343) Für die Funktion $f(x,y) = x\ln(1+xy)$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,0)$.

Die Formel für das quadratische Taylorpolynom ist:

$$\boldsymbol{f(x,y)} = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$
$$\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)$$

wobei die erste Zeile die lineare Approximation und erste und zweite die quadratische ist.

Zuerst sind die ganzen Ableitungen zu machen, und in $P(1,0)$ auszuwerten.

$f(x,y) = x\ln(1+xy)$

$\boldsymbol{f(1,0)} = 1 * \ln(1+1*0) = \mathbf{0}$

Produkt und Kettenregel (beim $\ln$ *):*

$$f_x = 1*\ln(1+xy) + x*\frac{1}{1+xy}*y = \ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \quad P(1,0) einsetzen:$$

$$= \ln(1+1*0) + \frac{1*0}{1+1*0} = \ln(1) + 0 = 0 \qquad \boldsymbol{f_x(1,0) = 0}$$

$$f_y = x*\frac{1}{1+xy}*x = \frac{x^2}{1+xy} \quad P(1,0) einsetzen: \frac{1^2}{1+1*0} = 1 \qquad \boldsymbol{f_y(1,0) = 1}$$

Jetzt die quadratischen Ableitungen:

$$f_{xx} = \frac{1}{1+xy}*y + \frac{y*(1+xy) - xy*y}{(1+xy)^2} = \frac{y}{1+xy} + \frac{y + \cancel{xy^2} - \cancel{xy^2}}{(1+xy)^2} \quad P(1,0) einsetzen:$$

$$\frac{0}{1+1*0} + \frac{0}{(1+1*0)^2} = 0 \qquad \boldsymbol{f_{xx}(1,0) = 0}$$

f_{xy} verhält sich wie f_{xx}, da x und y immer nur zusammen vorkommen, und die Ableitungen daher ident sind, nur x und y müssen vertauscht werden: $f_{xy} = \frac{x}{1+yx} + \frac{x}{(1+yx)^2}$ *$P(1,0)$ einsetzen:*

$$= \frac{1}{1+1*0} + \frac{1}{(1+1*0)^2} = 2 \qquad \boldsymbol{f_{xy}(1,0) = 2}$$

$$f_{yy} = x^2*(-1)(1+xy)^{-2}*x = -\frac{x^2*x}{(1+xy)^2} = -\frac{x^3}{(1+xy)^2} \quad P(1,0)\ einsetzen:$$

$$-\frac{1^3}{(1+1*0)} = -1 \qquad \boldsymbol{f_{yy}(1,0) = -1}$$

Und in die Formel für das Taylorpolynom einsetzen:

$$f(x,y) = 0 + 0*(x-1) + 1*(y-0) + \frac{1}{2}(0*(x-1)^2 + 2*2(x-1)(y-0) - 1(y-0)^2)$$

$$= y + \frac{4(x-1)y}{2} - \frac{y^2}{2} = y + 2xy - 2y - \frac{y^2}{2} = \boldsymbol{2xy - y - \frac{y^2}{2}}$$