Aufgabe 1: Wahrheitstabellen

Stellen Sie für die folgenden Booleschen Funktionen die zugehörigen Wahrheitstabellen auf:

a) $f(a, b, c, d) = [\neg a \wedge (b \vee d)] \wedge (c \leftrightarrow d)$

a	b	c	d	$\neg a$	$b \vee d$	$\neg a \wedge (b \vee d)$	$c \leftrightarrow d$	$[\neg a \wedge (b \vee d)] \wedge (c \leftrightarrow d)$
0	0	0	0					
0	0	0	1					
0	0	1	0					
0	0	1	1					
0	1	0	0					
0	1	0	1					
0	1	1	0					
0	1	1	1					
1	0	0	0					
1	0	0	1					
1	0	1	0					
1	0	1	1					
1	1	0	0					
1	1	0	1					
1	1	1	0					
1	1	1	1					

b) $f(a, b, c) = \neg(a \leftrightarrow \neg b) \rightarrow c$

a	b	c	$\neg b$	$a \leftrightarrow \neg b$	$\neg(a \leftrightarrow \neg b)$	$\neg(a \leftrightarrow \neg b) \rightarrow c$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Aufgabe 2: Tautologie/Kontradiktion

Prüfen Sie jede der folgenden Funktionen und geben Sie an, ob es sich um eine Tautologie, eine Kontradiktion oder keins von beiden handelt:

a) $f(a,b) = (a \to b) \lor (b \to a)$

b) $f(a,b,c) = \neg a \lor b \land c \to \neg a$

c) $f(a,b) = \neg(a \to b) \land \neg a$

d) $f(a,b) = (a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (a \lor b \to a \land b)$

Operatorrangfolge: $\neg$ *bindet stärker als* $\land$ *bindet stärker als* $\lor$ *bindet stärker als* $\to$ *bindet stärker als* $\leftrightarrow$

Aufgabe 3: Disjunktive und Konjunktive Normalform

Gegeben ist folgende Wahrheitstabelle der Booleschen Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

a) Geben Sie die Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ in Disjunktiver Normalform (DNF) an.

b) Geben Sie die Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ in Konjunktiver Normalform (KNF) an.

Aufgabe 4: Umformen von Gleichungen

Bringen Sie die folgende Funktion durch Umformen in die Konjunktive Normalform (KNF):

$$f(a,b,c,d,e) = \neg[\neg(a \lor b) \land \neg c \land d] \land \neg[\neg(a \lor c \lor \neg d) \land e] \land [\neg a \lor \neg b \lor \neg c \lor \neg(d \land e)]$$

Hinweis: Benutzen Sie die Regel $x = (x \lor y) \land (x \lor \neg y)$ *um unvollständige Terme zu erweitern.*

Aufgabe 5: Gültigkeit von Umformungsregeln

Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Umformungsregeln:

$$a \land (a \lor b) = a \tag{1}$$
$$(a \lor \neg c) \land (b \lor c) = (a \land c) \lor (b \land \neg c) \tag{2}$$
$$a \to b = \neg b \to \neg a \tag{3}$$

Aufgabe 6: Funktionale Vollständigkeit

Unter *funktionaler Vollständigkeit* versteht man die Eigenschaft einer Menge Boolescher Funktionen, alle möglichen Logikoperationen darstellen zu können. So ist beispielsweise die Menge $\{\neg, \vee\}$ funktional vollständig, weil sich durch die Funktionen selbst oder durch Kombination der Funktionen alle denkbaren Logikoperationen darstellen lassen.

Untersuchen Sie die nachfolgenden Mengen von Booleschen Funktionen $f_{2.i}$, $0 \leq i \leq 15$ (vgl. Foliensatz *Boolesche Algebra*, Folie 12), ob sie eine funktional vollständige Menge logischer Operationen ergeben. Beweisen Sie entweder die funktionale Vollständigkeit oder begründen Sie, warum die untersuchte Funktion nicht funktional vollständig ist.

a) $\{f_{2.1}, f_{2.10}\}$ b) $\{f_{2.3}, f_{2.13}\}$ c) $\{f_{2.2}, f_{2.15}\}$

Aufgabe 7: Vereinfachung mittels KV-Diagramm

Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 und f_3 in folgender Wahrheitstabelle:

e_1	e_2	e_3	e_4	$f_1(e_1, e_2, e_3, e_4)$	$f_2(e_1, e_2, e_3, e_4)$	$f_3(e_1, e_2, e_3, e_4)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Erstellen Sie KV-Diagramme für die Funktionen f_1, f_2 bzw. f_3 und lesen Sie anschließend die zugehörigen minimalen disjunktiven Formen aus.

Aufgabe 8: KV-Diagramm – Minimale Disjunktive Form

Gegeben sind die nachfolgenden KV-Diagramme. Lesen Sie die Funktion jeweils in minimaler disjunktiver Form aus (Minterm-Methode). Gibt es weitere, ebenfalls minimale Lösungen?

a)

	$\neg e_1$	e_1		$\neg e_1$
e_2	0	1	X	X
$\neg e_2$	1	X	0	0
	e_3		$\neg e_3$	

b)

	$\neg e_4$	e_4		$\neg e_4$	
$\neg e_3$	0	1	X	0	e_2
e_3	0	0	X	X	
	0	0	X	1	$\neg e_2$
$\neg e_3$	0	1	1	X	
	e_1		$\neg e_1$		

c)

	$\neg e_3$	e_3		$\neg e_3$	
$\neg e_4$	1	X	X	X	e_1
e_4	1	0	0	0	
	0	1	X	0	$\neg e_1$
$\neg e_4$	X	1	1	1	
	e_2		$\neg e_2$		

Hinweis: Bei 'X' handelt es sich um das sogenannte Don't-Care, das entsprechende Feld kann bei der Vereinfachung entweder mit '0' oder mit '1' belegt werden.

Aufgabe 9: KV-Diagramm – Minimale Konjunktive Form

Gegeben sind die KV-Diagramme aus Aufgabe 8. Lesen Sie die Funktion jeweils in minimaler konjunktiver Form aus (Maxterm-Methode). Gibt es weitere, ebenfalls minimale Lösungen?

Aufgabe 10: Entwurf einer Booleschen Funktion

Entwerfen Sie eine Boolesche Funktion $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ die logisch 1 ist, wenn genau eine der Eingangsvariablen logisch 1 ist. Ansonsten soll die Funktion den Wert logisch 0 annehmen.
Stellen Sie die Wahrheitstabelle auf und ermitteln Sie anschließend eine minimale konjunktive Form mittels KV-Diagramm.

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1