6. UE Analysis f. INF und WINF

$\boxed{144}$ $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

$\cosh(x)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$.

$x = 0 \Rightarrow \sinh(x) = 0$; $x > 0 \Rightarrow \sinh(x) > 0$;
$x < 0 \Rightarrow \sinh(x) < 0$.

Wegen $\cosh(x)'' = \cosh(x)$ liegt bei $x = 0$ ein relatives (und zugleich absolutes) Minimum von $\cosh(x)$ vor, da $\cosh(0) = 1 > 0$.

Daraus folgt: $\cosh(x)$ ist für $x \geq 0$ streng monoton wachsend und für $x \leq 0$ streng monoton fallend.

Berechnung der Umkehrfunktion: Wir setzen $e^x = z$ und haben dann: $y = \cosh(x) = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$,
also $2y = z + \frac{1}{z}$. $\Longrightarrow z^2 - 2zy + 1 = 0 \Longrightarrow$

$z = y \pm \sqrt{y^2 - 1} = e^x \Rightarrow x = \ln(y \pm \sqrt{y^2-1})$.

Es ist $y = \cosh(x) \geq \cosh(0) = 1$, also
$y + \sqrt{y^2-1} \geq 1$, $\ln(y + \sqrt{y^2-1}) \geq 0$. Weiters ist
$0 < y - \sqrt{y^2-1} \leq 1$, also $\ln(y - \sqrt{y^2-1}) \leq 0$, denn:

$y - 1 \leq \sqrt{y^2-1} \iff (y-1)^2 = y^2 - 2y + 1 \leq y^2 - 1 \iff$

$2 \leq 2y \iff 1 \leq y$.

Also ist für $x \geq 0$ die Umkehrfunktion von $\cosh(x)$ gegeben durch $\ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $x \geq 1$, und für $x \leq 0$ durch $\ln(x - \sqrt{x^2-1})$, $x \geq 1$.

$\boxed{146}$ $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x, \quad x \in [-\pi, \pi]$

$\Longrightarrow f'(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x, \; f''(x) = -\sin x + \sqrt{3}\cos x =$

$= -f(x), \quad f'''(x) = -f'(x),$ usw.

Nullstellen: $f(x) = 0 \iff \sin x = \sqrt{3}\cos x \iff \tan x = \sqrt{3}$

$\iff x = 60° = \frac{\pi}{3}$ oder $x = -120° = -\frac{2\pi}{3}$.

Wegen $f''(x) = -f(x)$ sind die Nullstellen zugleich die Wendepunkte (beachte dazu: $f'''(x) = -f'(x) \neq 0$ für $x = \frac{\pi}{3}$ und $x = -\frac{2\pi}{3}$).

Lokale Extrema: $f'(x) = 0 \iff \sqrt{3}\sin x = -\cos x$

$\iff \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iff x = -30° = -\frac{\pi}{6}$ oder $x = 150° = \frac{5\pi}{6}$.

Für $x = -30° = -\frac{\pi}{6}$ gilt $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin x = -\frac{1}{2}$, also

$f''(x) = -f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = 2 > 0$, also liegt ein relatives Minimum mit dem Wert $f(x) = -2$ vor.

Für $x = 150° = \frac{5\pi}{6}$ gilt $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin x = \frac{1}{2}$, also

$f''(x) = -f(x) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = -2 < 0$, also liegt ein relatives Maximum mit dem Wert $f(x) = 2$ vor.

Anmerkungen:

(i) Wegen $f(\pi) = f(-\pi) = -\sqrt{3}$ sind die beiden relativen Extrema auch absolute Extrema.

(ii) Da $\sin x$ und $\cos x$ die Periode 2π haben, hat auch $f(x)$ die Periode 2π. Daher wurden die Betrachtungen auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ eingeschränkt.

$\boxed{157}$ Sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend und differenzierbar und $x_0 \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0, \quad \text{denn:}$$

(i) Für $x < x_0$ ist $f(x) \geq f(x_0)$, also $x - x_0 < 0$ und $f(x) - f(x_0) \geq 0$. Daraus folgt:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0.$$

(ii) Für $x > x_0$ ist $f(x) \leq f(x_0)$, also $x - x_0 > 0$ und $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Daraus folgt:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0.$$

$\boxed{184}$ Sei $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $x_0 = 1$.

Dann gilt: n ungerade $\Longrightarrow f^{(n)}(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, und n gerade $\Longrightarrow f^{(n)}(x) = \cosh(x)$.

$$\Longrightarrow f^{(n)}(1) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right), & n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right), & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Die Potenzreihenentwicklung (Taylorreihe) von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ ist (nach 5.20 im Buch) gegeben durch:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \quad \text{mit}$$

$$a_n = \left.\begin{cases} \frac{1}{2n!}\left(e + \frac{1}{e}\right), & n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{2n!}\left(e - \frac{1}{e}\right), & n \text{ ungerade} \end{cases}\right\} = \frac{e + \frac{(-1)^n}{e}}{2n!}.$$

$\boxed{181}$ $f(x) = \frac{1}{1-3x} = (1-3x)^{-1} \Longrightarrow f^{(n)}(x) = n!\, 3^n (1-3x)^{-(n+1)}$.

Beweis durch Induktion:

$n=0$: $f^{(0)}(x) = f(x) = (1-3x)^{-1}$; $n=1$: $f'(x) = 3\cdot(1-3x)^{-2}$,

$n \to n+1$: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = n!\, 3^n(-n-1)\cdot(-3)\cdot(1-3x)^{-n-2} =$

$= n!\,(n+1)\cdot 3^n \cdot 3 \cdot (1-3x)^{-(n+2)} = (n+1)!\, 3^{n+1}(1-3x)^{-(n+2)}$. $\square$

Mit $f^{(n)}(7) = n!\, 3^n (-20)^{-(n+1)}$ ist die Taylorreihe von $f(x)$ mit der Anschlussstelle $x_0 = 7$ gegeben durch:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(-20)^{n+1}}\cdot(x-7)^n.$$

Nehmen wir nur die ersten 3 Glieder der Reihe, so erhalten wir das zugehörige Taylorpolynom 2. Ordnung:

$p_2(x) = f(7) + f'(7)(x-7) + \frac{1}{2}\cdot f''(7)(x-7)^2 =$

$= -\frac{1}{20} + \frac{3}{20^2}(x-7) + \frac{9}{(-20)^3}(x-7)^2 =$

$= -\frac{1}{20}\cdot\left(1 - \frac{3}{20}(x-7) + \frac{9}{400}(x-7)^2\right)$.

Nach der Taylor'schen Formel (Buch, 5.20) ist

$f(x) = p_2(x) + R_2$, wobei das „Restglied" R_2

gegeben ist durch: $R_2 = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\cdot(x-7)^3 =$

$= \frac{27\cdot(x-7)^3}{(1-3\xi)^4}$, wobei ξ zwischen x und x_0 liegt.

Wir müssen den Betrag $|R_2|$ abschätzen und beachten dazu, dass im Intervall $[4, 10]$ die Funktion $(1-3\xi)^4$ monoton wachsend, also $|R_2| = \frac{27\cdot|x-7|^3}{(1-3\xi)^4}$ bei festem x als Funktion von ξ monoton fallend ist.

Wir unterscheiden nun 2 Fälle.

Fall 1: $x \leq 7$, d.h. $x \in [4,7]$. Dann gilt auch $\xi \in [4,7]$. Setzen wir – wie gesagt, bei festem x – $|R_2| = |R_2(\xi)|$, dann gilt wegen der Monotonie:

$$|R_2(7)| \leq |R_2(\xi)| \leq |R_2(4)|, \text{ also:}$$

$$\frac{27}{20^4}\cdot(7-x)^3 \leq |R_2(\xi)| \leq \frac{27}{11^4}\cdot(7-x)^3.$$

Fall 2: $x \geq 7$, d.h. $x \in [7,10]$. Dann gilt auch $\xi \in [7,10]$, und wir erhalten analog zu Fall 1:

$$|R_2(10)| \leq |R_2(\xi)| \leq |R_2(7)|, \text{ also:}$$

$$\frac{27}{29^4}\cdot(x-7)^3 \leq |R_2(\xi)| \leq \frac{27}{20^4}\cdot(x-7)^3.$$

$\boxed{194}$ Wir haben folgende Größen zu betrachten:

x = Stückzahl der produzierten Ware,

$K(x) = 5000 + 100x + x^2$ .... Kosten,

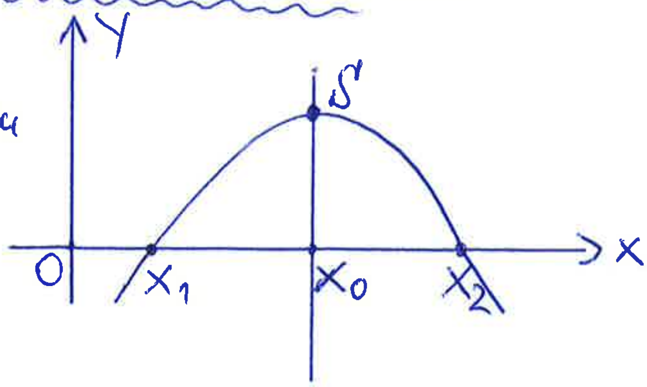
$U(x) = 1000x - 2x^2$ ..... Umsatz,

$S(x) = 100x$ .... Steuer

Daraus ergibt sich der Gewinn:

$$G(x) = U(x) - K(x) - S(x) = 800x - 3x^2 - 5000.$$

Diese Funktion ist eine Parabel 2. Grades und hat etwa folgenden Graph:



Hier sind $x_{1,2}$ die Nullstellen und S der Scheitel der Parabel.

Wie aus der Schulmathematik bekannt ist, liegt der Scheitel in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen, d.h. $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$, und die senkrechte Gerade durch S ist eine Symmetrieachse der Kurve. Zugleich ist durch den Scheitel das absolute Maximum der Funktion $G(x)$ gegeben. Das wollen wir durch Differenzieren ermitteln: $G'(x) = 800-6x$, $G''(x) = -6$.

$$G'(x_0)=0 \iff x_0 = \frac{800}{6} = 133{,}\dot{3}.$$

Anmerkung: Auch die Nullstellen lassen sich leicht berechnen: $x_{1,2} = \frac{800 \pm 20\cdot\sqrt{1450}}{6} = \frac{800 \pm 100\cdot\sqrt{58}}{6}$.

Die gesuchte optimale Stückzahl muss ganzzahlig sein, also 133 oder 134. Wegen der genannten Symmetrie ist $G(133) > G(134)$. (Man kann dies natürlich aber auch zeigen durch Einsetzen in $G(x)$.) Also ist der maximale Gewinn bei $x=133$ gegeben. Die zugehörige Steuer ist $S(133) = 13\,300$.

Setzen wir allgemeiner $S(x) = rx$, so ist

$G(x) = (900-r)x - 3x^2 - 5000$, $G'(x) = 900-r-6x$.

Die Gleichung $G'(x)=0$ liefert $x = \frac{900-r}{6} = 150 - \frac{r}{6}$, und wegen $G''(x) = -6 < 0$ liegt ein Maximum vor.

Die zugehörige Steuer ist gegeben durch die Funktion

$$f(r) := 150r - \frac{r^2}{6},$$ also wieder eine Parabel.

$f'(r) = 150 - \frac{r}{3} = 0 \iff r = 450$, und wegen $f''(r) = -\frac{1}{3}$ ist dies das Maximum.

Die maximalen Steuereinnahmen für den Staat sind also beim Steuersatz $r=450$ gegeben.