\{\underline{a}\underline{a}\}^*\{\underline{b}\underline{b}\}^*)^*$

c) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, welcher $\overline{L}$ (also das Komplement von L) akzeptiert. (Graphische Darstellung genügt.) **(3 Punkte)**

Lösung:



2.) Sei L über $\Sigma = \{\underline{a}, \underline{b}\}$ die kleinste Menge, für die gilt:

- $\underline{b} \in L$.
- Ist $u, w \in L$, so ist auch $\underline{a}uw \in L$.

a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die L erzeugt. **(2 Punkte)**

Lösung: $G = (\{S\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \{S \to \underline{a}SS \mid \underline{b}\}, S)$

b) Geben Sie eine Linksableitung für das Wort $\underline{a}\underline{a}\underline{b}\underline{a}\underline{a}\underline{b}\underline{b}\underline{b}\underline{b}$ in Ihrer Grammatik an. **(2 Punkte)**

Lösung: $S \Rightarrow \underline{a}SS \Rightarrow \underline{a}\underline{a}SSS \Rightarrow \underline{a}\underline{a}\underline{b}SS \Rightarrow \underline{a}\underline{a}\underline{b}\underline{a}SSS \Rightarrow \underline{a}\underline{a}\underline{b}\underline{a}\underline{a}SSSS \Rightarrow^4 \underline{a}\underline{a}\underline{b}\underline{a}\underline{a}\underline{b}\underline{b}\underline{b}\underline{b}$

c) Transformieren Sie die unter a) erhaltene Grammatik schrittweise in Chomsky Normalform. **(2 Punkte)**

Lösung: G ist bereits reduziert, wir erhalten nach Ersetzung von Terminalsymbolen und Produktionen mit mehr als drei Nonterminalen auf der rechten Seite folgende Grammatik in CNF:

$$(\{S, X, Y\}, \{\underline{a}, \underline{b}\}, \{S \to XY \mid \underline{b}, Y \to SS, X \to \underline{a}\}, S)$$

3.) Beweisen Sie:

Die Familie der rekusiv aufzählbaren Sprachen ist gegenüber Vereinigung abgeschlossen.

(6 Punkte)

Lösung:

Bekanntermaßen gibt es zu jeder rekusiv aufzählbaren Sprache eine unbeschränkte Grammatik, welche diese erzeugt. Seien G_1, G_2 unbeschränkte Grammatiken mit $N_1 \cap N_2 = \{\}$ und $S \notin N_1 \cup N_2$:

$$G_1 = \langle N_1, T_1, P_1, S_1 \rangle, \quad G_2 = \langle N_2, T_2, P_2, S_2 \rangle$$

Um $L(G_1) \cup L(G_2)$ zu erzeugen, konstruieren wir folgende (unbeschränkte) Grammatik:
$G_{union} = \langle N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, \{S \to S_1 \mid S_2\} \cup P_1 \cup P_2, S \rangle$
Damit ist aber auch $L(G_1) \cup L(G_2) = \mathcal{L}(G_{union})$ rekursiv aufzählbar.

(*Hinweis:* Vergleiche Folie 97)

4.) Beweisen oder widerlegen Sie:

Es ist entscheidbar, ob das Komplement der von einer Turingmaschine akzeptierten Sprache das Leerwort enthält.

(6 Punkte)

Lösung: nicht entscheidbar, Satz von Rice
$P = \{L \mid \varepsilon \in \overline{L}\}$ ist eine nicht-triviale Eigenschaft, denn es gilt:
$\{\underline{\mathtt{a}}\}^+ \in P$ und $\{\underline{\mathtt{a}}\}^* \notin P$.
Somit ist P nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

5.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Zu jeder formalen Sprache L gibt es eine unbeschränkte Grammatik, die L erzeugt.
  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Die Menge der formalen Sprachen ist überabzählbar, es gibt aber nur abzählbar viele Grammatiken.

- Es gibt keinen Homomorphismus h mit $h(\{\underline{\mathtt{a}}^{3n}(\underline{\mathtt{b}}\,\underline{\mathtt{c}})^n \mid n \geq 0\}) = \{\underline{\mathtt{a}}^{6n}\underline{\mathtt{b}}^{3n} \mid n \geq 0\}$.
  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: $h : \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}^* \to \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*$ mit
  $h(\underline{\mathtt{a}}) = \underline{\mathtt{a}}^2, h(\underline{\mathtt{b}}) = \underline{\mathtt{b}}^3, h(\underline{\mathtt{c}}) = \varepsilon$ oder auch $h(\underline{\mathtt{a}}) = \underline{\mathtt{a}}, h(\underline{\mathtt{b}}) = \underline{\mathtt{b}}^2, h(\underline{\mathtt{c}}) = \underline{\mathtt{b}}$

- Es gibt NP-harte Probleme, die nicht NP-vollständig sind.
  Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

  Lösung: Genau jene, die nicht in NP sind.

(6 Punkte)