Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 4 (SS 2016)
Lösungen

Aufgabe 4.1 Analysieren Sie folgenden informellen Schluss:
"Eva hat nur ein Kind, und zwar ein Mädchen. Daher kann Adam nicht ihr Sohn sein."

a) Formalisieren Sie die Konsequenzbehauptung mit PL-Formeln F (Prämisse) und G (Konklusion) über der Signatur $\langle\{M, K, S\}, \{e, a\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:

Prädikatensymbole:

$M(x)$	...	x ist ein Mädchen (einstellig)
$K(x, y)$	...	x ist ein Kind von y (zweistellig)
$S(x, y)$	...	x ist ein Sohn von y (zweistellig)

Konstantensymbole:

e	...	Eva
a	...	Adam

b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, das zeigt, dass G keine logische Konsequenz von F ist.

c) Formulieren und formalisieren Sie implizite Annahmen, die den Schluss logisch machen. *Anleitung:* Drei Annahmen sind hinreichend. Eine davon besagt, dass Adam kein Mädchen ist. Die beiden anderen drücken allgemeine, also nicht auf bestimmte Konstanten bezogene, Beziehungen zwischen "Sohn" und "Mädchen" bzw. zwischen "Sohn" und "Kind" aus.

d) Zeigen Sie mit einem Tableau, dass G aus F und den Annahmen aus c) logisch folgt.

Lösung

a) Formalisiert lautet die Konsequenzbehauptung $F \models G$, wobei
$F = \exists x[(K(x, e) \land M(x)) \land \forall y(K(y, e) \supset y = x)]$ und $G = \neg S(a, e)$.

b) Wir erhalten ein Gegenbeispiel $\mathcal{I} = \langle D, \Phi, \xi\rangle$ z.B. über der Domäne bestehend aus nur Eva und Maria (also $D = \{\text{Eva}, \text{Maria}\}$), wenn wir die Signatur wie folgt interpretieren:
$\Phi(M)(u) = \mathbf{t} \iff u = \text{Maria}$
$\Phi(K)(u, v) = \mathbf{t} \iff u = \text{Maria}$ und $v = \text{Eva}$
$\Phi(S)(u, v) = \mathbf{t}$ für alle $u, v \in D$ (alternativ: $\iff u = \text{Maria}$ und $v = \text{Eva}$, also $\Phi(S) = \Phi(K)$)
$\Phi(e) = \text{Eva}$
$\Phi(a) = \text{Maria}$
Die Variablenbelegung ξ ist irrelevant, also beliebig, da $FV(F) = FV(G) = \{\}$.
Unter dieser Interpretation $\mathcal{I}$ ist F wahr aber G falsch; also ist $\mathcal{I}$ ein Gegenbeispiel zu $F \models G$.
Natürlich gibt es auch viele andere Gegenbeispiele, z.B. über $D = \omega$ (natürliche Zahlen).

c) Wir formulieren folgende Annahmen:
(1) "Adam ist kein Mädchen."
(2) "Jemand der ein Sohn ist, ist kein Mädchen." ("Kein Sohn von jemanden ist ein Mädchen.")
(3) "Jeder Sohn einer Person ist auch ein Kind dieser Person."
Entsprechende Formeln über unserer Signatur lauten:
$A_1 = \neg M(a)$
$A_2 = \forall x\forall y(S(x, y) \supset \neg M(x))$ (oder äquivalent: $A_2 = \neg\exists x\exists y(S(x, y) \land M(x))$)
$A_3 = \forall x\forall y(S(x, y) \supset K(x, y))$

d) Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass $F, A_1, A_2, A_3 \models G$:

(1)	$\mathbf{t}: \exists x[(K(x,e) \wedge M(x)) \wedge \forall y(K(y,e) \supset y = x)]$	Annahme F, δ-Formel
(2)	$\mathbf{t}: \neg M(a)$	Annahme A_1
(3)	$\mathbf{t}: \forall x \forall y(S(x,y) \supset \neg M(x))$	Annahme A_2, γ-Formel
(4)	$\mathbf{t}: \forall x \forall y(S(x,y) \supset K(x,y))$	Annahme A_3, γ-Formel
(5)	$\mathbf{f}: \neg S(a,e)$	Annahme G (Konklusion)
(6)	$\mathbf{f}: M(a)$	von 2
(7)	$\mathbf{t}: S(a,e)$	von 5
(8)	$\mathbf{t}: (K(b,e) \wedge M(b)) \wedge \forall y(K(y,e) \supset y = b)$	von 1
(9)	$\mathbf{t}: K(b,e) \wedge M(b)$	von 8
(10)	$\mathbf{t}: \forall y(K(y,e) \supset y = b)$	von 8, γ-Formel
(11)	$\mathbf{t}: K(b,e)$	von 9
(12)	$\mathbf{t}: M(b)$	von 9
(13)	$\mathbf{t}: \forall y(S(a,y) \supset \neg M(a))$	von 3, γ-Formel
(14)	$\mathbf{t}: S(a,e) \supset \neg M(a)$	von 13

(15) $\mathbf{f}: S(a,e)$ von 14	(16) $\mathbf{t}: \neg M(a)$ von 14		
$\times$ Wid.: 7/15	(17) $\mathbf{f}: M(a)$ von 16		
	(18) $\mathbf{t}: \forall y(S(a,y) \supset K(a,y))$ von 4, γ-Formel		
	(19) $\mathbf{t}: S(a,e) \supset K(a,e)$ von 18		
	(20) $\mathbf{f}: S(a,e)$ v. 19	(21) $\mathbf{t}: K(a,e)$ von 19	
	$\times$ Wid.: 7/20	(22) $\mathbf{t}: K(a,e) \supset a = b$ von 10	
		(23) $\mathbf{f}: K(a,e)$ v. 22	(24) $\mathbf{t}: a = b$ von 22
		$\times$ Wid.: 21/23	(25) $\mathbf{t}: M(a)$ $S^=$: 24→12
			$\times$ Wid.: 6/25

Kommentar:
Es gibt auch eine einfachere Lösung, da die Annahme, dass ein Sohn kein Mädchen sein kein, gar nicht benötigt wird. Ein entsprechender Tableau-Beweis verzweigt in nur 3 Äste.

Aufgabe 4.2 Geben Sie jeweils einen Tableau-Beweis oder ein Gegenbeispiel für folgende Gültigkeits- bzw. Konsequenzbehauptungen an.

a) $\models \exists x[\neg P(f(a), x) \supset \neg \exists x \forall y P(y, x)]$

b) $\exists x f(a, x) = x, \forall x \exists y[P(f(y, x)) \vee P(f(y, x))] \models \exists x P(f(x, a))$

c) $\forall x \exists y(x = f(y) \vee x = g(x)), \forall x P(f(x)) \models P(a) \vee \exists x\, g(x) = a$

Hinweis: Achten Sie bei jedem Tableau darauf, dass alle bewerteten Formeln eine eindeutige Nummer tragen und dass alle Regelanwendungen über diese Nummern auf ihre jeweiligen Prämissen verweisen. Außerdem sollen alle γ- und δ-Formeln jeweils auch als solche markiert werden.

Lösung

a) Folgendes geschlossene Tableau (=Tableau-Beweis) zeigt die Gültigkeit der Formel:

(1)	$\mathbf{f} : \exists x[\neg P(f(a), x) \supset \neg\exists x \forall y P(y, x)]$	Annahme, γ-Formel
(2)	$\mathbf{f} : \neg P(f(a), a) \supset \neg\exists x \forall y P(y, x)$	von 1
(3)	$\mathbf{t} : \neg P(f(a), a)$	von 2
(4)	$\mathbf{f} : \neg\exists x \forall y P(y, x)$	von 2
(5)	$\mathbf{t} : \exists x \forall y P(y, x)$	von 4, δ-Formel
(6)	$\mathbf{t} : \forall y P(y, b)$	von 5, γ-Formel
(7)	$\mathbf{f} : \neg P(f(a), b) \supset \neg\exists x \forall y P(y, x)$	von 1
(8)	$\mathbf{t} : \neg P(f(a), b)$	von 7
(9)	$\mathbf{f} : \neg\exists x \forall y P(y, x)$	von 7
(10)	$\mathbf{f} : P(f(a), b)$	von 8
(11)	$\mathbf{t} : P(f(a), b)$	von 6
	$\times$	Wid. (10/11)

b) Folgendes geschlossene Tableau zeigt die Richtigkeit der Konsequenzbehauptung:

(1)	$\mathbf{t} : \exists x f(a, x) = x$				Annahme, δ-Formel
(2)	$\mathbf{t} : \forall x \exists y[P(f(y, x)) \vee P(f(y, x))]$				Annahme, γ-Formel
(3)	$\mathbf{f} : \exists x P(f(x, a))$				Annahme, γ-Formel
(4)	$\mathbf{t} : \exists y[P(f(y, a)) \vee P(f(y, a))]$				von 2, δ-Formel
(5)	$\mathbf{t} : P(f(b, a)) \vee P(f(b, a))$				von 4
(6)	$\mathbf{f} : P(f(b, a))$				von 3
(7)	$\mathbf{t} : P(f(b, a))$	von 5	(8)	$\mathbf{t} : P(f(b, a))$	von 5
	$\times$	Wid.: 6/7		$\times$	Wid.: 6/8

Kommentar:
$\forall x \exists y[P(f(y, x)) \vee P(f(y, x))]$ ist äquivalent zu $\forall x \exists y P(f(y, x))$. Daher folgt $\exists x P(f(x, a))$ schon aus $\forall x \exists y[P(f(y, x)) \vee P(f(y, x))]$ und $\exists x f(a, x) = x$ muss nie zerlegt werden. (Es ist zwar nicht falsch die δ-Regel auf (1) anzuwenden, aber unnötig. Hingegen ist die Verzweigung durch die β-Regel, angewendet auf (5) unvermeidbar, wenn man die Konsequenzbehauptung mit einem Tableau zeigen will, wie hier verlangt.)

c) Folgendes geschlossene Tableau zeigt die Richtigkeit der Konsequenzbehauptung:

(1)	$\mathbf{t} : \forall x \exists y(x = f(y) \vee x = g(x))$				Annahme, γ-Formel
(2)	$\mathbf{t} : \forall x P(f(x))$				Annahme, γ-Formel
(3)	$\mathbf{f} : P(a) \vee \exists x g(x) = a$				Annahme
(4)	$\mathbf{t} : \exists y(a = f(y) \vee a = g(a))$				von 1, δ-Formel
(5)	$\mathbf{t} : a = f(b) \vee a = g(a)$				von 4
(6)	$\mathbf{f} : P(a)$				von 3
(7)	$\mathbf{f} : \exists x g(x) = a$				von 3, γ-Formel
(8)	$\mathbf{f} : g(a) = a$				von 7
(9)	$\mathbf{t} : a = f(b)$	von 5	(10)	$\mathbf{t} : a = g(a)$	von 5
(11)	$\mathbf{t} : P(f(b))$	von 2	(13)	$\mathbf{f} : a = a$	$S^{=}$: 10$\to$8
(12)	$\mathbf{t} : P(a)$	$S^{=}$: 9$\to$11		$\times$	$AB^{=}$
	$\times$	Wid.: 6/12			

Aufgabe 4.3 (Siehe Folie 409 für die Definition relevanter Eigenschaften von Relationen.)

a) Zeigen Sie mit einem Tableau: Jede total funktionale und reflexive Relation R ist euklidisch.

b) Zeigen Sie, dass Reflexivität in a) notwendig ist. Mit anderen Worten: Spezifizieren Sie eine Interpretation in der $\Phi(R)$ eine total funktionale, aber nicht euklidische Relation ist.

Lösung a) Folgendes geschlossene Tableau zeigt, dass die Euklidizität der Relation R aus deren totaler Funktionalität und Reflexivität folgt:

(1)	$\mathbf{t}: \forall x \exists y[R(x,y) \wedge \forall z(R(x,z) \supset y = z)]$	totale Funktionalität, γ-Formel, Ann.
(2)	$\mathbf{t}: \forall x R(x,x)$	Reflexivität, γ-Formel, Annahme
(3)	$\mathbf{f}: \forall x \forall y \forall z[(R(x,y) \wedge R(x,z)) \supset R(y,z)]$	Euklidizität, δ-Formel, Annahme
(4)	$\mathbf{f}: \forall y \forall z[(R(a,y) \wedge R(a,z)) \supset R(y,z)]$	von 3, δ-Formel
(5)	$\mathbf{f}: \forall z[(R(a,b) \wedge R(a,z)) \supset R(b,z)]$	von 4, δ-Formel
(6)	$\mathbf{f}: (R(a,b) \wedge R(a,c)) \supset R(b,c)]$	von 5
(7)	$\mathbf{t}: R(a,b) \wedge R(a,c)$	von 6
(8)	$\mathbf{f}: R(b,c)$	von 6
(9)	$\mathbf{t}: R(a,b)$	von 7
(10)	$\mathbf{t}: R(a,c)$	von 7
(11)	$\mathbf{t}: \exists y[R(a,y) \wedge \forall z(R(a,z) \supset y = z)]$	von 1, δ-Formel
(12)	$\mathbf{t}: R(a,d) \wedge \forall z(R(a,z) \supset d = z)$	von 11
(13)	$\mathbf{t}: R(a,d)$	von 12
(14)	$\mathbf{t}: \forall z(R(a,z) \supset d = z)$	von 12, γ-Formel
(15)	$\mathbf{t}: R(a,b) \supset d = b$	von 14

Linker Zweig:

(16) $\mathbf{f}: R(a,b)$ von 15
$\times$ Wid.: 9/16

Rechter Zweig:

(17)	$\mathbf{t}: d = b$	von 15
(18)	$\mathbf{t}: R(a,c) \supset d = c$	von 14

Linker Unterzweig:

(19) $\mathbf{f}: R(a,c)$ von 18
$\times$ Wid.: 10/19

Rechter Unterzweig:

(20)	$\mathbf{t}: d = c$	von 18
(21)	$\mathbf{t}: R(b,b)$	von 2
(22)	$\mathbf{t}: R(b,d)$	$S^{=}$: 17→21
(23)	$\mathbf{t}: R(b,c)$	$S^{=}$: 20→22

$\times$ Wid.: 8/23

b) Die Relation "das zweite Argument ist der Nachfolger des ersten Arguments" ist total funktional über den natürlichen (oder auch den ganzen) Zahlen, aber nicht euklidisch.
Etwas formaler: Wir erhalten ein Gegenbeispiel $\mathcal{I} = \langle \omega, \Phi, \xi \rangle$ zur Konsequenzbehauptung $\forall x \exists y[R(x,y) \wedge \forall z(R(x,z) \supset y = z)] \models \forall x \forall y \forall z[(R(x,y) \wedge R(x,z)) \supset R(y,z)]$ in dem wir $\Phi(R)(m,n) = \mathbf{t} \iff n = m + 1$ setzen (ξ beliebig).

Aufgabe 4.4 Untersuchen Sie für folgende Regeln eines Frege-Hilbert-Typ-Kalküls, ob Sie korrekt sind. Falls ja, zeigen Sie warum; falls nein, geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an.

a) $$\frac{A \supset (B \vee C) \qquad \neg B}{A \supset C} \ (R1)$$

b) $$\frac{(B \vee C) \supset A \qquad A \vee \neg C}{A \vee B} \ (R2)$$

c) $$\frac{B \supset A}{B \supset \forall x A} \ (R3)$$

Hinweis: A, B, C stehen für beliebige Formeln. Die fehlenden Seitenbedingungen von Folie 441 lassen daher – wie in der Vorlesung besprochen – Gegenbeispiele zu $R3$ zu.

Lösung

a) Die Regel ist korrekt, da die Konklusion logisch aus den Prämissen folgt, wie folgendes geschlossene Tableau zeigt:

<table>
<tr><td>(1)</td><td colspan="7">$\mathbf{t} : A \supset (B \vee C)$</td><td>Annahme (erste Prämisse)</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td colspan="7">$\mathbf{t} : \neg B$</td><td>Annahme (zweite Prämisse)</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="7">$\mathbf{f} : A \supset C$</td><td>Annahme (Konklusion)</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td colspan="7">$\mathbf{f} : B$</td><td>von 2</td></tr>
<tr><td>(5)</td><td colspan="7">$\mathbf{t} : A$</td><td>von 3</td></tr>
<tr><td>(6)</td><td colspan="7">$\mathbf{f} : C$</td><td>von 3</td></tr>
<tr><td>(7)</td><td>$\mathbf{f} : A$</td><td>von 1</td><td>(8)</td><td colspan="4">$\mathbf{t} : B \vee C$</td><td>von 1</td></tr>
<tr><td></td><td>$\times$</td><td>Wid.: 5/7</td><td>(9)</td><td>$\mathbf{t} : B$</td><td>von 8</td><td>(10)</td><td>$\mathbf{t} : C$</td><td>von 8</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$\times$</td><td>Wid.: 4/9</td><td></td><td>$\times$</td><td>Wid.: 6/10</td></tr>
</table>

Kommentar:
Es macht keinen Unterschied, ob man A, B, C hier als aussagenlogische Variablen oder als beliebige (PL-)Formeln auffasst, da das Tableau offensichtlich unverändert bleibt, wenn man A, B und C durch beliebige konkrete Formeln ersetzt.
Alternativ könnte man die Korrektheit von $R1$ mit einer Wahrheitstafel zeigen.

b) Die Regel $R2$ ist nicht korrekt. Man erhält ein Gegenbeispiel I zur Konsequenzbehauptung $(B \vee C) \supset A, A \vee \neg C \models A \vee B$, indem man $I(A) = I(B) = (C) = \mathbf{f}$ setzt, denn unter dieser Interpretation sind die beiden Prämissen wahr, aber die Konklusion falsch.

c) Die Regel $R3$ ist nicht korrekt. Wenn man A und B mit der Formel $P(x)$ instantiiert, erhält man, z.B., folgendes Gegenbeispiel $\mathcal{I} = \langle \omega, \Phi, \xi \rangle$ zu $P(x) \supset P(x) \models P(x) \supset \forall x P(x)$: $\Phi(P) =$“ist gerade”, $\xi(x) = 2$. Unter der Interpretation $\mathcal{I}$ besagt $P(x) \supset \forall x P(x)$ “wenn 2 gerade ist, sind alle natürlichen Zahlen gerade”, also ist diese Formel (Konklusion) unter $\mathcal{I}$ falsch, obwohl die Prämisse $P(x) \supset P(x)$ unter jeder Interpretation wahr, also gültig ist.

Kommentar:
Wie in der Vorlesung besprochen, erhält man eine korrekte Regel, wenn man fordert, dass x in der Formel B nicht frei vorkommt.

Aufgabe 4.5 Zeigen Sie die partielle Korrektheit folgender $AL(\mathbb{Z})$-Programme bezüglich der angegebenen Spezifikationen. Vergessen Sie dabei nicht die Rechtfertigungen der Implikationsschritte!

a)
```
            // (| x0 = x |)
if x < 0 then
  x ⇐ 0 − x
else
  x ⇐ x
            // (| x0 ∗ x0 = x ∗ x ∧ x ≥ 0 |)
```

b)
```
            // (| y = y0 ∧ y ≥ 0 |)
begin
z ⇐ 0;
while 0 < y do begin
  z ⇐ z + x;
  y ⇐ y − 1
  end
end
            // (| z = x ∗ y0 |)
```

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Schleifeninvariante INV, so dass INV zusammen mit der Negation der Schleifenbedingung die Postcondition impliziert.

Lösung a) Die Assertions mit den jeweiligen Rechtfertigungen sind:

$$
\begin{array}{lll}
& // \; (\!|\; x_0 = x \;|\!) & \\
\underline{\texttt{if}} \; (x < 0) \; \underline{\texttt{then}} & & \\
& // \; (\!|\; x_0 = x \wedge x < 0 \;|\!) & \\
& // \; (\!|\; x_0 * x_0 = (0 - x) * (0 - x) \wedge (0 - x) \geq 0 \;|\!) & \text{Imp. (1)} \\
\quad x \leftarrow 0 - x & & \\
& // \; (\!|\; x_0 * x_0 = x * x \wedge x \geq 0 \;|\!) & \text{Ass.} \\
\underline{\texttt{else}} & & \\
& // \; (\!|\; x_0 = x \wedge \neg x < 0 \;|\!) & \\
& // \; (\!|\; x_0 * x_0 = x * x \wedge x \geq 0 \;|\!) & \text{Imp. (2)} \\
\quad x \leftarrow x & & \\
& // \; (\!|\; x_0 * x_0 = x * x \wedge x \geq 0 \;|\!) & \text{Ass.} \\
& // \; (\!|\; x_0 * x_0 = x * x \wedge x \geq 0 \;|\!) & \text{If-Then}
\end{array}
$$

Nun ist noch zu zeigen dass die folgenden Implikationen in $\mathbb{Z}$ gültig sind:

(1) $(x_0 = x \wedge x < 0) \supset (x_0 * x_0 = (0 - x) * (0 - x) \wedge (0 - x) \geq 0)$

Sei $I \in ENV$ ein Environment mit

$$\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, x_0 = x \wedge x < 0) = \mathbf{t} \,. \tag{1}$$

Zu zeigen ist, dass dann

$$\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, x_0 * x_0 = (0 - x) * (0 - x) \wedge (0 - x) \geq 0) = \mathbf{t} \tag{2}$$

Aus (1) erhalten wir $I(x_0) = I(x)$ und $I(x) < 0$. Damit gilt nun einerseits:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{T}}(I, x_0 * x_0) &= I(x_0) * I(x_0) \\
&= I(x) * I(x) \\
&= (I(0) - I(x)) * (I(0) - I(x)) \\
&= \mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{T}}(I, (0 - x) * (0 - x))
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, x_0 * x_0 = (0 - x) * (0 - x)) = \mathbf{t}$.
Andererseits folgt aus $I(x) < 0$ dass $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{T}}(0-x) \geq 0$, und somit $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, (0-x) \geq 0) = \mathbf{t}$.
Zusammen erhalten wir damit (2).

(2) $(x_0 = x \wedge \neg x < 0) \supset (x_0 * x_0 = x * x \wedge x \geq 0)$

Sei $I \in ENV$ mit

$$\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, x_0 = x \wedge \neg x < 0) = \mathbf{t} \,.$$

Dann gilt $I(x_0) = I(x)$ und somit auch $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{T}}(I, x_0 * x_0) = \mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{T}}(x * x)$. Damit ist nun $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, x_0 * x_0 = x * x) = \mathbf{t}$. Andererseits ist $x \geq 0$ eine Abkürzung für $\neg x < 0$. Somit folgt direkt $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, x_0 * x_0 = x * x \wedge x \geq 0) = \mathbf{t}$.

b) Die Assertions mit den jeweiligen Rechtfertigungen sind:

$// (\!|\ \mathrm{y} = \mathrm{y}_0 \wedge \neg\, \mathrm{y} < 0\ |\!)$
$// (\!|\ 0 = x * (y_0 - y) \wedge y \geq 0\ |\!)$ Imp. (1)
begin
$\mathrm{z} \leftarrow 0$;
$// (\!|\ z = x * (y_0 - y) \wedge y \geq 0\ |\!)$ Ass.
while $(0 < \mathrm{y})$ **do** **begin**
$// (\!|\ z = x * (y_0 - y) \wedge y \geq 0 \wedge 0 < y\ |\!)$
$// (\!|\ z + x = x * (y_0 - (y-1)) \wedge (y-1) \geq 0\ |\!)$ Imp. (2)
$\mathrm{z} \leftarrow \mathrm{z} + \mathrm{x}$;
$// (\!|\ z = x * (y_0 - (y-1)) \wedge (y-1) \geq 0\ |\!)$ Ass.
$\mathrm{y} \leftarrow \mathrm{y} - 1$
end
$// (\!|\ z = x * (y_0 - y) \wedge y \geq 0\ |\!)$ Ass.
end
$// (\!|\ z = x * (y_0 - y) \wedge y \geq 0 \wedge \neg 0 < y\ |\!)$ While
$// (\!|\ \mathrm{z} = \mathrm{x} * \mathrm{y}_0\ |\!)$ Imp. (3)

Es bleibt noch zu zeigen, dass die folgenden Implikationen in $\mathbb{Z}$ gültig sind:

(1) $(y = y_0 \wedge \neg y < 0) \supset (0 = x * (y_0 - y) \wedge y \geq 0)$
Sei $I \in \mathit{ENV}$ ein Environment mit

$$\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, y = y_0 \wedge \neg y < 0) = \mathbf{t}\ . \tag{3}$$

Zu zeigen ist, dass dann auch

$$\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, 0 = x * (y_0 - y) \wedge y \geq 0) = \mathbf{t}\ . \tag{4}$$

Aus (3) folgt aber insbesondere $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, y = y_0) = \mathbf{t}$ und somit auch $I(y) = I(y_0)$. Damit gilt nun

$$\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{T}(I, x * (y_0 - y)) = I(x) * (I(y_0) - I(y)) = 0$$

und somit $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, 0 = x * (y_0 - y)) = \mathbf{t}$. Da $y \geq 0$ eine Abkürzung für $\neg y < 0$ ist, gilt somit (4).

(2) $(z = x * (y_0 - y) \wedge y \geq 0 \wedge 0 < y) \supset (z + x = x * (y_0 - (y-1)) \wedge y \geq 0)$
Sei $I \in \mathit{ENV}$ mit

$$\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, z = x * (y_0 - y) \wedge y \geq 0 \wedge 0 < y) = \mathbf{t}\ . \tag{5}$$

Zu zeigen ist, dass dann gilt:

$$\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, z + x = x * (y_0 - (y-1)) \wedge (y-1) \geq 0) = \mathbf{t}\ . \tag{6}$$

Aus (5) folgt insbesondere $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, 0 < y) = \mathbf{t}$, und somit gilt $I(y) > 0$. Damit gilt aber auch $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{T}(I, y - 1) \geq 0$, und somit $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, (y-1) \geq 0) = \mathbf{t}$.
Andererseits gilt für jedes Environment I', dass
$\mathcal{M}_T(I', x * (y_0 - (y-1))) = \mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{T}(I', x * ((y_0 - y) + 1)) = \mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{T}(I', x * (y_0 - y) + x)$.
Daraus folgt

$$\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, z + x = x * (y_0 - (y-1))) = \mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, z + x = x * (y_0 - y) + x)$$

und da mit (5) weiter $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{T}(I, z) = \mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{T}(I, x * (y_0 - y))$ gilt erhalten wir

$$\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, z + x = x * (y_0 - (y-1))) = \mathbf{t}\ .$$

Insgesamt gilt somit (6).

(3) $(z = x * (y_0 - y) \wedge y \geq 0 \wedge \neg 0 < y) \supset (z = x * y_0)$

Sei $I \in ENV$ mit

$$\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, z = x * (y_0 - y) \wedge y \geq 0 \wedge \neg 0 < y) = \mathbf{t}\ . \tag{7}$$

Zu zeigen ist, dass dann auch

$$\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{\mathcal{PF}}(I, z = x * y_0) = \mathbf{t}\ . \tag{8}$$

Aus (7) erhalten wir aber insbesondere $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{T}(I, z) = \mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{T}(I, x * (y_0 - y))$ sowie $I(y) = 0$. Aus letzterem folgt nun $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{T}(I, x*(y_0-y)) = \mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{T}(I, x*y_0)$. Somit haben wir $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{T}(I, z) = \mathcal{M}^{\mathbb{Z}}_{T}(I, x * y_0)$ und folglich gilt (8) gilt in $\mathbb{Z}$.