59. Man bestimme das Interpolationspolynom dritten Grades zu den Interpolationsstellen (0, 180), (2, 240), (4, 320) und (6, 360) durch Lagrange-Interpolation.

Gegeben: $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$, $f(x_i) = y$, $i = 0,...,n$

Gesucht: Das Interpolationspolynom $p(x)$ mit $p(x_i)$, $i = 0,...,n$

Es gilt: Zu $n+1$ Interpolationsstellen (x_i, y_i), $i = 0,...,n$ mit paarweise verschiedene Stützstellen x_i gibt es genau ein Interpolationspolynom p, dessen Grad höchstens n beträgt.

Wir sollen die **Lagrange-Interpolation** verwenden:
Wir betrachten also folgende Funktion:

$$L_i(x) = \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) ... \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot ... \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x_i - x_n)},\ i = 0,...,n$$

Der Grad von $L_i(x) = n$ wobei eben $L_i(x)$ das Lagrange-Polynom ist.

$$\left.\begin{array}{l} L_i(x_i) = 1 \quad \text{(es kürzt sich alles weg)} \\ L_i(x_j) = 0 \quad i \neq j \end{array}\right\} \text{d. h. } L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Das Lagrangesche Interpolationspolynom

$$p(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + ... + L_n(x) y_n = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) y_i$$ löst das Interpolationsproblem

$f(x_i) = y_i$, $i = 0,...,n$

In der Angaben haben wir 4 Interpolationsstellen: (0, 180), (2, 240), (4, 320) und (6, 360), also gibt es genau ein Interpolationspolynom p, dessen Grad höchstens 3 beträgt.

der Ansatz lautet also: $p(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + L_2(x) \cdot y_2 + L_3(x) \cdot y_3$

zu erst berechnen wir die Lagrange-Polynome, dazu hier die x-Werte:
$x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_3)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x-2) \cdot (x-4) \cdot (x-6)}{(0-2) \cdot (0-4) \cdot (0-6)} = \frac{(x^2 - 2x - 4x + 8) \cdot (x-6)}{(-2) \cdot (-4) \cdot (-6)} = \frac{(x^2 - 6x + 8) \cdot (x-6)}{(-48)} =$$

$$= \frac{x^3 - 6x^2 + 8x - 6x^2 + 36x - 48}{(-48)} = \frac{x^3 - 12x^2 + 44x - 48}{(-48)} = -\frac{x^3}{48} + \frac{12x^2}{48} - \frac{44x}{48} + \frac{48}{48} =$$

$$= -\frac{x^3}{48} + \frac{x^2}{4} - \frac{11x}{12} + 1$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-0)\cdot(x-4)\cdot(x-6)}{(2-0)\cdot(2-4)\cdot(2-6)}=\frac{(x^2-4x)\cdot(x-6)}{2\cdot(-2)\cdot(-4)}=\frac{x^3-4x^2-6x^2+24x}{16}=$$

$$=\frac{x^3-10x^2+24x}{16}=\frac{x^3}{16}-\frac{10x^2}{16}+\frac{24x}{16}=\frac{x^3}{16}-\frac{5x^2}{8}+\frac{3x}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)\cdot(x-2)\cdot(x-6)}{(4-0)\cdot(4-2)\cdot(4-6)}=\frac{(x^2-2x)\cdot(x-6)}{4\cdot 2\cdot(-2)}=\frac{x^3-2x^2-6x^2+12x}{(-16)}=$$

$$=\frac{x^3-8x^2+12x}{(-16)}=-\frac{x^3}{16}+\frac{8x^2}{16}-\frac{12x}{16}=-\frac{x^3}{16}+\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{4}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_3)}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-0)\cdot(x-2)\cdot(x-4)}{(6-0)\cdot(6-2)\cdot(6-4)}=\frac{(x^2-2x)\cdot(x-4)}{6\cdot 4\cdot 2}=\frac{x^3-2x^2-4x^2+8x}{48}=$$

$$=\frac{x^3-6x^2+8x}{48}=\frac{x^3}{48}-\frac{6x^2}{48}+\frac{8x}{48}=\frac{x^3}{48}-\frac{x^2}{8}+\frac{x}{6}$$

also zusammengefasst haben wir dann:

$$L_0(x)=-\frac{x^3}{48}+\frac{x^2}{4}-\frac{11x}{12}+1$$

$$L_1(x)=\frac{x^3}{16}-\frac{5x^2}{8}+\frac{3x}{2}$$

$$L_2(x)=-\frac{x^3}{16}+\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{4}$$

$$L_3(x)=\frac{x^3}{48}-\frac{x^2}{8}+\frac{x}{6}$$

nun müssen wir nur mehr fertig einsetzen in unseren Ansatz

$$p(x)=L_0(x)\cdot y_0+L_1(x)\cdot y_1+L_2(x)\cdot y_2+L_3(x)\cdot y_3$$

$$p(x)=\left(-\frac{x^3}{48}+\frac{x^2}{4}-\frac{11x}{12}+1\right)\cdot 180+\left(\frac{x^3}{16}-\frac{5x^2}{8}+\frac{3x}{2}\right)\cdot 240+$$

$$+\left(-\frac{x^3}{16}+\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{4}\right)\cdot 320+\left(\frac{x^3}{48}-\frac{x^2}{8}+\frac{x}{6}\right)\cdot 360=$$

$$p(x)=-\frac{180x^3}{48}+\frac{180x^2}{4}-\frac{11x\cdot 180}{12}+180+\frac{240x^3}{16}-\frac{5x^2\cdot 240}{8}+\frac{3x\cdot 240}{2}-$$

$$-\frac{320x^3}{16}+\frac{320x^2}{2}-\frac{3x\cdot 320}{4}+\frac{360x^3}{48}-\frac{360x^2}{8}+\frac{360x}{6}$$

$$p(x) = -\frac{15x^3}{4} \cancel{+45x^2} - 11x \cdot 15 + 180 + 15x^3 - 5x^2 \cdot 30 + 3x \cdot 120 -$$

$$-20x^3 + 160x^2 - 3x \cdot 80 + \frac{30x^3}{4} \cancel{-45x^2} + 60x$$

$$p(x) = -\frac{15x^3}{4} + 15x^3 - 20x^3 + \frac{30x^3}{4} - 150x^2 + 160x^2 - 165x + 360x - 240x + 60x - 180 =$$

$$-\frac{5}{4}x^3 + 10x^2 + 15x + 180$$

also lautet unser Interpolationspolynom $p(x) = -\frac{5}{4}x^3 + 10x^2 + 15x + 180$