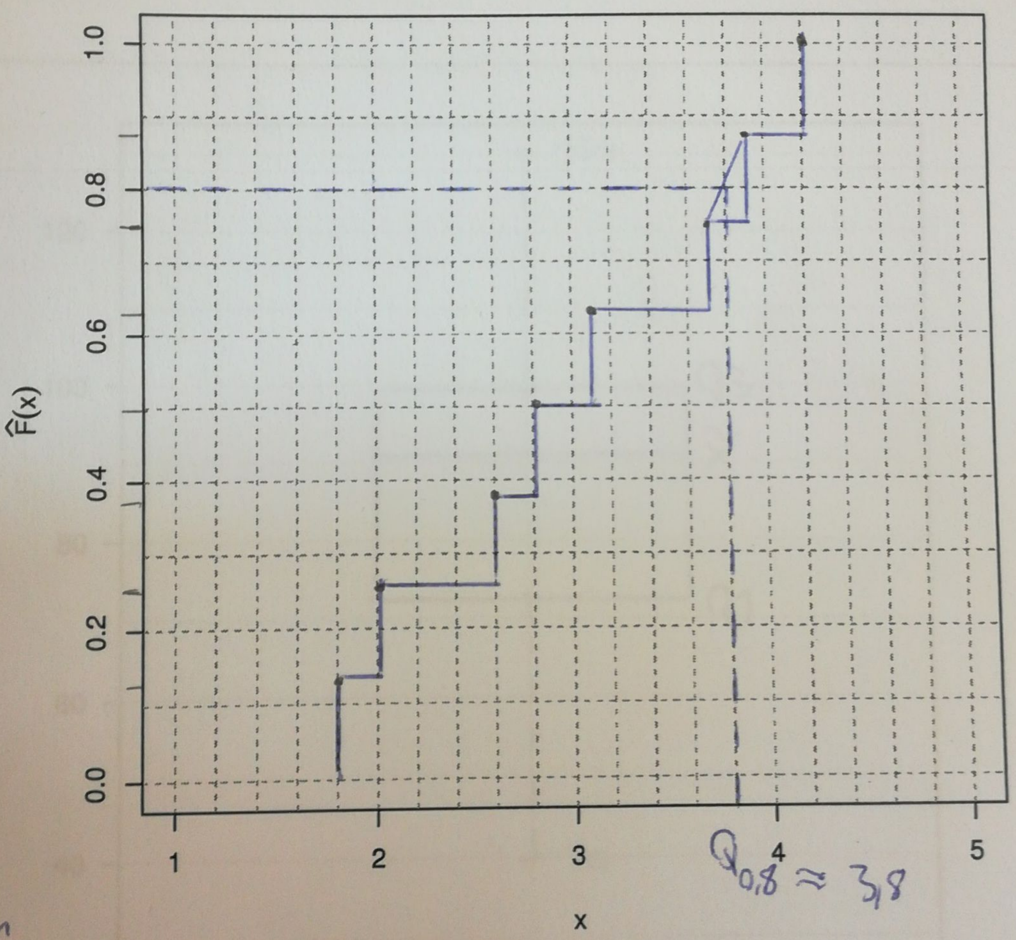
Betrachten Sie die folgende Stichprobe der Größe $n = 8$:

3	7	8	5	1	4	2	6
2.6	3.9	4.2	3.1	1.8	2.8	2.0	3.7

[2] (a) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion $\widehat{F}$ und bestimmen Sie grafisch das 80%–Quantil vom Typ 4.

[1] (b) Bestimmen Sie $\overline{x}$ und $\widetilde{x}$ (Median).

[2] (c) Bestimmen Sie s^2 und s.



$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i = \underline{\underline{3,0125}}$$

$$\tilde{x} = \frac{2,8 + 3,1}{2} = \underline{\underline{2,95}}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 = \underline{\underline{0,7698}}$$

Bestimmen/Zeichnen Sie für die folgenden (bereits geordneten) Daten:

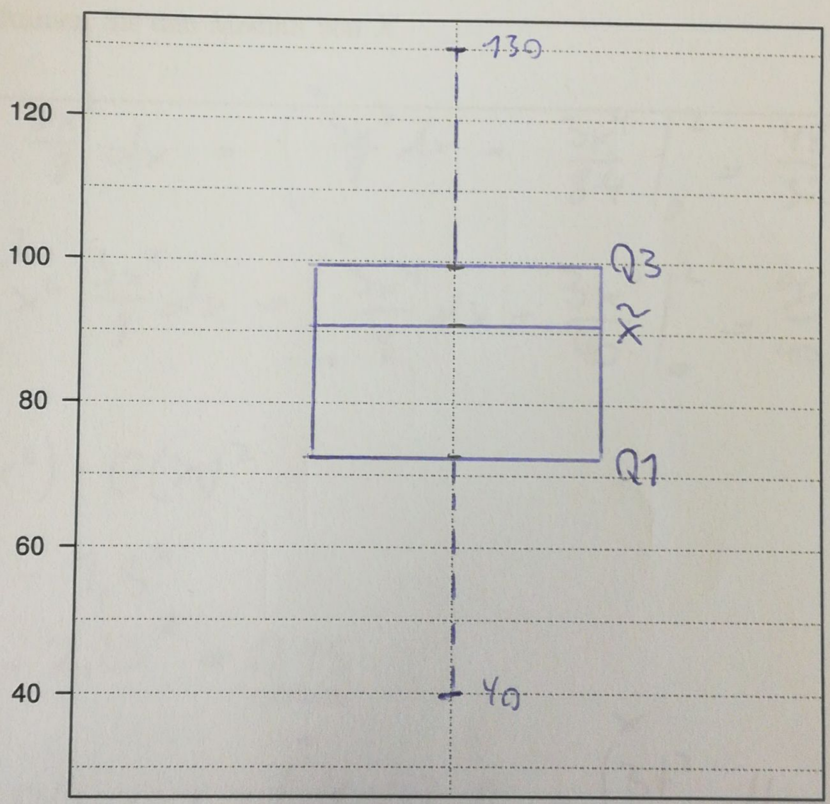
40	52	55	60	70	75	85	85	90	90
92	94	94	95	98	100	115	125	125	130

[1] (a) Bestimmen Sie den Median.

[1] (b) Bestimmen Sie die Hinges.

[1] (c) Bestimmen Sie auf Basis der Hinges die Fences.

[2] (d) Zeichen Sie in die unten stehende Grafik den Boxplot der Daten.



Q2 Median = $\frac{90+92}{2} = \underline{\underline{91}}$

Q1 lower Hinge = $\frac{70+75}{2} = \underline{\underline{72,5}}$ ✓

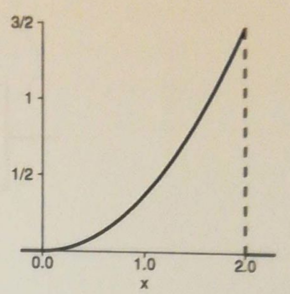
Q3 upper Hinge = $\frac{98+100}{2} = \underline{\underline{99}}$

lower Fence = $Q1 - 1,5(Q3-Q1) = \underline{\underline{32,75}}$

upper Fence = $Q3 + 1,5(Q3-Q1) = \underline{\underline{138,75}}$

Die Dichte einer sG X lautet wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{8} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



[1] (a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

[1] (b) Bestimmen Sie die Varianz von X.

[2] (c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X (plus Skizze).

[1] (d) Bestimmen Sie den Median von X.

a) $E(X) = \int_0^2 x \frac{3x^2}{8} dx = \int_0^2 \frac{3x^3}{8} dx = \frac{3x^4}{8 \cdot 4} \Big|_0^2 = \frac{48}{32} = \underline{\underline{1,5}}$

b) $E(X^2) = \int_0^2 x^2 \frac{3x^2}{8} dx = \int_0^2 \frac{3x^4}{8} dx = \frac{3x^5}{40} \Big|_0^2 = \frac{96}{40} = \underline{\underline{2,4}}$

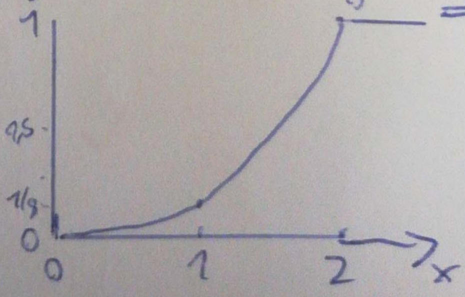
$\sigma_x^2 = E(X^2) - E(X)^2$

$= 2,4 - 1,5^2$

$= 2,4 - 2,25 = \underline{\underline{0,15}}$

c) $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_0^x \frac{3t^2}{8} dt = \frac{3t^3}{3 \cdot 8} \Big|_0^x = \underline{\underline{\frac{x^3}{8}}}$

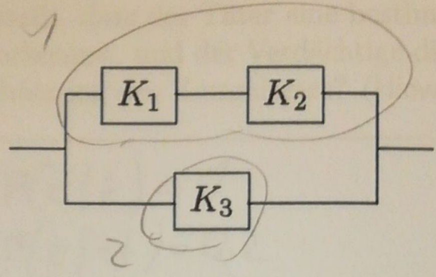
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^3/8 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$



✓

d) letzte seite

Die logische Struktur eines Systems sei gegeben wie folgt:



Die Lebensdauern der Komponenten seien unabhängig und identisch verteilt mit Dichte $f(x) = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x)$ ($\equiv \mathsf{Exp}(\lambda = 1)$). Bestimmen Sie für die Lebensdauer des Systems:

[2] (a) die Verteilungsfunktion

[1] (b) die Dichte

[2] (c) den Erwartungswert

---

1) $F_{min}(x) = 1 - e^{-2\cdot 1x} = 1 - e^{-2x}$

2) $F_{min}(x) = 1 - e^{-1\cdot 1x} = 1 - e^{-x}$

a) $F_{max}(x) = (1-e^{-2x})(1-e^{-x})$

$= 1 - e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x}$

b) $f(x) = F'(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} - 3e^{-3x}$

c) $= E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1{,}16$

✓

1 [1] (a) Der Kommissar ist zu 50% davon überzeugt, dass der Verdächtige auch der Täter ist. Wenn sich nun herausstellt, dass der Täter eine bestimmte Eigenart hat, die in der Bevölkerung zu 20% vorkommt, und der Verdächtige diese Eigenart hat, wie ändert sich dadurch die Einschätzung des Kommissars? (Hinweis: Bayes'sche Formel)

$P(t) = 0{,}5$ $\quad P(e|t) = 1$

$P(\neg t) = 0{,}5$ $\quad P(e|\neg t) = 0{,}2$

$$P(t|e) = \frac{P(e|t)\cdot P(t)}{P(e|t)\cdot P(t) + P(e|\neg t)\cdot P(\neg t)} = \frac{1\cdot 0{,}5}{1\cdot 0{,}5 + 0{,}2\cdot 0{,}5}$$

$$= \underline{\underline{0{,}8\overline{3}}}$$ ✓

2 [2] (b) Die gemeinsame Dichte von X und Y sei gegeben durch:

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x^2y & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie lauten die Randdichten? Sind X und Y unabhängig? Unkorreliert?

$$f(x) = \int_0^1 6x^2y \, dy = \frac{\cancel{3}6x^2y^2}{\cancel{2}}\Big|_0^1 = \underline{\underline{3x^2}}$$

$$f(y) = \int_0^1 6x^2y \, dx = \frac{\cancel{2}6x^3y}{\cancel{3}}\Big|_0^1 = \underline{\underline{2y}}$$

$$3x^2 + 2y = 6x^2y \Rightarrow \text{Unabhängig}$$ ✓

*

$\Rightarrow$ wenn unabhängig, auch unkorreliert!

2 [2] (c) Jeder Chip einer bestimmten Produktion ist unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit 1/8 defekt. Wenn 1000 Chips getestet werden, mit welcher (approximativen) Wahrscheinlichkeit sind weniger als 130 defekt? (Hinweis: ZGVS; rechnen Sie mit Stetigkeitskorrektur.)

$$P(X \leq 129) \approx \Phi\left(\frac{129{,}5 - \frac{1000}{8}}{\sqrt{\frac{1000}{8}\left(1 - \frac{1}{8}\right)}}\right) = \Phi\left(\frac{4{,}5}{10{,}4583}\right) = \Phi(0{,}43)$$

$$= \underline{\underline{0{,}6664}}$$

✓

Die Daten von Aufgabe 1 stammen aus einer Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2.

[1] (a) Bestimmen Sie ein 95%–Konfidenzintervall für μ.

[2] (b) Bestimmen Sie ein 95%–Konfidenzintervalle für σ^2.

[2] (c) Testen Sie zum Niveau $\alpha = 5\%$:

$$\mathcal{H}_0 : \mu = 3.5 \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : \mu < 3.5$$

---

a) $KI = \bar{X}_n \pm t_{n-1;\,1-\alpha/2} \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$

$= 3{,}0125 \pm t_{7;\,0{,}975} \dfrac{0{,}8774}{\sqrt{8}} = 3{,}0125 \pm 2{,}365 \cdot 0{,}3102$

$= \underline{\underline{[2{,}2789;\, 3{,}7461]}}$

b) $KI = \left(\dfrac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;\,1-\alpha/2}} ; \dfrac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;\,\alpha/2}} \right)$

$= \left(\dfrac{7 \cdot 0{,}7698}{\chi^2_{7;\,0{,}975}} ; \dfrac{7 \cdot 0{,}7698}{\chi^2_{7;\,0{,}025}} \right)$

$= \left(\dfrac{5{,}38875}{16{,}013} ; \dfrac{5{,}38875}{1{,}69} \right) = \underline{\underline{\left(0{,}3365;\, 3{,}1886\right)}}$

c) $T_0 = \dfrac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} = \dfrac{3{,}0125 - 3{,}5}{0{,}8774/\sqrt{8}} = \dfrac{-0{,}4875}{0{,}31} = \underline{\underline{-1{,}5775}}$

$\mu < \mu_0$: $T_0 < t_{n-1;\,\alpha}$ $\cancel{-1{,}5775 <}$ $= t_{7;\,0{,}05} = -t_{7;\,0{,}95}$

$-1{,}5775 < -1{,}895$ f.A. $\Rightarrow$ H_0 nicht verwerfen!

Zwei Stichproben aus unabhängigen Normalverteilungen waren wie folgt:

```
> x <- c(101,91,95,94,97,105,100,103,100,98)
> y <- c(90,94,100,96,93,89,97,93)
```

$m = 10$

$n = 8$

Mittelwerte, Varianzen, Streuungen:

```
> c(mean(x), mean(y))
[1] 98.4 94.0
> c(var(x), var(y))
[1] 18.26667 13.14286
> c(sd(x), sd(y))
[1] 4.273952 3.625308
```

---

[2] (a) Können die beiden Varianzen zum Niveau 5% als gleich angesehen werden? Kommentieren Sie dazu den folgenden R–Output:

```
> var.test(x, y)

        F test to compare two variances

data:  x and y
F = 1.3899, num df = 9, denom df = 7, p-value = 0.6792
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.2881593 5.8332866
sample estimates:
ratio of variances
          1.389855
```

p-value > 0,05
-> können als gleich angesehen werden

[1] (b) Bestimmen Sie den gepoolten Varianzschätzwert s_p^2.

$$S_p^2 = \frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2} = \frac{9\cdot 18,26667 + 7\cdot 13,14286}{16} = \underline{16,025}$$

[2] (c) Testen Sie unter der Annahme $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ mit $\alpha = 5\%$ auf Gleichheit der beiden Mittelwerte, d. h., testen Sie

$$\mathcal{H}_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{gegen} \quad \mathcal{H}_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$

$$T_0 = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{S_p\sqrt{1/m + 1/n}} = \frac{98,4-94}{\sqrt{16,025}\cdot\sqrt{1/10+1/8}} = \frac{4,4}{1,6013} = 0,5788$$

$$|T_0| > t_{m+n-\cancel{1}\,2;\,1-\alpha/2} = t_{1\cancel{7}\,6;\,0,975}$$

$0,5788 > 2,11$ f.A. $\Rightarrow$ nicht verwerfen!

(a) Bei einer Überprüfung von 100 zufällig ausgewählten Items aus einer Produktionslinie ergaben sich 17 defekte Items.

[2] (i) Bestimmen Sie den ML–Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit p mit der ein Item defekt ist. (Mit Herleitung!)

[1] (ii) Bestimmen Sie ein (approximatives) 95%–Konfidenzintervall für p.

siehe letzte seite!
(Binomealverteilung)

2

[2] (b) Stammen die folgenden 200 Beobachtungen aus einer diskreten uniformen Verteilung auf den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 ? (Testen Sie mit $\alpha = 10\%$.)

x	1	2	3	4	5
Häufigkeit	31	35	41	40	53

Klasse	x_i	p_{i0}	np_{i0}	$(x_i - np_{i0})^2 / np_{i0}$
1	31	1/5	40	2,025
2	35	1/5	40	0,625
3	41	1/5	40	0,025
4	40	1/5	40	0
5	53	1/5	40	4,225
				6,9

$Q_{k-1} > \chi^2_{k-1;1-\alpha} = \chi^2_{4;0,9}$

$6,9 > 7,779$ f.A $\Rightarrow$ H_0 nicht verwerfen!

3) d) $y = \frac{x^3}{8}$

$8y = x^3$

$x = \sqrt[3]{8y}$ $\qquad y = 0{,}5$

$\tilde{x} = \sqrt[3]{4} = \underline{\underline{1{,}5874}}$

8) $L(p;k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

a) i)

$\ln L(p;k) = \ln\binom{n}{k} + k \ln p + (n-k) \cdot \ln(1-p)$

$\frac{d}{dp} = 0 + \frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p}$

$k(1-p) = p(n-k)$

$k - \cancel{pk} = pn - \cancel{pk}$

$p = \frac{k}{n}$

$\Rightarrow \frac{17}{100} = \underline{\underline{0{,}17}}$

ii) KI: $\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$0{,}17 \pm z_{0{,}975} \cdot \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{100}}$

$= \underline{[0{,}09637;\ 0{,}2436]}$