Beispiel 82 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 9, 01.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Gesucht ist die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichungen
(a) $x_{n+2} - 5x_{n+1} - 6x_n = 0$
(b) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 12x_n = 0$
(c) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6.25x_n = 0$

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Homogene Differenzengleichungen 1. Ordnung

Eine Lineare Differenzengleichung erster Ordnung besitzt allgemein die Form: $x_{n+1} = a_n \cdot x_n + b_n$.
Ist $b = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Gleichung homogen. Ansonsten ist sie inhomogen.

2.2 Homogene Differenzengleichungen 2.Ordnung

Homogene Differenzengleichungen 2.Ordnung haben die Form

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; b \neq 0$$

Wenn $x_n^{(1)}$ und $x_n^{(2)}$ Lösungen der homogenen Differenzengleichungen 2. Ordnung sind, so ist auch $x_n = c_1 x_n^{(1)} + c_2 x_n^{(2)}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung. x_n ist ausserdem eine allgemeine Lösung, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Angenommen, x_0, x_1 gegeben, dann ist die Lösungsfolge eindeutig bestimmt:

$$\begin{array}{lccccccc} I: & c_1 \cdot x_0^{(1)} & + & c_2 \cdot x_0^{(2)} & = & x_0 & \leftarrow & n = 0 \\ II: & c_1 \cdot x_1^{(1)} & + & c_2 \cdot x_1^{(2)} & = & x_1 & \leftarrow & n = 1 \end{array}$$

Angeschrieben in Matrizenform:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \begin{pmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen von $x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$. Ansatz: $x_n = \lambda^n$

$$\lambda^{n+2} + a \cdot \lambda^{n+1} + b \cdot \lambda^1 = 0 \qquad | \cdot \frac{1}{\lambda^n}$$

Ergibt das 'charakteristische Polynom'

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$$

Diese quadratische Gleichung nach dem Wurzelsatz von Vieta aufgelöst ergibt

$$x_n^{(1)} = \lambda_1^n, x_n^{(2)} = \lambda_2^n$$

Wir betrachten die Diskriminante D (Teil unter der Wurzel aus

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

- $D > 0$: λ_1, λ_2 verschieden reelle Zahlen - allg. Lösung der Differenzengleichung ist dann:

$$x_n = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n$$

- $D < 0$: λ_1, λ_2 konjugiert komplexe Zahlen - wähle Darstellung

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \\ \lambda_2 &= r \cdot (\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi) \end{aligned}$$

  Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x_n &= c_1^{'} \cdot \lambda_1^n + c_2^{'} \cdot \lambda_2^n \\ &= c_1^{'} \cdot r^n (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n + c_2^{'} \cdot r^n (\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)^n = \\ &= r^n \cdot \cos(n\varphi) \cdot \underbrace{(c_1^{'} + c_2^{'})}_{=:c_1} + r^n \cdot \sin(n\varphi) \cdot \underbrace{(i \cdot c_1^{'} - i \cdot c_2^{'})}_{=:c_2} = \\ &= c_1^{\cdot} r^n \cdot \cos(n\varphi) + c_2^{\cdot} r^n \cdot \sin(n\varphi) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- $D = 0$: Daraus folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$ - eine Lösung:

$$x_n = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot \lambda_1^n$$

  Es gibt keine allgemeine Lösung $c_1 \cdot \lambda_1 + c_2 \cdot \lambda_2^n = (c_1 + c_2) \cdot \lambda_1^n$. Allgemeine Lösung wäre $x_n = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot \lambda_1^n$. λ_1^n ist eine Lösung. Man kann durch Einsetzen zeigen, dass $n \cdot \lambda_1^n$ die Lösung ist:

$$x_n^{(1)} = \lambda_1^n, \qquad x_n^{(2)} = n \cdot \lambda_1^n$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \end{vmatrix} = \lambda_1 \neq 0 \qquad (\lambda_1 = -\tfrac{a}{2})$$

3 Lösung des Beispiels

3.1 Beispiel a

Zu lösen ist $x_{n+2} - 5x_{n+1} - 6x_n = 0$. Dies entspricht der Auflösung folgenden charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$
$$\lambda_1 = 6, \qquad \lambda_2 = -1$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$, daher gilt:

$$x_n = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x_n = c_1 \cdot 6^n + c_2 \cdot (-1)^n}$$

3.2 Beispiel b

Zu lösen ist $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 12x_n = 0$. Dies entspricht der Auflösung folgenden charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 12 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 12}}{2} = 3 \pm \sqrt{-3}$$
$$\lambda_1 = 3 + i \cdot \sqrt{3}, \qquad \lambda_2 = 3 - i \cdot \sqrt{3}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (konjugiert komplex) und $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Es gilt:

$$\lambda_{1,2} = r \cdot (\cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi)$$

Die allgemeine Lösung ist dann:

$$x_n = r^n \cdot (c_1 \cdot \cos(n \cdot \varphi) + c_2 \cdot \sin(n \cdot \varphi)) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Wir müssen nun die Form $a + b \cdot i$ in die Polarform umwandeln:

$$z = r * (\cos\phi + i * \sin\phi)$$
$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12}$$
$$\phi = \arctan\frac{b}{a} \text{ da gilt :}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{für } a > 0 \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

Somit ist $\phi = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{\pm\sqrt{3}}{3}) \pm \frac{\pi}{6}$. Die Lösungen in komplexer Form sind somit:

$$\lambda_{1,2} = r \cdot (\cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi) = \sqrt{12} \cdot (\cos(\frac{\pi}{6}) \pm i \cdot \sin(\frac{\pi}{6}))$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$x_n = r \cdot (\cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi) = (\sqrt{12})^n \cdot (c_1 \cdot \cos(\frac{n\pi}{6}) \pm i \cdot c_2 \cdot \sin(\frac{n\pi}{6}))$$

3.3 Beispiel c

Zu lösen ist $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6.25x_n = 0$. Dies entspricht der Auflösung folgenden charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6.25 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25-25}}{2} = \frac{5}{2}$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{5}{2}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 = \lambda_2$, daher gilt:

$$x_n = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot \lambda_1^n = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot (\frac{5}{2})^n$$