Lösungen 3A

Test 1 für "Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik"

3. April 2019

Gruppe A

Vorname: ____________________

Familienname: ____________________ Matrikelnummer: ____________________

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen.
Arbeitszeit: 45 Minuten

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
gesamt	

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ konvergiert, indem Sie zu beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angeben:

$$a_n = \frac{\cos(\frac{n\pi}{2}) + (-1)^n}{n^4}.$$

(5 Punkte)

$\lim a_n = 0$

gesucht: $N(\varepsilon)$ mit $|a_n| < \varepsilon$ ab $n > N(\varepsilon)$

$a_n \leq \frac{1+1}{n^4} = \frac{2}{n^4}$ (1P)

$a_n \geq \frac{-1-1}{n^4} = -\frac{2}{n^4}$ (1P)

d.h., wenn $\frac{2}{n^4} < \varepsilon$ dann auch $|a_n| < \varepsilon$ (1P)

2P

Bestimme $N(\varepsilon)$ so, dass $\frac{2}{n^4} < \varepsilon$ ab $n > N(\varepsilon)$

$2 < n^4 \varepsilon$ ($\cdot n$ und $:\varepsilon$ ok weil $n>0$ und $\varepsilon>0$)

$\frac{2}{\varepsilon} < n^4$

$\sqrt[4]{\frac{2}{\varepsilon}} < n \Rightarrow N(\varepsilon) = \left\lceil \sqrt[4]{\frac{2}{\varepsilon}} \right\rceil$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Partialsummenfolge und gegebenenfalls den Grenzwert folgender Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)}.$$

(Hinweis: Stellen Sie die Summanden als Summe bzw. Differenz passender Ausdrücke dar.)

(6 Punkte)

$$\frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+3}$$

$$2 = na + 3a + nb + b$$

2P

$$\begin{array}{ll} [n^1]: & a+b=0 \quad /\cdot(-1) \\ [n^0]: & 3a+b=2 \end{array} \Rightarrow 2a = 2 \qquad a=1,\ b=-1$$

$$\frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

3P

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \dots + \cancel{\frac{1}{N-1}} - \cancel{\frac{1}{N+1}} + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+3}$$

Teleskopsumme

$$\overset{\downarrow}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}$$

1P

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

1P Def. der Partialsumme

1P Einsetzen

1P Zusammenfassen der Teleskopsumme

(Beweis, dass die Teleskopsumme tatsächlich diese Gestalt hat, etwa mittels vollst. Ind. ist <u>nicht</u> erforderlich)

Aufgabe 3:

a) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei Folgen. Wie sind die asymptotischen Beziehungen $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$ und $a_n \sim b_n$ definiert?

(3 Punkte)

b) Weisen Sie nach, dass folgende asymptotische Beziehungen gelten:

- $\dfrac{n^6 + 4n + 1}{4n^2 + 7} = O(n^4)$
- $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{4}{n^3} = o(1)$
- $\dbinom{2n}{n-1} \sim \dbinom{2n}{n}$

(6 Punkte)

je 1P

a) $a_n = O(b_n)$ wenn $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq c$ für ein $c > 0$ und fast alle n

$a_n = o(b_n)$ wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

$a_n \sim b_n$ wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

je 2P

b) 1) $\dfrac{\frac{n^6+4n+1}{4n^2+7}}{n^4} \overset{n>0}{=} \dfrac{n^6+4n+1}{4n^6+7n^4} \leq \dfrac{n^6+4n+1}{4n^6} \leq \dfrac{n^6+4n^6+n^6}{4n^6} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} = c$

$\Rightarrow \dfrac{n^6+4n+1}{4n^2+7} = O(n^4)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2^n}+\frac{4}{n^3}}{1} = \lim \frac{1}{2^n} + \lim \frac{4}{n^3} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2^n} + \frac{4}{n^3} = o(1)$

3) $\dbinom{2n}{n-1} = \dfrac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$

$\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!\,n!}$

$\dfrac{\binom{2n}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \cdot \dfrac{n!\,n!}{(2n)!} = \dfrac{n}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow \dbinom{2n}{n-1} \sim \dbinom{2n}{n}$

Lösungen 3B

Test 1 für "Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik"

3. April 2019

Gruppe B

Vorname: ____________________

Familienname: ____________________ Matrikelnummer: ____________________

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen.
Arbeitszeit: 45 Minuten

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
gesamt	

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ konvergiert, indem Sie zu beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angeben:

$$a_n = \frac{\sin(\frac{n\pi}{2}) + (-1)^n}{n^3}.$$

(5 Punkte)

$\lim a_n = 0$

gesucht: $N(\varepsilon)$ mit $|a_n| < \varepsilon$ ab $n > N(\varepsilon)$

$a_n \leq \frac{1+1}{n^3} = \frac{2}{n^3}$

$a_n \geq \frac{-1+(-1)}{n^3} = -\frac{2}{n^3}$

d.h., wenn $\frac{2}{n^3} < \varepsilon$, dann ist auch $|a_n| < \varepsilon$

Bestimme $N(\varepsilon)$ so, dass $\frac{2}{n^3} < \varepsilon$ ab $n > N(\varepsilon)$

$\frac{2}{n^3} < \varepsilon \,/ \cdot \frac{n^3}{\varepsilon} > 0$

$\frac{2}{\varepsilon} < n^3$

$\sqrt[3]{\frac{2}{\varepsilon}} < n \quad \Rightarrow \quad N(\varepsilon) = \left\lceil \sqrt[3]{\frac{2}{\varepsilon}} \right\rceil$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Partialsummenfolge und gegebenenfalls den Grenzwert folgender Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}.$$

(Hinweis: Stellen Sie die Summanden als Summe bzw. Differenz passender Ausdrücke dar.)

(6 Punkte)

$$\frac{2}{n(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+2}$$

$$2 = na + 2a + nb$$

$[n^1]$: $a+b=0$

$[n^0]$: $2a = 2$ $\Rightarrow a = 1,\ b = -1$

$$\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

Partialsummen

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = 1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5} + - \dots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}$$

Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim \; 1 + \frac{1}{2} \underbrace{- \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}}_{\to 0} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Aufgabe 3:

a) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei Folgen. Wie sind die asymptotischen Beziehungen $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$ und $a_n \sim b_n$ definiert?

(3 Punkte)

b) Weisen Sie nach, dass folgende asymptotische Beziehungen gelten:

- $\dfrac{7n^5+n+2}{n^2+5} = O(n^3)$
- $\dfrac{1}{3^n} + \dfrac{3}{n^5} = o(1)$
- $\dbinom{2n}{n+1} \sim \dbinom{2n}{n}$

(6 Punkte)

a) Siehe Gruppe A

b)

1) $\dfrac{\frac{7n^5+n+2}{n^2+5}}{n^3} \overset{(n>0)}{=} \dfrac{7n^5+n+2}{n^5+5n^3} \leq \dfrac{7n^5+n+2}{n^5} \leq \dfrac{7n^5+n^5+2n^5}{n^5} = 10 = C$

$\Rightarrow \dfrac{7n^5+n+2}{n^2+5} = O(n^3)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{3^n}+\frac{3}{n^5}}{1} = \lim \frac{1}{3^n} + \lim \frac{3}{n^5} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3^n} + \frac{3}{n^5} = o(1)$

3) Siehe Gruppe A $\left(\binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n-1} \right)$

Lösungen 7A

Test 1 für "Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik"
4. April 2019
Gruppe A

Vorname: ______________________

Familienname: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen.
Arbeitszeit: 45 Minuten

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
gesamt	

Aufgabe 1: Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{n+3}{n+1} - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{5}{n+2}.$$

(5 Punkte)

1P $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ und $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ haben Periode 4
Fallunterscheidung

1P je Fall

$n \equiv 0 \mod 4$ $\quad a_n = 0 \cdot \frac{n+3}{n+1} - 1 \cdot \frac{5}{n+2} = -\frac{5}{n+2} \to 0$

1 $\quad a_n = 1 \cdot \frac{n+3}{n+1} - 0 \cdot \frac{5}{n+2} = \frac{n+3}{n+1} \to 1$

2 $\quad a_n = 0 \cdot \frac{n+3}{n+1} - (-1)\frac{5}{n+2} = \frac{5}{n+2} \to 0$

3 $\quad a_n = (-1)\frac{n+3}{n+1} - 0\,\frac{5}{n+2} = -\frac{n+3}{n+1} \to -1$

Häufungspunkte: $\{-1, 0, 1\}$

Bestimmen Sie die Partialsummenfolge und gegebenenfalls den Grenzwert folgender Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)}.$$

(Hinweis: Stellen Sie die Summanden als Summe bzw. Differenz passender Ausdrücke dar.)

(6 Punkte)

siehe 3A

Aufgabe 3:

a) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei Folgen. Wie sind die asymptotischen Beziehungen $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$ und $a_n \sim b_n$ definiert?

(3 Punkte)

b) Weisen Sie nach, dass folgende asymptotische Beziehungen gelten:

- $\dfrac{n^5 + 2n + 1}{4n^2 + 3} = O(n^3)$
- $\sqrt{n+2} = o(n)$
- $\dbinom{2n}{n-1} \sim \dbinom{2n}{n}$

(6 Punkte)

a) siehe 3A

b)

1) $$\frac{\frac{n^5+2n+1}{4n^2+3}}{n^3} \underset{\overset{\downarrow}{(n>0)}}{=} \frac{n^5+2n+1}{4n^5+3n^3} \leq \frac{n^5+2n+1}{4n^5} \leq \frac{n^5+2n^5+n^5}{4n^5} = 1 = C$$

$$\Rightarrow \frac{n^5+2n+1}{4n^2+3} = O(n^3)$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n} = 0 \text{ (siehe unten)} \Rightarrow \sqrt{n+2} = o(n)$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n}}_{\to 0} \leq \frac{\sqrt{n+2}}{n} \leq \frac{\sqrt{2n}}{n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \to 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sandwich} \\ \text{Thm.}}}{\Rightarrow} \frac{\sqrt{n+2}}{n} \to 0 \ (n\to\infty)$$

3) siehe 3A

Lösungen 7B

Test 1 für "Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik"
4. April 2019
Gruppe B

Vorname: ______________________

Familienname: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen.
Arbeitszeit: 45 Minuten

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
gesamt	

Aufgabe 1: Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{2n+3}{n+1} + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{6}{n+1}.$$

(5 Punkte)

$\sin\frac{n\pi}{2}$ und $\cos\frac{n\pi}{2}$ haben Periode 4

Fallunterscheidung

$n \equiv 0 \mod 4$ $\quad a_n = 0 \cdot \frac{2n+3}{n+1} + 1 \cdot \frac{6}{n+1} = \frac{6}{n+1} \to 0$

1 $\quad a_n = 1 \cdot \frac{2n+3}{n+1} + 0 \cdot \frac{6}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1} \to 2$

2 $\quad a_n = 0 \cdot \frac{2n+3}{n+1} + (-1)\frac{6}{n+1} = -\frac{6}{n+1} \to 0$

3 $\quad a_n = (-1) \cdot \frac{2n+3}{n+1} + 0 \cdot \frac{6}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1} \to -2$

Häufungspunkte: $\{-2, 0, -2\}$

Bestimmen Sie die Partialsummenfolge und gegebenenfalls den Grenzwert folgender Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}.$$

(Hinweis: Stellen Sie die Summanden als Summe bzw. Differenz passender Ausdrücke dar.)

(6 Punkte)

siehe 3B

Aufgabe 3:

a) Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei Folgen. Wie sind die asymptotischen Beziehungen $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$ und $a_n \sim b_n$ definiert?

(3 Punkte)

b) Weisen Sie nach, dass folgende asymptotische Beziehungen gelten:

- $\dfrac{2n^5 + 3n + 4}{n^2 + 3} = O(n^3)$
- $\sqrt{n+3} = o(n)$
- $\dbinom{2n}{n+1} \sim \dbinom{2n}{n}$

(6 Punkte)

a) siehe 3A

b)

1) $\dfrac{\frac{2n^5+3n+4}{n^2+3}}{n^3} \overset{(n>0)}{\leq} \dfrac{2n^5+3n+4}{n^5+3n^3} \leq \dfrac{2n^5+3n+4}{n^5} \leq \dfrac{2n^5+3n^5+4n^5}{n^5} \leq 9 = C$

$\Rightarrow \dfrac{2n^5+3n+4}{n^2+3} = O(n^3)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}}{n} = 0$ (siehe unten) $\Rightarrow \sqrt{n+3} = o(n)$

$\underset{\downarrow 0}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}}{n} \leq \dfrac{\sqrt{n+3}}{n} \leq \dfrac{\sqrt{2n}}{n} = \underset{\downarrow 0}{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}} \underset{\text{Sandwich Thm}}{\Rightarrow} \lim \dfrac{\sqrt{n+3}}{n} = 0$

3) Siehe 3A